# SITZUNG VOM 3. JÄNNER 1856.

## Eingesendete Abhandlung.

### *Neue näherungsweise Auflösung der Kepler'schen Aufgabe.*

Von dem c. M., Hrn. **Prof. Grunert** in Greifswald.

Wir wollen die aufzulösende Gleichung zwischen der mittleren Anomalie $\mu$, der excentrischen Anomalie $u$ und der Excentricität $e$ durch

$$u=\mu+e\sin u \text{ oder } u-\mu=e\sin u$$

bezeichnen. Nach der bekannten Reihe für den Arcus durch den Sinus ist

$$u-\mu=\sin(u-\mu)+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\sin(u-\mu)^3 + \frac{1}{5}\cdot\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\sin(u-\mu)^5+\ldots,$$

also, weil $u-\mu=e\sin u$ ist:

$$e\sin u=\sin(u-\mu)+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\sin(u-\mu)^3 + \frac{1}{5}\cdot\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\sin(u-\mu)^5+\ldots,$$

oder

$$e=\frac{\sin(u-\mu)}{\sin u}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin(u-\mu)^3}{\sin u}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{\sin(u-\mu)^5}{\sin u}+\ldots$$

Hieraus ergibt sich sogleich:

$$1+e=\frac{2\cos\frac{1}{2}\mu\sin(u-\frac{1}{2}\mu)}{\sin u}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin(u-\mu)^3}{\sin u} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{\sin(u-\mu)^5}{\sin u}+\ldots,$$

$$1-e=\frac{2\sin\frac{1}{2}\mu\cos(u-\frac{1}{2}\mu)}{\sin u}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin(u-\mu)^3}{\sin u}$$
$$-\frac{1}{5}\cdot\frac{1\sqrt{3}}{2\cdot 4}\cdot\frac{\sin(u-\mu)^5}{\sin u}-\ldots;$$

also, wenn wir der Kürze wegen

$$F(u)=\frac{1}{12}\sin(u-\mu)^3+\frac{3}{80}\sin(u-\mu)^5+\frac{5}{224}\sin(u-\mu)^7+\ldots$$

setzen:

$$\frac{1+e}{1-e}=\frac{\cos\frac{1}{2}\mu\sin(u-\frac{1}{2}\mu)+F(u)}{\sin\frac{1}{2}\mu\cos(u-\frac{1}{2}\mu)-F(u)}.$$

Weil $u-\mu=e\sin u$ ist, so ist

$$\sin(u-\mu)=e\sin u-\frac{e^3\sin u^3}{1.2.3}+\frac{e^5\sin u^5}{1\ldots5}-\ldots$$

in Bezug auf $e$ eine Grösse der ersten Ordnung, und $F(u)$ ist folglich in Bezug auf dieselbe Grösse von der dritten Ordnung. Vernachlässigt man also Grössen dieser Ordnung, so ergibt sich aus dem Obigen zur Bestimmung von $u$ die Gleichung:

$$\frac{1+e}{1-e}=\frac{\cos\frac{1}{2}\mu\sin(u-\frac{1}{2}\mu)}{\sin\frac{1}{2}\mu\cos(u-\frac{1}{2}\mu)}=\cot\tfrac{1}{2}\mu\,\tan(u-\tfrac{1}{2}\mu),$$

woraus

$$\tan(u-\tfrac{1}{2}\mu)=\frac{1+e}{1-e}\tan\tfrac{1}{2}\mu,\quad \cot(u-\tfrac{1}{2}\mu)=\frac{1-e}{1+e}\cot\tfrac{1}{2}\mu$$

folgt. Berechnet man den Hilfswinkel $\omega$ mittelst der Formel $\tan\omega=e$, so wird

$$\tan(u-\tfrac{1}{2}\mu)=\tan\tfrac{1}{2}\mu\,\tan(45^0+\omega).$$

Hat man mittelst dieser Formeln einen ersten Näherungswerth von $u$ gefunden, so kann man durch Berechnung neuer Näherungswerthe mittelst der Formeln

$$u_1=\mu+e\sin u,\ u_2=\mu+e\sin u_1,\ u_3=\mu+e\sin u_2,\ \ldots$$

immer leicht den genauen Werth von $u$ finden.

