Rotation ohne Grundriss.

Von **Nikolaus Fialkowski.**

(Vorgetragen in der Sitzung vom 17. April 1856.)

(Mit III Tafeln.)

§. 1.

Wie wichtig die Rotationen der Linien und zwar sowohl gerader als auch der verschiedenartig gekrümmten Linien sind, braucht hier wohl kaum erwähnt zu werden, da dies ohnehin jedem Freunde der Wissenschaft, wohin diese Partie gehört, hinlänglich bekannt ist.

Ebenso ist es eine bekannte Sache, dass man die Rotation einer gegen die Rotationsaxe beliebig gestellten Geraden, so wie einer wie immer gekrümmten Linie vermittelst eines entsprechenden Grundrisses vornehmen kann. Allein da in manchen Fällen der Grundriss nicht so leicht möglich ist, oder vielmehr zu lästig fällt, so ist es jedenfalls wünschenswerth zu wissen, wie man die Rotationen einer beliebigen Geraden oder Curve auch ohne allen Grundriss bewerkstelligen kann. In meiner Abhandlung über die Construction des Kreises und der Ellipse vermittelst der fixen Punkte (Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften, Aprilheft, pag. 90) sind einige Andeutungen auch über die Rotationen gemacht. Nun soll hier darüber ausführlich und mehr systematisch gesprochen werden.

Es soll also in dieser Abhandlung im Allgemeinen gezeigt werden, wie man jede beliebige Linie, sei sie gerade oder krumm, um was immer für eine Axe ohne Grundriss, d. h. ohne Hilfe der horizontalen Projectionsebene rotiren, und so jede beliebige Stellung der fraglichen Geraden oder Curve angeben kann.

Dies geschieht zunächst vermittelst der von mir bei der Construction des Kreises und der Ellipse, so wie bei der Bestimmung der Axen der Ellipsen, angegebenen und bewiesenen Sätze.

§. 2.

Bei der Rotation irgend einer Linie haben wir zuerst in Bezug auf den Standpunkt des Beobachters zwei Fälle zu unterscheiden; dieser kann nämlich ein bestimmter oder ein unendlicher sein.

a) Ist das Auge des Beobachters in bestimmter Entfernung, so kann bekannter Weise jede Stellung der Endpunkte einer gegen die Axe beliebig gestellten Geraden, folglich auch die Gerade selbst, so wie jede Stellung der Punkte einer beliebigen Curve, mithin auch diese selbst nach der Drehung mit Hilfe des Distanzpunktes sehr leicht gefunden werden. Allein auch hier findet für manche Linien eine Beschränkung Statt; wir meinen nämlich den Fall, wenn z. B. die zu rotirende Gerade auf der Horizontal-Linie in der horizontalen Lage oder auf der Vertical-Linie in der verticalen Stellung sich befindet.

b) Ist hingegen das Auge des Beobachters in unendlicher Entfernung, so müssen die Punkte der zu rotirenden Geraden oder Krummen vermittelst des Grund- und Aufrisses gesucht werden, indem man bekannter Weise durch einige Punkte der zu rotirenden Linie Normale als Hilfslinien legt, mit jeder derselben im Grundrisse einen Kreis beschreibt, sodann im Aufrisse vermittelst der orthogonalen Projection die Punkte für die zu bestimmende Stellung der gegebenen Geraden oder Krummen nach der Rotation findet.

In vielen Fällen ist es jedoch, wie wir bereits erwähnt haben, entweder nicht möglich, oder nicht zulässig, oder zeitraubend einen Grundriss zu zeichnen; welche Fälle sowohl bezüglich des Raumes auf der Zeichenfläche, als auch hinsichtlich der Zeichenrequisiten sehr leicht eintreten können.

Wir können wohl ein Verfahren, vermittelst der Proportionalen, die Rotation beliebiger Linien ausführen; allein auch dieses erfordert eine Neben- oder Hilfsfigur, vermittelst deren man die nach der Rotation verhältnissmässig verkürzten oder verlängerten Abstände der zu rotirenden Linie auffinden kann; und in manchen Fällen ist jedoch auch dieses Verfahren nicht zulässig oder wenigstens nicht bequem.

Wir wollen daher ein neues Verfahren zeigen, wie man jede beliebige Gerade oder Krumme, ohne Hilfsfigur, ohne Ellipsen, also ohne allen Grundriss rotiren kann.

Um dies ganz allgemein durchzuführen, wollen wir bei einer geraden Linie anfangen, und so successive bis zu einer Curve gehen.

§. 3.

A. **Rotation einer gegen die Drehungsaxe beliebig gestellten Geraden.**

Im Allgemeinen werden wir dabei zwei Fälle unterscheiden, je nachdem man die Rotationsaxe verlängern kann oder nicht, wo im letzteren Falle wir mit Benützung des noch so kleinen Theiles der Drehungsaxe selbst, oder deren Verlängerung die Rotation doch vornehmen, und die erforderlichen Punkte nach der Rotation scharf und deutlich bestimmen können. In Bezug auf die Stellung der zu rotirenden Geraden gegen die Rotationsaxe, wenn beide in einer und derselben Ebene gedacht werden, haben wir im Allgemeinen folgende drei Hauptstellungen zu unterscheiden:

a) die mit der Rotationsaxe parallele,

b) die auf die Rotationsaxe normale, und

c) die gegen die Rotationsaxe schiefe Stellung.

Von der letzten Stellung haben wir zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem die Axe oder deren Verlängerung von der Verlängerung der gegebenen Geraden noch auf der disponiblen Papierfläche geschnitten werden kann oder nicht.

§. 4.

a) Es sei ab (Taf. I, Fig. 1) die zu rotirende Gerade, welche mit der Rotationsaxe xx' in einer und derselben Ebene gedacht und parallel mit derselben angenommen wird.

1. Das Auge des Beobachters sei in unendlicher Entfernung in der Richtung der auf die Axe xx' im Punkte Ω gedachten Normalen.

Soll diese Gerade ab um die Axe xx' rotirt werden, so kann man bekanntlich jede beliebige Stellung derselben nach der Drehung angeben, sobald man nur einen Punkt nach der Drehung kennt; denn ist z. B. a' die Stellung des Punktes a nach der Drehung, so findet man den zweiten Punkt, d. i. b', indem man aus a' zu der Axe eine Parallele zieht, sodann $a'b' = ab$ macht, oder wenn man $a\alpha$ und $b\beta$ normal auf xx' zieht, und aus a' zu xx' eine Parallele führt; weil bei der angenommenen Stellung des Standpunktes des Beobachters die zu suchende Linie stets gleichlang mit der gegebenen und parallel zur Rotationsaxe bleibt.

2. Ist das Auge des Beobachters oberhalb der ab, in der Richtung der auf die Axe xx' in Ω gedachten Normalen in unendlicher Entfernung, so verfährt man hierbei auf ähnliche Art, wie zuvor. Ist

nämlich a' (Taf. I, Fig. 2) ein Punkt der ab und zwar der Punkt a nach der Drehung, so führt man auch hier aus a' zu xx' eine Parallele und macht dann $a'b' = ab$, wodurch also auch der zweite Punkt b' nach der Drehung erfolgt.

Im ersten dieser Fälle bleiben die Endpunkte der gegebenen Geraden in der aus den Endpunkten auf die Axe gezogenen Normalen, im zweiten Falle hingegen beschreiben die beiden Endpunkte zwei congruente Ellipsen.

3. Nimmt man das Auge des Beobachters seitwärts, z. B. rechts oben, jedoch ebenfalls in unendlicher Entfernung, so dass die auf die perspectivische Tafel gedachten Normalen in der Richtung der mn (Taf. I, Fig. 3) gehen, so wird auch dann möglich sein für jeden Endpunkt eine Ellipse zu beschreiben, und so jede Stellung der zu rotirenden Geraden zu finden.

Ganz anders hingegen verhält es sich, wenn die zu rotirende Gerade so gegeben ist, dass ihre Richtung normal auf der Rotationsaxe ist.

§. 5.

b) Es sei ab (Taf. I, Fig. 4) die zu rotirende Gerade, deren Richtung auf der Rotationsaxe xx' normal ist, und gehörig verlängert dieselbe in Ω schneidet.

1. Das Auge des Beobachters sei in unendlicher Entfernung in der Richtung der auf die Axe xx' in Ω gedachten Normalen so, dass die beiden Endpunkte nach der Rotation so wie während derselben stets in der $a\Omega$ oder in deren Verlängerung bleiben.

Soll nun die ab um die Axe xx' rotirt werden, so dass man sich hierbei keines Grundrisses bedient, so verfahre man auf folgende Art:

Ist die Stellung des Punktes a nach der Drehung in a', so wähle man in der Axe xx' einen beliebigen Punkt α und verbinde ihn mit a und a' durch Gerade; alsdann wähle man einen zweiten Punkt in der Axe, hier β, führe aus demselben durch b eine Gerade bis die $a\alpha$ im Punkte m geschnitten ist, ziehe aus m zu ab eine Parallele, und verbinde den so in der $a'\alpha$ erfolgten Punkt mit β, wodurch man in der $a\Omega$ den Punkt b' erhält, welcher der Punkt b nach der Drehung ist.

Die Richtigkeit dieses Verfahrens kann man auf folgende Art beweisen: Ist $a\Omega\alpha$ das eine Dreieck, dessen Seite der Punkt m

angehört, ferner $m\alpha\beta$ ein zweites Dreieck, dessen Spitze der in der Seite $a\alpha$ des Dreieckes $a\Omega\alpha$ angenommene Punkt m ist, und werden beide Dreiecke in einer Ebene gedacht, so geht das eine Dreieck mit, sobald das andere gedreht wird.

Kommt bei der Drehung der Punkt a nach a', also $a\alpha$ in die Lage $a'\alpha$, so wird der Punkt m in der zu $a\Omega$ aus m gezogenen Parallelen bleiben; da er aber zugleich in $a'\alpha$ sich befinden muss, so wird er im Durchschnittspunkte dieser zwei Geraden also in m' sein; da ferner die zweite Hilfslinie $m\beta$ so gewählt wurde, dass in derselben der zweite Endpunkt b sich befindet, und die Stellung dieser Geraden nach der Drehung $m'\beta$ ist, so muss der gesuchte Punkt, da er in der Geraden $a\Omega$, zugleich aber in der $m'\beta$ ist, im Durchschnittspunkte dieser zwei Geraden also in b' sein, w. z. b. w.; oder da hier $mn \parallel a\Omega$ ist, nach der Construction, so hat man aus den vier Paaren ähnlicher Dreiecke folgende Proportionen:

$$a\,\Omega : m\,o = \alpha\,\Omega : \alpha\,o$$

und

$$a'\,\Omega : m'\,o = \alpha\,\Omega : \alpha\,o,$$

daher

$$a\,\Omega : m\,o = a'\,\Omega : m'\,o \;\ldots\ldots\; \text{(I)};$$

eben so ist:

$$m\,o : b\,\Omega = \beta\,o : \beta\,\Omega$$

und

$$m'\,o : b'\,\Omega = \beta\,o : \beta\,\Omega,$$

daher

$$m\,o : b\,\Omega = m'o : b'\,\Omega \;\ldots\ldots\; \text{(II)};$$

werden die Gleichungen (I) und (II) bruchweise geschrieben, so hat man

$$\frac{a\,\Omega}{m\,o} = \frac{a'\,\Omega}{m'o}$$

und

$$\frac{m\,o}{b\,\Omega} = \frac{m'\,o}{b'\,\Omega},$$

woraus durch Multiplication

$$\frac{a\,\Omega}{b\,\Omega} = \frac{a'\,\Omega}{b'\,\Omega}$$

folgt.

Es ist somit $a' b'$ in Bezug auf ab verhältnissmässig abgeschnitten, und daher ist b' der Punkt b nach der Drehung und $a' b'$ die neue Lage der ab ebenfalls nach der Drehung.

§. 6.