Um die grosse Leichtigkeit der Rechnung nach diesen Formeln an einem Beispiele zu zeigen, will ich

$$\mu=26^0\ 6'\ 9''28 \text{ und } \log e=0{\cdot}9691083-2$$

setzen. In diesem Falle stellt sich die Rechnung folgendermassen:

$$\begin{aligned}
\log tang\, \omega &= 8\cdot9691083 \\
\omega &= 5^0\ 19'\ 15''01 \\
45^0 + \omega &= 50\ \ 19\ \ 15\cdot01 \\
\tfrac{1}{2}\mu &= 13\ \ 3\ \ 4\cdot64 \\
\log tang\,(45^0+\omega) &= 10\cdot0811303 \\
\log tang\, \tfrac{1}{2}\mu &= \underline{9\cdot3651345} \\
\log tang\,(u-\tfrac{1}{2}\mu) &= 9\cdot4462648 \\
u-\tfrac{1}{2}\mu &= 15^0\ 36'\ 42''04 \\
u &= 28\ \ 39\ \ 46\cdot68
\end{aligned}$$

Bohnenberger, aus dessen Astronomie S. 288 dieses Beispiel entlehnt ist, findet nach der Methode von Gauss $u = 28^0\ 39'\ 43''34$, und man sieht also, wie schnell die obige, in wenigen Minuten auszuführende Rechnung in diesem Falle zu einem der Wahrheit sehr nahe kommenden Werthe führt. Die weitere Näherung stellt sich so, wo 5·3144251 der Logarithmus der bekannten Zahl 206264·8 ist:

$$\begin{aligned}
\log \sin u &= 9\cdot6809303 \\
\log e &= 0\cdot9691083-2 \\
& \underline{5\cdot3144251} \\
& 3\cdot9644637 \qquad 9214''33 = 2^0\ 33'\ 34''33 \\
& \qquad\qquad\qquad \mu = \underline{26\ \ 6\ \ 9\cdot28} \\
& \qquad\qquad\qquad u_1 = 28^0\ 39'\ 43''61
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log \sin u_1 &= 9\cdot6809184 \\
\log e &= 0\cdot9691083-2 \\
& \underline{5\cdot3144251} \\
& 3\cdot9644518 \qquad 9214''08 = 2^0\ 33'\ 34''08 \\
& \qquad\qquad\qquad \mu = \underline{26\ \ 6\ \ 9\cdot28} \\
& \qquad\qquad\qquad u_2 = 28^0\ 39'\ 43''36
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log \sin u_2 &= 9\cdot6809174 \\
\log e &= 0\cdot9691083-2 \\
& \underline{5\cdot3144251} \\
& 3\cdot9644508 \qquad 9214''05 = 2^0\ 33'\ 34''05 \\
& \qquad\qquad\qquad \mu = \underline{26\ \ 6\ \ 9\cdot28} \\
& \qquad\qquad\qquad u_3 = 28^0\ 39'\ 43''33.
\end{aligned}$$

Nun kehrt ganz dieselbe Rechnung wieder, und es ist also hiernach der definitive Werth von $u = 28^0\ 39'\ 43''33$. Eine kleine Unsicherheit in den Hunderttheilen der Secunden wird bei dem Gebrauche der Tafeln nie ganz zu vermeiden sein.

Hat man einen ersten Näherungswerth von $u$ gefunden, so kann man eine Correction $\Delta u$ desselben auch leicht mittelst der aus der Gleichung

$$u + \Delta u = \mu + e \sin(u + \Delta u)$$

sich sogleich ergebenden Näherungsformel

$$\Delta u = \frac{\mu - u + e \sin u}{1 - e \cos u}$$

berechnen.

Wenn die Excentricität grösser ist als im obigen Falle, so geht freilich die Rechnung nicht ganz so schnell von Statten wie vorher; eine weit grössere erste Annäherung wie die durch die obigen Formeln gewährte, kann man aber auf folgende Art erhalten:

Wenn man erst Grössen der fünften Ordnung vernachlässigt, so muss man nach dem Obigen $F(u) = \frac{1}{12} \sin(u - \mu)^3$, also

$$\frac{1+e}{1-e} = \frac{\cos \frac{1}{2}\mu \sin(u - \frac{1}{2}\mu) + \frac{1}{12}\sin(u-\mu)^3}{\sin\frac{1}{2}\mu \cos(u - \frac{1}{2}\mu) - \frac{1}{12}\sin(u-\mu)^3}$$

setzen. Nun ist nach dem Obigen:

$$\begin{aligned}
\sin(u-\mu) &= e \sin u - \frac{e^3 \sin u^3}{1.2.3} + \frac{e^5 \sin u^5}{1\ldots5} - \ldots \\
&= e \sin\{\mu + (u-\mu)\} - \frac{e^3 \sin u^3}{1.2.3} + \frac{e^5 \sin u^5}{1\ldots5} - \ldots \\
&= e \sin\mu \cos(u-\mu) + e\cos\mu \sin(u-\mu) - \frac{e^3 \sin u^3}{1.2.3} + \ldots \\
&= e \sin\mu \left\{1 - \frac{e^2 \sin u^2}{1.2} + \frac{e^4 \sin u^4}{1\ldots4} - \ldots\right\} \\
&\quad + e^2 \cos\mu \left\{\sin u - \frac{e^2 \sin u^3}{1.2.3} + \frac{e^4 \sin u^5}{1\ldots5} - \ldots\right\} \\
&\quad - \frac{e^3 \sin u^3}{1.2.3} + \frac{e^5 \sin u^5}{1\ldots5} - \ldots
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\sin u = \sin\{\mu + (u-\mu)\} &= \sin\mu \cos(u-\mu) + \cos\mu \sin(u-\mu) \\
= \sin\mu &\left\{1 - \frac{e^2 \sin u^2}{1.2} + \frac{e^4 \sin u^4}{1\ldots4} - \ldots\right\} \\
+ e\cos\mu &\left\{\sin u - \frac{e^2 \sin u^3}{1.2.3} + \frac{e^4 \sin u^5}{1\ldots5} - \ldots\right\};
\end{aligned}$$

woraus man schliesst, dass erst mit Vernachlässigung von Gliedern der dritten Ordnung

$$\sin(u-\mu) = e \sin\mu\,(1 + e\cos\mu),$$

also erst mit Vernachlässigung von Gliedern der fünften Ordnung

$$\sin (u-\mu)^3 = e^3 \sin \mu^3 (1 + e \cos \mu)^3 \text{ oder}$$
$$\sin (u-\mu)^3 = e^3 \sin \mu^3 (1 + 3\, e \cos \mu)$$

ist. Folglich ist nach dem Obigen m demselben Grade der Genauigkeit:

$$\frac{1+e}{1-e} = \frac{\cos \frac{1}{2}\mu \sin (u-\frac{1}{2}\mu) + \frac{1}{12} e^3 \sin \mu^3 (1+e \cos \mu)^3}{\sin \frac{1}{2}\mu \cos (u-\frac{1}{2}\mu) - \frac{1}{12} e^3 \sin \mu^3 (1+e \cos \mu)^3},$$

woraus man leicht die Gleichung

$$\cos (u-\tfrac{1}{2}\mu) - \frac{1-e}{1+e} \cot \tfrac{1}{2}\mu \sin (u-\tfrac{1}{2}\mu) = \frac{e^3 \sin \mu^3 (1+e \cos \mu)^3}{6\,(1+e) \sin \frac{1}{2}\mu}$$

erhält. Berechnen wir nun den Hilfswinkel $\omega$ mittelst der Formel

$$\tan g\, \omega = \frac{1-e}{1+e} \cot \tfrac{1}{2}\mu,$$

so wird

$$\cos (\omega - \tfrac{1}{2}\mu + u) = \sin \{90^0 - (\omega - \tfrac{1}{2}\mu + u)\} =$$
$$= \frac{e^3 \sin \mu^3 (1+e \cos \mu)^3 \cos \omega}{6\,(1+e) \sin \frac{1}{2}\mu};$$

und berechnet man den Hilfswinkel $\varpi$ mittelst der Formel $\operatorname{tang} \varpi = \sqrt{e}$, so ist

$$\frac{1-e}{1+e} = \frac{1-\operatorname{tang} \varpi^2}{1+\operatorname{tang} \varpi^2} = \cos \varpi^2 - \sin \varpi^2 = \cos 2\,\varpi,$$

also $\operatorname{tang} \omega = \cos 2\,\varpi \cot \frac{1}{2}\mu$, und

$$1 + e = 1 + \operatorname{tang} \varpi^2 = \frac{1}{\cos \varpi^2}.$$

Folglich ist

$$\sin \left\{90^0 - (\omega - \tfrac{1}{2}\mu + u)\right\} = \frac{e^3 \sin \mu^3 (1+e \cos \mu)^3 \cos \omega \cos \varpi^2}{6 \sin \frac{1}{2}\mu}$$