Gestattet es der Raum nicht, auf beiden Seiten der $a\Omega$, d. i. oberhalb und unterhalb derselben die Hilfspunkte anzunehmen, so kann man dies nur auf einer Seite thun. Ist z. B. ab (Taf. I, Fig. 5) zu rotiren, und gestattet es der Raum nicht oberhalb der aO einen Hilfspunkt anzunehmen, so wähle man beide unterhalb der aO, also einen in α und den andern in β; wird alsdann α mit a, so wie mit a' als der neuen Stellung von a, ferner b mit β durch Gerade verbunden, und aus dem so erfolgten Durchschnittspunkte m zu aO eine Parallele geführt, welche die $a'\alpha$ in m' schneidet, so erfolgt, wenn aus β durch m' eine Gerade gelegt wird, b' als der gesuchte Punkt b nach der Drehung.

Dieses Verfahren hat einen ähnlichen Grund wie das vorhergehende; auch hier findet man aus den ähnlichen Dreiecken folgende Proportionen:

$$a\Omega : m\,o = \alpha\,\Omega : \alpha\,o$$

und

$$a'\,\Omega : m'\,o = \alpha\,\Omega : \alpha\,o,$$

daher

$$a\,\Omega : m\,o = a'\,\Omega : m'o \;\ldots\ldots\ldots\; (\mathrm{I});$$

eben so findet man:

$$b\,\Omega : m\,o = \beta\,\Omega : \beta\,o$$

und

$$b'\,\Omega : m'\,o = \beta\,\Omega : \beta\,o,$$

daher

$$b\,\Omega : m\,o = b'\,\Omega : m'o \;\ldots\ldots\ldots\; (\mathrm{II});$$

oder beide Proportionen unter einander bruchweise geschrieben

$$\frac{a\,\Omega}{m\,o} = \frac{a'\,\Omega}{m'o}$$

$$\frac{b\,\Omega}{m\,o} = \frac{b'\,\Omega}{m'o},$$

woraus durch Division

$$\frac{a\,\Omega}{b\,\Omega} = \frac{a'\,\Omega}{b'\,\Omega}$$

folgt.

Es ist daher vermöge dieser Gleichung die Richtigkeit der Construction nachgewiesen.

2. Wird das Auge des Beobachters oberhalb der gegebenen Geraden in der Richtung der auf die Axe xx' (Taf. I, Fig. 6) im Punkte Ω gedachten Normalen in unendlicher Entfernung angenommen, so wird man bei der Rotation einer Geraden ohne Grundriss auf folgende Art verfahren:

Es sei ab die gegebene Gerade und a' der Endpunkt a derselben nach der Drehung; es soll nun der zweite Endpunkt dieser Geraden gesucht, somit die Stellung selbst dieser Geraden der Richtung und Länge nach bestimmt werden.

Wird in der Axe xx' der Punkt α als Hilfspunkt angenommen, mit a und a' durch Gerade verbunden, sodann aus einem zweiten Hilfspunkte β durch b eine Gerade geführt, bis $a\alpha$ in m geschnitten ist, ferner ab bis zu der Axe verlängert, aus m die $m\gamma \parallel aO$ gezogen, a' mit O verbunden und aus γ die $\gamma m' \parallel a'O$ gelegt, endlich m' mit β durch eine Gerade verbunden, so erfolgt b' in der $a'O$ als der Punkt b nach der Drehung; somit wird $a'b'$ die neue Stellung der ab nach der Drehung sein.

Die Richtigkeit dieses Verfahrens ergibt sich aus folgender Betrachtung:

I. Der Punkt b liegt in der aO, nach der Drehung in $a'O$; der Punkt m ist in $a\alpha$, nach der Drehung in $a'\alpha$; da ferner der Punkt b in der $m\beta$, nach der Drehung in $m'\beta$ liegt, so muss er im Durchschnittspunkte der $a'O$ mit $m'\beta$, also in b' sein; da also a' die neue Stellung des Punktes a, ferner b' die neue Stellung des Punktes b ist, so ist $a'b'$ die neue Stellung der ab nach der Drehung.

II. Da hier $aO \parallel m\gamma$ und $a'O \parallel m'\gamma$ ist, so hat man aus der Ähnlichkeit der Dreiecke:

$$aO : m\gamma = \alpha O : \alpha\gamma$$

und

$$a'O : m'\gamma = \alpha O : \alpha\gamma,$$

daher

$$aO : m\gamma = a'O : m'\gamma \quad \ldots\ldots\ldots (1):$$

eben so findet man

$$m\gamma : bO = \beta\gamma : \beta O$$
$$m'\gamma : b'O = \beta\gamma : \beta O,$$

daher $m\gamma : bO = m'\gamma : b'O$ . . . . (II);
oder (I) und (II) mit einander multiplicirt gibt:

$$aO : bO = \alpha' O : b'O.$$

woraus die Richtigkeit der obigen Construction folgt.

§. 7.

Auf ähnliche Art wird man auch verfahren, wenn man nur unterhalb der aO die zwei Hilfspunkte annehmen muss.

Ist also ab (Taf. I, Fig. 7) die zu drehende Gerade, und gestattet es der Raum nicht oberhalb der aO einen von den zwei erforderlichen Hilfspunkten anzunehmen, so nehme man beide unterhalb der aO an, also den einen in α und den andern in β, und verbinde sie mit den zwei Endpunkten der zu drehenden Geraden so, dass sie sich hier bei m schneiden; ist nun a' die neue Stellung des Punktes a nach der Drehung, so verbinde man a' mit O und α, führe aus m die mn parallel mit aO, und aus dem so in der Axe erfolgten Punkte n die $m'n$ parallel mit $a'O$; wird alsdann durch den so erhaltenen Punkt m' aus β eine Gerade geführt, bis die $a'O$ geschnitten ist, so erfolgt b' als der gesuchte Punkt und $a'b'$ als die neue Stellung der ab nach der Drehung.

Der Beweis für die Richtigkeit dieser Construction wird auf ähnliche Art wie zuvor geführt.

§. 8.

Wie man aus den angeführten Beispielen sieht, ist dieses Verfahren ganz allgemein, und zwar so, dass hiermit jede Rotation gelöst werden kann, und die Lösung vermittelst des Grundrisses weit hinter sich zurücklässt; zumal da vermittelst des Grundrisses nur dann diese Aufgabe gelöst werden kann, wenn die Endpunkte der zu drehenden Geraden stets in derjenigen Ebene bleiben, welche auf der verticalen Projections-Ebene normal ist. Wird aber der Punkt a oder b unterhalb oder oberhalb der zu drehenden Geraden als die neue Stellung gegeben, so kann man mit allen uns bis jetzt in der darstellenden Geometrie bekannten und zu Gebote stehenden Mitteln nicht auflösen, wenn selbst auch die Kreuzrissebene zu Hilfe genommen wird; denn ist ein Punkt der ab oberhalb oder unterhalb der ab gegeben, so steht, die durch den gegebenen Punkt und durch die ab gelegte Ebene einfach schief gegen die verticale Projections-Ebene, und normal auf die Kreuzrissebene; allein es ist uns ausser diesem Punkte sonst gar nichts gegeben.

Ausserdem braucht man selbst für den ersten Fall, wenn nämlich die Endpunkte der zu drehenden Geraden in derselben oder in deren Verlängerung bleiben, jedesmal einen Zirkel, um im Grundrisse Kreisbögen als Hilfslinien zu beschreiben, welches bei unserem Verfahren ganz wegfällt; und zwar dermassen, dass wir unsere Aufgabe mit zwei fixen Punkten und zwei Hilfslinien mit Leichtigkeit lösen können.

Dies kann aber dann geschehen, wenn man den Satz gehörig einstudirt, und sich den Gang der Sache gemerkt hat. Denn wird der Hilfspunkt α (Taf. I, Fig. 8) angenommen, und mit a und a' verbunden, so braucht man hernach nur die Einschnitte in der $a\alpha$, $a'\alpha$, sodann in aO zu machen, wie dies durch Pfeile bezeichnet ist.

Ebenso kann man sich in dem zweiten Falle helfen, wie die Taf. I, Fig. 9 zeigt; man wird nämlich nur die drei Linien $a\alpha$, $a'\alpha$, $a'\ O$ zu ziehen brauchen, im Übrigen aber sich nur mit den Einschnitten weiter helfen.

3. Ist das Auge des Beobachters seitwärts der Rotationsaxe und zwar oberhalb oder unterhalb der gegebenen Geraden, so hat dieses Verfahren ebenfalls keine Schwierigkeiten; man wird hier den zweiten Punkt, also auch die Gerade selbst nach der Drehung bestimmen können, weil auch in diesem Falle die Ebene einfach schief gegen die verticale Projections-Ebene ist.

4. Ist das Auge des Beobachters in einer bestimmten Entfernung, so kann bekannter Weise die Rotation einer jeden horizontalen, und zur Tafel parallel gestellten Geraden vorgenommen werden, und zwar vermittelst des Distanzpunktes; allein auch in der Perspective stellen uns die verschiedenen Lagen der zu rotirenden Geraden manche Schwierigkeiten entgegen, so dass man in den Fällen, wenn die gegebene Gerade nahe an der Horizontlinie oder in derselben liegt, bedeutend tiefer unter der Horizontlinie eine solche Rotation vornehmen, und diese dann vermittelst der orthogonalen Projection an die gehörige Stelle übertragen muss.

Der besseren Verständlichkeit wegen wollen wir dies durch ein Beispiel, und zwar durch eine schematische Darstellung der Hauptstellungen erläutern.

§. 9.

Es sei HZ (Taf. I, Fig. 10) die Horizontallinie, und VV' die Verticallinie, deren Durchschnittspunkt Ω der Hauptpunkt, und Δ der angenommene Distanzpunkt.

Die zu rotirende Gerade kann so gegeben sein, dass sie in der Horizontlinie liegt und die Verticallinie schneidet, oder dass sie in der Horizontlinie liegt und rechts oder links der Verticallinie sich befindet. Ebenso können drei solche Stellungen oberhalb und drei unterhalb der Horizontlinie stattfinden.

In den drei mittleren Hauptstellungen können die einzelnen Stellungen der Geraden *ab* nur vermittelst der orthogonalen Projection angegeben werden. In den drei oberen so wie in den drei unteren Stellungen hingegen kann jede einzelne Stellung nur dann angegeben werden, wenn die aus der neuen Stellung des Endpunktes der zu drehenden Geraden durch den entsprechenden ursprünglichen Punkt geführte Gerade die Horizontlinie schneidet. Ist jedoch der Punkt so gegeben, dass die aus diesem Punkte durch die ihm entsprechende ursprüngliche Lage gelegte Gerade die Horizontlinie nicht schneidet, so muss man auch in diesem Falle vermittelst des Grundrisses die neue Stellung der Geraden bestimmen.

Wäre also z. B. a' die neue Stellung des Punktes a nach der Drehung, und sollte man die dieser Stellung entsprechende neue Stellung des Punktes b suchen, so führe man aus a' durch a eine Gerade bis zur Horizontlinie, verbinde dann den so erhaltenen Punkt m mit b, und führe aus a' durch den Halbirungspunkt O der ab eine Gerade $a'n$ bis die mb in b' geschnitten ist, wodurch b' als der zweite Endpunkt der neuen Stellung der ab gefunden wird.

Ist hingegen der Punkt z. B. a'' so gegeben, dass die aus a'' durch a geführte Gerade die Horizontlinie auf der Zeichenfläche nicht schneidet, so kann der zweite Punkt auf diese Art nicht angegeben werden, und man muss sich des Grundrisses bedienen.

So wie man eine gegebene Gerade um eine Axe drehen kann, ebenso kann man sie auch zurückdrehen, d. h. man kann aus jeder beliebigen Stellung nach der Drehung die ursprüngliche Lage der Geraden finden, wobei jedoch ein Punkt ihrer ursprünglichen Lage gegeben sein muss.

Es sei $a'b'$ (Taf. I, Fig. 10 a) die verticale Projection einer gegen die horizontale Projections-Ebene schief gestellten Geraden; oder was dasselbe ist, es sei $a'b$ als eine Stellung der Geraden nach der Drehung gegeben, man soll ihre wahre Länge finden. Der eine Endpunkt der zu suchenden Geraden sei in b gegeben.

Um den zweiten Endpunkt zu finden, verbinde man den Punkt a' mit irgend einem Punkte z. B. mit α in der Axe, führe aus irgend einem andern Punkte der Axe z. B. aus β durch b' eine Gerade bis $a'\alpha$ in m geschnitten ist, und führe aus dem so erhaltenen Punkte m zu $a'b$ eine Parallele. Wird endlich aus β durch den gegebenen Punkt b' eine Gerade bis zu der Parallelen mn geführt, und aus α durch den so erfolgten Durchschnittspunkt n eine Gerade gezogen, bis die Verlängerung von $a'b'$ bei a geschnitten ist, so erhält man ab als die wahre Länge der zu suchenden Geraden.

Auf die gewöhnliche Art wird diese Aufgabe nur dadurch gelöst, wenn man sich eine Hilfsfigur verzeichnet, oder was dasselbe ist, wenn man die Kreuzrissebene benützt, was aber im Grunde genommen nichts anders ist, als die Benützung des Grundrisses.

Wäre der gegebene Punkt ausserhalb der $a'b'$, so kann auch dann die ursprüngliche Lage und die wahre Länge der Geraden sehr leicht gefunden werden, was vermittelst des Grundrisses nicht so leicht möglich ist.

Man sieht also daraus, dass alle bisher bekannten Verfahrungsarten für den vorliegenden Fall nur speciell sind, hingegen die Art vermittelst der fixen Punkte ganz allgemein ist.

§. 10.

c) Die zu drehende Gerade ist schief gegen die Drehungsaxe, wobei wir zwei Fälle unterscheiden müssen, indem die Verlängerung dieser Geraden und der von der Axe noch auf der Zeichenfläche einen Durchschnittspunkt geben, oder es ist dies nicht der Fall.

$c_{(\alpha)}$ Es sei ab (Taf. I, Fig. 11) die zu drehende Gerade, welche gehörig verlängert die Axe xx' in c schneidet.

1. Das Auge des Beobachters sei in unendlicher Entfernung in der Richtung der auf xx' in Ω gedachten Normalen.

Ist also z. B. a' als ein Punkt a nach der Rotation gegeben, so braucht man hier nur aus b die bo' normal auf die Axe zu ziehen, sodann a' mit dem fixen Punkte c zu verbinden, wodurch der Durchschnittspunkt b' als der dem Punkte b entsprechende Punkt nach der Drehung erfolgt, und die Gerade $a'b'$ als die neue Stellung der ab sein wird.

Auf diese Art kann also jede andere Stellung bestimmt werden.

2. Ist das Auge des Beobachters oberhalb der ab (Taf. I, Fig. 12) in der Richtung der auf die Axe xx' im Punkte Ω gedachten Normalen, so kann man in diesem Falle entweder so verfahren, dass man zuerst den fixen Punkt c sucht, sodann aus der neuen Stellung des Punktes a oder b nach dem fixen Punkte c eine Gerade zieht, den Punkt a' mit O verbindet, und aus O' zu a' O eine Parallele zieht, wodurch b' als der zweite Endpunkt der ab nach der Drehung erhalten wird; oder indem man für jeden Punkt eine Ellipse verzeichnet, hierauf den gegebenen Punkt nach der Drehung mit dem diesem Punkte entsprechenden fixen Punkt durch eine Gerade verbindet, und aus dem dem zweiten Punkte der gegebenen Geraden entsprechenden fixen Punkte eine Parallele zieht, bis die Ellipse geschnitten wird, wodurch man also auch den zweiten Punkt der neuen Stellung nach der Drehung erhält.

Es können jedoch Fälle eintreten, wo man entweder die Ellipse nicht verzeichnen kann, oder wo die Verlängerung der gegebenen Geraden von der der Axe nicht geschnitten wird.

Wir werden daher zeigen, wie man in solchen Fällen dennoch die gegebene Gerade nach der Drehung bestimmen kann.

§. 11.

$c_{(\beta)}$ **Rotation einer beliebigen Geraden ohne Verlängerung der Axe und ohne Verzeichnung der Ellipse.**

Wir haben aus den vorhergehenden Beispielen gesehen, dass es sehr einfach ist, jede beliebige Gerade auch ohne Grundriss zu rotiren, sobald man die Axe verlängern kann; wir haben ferner gesehen, dass man für eine schiefe Stellung der gegebenen Geraden gegen die Axe die beiden Linien verlängern muss, um die Richtung der neuen Stellung anzugeben, wenn man die Ellipse selbst nicht verzeichnen will.

Nun wollen wir zeigen, wie man die Aufgabe löst, wenn man bei einer gegebenen Geraden den fixen Punkt für die Verlängerung derselben auf der Papierfläche nicht erhalten kann.

Es sei ab (Taf. I, Fig. 13) die gegebene Gerade, welche um die Axe xx' gedreht werden soll; hierbei stellen wir uns den Fall vor, dass durch die Verlängerung der gegebenen Geraden kein Durchschnittspunkt auf der Zeichenfläche entsteht, oder nicht gesucht werden darf.

1. Das Auge des Beobachters sei in Ω in der Richtung der auf die Axe xx' gedachten Normalen, so dass die beiden Endpunkte a und b während der Rotation in denjenigen Geraden bleiben, welche aus diesen Punkten normal auf die Axe gezogen werden.

Soll die Richtung dieser Geraden für den Fall angegeben werden, wenn der Punkt a nach der Drehung etwa nach a' kommt, so verfahre man hiebei auf folgende Art: Man ziehe aus b auf die Axe xx' eine Normale bo, nehme dann in der Axe einen fixen Punkt α an, und verbinde ihn mit dem Punkte a sowie mit a' durch Gerade; nun nehme man in der Axe einen zweiten fixen Punkt β an, und verbinde ihn mit dem zweiten Endpunkte b; wird endlich aus dem so erfolgten Durchschnittspunkte m auf die Axe xx' eine Normale gezogen, und aus β durch den Punkt m' eine Gerade geführt, bis die aus b auf xx' gefällte Normale geschnitten ist, so erfolgt der Durchschnittspunkt b' als der verlangte Punkt der gegebenen Geraden nach der Drehung.

Beweis.

Werden die zwei fixen Punkte α und β in der Axe beliebig angenommen, und mit den Endpunkten der zu drehenden Geraden so verbunden, dass die Verbindungslinien einen Durchschnittspunkt, hier m geben, so wird dieser Punkt bei der Drehung mitgehen; kommt nun der Punkt a etwa nach a', so wird die Hilfslinie $a\alpha$ in die Stellung $a'\alpha$ kommen, in welcher Linie sowie in der aus m auf xx' gezogenen Normalen der Hilfspunkt m, nach der Drehung m' liegt. Da also der Punkt b der ab nach der Drehung in der $b'm'\beta$ zugleich aber auch in der bo liegt, so muss er nothwendiger Weise im Durchschnittspunkte dieser zwei Geraden, also in b' sein, w. z. b. w.

Was also von dieser Stellung der ab gilt, das lässt sich auch von jeder andern Stellung auf dieselbe Art nachweisen; und wie man aus diesen Beispielen sieht, lässt sich jede beliebige Stellung einer gegebenen Geraden vermittelst zweier fixen Punkte ohne Verlängerung der Axe finden, oder besser gesagt, es lässt sich jede beliebige Stellung einer Geraden vermittelst eines disponiblen Theiles der Axe bestimmen.

Hiebei kann man aber die fixen Punkte so wählen, dass die erforderlichen Hilfslinien sehr scharfe und deutliche Durchschnittspunkte geben.

§. 12.

Drehung einer Geraden, wenn nur ein Theil der Axe oder ihrer Verlängerung benützt werden kann.

Wäre z. B. ab (Taf. I, Fig. 14) zu drehen, und ist dabei nur ein Theil der Drehungsaxe xx' disponibel, so kann man auch dann die Rotation ohne weitere Verlängerung der Axe vornehmen und die fixen Punkte für die Hilfslinien so wählen, dass die hierdurch entstandenen Durchschnittspunkte sehr scharf und deutlich erhalten werden. Denn hat man z. B. den Punkt α gewählt und a mit α durch eine Gerade verbunden, so kann der zweite Punkt β so angenommen werden, dass wenn er mit b durch eine Gerade verbunden, diese Linie auf der ersten mehr oder weniger normal ist, in welchem Falle wie bekannt, der Durchschnittspunkt am deutlichsten ausfällt.

Ist ein Theil der Rotationsaxe ganz ausserhalb der eigentlichen Axe benützbar (wie auf Taf. I, Fig. 15 die xx'), so kann man auch in diesem Falle die Lösung der Aufgabe vollführen, und zwar mit mehr oder weniger Genauigkeit, je nachdem man die Hilfspunkte in der Axe so wählt, dass die Linie mo grösser oder kleiner ausfällt.

In allen diesen und nachfolgenden Fällen lassen sich aus der Ähnlichkeit der Dreiecke die zur Begründung der Construction erforderlichen Proportionen so wie oben ableiten.

§. 13.

Eine besondere Anwendung dieser Construction wäre bei der Bestimmung der Durchschnittslinien zweier Ebenen, deren Horizontal- und Vertical-Tracen jedoch so gegeben sind, dass sich entweder die horizontalen oder die verticalen Tracen schneiden.

Es sei $a''b''$ (Taf. I, Fig. 16) die verticale Trace der einen, und $c''d''$ die der andern Ebene; es sei ferner $a''e'$ die horizontale Trace der einen, und die $c''e'$ die der andern Ebene; man soll den Durchschnitt dieser zwei Ebenen bestimmen.

Wird aus e' auf AA' eine Normale gezogen, so ist e'' ein Punkt dieser Durchschnittslinie; da aber sowohl die beiden Vertical-Tracen als auch die Durchschnittslinie der beiden Ebenen gehörig verlängert, sich in einem einzigen Punkte schneiden müssen, so ist hiermit die Lösung dieser Aufgabe auf den bereits angegebenen Fall der Rotation einer beliebig schief gegen die Axe gestellten Geraden zurückgeführt.

Um nun diese Aufgabe einfach zu lösen, nehme man die eine von denjenigen Tracen, deren Durchschnitt auf der Projectionsebene nicht erhalten werden kann, hier die Vertical-Trace $c'' d''$ als Rotationsaxe an, lege auf diese durch den gegebenen Punkt der zu suchenden Durchschnittslinie eine Normale, welche die Drehungsaxe in γ und die Verlängerung der zweiten Trace in δ schneidet. Alsdann nehme man in der Rotationsaxe $c'' d''$ einen beliebigen Punkt α als den fixen Punkt an, verbinde ihn mit δ so wie mit e'' durch Gerade, nehme in derselben Axe auch einen zweiten Punkt, d. i. β als den fixen Punkt an, und verbinde ihn mit b''; wird alsdann aus dem so erhaltenen Durchschnittspunkte m auf die Drehungsaxe $c'' d''$ die Normale mn gezogen, und durch den so erfolgten Durchschnittspunkt m' aus β eine Gerade geführt, bis die aus b'' auf die Drehungsaxe $c'' d''$ gezogene Normale geschnitten wird, so ist der so erfolgte Durchschnittspunkt f'' ein Punkt der gesuchten Durchschnittslinie der zwei gegebenen Ebenen.

Man kann wohl derlei Aufgaben auch auf diese Art auflösen, indem man in einer Trace zwei beliebige Punkte α, β annimmt, α mit e'' durch eine Gerade verbindet, ferner $\beta f'' \parallel \alpha e''$, $\alpha\gamma \parallel \beta\delta$ und $e''\gamma \parallel \delta f''$ führt, wodurch f'' als der verlangte Punkt erfolgt.

Wie man aus den angeführten Aufgaben sieht, hat die obangegebene Construction eine Anwendung, und zwar jedesmal dann, wenn zwei Tracen und ein Punkt der Durchschnittslinie der zwei Ebenen gegeben sind.