oder, wie man leicht findet:

$$\sin \{ 90^0 - (\omega - \tfrac{1}{2}\mu + u) \}$$
$$= \tfrac{4}{3} e^3 \sin \tfrac{1}{2}\mu^2 \cos \tfrac{1}{2}\mu^3 (1 + e \cos \mu)^3 \cos \omega \cos \varpi^2;$$

und zur Berechnung von $u$ hat man daher die folgenden Formeln:

$$\operatorname{tang} \varpi = \sqrt{e}, \operatorname{tang} \omega = \cos 2\,\varpi \cot \tfrac{1}{2}\mu;$$
$$\sin \{ 90^0 - (\omega - \tfrac{1}{2}\mu + u) \}$$
$$= \tfrac{4}{3} e^3 \sin \tfrac{1}{2}\mu^2 \cos \tfrac{1}{2}\mu^3 (1 + e \cos \mu)^3 \cos \omega \cos \varpi^2.$$

Mit Vernachlässigung von Gliedern der vierten Ordnung wäre:

$$\operatorname{tang} \varpi = \sqrt{e}, \quad \operatorname{tang} \omega = \cos 2\,\varpi \cot \tfrac{1}{2}\mu;$$
$$\sin \{ 90^0 - (\omega - \tfrac{1}{2}\mu + u)\} = \tfrac{4}{3} e^3 \sin \tfrac{1}{2}\mu^2 \cos \tfrac{1}{2}\mu^3 \cos \omega \cos^2 \varpi^2.$$

Wenn ich das obige Beispiel nach diesen Formeln berechne, so finde ich $\varpi = 16^0\ 58'\ 15''86$; $\omega = 74^0\ 23'\ 17''95$; und nun ferner:

$$\begin{aligned}
log\ 4 &= 0\cdot6020600\\
cd\ log\ 3 &= 9\cdot5228787\\
log\ .\ e^3 &= 0\cdot9073249-4\\
log.\ sin\ \tfrac{1}{2}\,\mu^3 &= 0\cdot7075370-2\\
log.\ cos\ \tfrac{1}{2}\,\mu^3 &= 0\cdot9659020-1\\
log.\ (1+e\ cos\ \mu)^3 &= 0\cdot1046493\\
log.\ cos\ \omega &= 0\cdot4299397-1\\
log.\ cos\ \varpi^2 &= \underline{0\cdot9613266-1}\\
log\ sin\ \left\{90^0-(\omega-\tfrac{1}{2}\,\mu+u)\right\} &= 5\cdot2016182
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
90^0-(\omega-\tfrac{1}{2}\,\mu+u) &= \ \ 0^0\ \ \ 0'\ \ \ 3''28\\
90^0 &= 89^0\ 59'\ 60''00\\
\omega &= \underline{74\ \ \ 23\ \ \ 17\cdot95}\\
&\quad\ 15^0\ 36'\ 42''05\\
\tfrac{1}{2}\,\mu &= \underline{13\ \ \ \ 3\ \ \ \ 4\cdot64}\\
&\quad\ 28^0\ 39'\ 46''69\\
&\quad\ \underline{\ \ 0\ \ \ \ 0\ \ \ \ 3\cdot28}\\
u &= 28^0\ 39'\ 43''41
\end{aligned}$$

welcher Werth nur um $0''08$ zu gross, also fast bis auf Zehntheile der Secunde richtig ist.

Unsere erste obige Methode kann man auch auf folgende, eine successive Annäherung gestattende Form bringen, wobei man zu beachten hat, dass

$$F(u) = \tfrac{1}{12}\ sin\ (u-\mu)^3 + \tfrac{3}{80}\ sin\ (u-\mu)^5 + \tfrac{5}{224}\ sin\ (u-\mu)^7 + \ldots$$

immer eine sehr kleine Grösse ist. Wenn $u_1$, $u_2$, $u_3$, $u_4$, .... successive Näherungswerthe von $u$ bezeichnen, so kann man nach dem Obigen diese Werthe nach und nach aus folgenden Gleichungen bestimmen:

$$\frac{1+e}{1-e} = \frac{cos\ \frac{1}{2}\,\mu\ sin\ (u_1-\frac{1}{2}\,\mu)}{sin\ \frac{1}{2}\,\mu\ cos\ (u_1-\frac{1}{2}\,\mu)},$$

$$\frac{1+e}{1-e} = \frac{cos\ \frac{1}{2}\,\mu\ sin\ (u_2-\frac{1}{2}\,\mu)+F(u_1)}{sin\ \frac{1}{2}\,\mu\ cos\ (u_2-\frac{1}{2}\,\mu)-F(u_1)}.$$

$$\frac{1+e}{1-e} = \frac{cos\ \frac{1}{2}\,\mu\ sin\ (u_3-\frac{1}{2}\,\mu)+F(u_2)}{sin\ \frac{1}{2}\,\mu\ cos\ (u_3-\frac{1}{2}\,\mu)-F(u_2)},$$

$$\frac{1+e}{1-e} = \frac{cos\ \frac{1}{2}\,\mu\ sin\ (u_4-\frac{1}{2}\,\mu)+F(u_3)}{sin\ \frac{1}{2}\,\mu\ cos\ (u_4-\frac{1}{2}\,\mu)-F(u_3)},$$

u. s. w.,

welche Gleichungen sich leicht auf die folgende Form bringen lassen:

$$cot\,(u_1 - \tfrac{1}{2}\,\mu) = \frac{1-e}{1+e}\,cot\,\tfrac{1}{2}\,\mu,$$

$$cos\,(u_2 - \tfrac{1}{2}\,\mu) - \frac{1-e}{1+e}\,cot\,\tfrac{1}{2}\,\mu\,sin\,(u_2 - \tfrac{1}{2}\,\mu) = \frac{2\,F(u_1)}{(1+e)\,sin\,\tfrac{1}{2}\,\mu},$$

$$cos\,(u_3 - \tfrac{1}{2}\,\mu) - \frac{1-e}{1+e}\,cot\,\tfrac{1}{2}\,\mu\,sin\,(u_3 - \tfrac{1}{2}\,\mu) = \frac{2\,F(u_2)}{(1+e)\,sin\,\tfrac{1}{2}\,\mu}.$$

$$cos\,(u_4 - \tfrac{1}{2}\,\mu) - \frac{1-e}{1+e}\,cot\,\tfrac{1}{2}\,\mu\,sin\,(u_4 - \tfrac{1}{2}\,\mu) = \frac{2\,F(u_3)}{(1+e)\,sin\,\tfrac{1}{2}\,\mu},$$

u. s. w.,

also auf die Form:

$$cot\,(u_1 - \tfrac{1}{2}\,\mu) = \frac{1-e}{1+e}\,cot\,\tfrac{1}{2}\,\mu,$$

$$sin\,(u_1 - u_2) = \frac{2\,F(u_1)\,sin\,(u_1 - \tfrac{1}{2}\,\mu)}{(1+e)\,sin\,\tfrac{1}{2}\,\mu},$$

$$sin\,(u_1 - u_3) = \frac{2\,F(u_2)\,sin\,(u_1 - \tfrac{1}{2}\,\mu)}{(1+e)\,sin\,\tfrac{1}{2}\,\mu}.$$

$$sin\,(u_1 - u_4) = \frac{2\,F(u_3)\,sin\,(u_1 - \tfrac{1}{2}\,\mu)}{(1+e)\,sin\,\tfrac{1}{2}\,\mu},$$

u. s. w.

Die nöthigen Hilfswinkel einzuführen, überlasse ich dem Leser, und bemerke nur noch, dass man diese Formeln auch auf die folgende sehr einfache Form bringen kann:

$$cot\,(u_1 - \tfrac{1}{2}\,\mu) = \frac{1-e}{1+e}\,cot\,\tfrac{1}{2}\,\mu,\quad K = \frac{2\,sin\,(u_1 - \tfrac{1}{2}\,\mu)}{(1+e)\,sin\,\tfrac{1}{2}\,\mu)};$$

$$sin\,(u_1 - u_2) = K\,F(u_1),\quad sin\,(u_1 - u_3) = K\,F(u_2),$$
$$sin\,(u_1 - u_4) = K\,F(u_3)\,\ldots\,;$$

unter welcher dieselben eine sehr leichte Rechnung gestatten.