Ob nun die Durchschnittslinie zwischen die beiden Tracen fällt, oder nicht, ist es wohl einerlei; für den ersten Fall haben wir die Lösung angegeben, für den zweiten ist sie ähnlich mit der obigen, und wird so sein, wie folgt:

Sind nämlich $a'' b''$, $c'' d''$ (Taf. I, Fig. 17) die Vertical-Tracen, ferner $a'' e'$, $e' c''$ die Horizontal-Tracen, und e'' der in der horizontalen Projectionsebene liegende Punkt der Durchschnittslinie der zwei Ebenen, so lege man durch den gegebenen Punkt e'' so wie durch b'' auf $c'' d''$ Normale, nehme α und β beliebig an, verbinde den Punkt f mit α, und den Punkt b'' mit β durch Gerade, führe aus dem so erhaltenen Durchschnittspunkte m zu $e'' f$ eine Parallele, verbinde α mit e'', und führe aus β durch m' eine Gerade bis die aus b'' auf $c'' d''$ gezogene Normale in h geschnitten ist, wodurch man den Punkt h als den verlangten Punkt der Durchschnittslinie der zwei gegebenen Ebenen erhält.

Somit ist die aus e'' durch h gezogene Gerade die verlangte Durchschnittslinie.

Es ist gleichgiltig, welche von den zwei Tracen als Rotationsaxe angenommen wird.

§. 14.

Eine zweite Anwendung hätte dieses Verfahren in der praktischen Geometrie, nämlich in dem Falle, wenn eine Gerade nicht direct gemessen werden kann, wo der eine Punkt unzugänglich ist, oder wenn sich in der Mitte derselben ein Hinderniss befindet.

a) Es sei ab (Taf. I, Fig. 18) die zu messende Gerade, deren Punkt a unzugänglich ist. Man stecke bz normal auf die ab, und aus beliebigen Punkten der bz, die $b'u$ und wv normal auf bz aus; alsdann visire man aus dem beliebigen Punkte α der wv nach a, markire den Durchschnittspunkt der Visur $a\alpha$ mit der $b'u$, d. i. den Punkt m, und bringe den Punkt β mit m und b in ein Alignement; wird ferner die mn parallel mit bz abgesteckt, sodann aus β nach b' visirt (wegen m') und a' mit α und m' in ein Alignement gebracht, so erfolgt $a'b' = ab$.

Man braucht daher hier nur eine Gerade, d. i. $a'b'$ zu messen.

Dieses Verfahren wird desto genauer, je weiter die beiden Parallelen $b'u$ und wv von ab angenommen werden, oder besser, wenn sie beiläufig so angenommen werden, dass man die Durchschnittspunkte der letzteren Linien deutlich erhält.

b) Es sei ab (Taf. II, Fig. 19) die zu messende Gerade, welche in der Mitte unzugänglich ist, also ebenfalls nicht direct gemessen werden kann. Man mache au normal auf ab, wähle a' und a'' in der au beliebig, und mache $a'v$, $a''w$ parallel zu ab; nun nehme man in der $a''w$ die zwei Punkte α und β beliebig, visire aus α nach a, und aus β nach b, stecke aus dem so erfolgten Durchschnittpunkte m auf $a''w$ eine Normale, visire dann aus α nach a', und bringe den Punkt b' mit m' und β in ein Alignement, so hat man $a'b' = ab$.

Die Richtigkeit dieses Verfahrens ergibt sich aus den obangeführten Sätzen über die Rotation einer beliebigen Geraden.

Statt der Normalen bz (Taf. I, Fig. 18) oder au (Taf. II, Fig. 19) kann man auch eine beliebig schiefe Linie wählen, in welchem Falle man aber auch die Hilfslinien mn parallel zu der ersteren ziehen muss, so wie dies Taf. II, Fig. 20 zeigt, welche Construction ganz ähnlich mit der vorhergehenden ist.

Wenngleich man in solchen Fällen die zu messende Gerade auf eine andere Art ebenfalls höchst einfach bestimmen kann, so ist es doch gut zu wissen, dass man sich in solchen Fällen vermittelst der Rotation helfen kann.

Die wichtigste Anwendung der obangeführten Sätze bleibt doch die in der darstellenden Geometrie bei den Durchschnitten der Ebenen und bei der Bestimmung der Schatten-Construction.

§. 15.

B. Rotation beliebiger Curven ohne Grundriss, mit beliebiger Benützung der Axen.

Die Rotation einer beliebigen krummen Linie kann auf ähnliche Art, wie die einer beliebigen Geraden geschehen, und zwar mit oder ohne Verlängerung, also mit beliebiger Benützung der Rotationsaxe.

a) Rotation einer beliebigen Curve, wenn die Rotationsaxe verlängert werden kann.

Es sei $abcdef$ (Taf. II, Fig. 21) eine beliebige Curve, welche um die Axe xy gedreht werden soll.

α) Das Auge des Beobachters sei in unendlicher Entfernung in der Richtung der auf die Rotationsaxe in Ω gedachten Normalen, also es sei der Punkt Ω der Augepunkt.

Man nehme in der gegebenen Curve mehrere Punkte beliebig an, jedoch so, dass durch sie die Krümmung der Curve nach der Drehung möglichst genau bestimmt wird, hier also die Punkte b, c, d, e; alsdann führe man aus jedem dieser Punkte, so wie aus den beiden Endpunkten Normale auf die Drehungsaxe, wodurch man also für jeden dieser Punkte einen fixen Punkt in der Axe erhält.

Sollte nun die Stellung der Curve nach der Drehung angegeben werden, wenn der Punkt a z. B. nach a' kommt, so führe man aus a durch b eine Gerade, bis die Axe xy in α geschnitten ist, wodurch man α als den fixen Punkt für die Gerade ab erhält; da nun der Punkt b nach der Drehung in der Geraden $a'\alpha$ zugleich aber auch in der Normalen bo' sich befindet, so muss er nothwendiger Weise im Durchschnittspunkte dieser zwei Geraden, also in b' sein; es ist daher b' ein Punkt der gegebenen Curve nach der Drehung.

Um den Punkt c nach der Drehung zu finden, führe man aus a durch c eine Gerade, bis die Axe in β geschnitten ist; wird alsdann der so erhaltene Punkt β mit a' durch eine Gerade verbunden, so schneidet diese die Normale co'' in c', wodurch also c' ein zweiter

Punkt dieser Curve nach der Drehung erfolgt, und zwar aus demselben Grunde wie der erste Punkt.

Wie nun diese zwei Punkte nach der Drehung gefunden worden sind, ebenso kann man auch auf gleiche Art eine beliebige Anzahl Punkte nach der Drehung bestimmen, und so die fragliche Stellung selbst der Curve zeichnen, wenn nur ein Punkt dieser Stellung gegeben ist, oder nach Belieben angenommen wird.

Für den Fall, wenn die aus a durch den zu bestimmenden Punkt geführte Gerade die Axe oder deren Verlängerung auf der Papierfläche nicht schneiden soll, wähle man statt a einen andern Punkt der gegebenen Curve, für welchen Punkt der ihm entsprechende Punkt nach der Drehung bereits gefunden ist.

Soll z. B. der Punkt e nach der Drehung gesucht werden, so wird die aus a durch e geführte Gerade weder die Axe noch deren Verlängerung schneiden; in diesem Falle nehme man den Punkt d' und d' als Hilfspunkte an, führe aus e durch d eine Gerade, bis die Verlängerung der Axe in δ geschnitten ist, und ziehe aus δ durch d eine Gerade, bis die Normale eo_4 in e' geschnitten ist, wodurch also e' als ein Punkt nach der Drehung gefunden wird.

Man kann demnach auf eine einfache Art eine beliebige Anzahl Punkte bestimmen, und die Stellung der gegebenen Curve nach der Drehung zeichnen.

Es ist daher hier $a'b'c'd'e'f'$ die Curve nach der Drehung für den Fall, wenn der Punkt a nach a' kommt.

§. 16.

Wird ein anderer, was immer für ein Punkt der Curve nach der Drehung gegeben, so kann man auch dann die übrigen Punkte der neuen Stellung noch bestimmen, und daher auch die Curve selbst zeichnen.

β) Ist das Auge des Beobachters oberhalb oder unterhalb des Gegenstandes in unendlicher Entfernung, jedoch in der auf die Rotationsaxe gedachten Normalen, so verfahre man auf folgende Art: Man nehme in der zu rotirenden Curve (Taf. II, Fig. 22) nach Erforderniss mehrere Punkte an, hier bcd, fälle aus jedem dieser Punkte Normale auf die Rotationsaxe, hier ao, bo', co'', do''', eo'''', verbinde den gegebenen Punkt a' mit dem für den Punkt a in der Rotationsaxe erhaltenen fixen Punkt o, und ziehe durch die fixen Punkte o', o'', o''', o'''' zu $a'o$ Parallele, in welchen sich die der in der Curve *a e* angenommenen Punkte entsprechenden Punkte nach der Drehung befinden werden.

Soll alsdann z. B. der Punkt *b* nach der Drehung bestimmt werden, so führe man aus *a* durch *b* eine Gerade, bis die Axe in α geschnitten ist, und verbinde a' mit α, wodurch in der aus o' zu $o a'$ gezogenen Parallelen der Punkt b' als *b* nach der Drehung erfolgt.

Auf ähnliche Art werden auch die anderen Punkte bestimmt, welche gehörig mit einander verbunden, die Curve nach der Drehung geben.

§. 17.

b) Rotation einer beliebigen Krummen ohne Verlängerung der Axe.

Die Rotation einer beliebigen Curve kann ohne Verlängerung der Axe auf ähnliche Art, wie die einer Geraden vorgenommen werden, d. h. man kann jede beliebige krumme Linie mittelst eines beliebigen Theiles der Rotationsaxe rotiren, ohne dass man diesen Theil über den einen oder den andern Endpunkt hinaus zur Bestimmung der fixen Punkte zu verlängern braucht.

Es sei *abc* (Taf. II, Fig. 23) die gegebene krumme Linie, welche um die Axe $y y'$ gedreht werden soll.

α) Das Auge des Beobachters sei in unendlicher Entfernung in der Richtung der auf $y y'$ in Ω gedachten Normalen, so dass die Punkte *abc*, wie auch alle andern in denjenigen Geraden liegen, welche durch die betreffenden Punkte auf die Rotationsaxe normal gelegt werden.

Ist nun für diesen Fall a' als die neue Stellung des Punktes *a* nach der Drehung gegeben, so verfahre man bei der Bestimmung der übrigen Punkte dieser Curve auf folgende Art:

Man nehme in der Axe den Punkt α beliebig an, verbinde ihn mit *a* und a', ferner den Punkt β mit *b*, fälle aus dem so erfolgten Durchschnittspunkte *m* die *mn* normal auf die Axe, und führe aus β durch m' eine Gerade bis die $b\Omega$ in b' geschnitten ist, so hat man b' als den Punkt *b* nach der Drehung.

Auf ähnliche Art wird auch der Punkt c' gefunden, indem man nämlich *b* und b' mit γ, dann *c* mit δ durch Gerade verbindet, aus *p* die *pq* normal auf $y y'$ führt, und aus δ durch p' eine Gerade legt, bis die $c y'$ geschnitten ist.

Wie nun diese zwei Punkte bestimmt worden sind, ebenso werden auch die übrigen Punkte, wenn noch welche zur näheren

Bestimmung einer Stellung der Curve nach der Drehung benöthigt werden sollten, bestimmt.

β) Das Auge des Beobachters sei oberhalb der gegebenen Curve *abc* (Taf. II, Fig. 24) in unendlicher Entfernung in der Richtung der auf die Axe yy' in Ω gedachten Normalen. Will man was immer für eine Stellung der gegebenen krummen Linie nach der Drehung ohne Grundriss und ohne bedeutende Verlängerung der Axe bestimmen, so verfahre man hierbei auf folgende Art: Man nehme in der Rotationsaxe yy' einen beliebigen Punkt α an, verbinde ihn mit a und a', sodann a' mit o'; nun nehme man in der Rotationsaxe auch einen zweiten Punkt β beliebig an, verbinde ihn mit b, und führe durch den so erhaltenen Durchschnittspunkt m die $mn \parallel ao'$, und aus dem so in der Axe erfolgten Durchschnittspunkte n die $nm' \parallel a'o'$; wird ferner aus β durch m' eine Gerade gezogen, bis die aus o'' zu $a'\,o'$ gezogene Parallele geschnitten ist, so erfolgt b' als der dem Punkte b entsprechende Punkt der Curve *abc* nach der Drehung.

Auf ähnliche Art wird auch der Punkt c' nach der Drehung gefunden, wie dies aus der Figur ersichtlich ist.

§. 18.

Aus diesen angeführten Beispielen sieht man also leicht ein, dass man zur Rotation einer beliebigen Linie, sei sie Gerade oder Krumme, keinen Grundriss braucht, wenn man auf obige Art verfährt; und dass man bei der Bestimmung der Punkte nach der Drehung die Axe nicht zu verlängern braucht, die Punkte derselben nach Belieben benützen, und so jedesmal der Verwirrung in der Zeichnung ausweichen kann.

Dieses Verfahren des Rotirens ist bei den zusammengesetzten Linien oder Figuren von sehr grossem Nutzen, insbesondere dann, wenn man die Rotationsaxe über den einen oder den andern Endpunkt hinaus verlängern kann, denn man ist dann desto eher im Stande die Hilfslinien so zu wählen, dass man mit einer derselben 2, 3, 4, 5 und auch mehr Punkte nach der Rotation bestimmt.

§. 19.

Wir wollen nun zur näheren Erklärung des Obigen die Rotation einer zusammengesetzten Linie vornehmen.

Es sei *abfchdgeik* (Taf. II, Fig. 25) die zu rotirende Curve. Um diese zusammengesetzte Curve mit Vortheil ohne Grundriss zu rotiren, werden hier die Punkte der Curve nicht angenommen, sondern es werden jedesmal durch eine Hilfslinie diejenigen Punkte bestimmt, welche nach der Rotation gesucht werden sollen. Soll also von dieser Curve diejenige Stellung angegeben werden, wenn z. B. d nach d' kommt, so verbinde man den dem gegebenen Punkte d' entsprechenden Punkt d mit einem beliebigen Punkte der Axe also mit α durch eine Gerade, wodurch man hier ausser dem Punkte d noch drei andere Punkte der Curve also b, c, e erhält; wird alsdann durch jeden dieser Punkte auf yy' eine Normale gezogen, und aus α durch d' eine Gerade gelegt, so erfolgen b' c' e' als Punkte der Curve nach der Drehung für den Fall, wenn deren Punkt d nach d' kommt.

Um die übrigen erforderlichen Punkte zu bestimmen, benützt man die bereits gefundenen Punkte nach der Rotation; so findet man z. B. den Punkt f', indem man aus dem Punkte f durch c eine Gerade bis zu der Axe führt, d. i. bis β, und aus β durch c' ebenfalls eine Gerade zieht, bis die fo' bei f' geschnitten ist.

Eben so leicht findet man i', g', u. s. w. wie dies aus der Figur ersichtlich ist. Man erhält daher im Ganzen mit vier fixen Punkten und ebenso vielen Hilfslinien etwa zehn Punkte der Curve, welche hier zur Bestimmung der neuen Stellung nach der Drehung hinreichend sind.

Man kann übrigens mit Leichtigkeit für diese oder jene Stelle einen oder auch mehrere Punkte auffinden.

Um das Anhäufen von Linien zu vermeiden, muss man die unnöthigen Hilfslinien weglassen, und nur die Einschnitte an den betreffenden Stellen machen.

§. 20.

Je mehr Windungen die zu rotirende Curve hat, desto vortheilhafter ist dieses Verfahren, wie dies aus dem nachfolgenden Beispiele ersichtlich ist.

Es sei z. B. die Spirale $a\ b\ c\ d\ \ldots\ x\ y\ z$ (Taf. II, Fig. 26) zu drehen; das Auge des Beobachters sei unterhalb derselben in der Richtung der auf die Axe yy' in Ω gedachten Normalen in unendlicher Entfernung.

Wird diese Curve in ein Rechteck $ABCD$ eingeschlossen, in diesem die Diagonale BD gezogen, und aus C die CE normal auf BD geführt, so hat man schon vermittelst dieser zwei Linien 16 Punkte für die zu zeichnende Spirale.

Kommt alsdann bei der Rotation der Punkt B etwa nach B', also das ganze Rechteck $ABCD$ in die Stellung $AB'C'D$, so entspricht die $B'D$ der BD, und $C'E$ der CE nach der Drehung; hat man nun durch jeden der in der BD und CE liegenden Punkte der Spirale eine Normale auf die Rotationsaxe gezogen, und aus jedem so erfolgten Punkte in der Axe zu der neuen Stellung der AB Parallele geführt, so erhält man in der $B'D$, so wie in $C'E$ die Punkte der Spirale nach der Drehung.

Ausser diesen Punkten wären noch diejenigen die vorzüglichsten, welche als Berührungspunkte der zu BC und zu AB gezogenen Parallelen sind; diese können aber sehr leicht gefunden werden, indem sie bekannter Weise in denjenigen Geraden liegen, welche die von BD und CE bildenden Winkel halbiren, also in ac und cg; soll also z. B. der Punkt c gefunden werden, so braucht man nur aus c zu AB bis AD, und aus dem so erfolgten Punkte α zu AB' bis $B'C'$ eine Parallele zu führen, wodurch c' dem Punkte c entsprechend gefunden wird. Auf diese Art kann also auch jeder andere Punkt sehr leicht gefunden werden; dies wäre jedoch zu langweilig und zeitraubend, da man hier drei Parallele braucht, und es ist daher viel vortheilhafter die Bestimmung der Punkte der Curve nach der Drehung vermittelst der fixen Punkte vorzunehmen, weil wir dann für einen Punkt nur eine Hilfslinie oder, wenn man an den betreffenden Stellen Einschnitte macht, gar keine Hilfslinie braucht. Denn ist z. B. der Punkt m ein Punkt der Spirale, und m' ein ihm entsprechender Punkt nach der Rotation, so findet man z. B. c', indem man aus c durch m eine Gerade $c\beta$, und aus β durch m' ebenfalls eine Gerade bis c' führt.

Die Linien $c\alpha$ und $c\beta$ wie auch die übrigen zwei können jedesmal weggelassen werden, wenn man an den betreffenden Stellen die Einschnitte gemacht hat; wodurch also die Verwirrung in der Zeichnung vermieden, und die letztere stets rein erhalten wird.

Wie man also diesen Punkt gefunden hat, ebenso kann man auch jeden andern Punkt durch schickliche Wahl der Hilfslinien finden, für welche letztere nur die Einschnitte an den betreffenden Stellen in der Axe als Hilfspunkte gemacht werden.

§. 21.

Die vorhergehenden Rotationen haben wir jedesmal unter der Bedingung gemacht, wenn was immer für eine Stellung eines Punktes nach der Drehung ausserhalb der Axe gegeben ist, ohne dass man für die anderen Punkte, welche in verschiedenen Ebenen liegen, Ellipsen verzeichnet.

Wir werden nun hier den zweiten Fall betrachten, nämlich den, wenn der Punkt nach der Drehung in der Rotationsaxe selbst als die Stellung desselben nach der Drehung gegeben ist.

Es sei also $abcdef$ (Taf. II, Fig. 27) die zu drehende gemischte Linie, welche um die Axe xy gedreht werden soll; es sei ferner der Punkt f nach der Drehung in f'' gegeben, d. h. in der Rotationsaxe.

Wie man aus der näheren Betrachtung sieht, kann hier sehr leicht der Weg, den der Punkt f während der Drehung beschreibt, gefunden werden, da er hier offenbar eine Ellipse sein wird, für welche fO_4 die halbe Grossaxe und $f''O_4$ die halbe Kleinaxe sein wird.

Ist die Ellipse gezeichnet, so kann dann jede beliebige Stellung dieses Punktes angegeben werden. Hier handelt sich also insbesondere nur darum, wie man auch für jeden andern Punkt eine Ellipse zeichnen kann; da hier die grossen Axen gegeben sind, die kleinen hingegen erst bestimmt werden müssen. Um daher die für ao, bo', co_2, do_3 verhältnissmässig kleinen Axen zeichnen zu können, führe man aus f zu xy eine Parallele fm, mache $fm = f''o_4$, so hat man schon den Proportional-Winkel, wodurch die zum Zeichnen der Ellipsen erforderlichen kleinen Halbaxen gefunden werden; denn wird durch jeden der Punkte a, b, c, d zur Axe xy eine Parallele gezogen, so sind die zwischen der Kathete fo_4 und der Hypothenuse mo_4 enthaltenen Stücke als die entsprechenden kleinen Halbaxen, welche von hier abgenommen, und um die entsprechenden Punkte o, o_1, o_2, o_3 in die Axe aufgetragen, die kleinen Axen geben [1]).

---

[1]) Um einzusehen, dass die auf diese Art zwischen fo_4 und mo_4 enthaltenen Stücke der durch a, b, c, d zu xy gezogenen Parallelen auch wirklich die kleinen Halbaxen sind, braucht man nur zwei Kreise mit den ihnen umschriebenen Quadraten $ABCD$, und $abcd$ (Taf. II, Fig. 28) und die in diesen gezogenen Diagonalen AC und ac um den Durchmesser EF als Axe zu drehen; kommt bei dieser Rotation der Punkt A nach A' und AB in die Lage $A'B'$, so muss a nach a', die ab in die Lage $a'b'$ kommen, und das Stück ae als $Og = a'e = og'$ erscheinen, also nothwendiger Weise gleich der kleinen Halbaxe für diejenige Ellipse sein, deren grosse Halbaxe $= eo$ ist. Sind also mehrere verschieden grosse Kreise in einer Ebene gezeichnet, und auf ähnliche Art gedreht, so ist für jeden derselben die kleine Halbaxe zwischen der Drehungsaxe und zwischen der neuen Stellung der Diagonale zu suchen, und daselbst abzunehmen.

Dies ist jedoch sehr mühsam, weil man bei einer gegebenen Curve meistens mehrere Ellipsen zu zeichnen hat; welches am Ende doch geschehen muss, wenn man mehrere Stellungen der Curve angeben will.

Sehr oft tritt jedoch der Fall ein, dass man die Curven-Punkte nicht so scharf und deutlich angeben kann, als es nothwendig wäre, wenngleich die für jeden Punkt erforderliche Ellipse gezeichnet ist. In diesem Falle wird man das zuvor angegebene Verfahren mit grossem Vortheile anwenden, weil man nach diesem die Hilfslinien so wählen kann, dass man die erforderlichen Punkte sehr scharf und deutlich erhält.

Wäre bei der vorgelegten Aufgabe nicht der Punkt f, welcher hier die grösste Entfernung von der Axe hat, sondern ein anderer Punkt z. B. a' gegeben, so wird man auch dann auf ähnliche Art verfahren können, nur müssten in diesem Falle die kleinen Halbaxen zwischen den Verlängerungen der Drehungsaxe und der Diagonale abgenommen werden.

Obgleich diese Bestimmung kein besonderes Verfahren ist, so haben wir es doch und zwar des Zusammenhanges wegen angeführt, um dem Leser gewissermassen ein zusammenhängendes Ganze in die Hand zu geben.

Der Sachkundige wird wohl ohnedies wissen, dass bei der Bestimmung mehrerer Stellungen einer Curve jedenfalls die Ellipsen vortheilhafter sind, wenngleich das Zeichnen derselben mühsam, und daher viel Zeit in Anspruch nimmt; hingegen bei der Bestimmung der einzelnen Stellungen ist jedenfalls das von uns angegebene Verfahren viel vortheilhafter, da man hierdurch bedeutend schneller zum Ziele kommt.

§. 22.

Zum Beschlusse dieser Abhandlung wollen wir die Rotation des Kreises vornehmen, und zwar desshalb, weil wir auf diese Art ein neues Verfahren für die Bestimmung der Axen und für die Construction der Ellipsen ableiten werden.

Alle die vorhergehenden Rotationen haben wir unter der Bedingung vorgenommen, wenn gegen die Axe zu gedreht wird, wobei nämlich jede Stellung der zu rotirenden Linien zwischen der gegebenen Stellung und der Axe gefunden wird.

Wir wollen nun auch den Fall in Betrachtung ziehen, wenn von der Axe weg beliebig weit gedreht wird.

Zu diesem Behufe wollen wir den Kreis als die Rotationslinie annehmen.

Der zu rotirende Kreis kann in Bezug auf die Rotationsaxe so gegeben sein, dass die Rotationsaxe denselben berührt oder schneidet, oder dass dieselbe von dem Kreise in einer beliebigen Entferung sich befindet.

I. Es sei $ABCD$ (Taf. II, Fig. 29) ein Kreis, welcher von der Geraden yy' in A berührt wird, und um yy' als Rotationsaxe gedreht werden soll.

Das Auge des Beobachters sei in unendlicher Entfernung in der Richtung der auf die Rotationsaxe yy' in A gedachten Normalen.

Wird dieser Kreis so gedreht gedacht, dass seine neue Stellung einfach schief gegen die horizontale Projectionsebene ist, so dass der Punkt m etwa nach m' kommt, während der Berührungspunkt A als ein Punkt der Rotationsaxe fix bleibt, so kann man für diesen Fall alle übrigen Punkte des Kreises nach der Drehung, welcher offenbar eine Ellipse sein wird, bestimmen. Denn wird durch den gegebenen Punkt m und durch den Mittelpunkt o des Kreises eine Gerade $m\alpha$ gezogen, so hat man dann auch einen zweiten Punkt des Kreises, d. i. n bestimmt; wird alsdann durch n zu Ax' eine Parallele geführt, und aus dem fixen Punkte α durch m' eine Gerade gezogen, welche die durch n zu Ax' geführte Parallele in n' schneidet, so ist n' ein Punkt der Ellipse.

Denn es ist, da $Ax' \parallel Ex'' \parallel Fx'''$ gezogen wurde:

$$\triangle En\alpha \sim \triangle Fm\alpha$$

und

$$\triangle En'\alpha \sim \triangle Fm'\alpha,$$

daher

$$En : Fm = E\alpha : F\alpha$$

$$En' : Fm' = E\alpha : F\alpha,$$

folglich

$$En : Fm = En' : Fm',$$

und da die Punkte m und n Punkte des Kreises sind, und m' ein Punkt der Ellipse ist, so muss nothwendiger Weise auch n' ein Punkt der Ellipse sein.

Aus der letzten Proportion folgt aber durch Alternation:

$$En : En' = Fm : Fm'$$

und da $AB' \parallel En'$ ist, so hat man

$$En : En' = AO : AO';$$

da aber AO der Halbmesser des Rotationskreises ist, so muss nothwendiger Weise AO' die halbe kleine Axe sein.

Es ist daher, wenn $B'O' = AO'$ gemacht wird, $AB' = 2b =$ der kleinen Axe. Errichtet man nun in O' auf AB' eine Normale, und macht $C'O' = D'O' = CO$, so hat man die grosse Axe an der gehörigen Stelle.

Man kann daher, indem beide Axen bestimmt sind, vermittelst der Parallelen auch die correspondirenden Punkte der zwei bereits bekannten Punkte finden.

Wird also $n''p = n'p$, und $m''p' = m'p'$ gemacht, so sind n'' und m'' Punkte derselben Ellipse.

Wie nun diese vier Punkte gefunden worden sind, ebenso kann man auch eine beliebige Anzahl von Punkten finden, und zwar vermittelst des gegebenen Ellipsenpunktes m', und des ihm im Kreise entsprechenden Punktes m, indem man durch den im Kreise gegebenen Punkt eine Hilfslinie so legen kann, dass die Drehungsaxe yy' und der Kreis ausser dem gegebenen Punkte noch in einem andern Punkte geschnitten werden.

Ein anderer Beweis für die Richtigkeit dieser Construction wäre der vermittelst der orthogonalen Projection und des entsprechenden Schnittes eines Cylinders.

Ist nämlich $MNPQ$ (Taf. II, Fig. 30) die horizontale Projection eines gegen die verticale Projections-Ebene einfach schief liegenden Cylinders, dessen Schnitt nach MN ein Kreis, welcher in der verticalen Projections-Ebene der Kreis $ACBD$ ist, so hat man, wenn aus M eine Ebene MN' normal auf die horizontale Projections-Ebene geführt wird, $AC'B'D'$ als die verticale Projection dieses Durchschnittes, welcher offenbar eine Ellipse sein wird.

Es ist also MN' die horizontale Projection der auf der horizontalen Projections-Ebene normal stehenden Ellipse und $AC'B'D'$ die verticale Projection dieser Ellipse.

§. 23.

Wir wollen jetzt eine andere Stellung des nach der Rotation gegebenen Punktes annehmen.

Der zuvor nach der Rotation angenommene Punkt des zu rotirenden Kreises war zwischen seiner ursprünglichen Stellung und der Rotationsaxe. Nehmen wir jetzt an, es sei der gegebene Punkt ausserhalb der Axe und auch ausserhalb seiner ursprünglichen Stellung unterhalb der Abscissenaxe z. B. etwa in m' (Taf. II, Fig. 31); wird in diesem Falle durch den gegebenen Punkt m' eine Parallele gezogen, so entstehen zwei Durchschnittspunkte im Kreise, d. i. m und p, welches so viel bedeutet, als dass der gegebene Punkt m' eine Stellung des Punktes m oder des Punktes p ist; woraus sich ergibt, dass wenn ein Punkt nach der Rotation gegeben ist, jedenfalls zwei Ellipsen möglich sind. Ist also der Punkt m' eine Stellung des Punktes m nach der Drehung, so ist offenbar die gegebene Axe die kleine Axe; ist hingegen der gegebene Punkt m' eine Stellung des Punktes p nach der Drehung, so ist die gegebene Axe die grosse Axe.

α) Es sei nun m' eine Stellung des Punktes m nach der Drehung; wird in diesem Falle aus m durch den Mittelpunkt O des Hilfskreises eine Gerade gezogen, bis die als Rotationsaxe angenommene Tangente in α geschnitten wird, sodann aus α durch den gegebenen Punkt der Ellipse eine Gerade gelegt, so erfolgt O' als die neue Stellung des Punktes O nach der Drehung, somit AO' als die gesuchte Halbaxe. Errichtet man nun in dem Punkte O' eine Normale auf AB, und macht $O'C'' = O'D'' = \frac{CD}{2}$, ferner $O'B' = AO'$, so hat man die beiden Axen, wo man dann die übrigen Punkte der Ellipse auf die obangegebene Art sehr leicht bestimmen kann.

Die Richtigkeit dieses Verfahrens folgt aus der näheren Betrachtung der Construction; denn es ist, da $Em' \parallel AO'$ ist:

$$\Delta\, E m \alpha \sim A O \alpha$$

und

$$\Delta\, E m' \alpha \sim A O' \alpha,$$

woraus:

$$Em : AO = E\alpha : A\alpha$$
$$Em' : AO' = E\alpha : A\alpha;$$

hieraus

$$Em : AO = Em' : AO',$$

oder

$$Em : Em' = AO : AO';$$

da aber m ein Punkt des Kreises ist, und m' der ihm entsprechende

Punkt der Ellipse, ferner O der Mittelpunkt dieses Kreises ist, so muss nothwendiger Weise O' der Mittelpunkt der Ellipse sein.

Auf eine andere Art wird die Richtigkeit dieser Construction auch durch die orthogonale Projection eines gegen die verticale Projections-Ebene einfach schief liegenden Cylinders nachgewiesen. Ist nämlich $MNPQ$ (Taf. II, Fig. 31 a) die orthogonale Projection eines Cylinders, dessen Basis MN ein Kreis, welcher in der verticalen Projections-Ebene der Kreis $ACBD$ ist, und wird aus M durch den Cylinder eine Ebene gelegt, nämlich MP, so ist das Bild dieses Durchschnittes die Ellipse MP, deren verticale Projection die Ellipse $AC'B'D'$ ist.

β) Es sei m', Taf. III, Fig. 31 b, eine Stellung des Punktes m nach der Drehung, welche bei einer gewissen Stellung des Auges des Beobachters erhalten werden kann. Die Richtung der einen Axe sei Ax, die kleine Axe $= CD$ der Länge nach, und A der Anfangspunkt der zweiten Axe.

Wird hier $m'm$ gezogen, durch m und O eine Gerade αp gelegt, und aus dem so in der yy' erhaltenen fixen Punkte α durch m' eine Gerade $\alpha m'u$ geführt, so erfolgt in der gegebenen Richtung der der Länge nach nicht bestimmten Axe der Durchschnittspunkt O', welcher offenbar eine Stellung des Punktes O nach der Drehung ist, und zwar für den Fall, wenn der Punkt m nach der Drehung nach m' also ganz ausserhalb des Kreises kommt.

Wird nun in O' auf Ax eine Normale gezogen, sodann $C''O' = D''O' = C'O = \frac{1}{2}CD$ gemacht, ferner $B'O' = AO'$ abgeschnitten, so ist $C''D'' = CD$ gleich der kleinen Axe, und $AB' =$ der grossen Axe der zu zeichnenden Ellipse.

Durch die Verlängerung der $\alpha O'$ findet man auch p' als einen Punkt der Ellipse, indem man $O'p' = O'm'$ macht.

Die übrigen Punkte kann man auf bereits angegebene Art sehr leicht finden.

§. 24.

In diesen letzteren Fällen kann es sehr leicht geschehen, dass man schiefe Schnitte für den Punkt O' erhält; welches dann am meisten vorkommt, wenn der gegebene Punkt m' von der Rotationsaxe yy' weit entfernt ist. Um also in solchen Fällen den schiefen und undeutlichen Schnitt zu vermeiden, verfahre man auf folgende Art:

Man nehme statt dem Halbmesser AO (Taf. II, Fig. 32) des Hilfskreises irgend einen bestimmten Theil desselben, z. B. den 3^{ten}, 4^{ten} oder n^{ten} Theil als Hilfslinie, bestimme diesen Theil der Länge nach, auch nach der Drehung, und nehme es so oft, als der wie vielte Theil er vom Durchmesser vor der Drehung war.

Wird also hier $A_1 = \frac{1}{4} AO$ angenommen, aus 1 durch m eine Gerade $1 m \beta$ gelegt, sodann aus β durch m' eine Gerade gezogen, bis die Richtung der der Länge nach zu bestimmenden Axe in I geschnitten ist, so hat man $AI = \frac{1}{4}$ der Halbaxe, weil A 1 vor der Drehung als der vierte Theil von AO genommen wurde. Wird alsdann AI viermal auf Ax aufgetragen, so ist $AO' =$ der halben Grossaxe.

Man sieht aus diesem Beispiele, dass es gleichgiltig ist, wo der Punkt des Kreises nach der Rotation gegeben ist, nur muss er in derjenigen Ebene liegen, welche zwischen den beiden an den Hilfskreis gezogenen parallelen Tangenten enthalten ist, weil diese Ebene ins Unendliche verlängert gedacht, stets der geometrische Ort derjenigen Ellipsen sein wird, welche hier möglich sind. Hieraus folgt also der nachstehende Lehrsatz:

Ist zur Construction der Ellipse die eine Axe der Grösse nach, die andere hingegen der Richtung nach, ferner ein Endpunkt derselben und ein Punkt der Ellipse gegeben, so kann man auch die zweite Axe der Grösse nach bestimmen, und die Ellipse selbst construiren.

Auf ähnliche Art wird man auch verfahren, wenn zur Construction der Ellipse der eine conjugirte Durchmesser der Länge und Richtung nach, die Richtung sowie ein Endpunkt des zweiten, und ein Punkt der Ellipse gegeben ist.

Das Verfahren für solche Construction ergibt sich ebenfalls aus der Rotation des Kreises, welche wir der Verständlichkeit wegen zuerst vornehmen müssen.

Es sei $ABCD$ (Taf. III, Fig. 33) der zu rotirende Kreis, welcher die Rotationsaxe yy' in A berührt. Nimmt man an, dass der Punkt m etwa nach m' kommt, so ist hierdurch auch die Stellung der AB bestimmt; wird also mn bis zu der Rotationsaxe verlängert, sodann m' mit α verbunden, so ist die aus dem Berührungspunkte A zu $\alpha m'$ gezogene Parallele, die Richtung der einen conjugirten Axe, deren eine Endpunkt der Berührungspunkt A ist. Legt man nun aus O durch m eine Gerade bis zu der Rotationsaxe, d. i. bis β, und führt aus diesem Punkte durch m' eine Gerade bis O', so ist dieser Punkt der Mittelpunkt der conjugirten Axe und der zu zeichnenden Ellipse; zieht man alsdann durch O' die $Z''Z'''$ parallel zur Rotationsaxe, und macht $C'O' = D'O'$, $B'O' = AO'$, so ist $C'D'$ der eine, und AB' der zweite conjugirte Durchmesser. Wird ferner $r'n' = r'm'$ $p's' = q's'$ gemacht, so hat man $m'n'p'q'$ als Ellipsenpunkte, somit im Ganzen, mit Einschluss der Endpunkte der beiden conjugirten Durchmesser, acht Punkte für die zu zeichnende Ellipse.

Will man mehr Punkte für diese Ellipse bestimmen, so kann man jetzt auf die eine oder die andere Art verfahren.

Da hier $AB' < AB$ und folglich kleiner als $C'D'$ durch Construction und vermöge der angegebenen Stellung des Punktes erfolgt ist, so hat man daran ein Beispiel für denjenigen Constructionsfall, wo nämlich der grössere conjugirte Durchmesser die Richtung des kleineren, ein Endpunkt desselben, und ein Punkt der Ellipse gegeben ist.

§. 25.

Wird also der obige Fall umgekehrt angenommen, d. h. ist zur Construction der Ellipse der eine conjugirte Durchmesser der Länge und Richtung nach, und parallel zur Rotationsaxe, dann die Richtung und ein Endpunkt des zweiten und ausserdem ein Punkt der Ellipse gegeben, so errichte man in dem Punkte A die AB normal auf die Rotationsaxe, mache $AO = BO =$ der halben der Grösse nach gegebenen Axe, beschreibe über AB als Durchmesser einen Kreis $ACBD$, führe durch den gegebenen Punkt der Ellipse die $m'n' \parallel Au$, ziehe aus dem so in der Rotationsaxe erhaltenen fixen Punkte α eine Parallele zu AB, so hat man die Punkte m und n als diejenigen Punkte des Kreises vor der Drehung, welche dem Punkte m' entsprechen.

Wird alsdann aus dem Punkte O durch m eine Gerade bis zu der Rotationsaxe geführt, und aus dem so gefundenen Punkte β durch m' eine Gerade bis zu der Au gezogen, so erfolgt $AO' = B'O' =$ der halben zu suchenden conjugirten Axe.

Somit hat man, wenn $AO' = B'O'$ gemacht, durch O' zu yy' eine Parallele gezogen, und $C'O' = D'O =$ der halben gegebenen Axe abgeschnitten wird, AB' als der eine und $C''D'$ als der zweite conjugirte Durchmesser der Grösse und Richtung nach.

§. 26.

Wird bei der Rotation eines Kreises der Punkt des Kreises nach der Drehung im zweiten Quadranten, und das Auge des Beobachters so angenommen, dass die Horizontalen und Parallelen zur Tafel nach der Drehung einen beliebigen Winkel gegen ihre ursprünglichen Lagen einnehmen, so erhält man, wie (Taf. III, Fig. 34) zeigt, eine sehr gestreckte Ellipse, in welchem Falle der gegebene conjugirte Durchmesser der kleinere ist.

Die Construction und der Beweis ist ganz ähnlich mit den vorhergehenden Fällen; denn es ist m' ein Punkt des Kreises nach der Drehung, dessen ursprüngliche Stellung der Punkt m ist. Man braucht daher nur die $m\alpha$ normal auf die Rotationsaxe zu ziehen, m' mit α zu verbinden, aus dem Mittelpunkte O durch m eine Gerade zu ziehen, und aus dem so in der Rotationsaxe erfolgten Punkte β durch m' eine Gerade zu führen, bis die gegebene Richtung der Axe geschnitten ist, wodurch AO' gleich dem halben conjugirten Durchmesser erfolgt.

Wird ferner $C''D'' \parallel yy'$ gezogen, und $C''O' = D''O' = \frac{1}{2}\,CD$, ferner $B'O' = AO'$ gemacht, so hat man wie zuvor die beiden conjugirten Axen.

Aus der nähern Betrachtung der angeführten Beispiele folgt also, dass je weiter der gegebene Punkt nach der Drehung von der Rotationsaxe angenommen wird, desto grösser wird die zweite Axe oder der zweite conjugirte Durchmesser sein.

§. 27.

Nehmen wir jetzt den Fall an, der gegebene Punkt des Kreises hier m (Taf. III, Fig. 35) wäre nach der Drehung etwa in m', also oberhalb der Ax d. h. oberhalb der Abscissenaxe (wenn die Rotationsaxe als die Ordinatenaxe angenommen wird), so kann man auch dann die Ellipse construiren. Ist also der Punkt m nach der Drehung in m', so führe man aus dem Berührungspunkte A die Ax normal auf die Rotationsaxe yy', und aus m die $m\alpha$ parallel zu Ax, ziehe aus O durch m die Gerade $Om\beta$, verbinde m' mit β und mit α, führe aus A zu $m'\alpha$ eine Parallele, und verlängere die $\beta m'$, bis diese Parallele hier in O' geschnitten ist, wodurch O' als der Mittelpunkt der Ellipse, und AO' als die Hälfte der zu suchenden Axe erfolgt.

Wird endlich durch O' die $C''D''$ parallel zu yy' gezogen, ferner $C''O' = D''O'$ gemacht, so ist $C''D''$ der eine conjugirte Durchmesser, und AO' die Hälfte des andern.

Man sieht also daraus, dass es nicht nothwendig ist, dass die Richtung des zweiten der Länge nach zu bestimmenden conjugirten Durchmessers gegeben ist, und dass es möglich ist, die Ellipse zu construiren, wenn der eine Durchmesser, der Anfangspunkt des zweiten, und ein Punkt der Ellipse gegeben ist.

Da jedoch dem gegebenen Punkte der Ellipse unzählig viele Punkte im Kreise entsprechen können, so folgt daraus, dass auch unzählig viele Ellipsen in einem solchen Falle gezeichnet werden können, und es ist daher ein solcher Fall streng genommen unbestimmt.

Ist hingegen die Richtung des der Länge nach zu bestimmenden Durchmessers gegeben, so ist ein solcher Fall ganz bestimmt, und es muss der gegebene Punkt innerhalb derjenigen Parallelen sich befinden, welche die zu zeichnende Ellipse berühren, und zu der gegebenen Richtung des der Länge nach zu bestimmenden conjugirten Durchmessers parallel laufen, d. h. der gegebene Punkt muss auch wirklich ein Punkt der zu zeichnenden Ellipse sein.

Wir können demnach folgenden Lehrsatz aufstellen:

Ist zur Construction der Ellipse der eine conjugirte Durchmesser der Länge und Richtung nach, der andere hingegen der Richtung nach nebst einem Endpunkte, und ausserdem ein Ellipsenpunkt gegeben, so kann jedesmal auch der zweite conjugirte Durchmesser der Länge nach, somit auch die Ellipse selbst construirt werden.

§. 28.

II. Nehmen wir jetzt den zweiten Fall an, nämlich den, wenn die Rotationsaxe den zu rotirenden Kreis schneidet, so dass die Sehne des Kreises und ihre Verlängerung die Rotationsaxe ist.

Es sei also zu diesem Behufe $ACBD$ (Taf. III, Fig. 36) der zu rotirende Kreis, dessen Sehne EF verlängert, die yy' als die Rotationsaxe gibt. Das Auge des Beobachters sei in unendlicher Entfernung in der Richtung der auf die Axe in G gedachten Normalen. Nehmen wir an, es käme der Punkt m nach der Rotation nach m', so kann man auch in diesem Falle die Axen bestimmen; die erste ist der Länge nach so gross als CD, d. h. als der Durchmesser des zu rotirenden Kreises; die zweite hingegen wird verkürzt, und es handelt sich daher hier darum, wie man den Mittelpunkt für die zweite, und die Endpunkte derselben findet.

Wird also m mit O durch eine Gerade verbunden, so schneidet diese die Rotationsaxe in α, wird alsdann aus dem gegebenen Punkte nach der Drehung, d. i. aus m' durch den fixen Punkt α eine Gerade geführt, so erfolgt O' als der Mittelpunkt der zu zeichnenden Ellipse.

Wird ferner der Punkt B mit m durch eine Gerade verbunden, und aus dem nach der Rotation gegebenen Punkte m' durch den fixen Punkt β eine Gerade geführt, bis die AB in B' geschnitten ist, so erfolgt B' als der eine Endpunkt der zweiten Axe. Wird alsdann $A'O' = B'O'$ gemacht, so hat man $A'B'$ als die gesuchte zweite Axe.

Wird überdies $p'q = pq$, und $n'r = m'r$ gemacht, so hat man vier Punkte, d. i. $m'n'pp'$ und mit Einschluss der Endpunkte der Axen, im Ganzen an acht Punkte, für die zu zeichnende Ellipse.

Da hier ferner die Punkte E und F als Punkte der Axe ungeändert bleiben, und zugleich Punkte des Kreises sind, so müssen sie nach der Drehung als Ellipsenpunkte betrachtet werden. Zieht man nun EE' und FF' $\parallel$ zu AB, und macht $E's = Es$, $F't = Ft$, so folgen E' und F' als Ellipsenpunkte, und es sind im Ganzen zwölf Punkte für die zu zeichnende Ellipse.

§. 29.

Nimmt man an, dass der Punkt m (Taf. III, Fig. 38) nach m' kommt, dass er nämlich ausserhalb der Kreisfläche $ACBD$ fällt, so kann man auch in diesem Falle die Punkte nach der Rotation mit Leichtigkeit bestimmen. Denn ist m' ein Punkt nach der Rotation, und m der entsprechende Punkt vor der Rotation, und wird aus m durch den Mittelpunkt O eine Gerade mw gezogen, so erhält man in der als Rotationsaxe angenommenen Sehne EF den fixen Punkt α; wird ferner m' mit α durch eine Gerade verbunden, so ist der in der xx' erfolgte Durchschnittspunkt O' der Mittelpunkt der Ellipse, weil O der Mittelpunkt des Rotationskreises ist. Wird alsdann die pp' parallel zu xx' gezogen, so hat man p' ebenfalls als einen Punkt der Ellipse. Wird überdies pp' über p hinaus, und mm' über m hinaus verlängert, in O' die zz normal auf xx' gezogen, $C'O' = D'O' = CO$, ferner $sp'' = sp'$, und $tn' = tm'$ gemacht, so hat man p'' und n' ebenfalls als Ellipsenpunkte. Da endlich die zwei Punkte E und F in der Rotationsaxe sind, also als Punkte des Kreises, zugleich aber als Ellipsenpunkte angesehen werden müssen, so hat man, wenn $EE' \parallel xx'$ und ebenso $FF' \parallel xx'$ gezogen, und $uE' = uE$, $vF' = vF$ gemacht wird, E' und F' ebenfalls als Ellipsenpunkte.

Man hat somit im Ganzen zwölf Punkte für die zu zeichnende Ellipse.

Die Richtigkeit dieses Verfahrens ergibt sich aus der näheren Betrachtung der hier erfolgten ähnlichen Dreiecke; ferner auch aus dem Durchschnitte des Cylinders, wie dies auf Taf. III, Fig. 37 ersichtlich ist.

Daraus ergibt sich nun ein Verfahren für die Construction der Ellipse für den Fall, wenn eine Axe, eine Sehne, der Mittelpunkt der Ellipse und ein Punkt derselben gegeben ist, denn wird diese Construction in umgekehrter Ordnung verfolgt, so hat man die Richtigkeit dieser Behauptung sogleich eingesehen.

Wir wollen jedoch dieses auch durch eine entsprechende Zeichnung erläutern.

Es sei AB (Taf. III, Fig. 38 a) die Sehne, CD die kleine Axe, xx' die Richtung der andern, und m' ein Punkt der Ellipse.

Wird aus A mit dem Halbmesser $= \frac{1}{2} CD$ die xx' als die Richtung der zweiten Axe bei O' geschnitten, so hat man O' als den Mittelpunkt desjenigen Kreises, durch dessen Drehung um AB als Rotationsaxe die zu zeichnende Ellipse entstanden gedacht wird. Zieht man nun aus m' durch O' eine Gerade mn, dann die αm und macht $nO = mO$, so ist n ebenfalls ein Ellipsenpunkt. Werden ferner durch m, sowie durch n zu xx' Parallele gezogen, und $pq = nq$, $rs = mr$ gemacht, so hat man m, n, p, s als Ellipsenpunkte. Nun kann man vermittelst des einen oder des andern dieser vier Punkte auch die Länge der zweiten Axe bestimmen. Denn wird aus F durch s' eine Gerade bis zu der Drehungsaxe gezogen, und aus dem so in der Axe erfolgten Durchschnittspunkte β als dem fixen Punkte eine Gerade geführt, bis die xx' geschnitten ist, so erfolgt F als der Endpunkt der zweiten Axe, indem F und s' Punkte des Kreises sind, und s ein Punkt der Ellipse ist, daher muss F' ebenfalls ein Punkt der Ellipse sein, und zwar ein Endpunkt der grossen Axe, weil F ein Endpunkt des horizontalen Durchmessers ist, in welchem die zweite Axe sich befinden muss.

Ebenso könnte man vermittelst der drei Punkte m, m' und G den Punkt G' als den zweiten Endpunkt der zu bestimmenden Axe finden. Da man aber desshalb die Axe zu weit verlängern müsste, so ist es viel vortheilhafter, einen solchen Punkt zu wählen, wo man die Axe nicht so weit zu verlängern braucht, und dennoch den fraglichen Punkt scharf und deutlich erhält.

§. 30.

III. Der dritte Fall der Rotation des Kreises tritt dann ein, wenn der zu rotirende Kreis die als Rotationsaxe gegebene Gerade weder schneidet noch berührt, also in einer gewissen Entfernung von der Rotationsaxe gegeben ist.

1. Es sei z. B. $ACBD$ (Taf. III, Fig. 39) der gegebene Kreis, welcher um die als Rotationsaxe angenommene Gerade yy' gedreht werden soll. Nimmt man hier die Stellung des Beobachters so an, dass alle Punkte während der Rotation in denjenigen Geraden bleiben, welche durch sie normal auf die Axe gezogen werden, so wird die neue Stellung des Kreises auf folgende Art ohne Grundriss gefunden:

Man ziehe aus dem Mittelpunkte O des gegebenen Kreises eine Normale auf die Rotationsaxe, also $\alpha AB \perp yy'$, sodann $CD \perp \alpha B$; kommt nun der Punkt m nach der Rotation etwa nach m', so führe man durch diese zwei Punkte die $mm'\beta \perp yy'$, lege durch m und durch O eine Gerade bis die Rotationsaxe geschnitten ist, und ziehe aus dem so in der Axe erfolgten Durchschnittspunkte γ durch m' eine Gerade, welche die $B\alpha$ in O' schneidet, und diesen Punkt als den Mittelpunkt für die neue Stellung des Kreises nach der Drehung gibt.

Wird alsdann durch O' die $zz' \perp B\alpha$ gezogen, und $C'O' = D'O' = CO$ gemacht, so hat man $C'D'$ als die eine Axe an Ort und Stelle, wo sie sein soll.

Um nun die zweite Axe der Länge nach zu bestimmen, führe man aus B durch m eine Gerade, bis die Axe geschnitten ist, und ziehe aus dem so in der Axe erfolgten Durchschnittspunkte δ durch m' eine Gerade, bis die $B\alpha$ in B' geschnitten ist, wodurch $B'O'$ als die Hälfte der zweiten Axe gefunden wird.

Macht man ferner $A'O' = B'O'$, so erfolgt $A'B'$ als die zweite Axe der Länge nach.

Will man überdies auch noch andere Ellipsenpunkte bestimmen, so kann dies vermittelst der bereits gefundenen Punkte sehr leicht geschehen. Denn wird $m'O'$ über O' hinaus verlängert, und $O'p' = O'm'$ gemacht, so ist p' ein Punkt der Ellipse.

Wird endlich durch p' die $p'q' \parallel A'B'$ gezogen, und $q's = p's$ sowie $rn' = rm'$ gemacht, so hat man m', n', p', q' als Punkte derjenigen Ellipse, deren grosse Axe $C'D'$ und die kleine Axe die $A'B'$ gefunden wurde.

Auf ähnliche Art kann man eine beliebige Anzahl Punkte finden, falls solche zur genaueren Bestimmung der Ellipse erfordert werden sollten.

Aus dieser Construction ergibt sich nun durch nähere Betrachtung sehr leicht ein Verfahren für die Construction der Ellipse, und zwar für den Fall, wenn eine Axe, der Anfangspunkt der zweiten und irgend ein Punkt der Ellipse gegeben ist; welches man alsbald einsehen kann, wenn nur die so eben angeführte Construction umgekehrt verfolgt wird.

§. 31.

2. Es sei ferner $ACBD$ (Taf. I, Fig. 40) der gegebene Kreis, welcher um die als Axe gegebene Gerade yy' gedreht werden soll.

Wird das Auge des Beobachters so angenommen, dass der Punkt m etwa nach m' kommt, so verfahre man bei der Bestimmung der Axen so wie der übrigen Punkte auf folgende Art:

Man verlängere AB über B hinaus, ziehe aus O durch m eine Gerade bis die Axe geschnitten ist, und führe aus dem so in der Axe erfolgten Durchschnittspunkte β eine Gerade bis in der Verlängerung der AB ein Durchschnittspunkt O' erfolgt, welcher offenbar der Mittelpunkt der zu zeichnenden Ellipse sein wird.

Errichtet man nun in O' die $C'D'$ normal auf $A'B'$ und macht dann $C'O' = D'O' = CO$, so ist $C'D' =$ der kleinen Axe.

Um die zweite Axe zu bestimmen, führe man aus B durch D eine Gerade bis die Axe geschnitten ist, ferner aus dem so in der Axe erhaltenen Punkte durch D' eine Gerade, bis in der Verlängerung der AB ein Punkt B' erfolgt. Macht man dann $A'O' = B'O'$, so erhält man $A'B' =$ der grossen Axe derjenigen Ellipse, deren kleine Axe die $C'D'$ ist.

Will man für die zu zeichnende Ellipse mehr Punkte bestimmen, so kann dies wie in den vorhergehenden Fällen sehr leicht vermittelst der bereits gefundenen Punkte geschehen.

Übrigens hat man hier schon vermittelst der wenigen Hilfslinien im Ganzen acht Punkte der Ellipse.

§. 32.

Es sei $ACBD$ (Taf. III, Fig. 41) der zu rotirende Kreis, und yy' die Rotationsaxe. Das Auge des Beobachters sei so, dass der Punkt m etwa in m' erscheint.

Um nun die Stellung dieses Kreises für den bedingten Fall zu zeichnen, verfahre man auf folgende Art:

Man lege durch den Mittelpunkt O des zu rotirenden Kreises die $BOAa$ und durch den Punkt m die $m\gamma$ normal auf die Rotationsaxe; verbinde m' mit x, und führe aus α zu $m'\gamma$ die $\alpha\,v$ parallel, so hat man die Richtung des einen conjugirten Durchmessers. Wird ferner aus dem Mittelpunkte O durch m eine Gerade bis zu der Axe gezogen, sodann aus dem so in der Axe erfolgten Punkte q durch m' eine Gerade geführt bis die αv bei O' geschnitten ist, so hat man O' als den Mittelpunkt der Ellipse, in welcher $\alpha\,v$ die Richtung des einen und die durch O' parallel zu yy' geführte Gerade zz' die Richtung des zweiten conjugirten Durchmessers sein wird.

Macht man dann $C'\,O' = D'\,O' = C\,O$, so erfolgt $C'\,D'$ als der eine conjugirte Durchmesser.

Um den zweiten conjugirten Durchmesser zu bestimmen, verbinde man den Punkt B mit m durch eine Gerade, verlängere diese bis die Axe geschnitten ist, und führe aus dem so in der Axe erfolgten Punkte f durch m' ebenfalls eine Gerade bis die αv bei B geschnitten wird, so hat man $B'\,O'$ als die Hälfte des zweiten conjugirten Durchmessers.

Macht man endlich $A'\,O' = B'\,O'$, so ist $A'B'$ der zweite conjugirte Durchmesser. Die übrigen correspondirenden Punkte werden auf die bekannte Art gefunden.

§. 33.

Es sei $ACBD$ (Taf. III, Fig. 42) der zu rotirende Kreis, und yy' die Rotationsaxe.

Ist das Auge des Beobachters so, dass irgend ein Punkt des Kreises, z. B. der Punkt m nach m', also oberhalb des Durchmessers AB nach der Drehung kommt, so kann man in diesem Falle eben so leicht wie im vorhergehenden die beiden conjugirten Durchmesser mit Leichtigkeit bestimmen, obgleich hier nur der eine conjugirte Durchmesser der Länge nach gegeben ist.

Wird also durch den Mittelpunkt O des zu rotirenden Kreises die $\alpha\,O\,x$ und durch den fraglichen Punkt m die $n\,m\,\beta$ normal auf die Rotationsaxe gezogen, sodann der gegebene Punkt m' mit β durch eine Gerade verbunden, und aus α zu $m'\beta$ eine Parallele gezogen, so hat man die Richtung des einen conjugirten Durchmessers.

Wird ferner aus dem Mittelpunkte O durch m eine Gerade bis zu der Axe gezogen, und aus dem so in der Axe erhaltenen Punkte γ durch m' eine Gerade geführt, bis die Richtung der Axe geschnitten ist, so hat man den so erfolgten Durchschnittspunkt O' als den Mittelpunkt des Kreises nach der Rotation, also hier als den Mittelpunkt der Ellipse, durch welchen die $zz' \parallel yy'$ gezogen die Richtung des zweiten conjugirten Durchmessers, und $C'O' = D'O' = CO$ gemacht die $C'D'$ als den Durchmesser selbst der Länge nach gibt.

Nun kann man vermittelst der Endpunkte $C'D'$, wie vorhin auch die Endpunkte des andern conjugirten Durchmessers bestimmen, oder man führe aus m durch A eine Gerade bis zu der Axe, und verbinde den so in der Axe erfolgten Durchschnittspunkt mit m' ebenfalls durch eine Gerade, welche die Richtung ax' des zweiten conjugirten Durchmessers bei A' schneidet und diesen Punkt als den Endpunkt dieses Durchmessers gibt.

Wird alsdann $B'O' = A'O'$ gemacht, so hat man $A'B'$ als den verlangten zweiten conjugirten Durchmesser der Länge nach bestimmt.

Zur Controle wird aus B durch C eine Gerade bis zu der Axe geführt, und aus dem so in derselben erfolgten Durchschnittspunkte ε durch den Punkt C' eine Gerade gezogen bis die Richtung ax' bei B' geschnitten wird.

Wie man aus der Figur sieht, kann man bei der Auflösung dieser Aufgabe die Hilfslinien so wählen, dass man die fraglichen Punkte hinlänglich genau bestimmt.

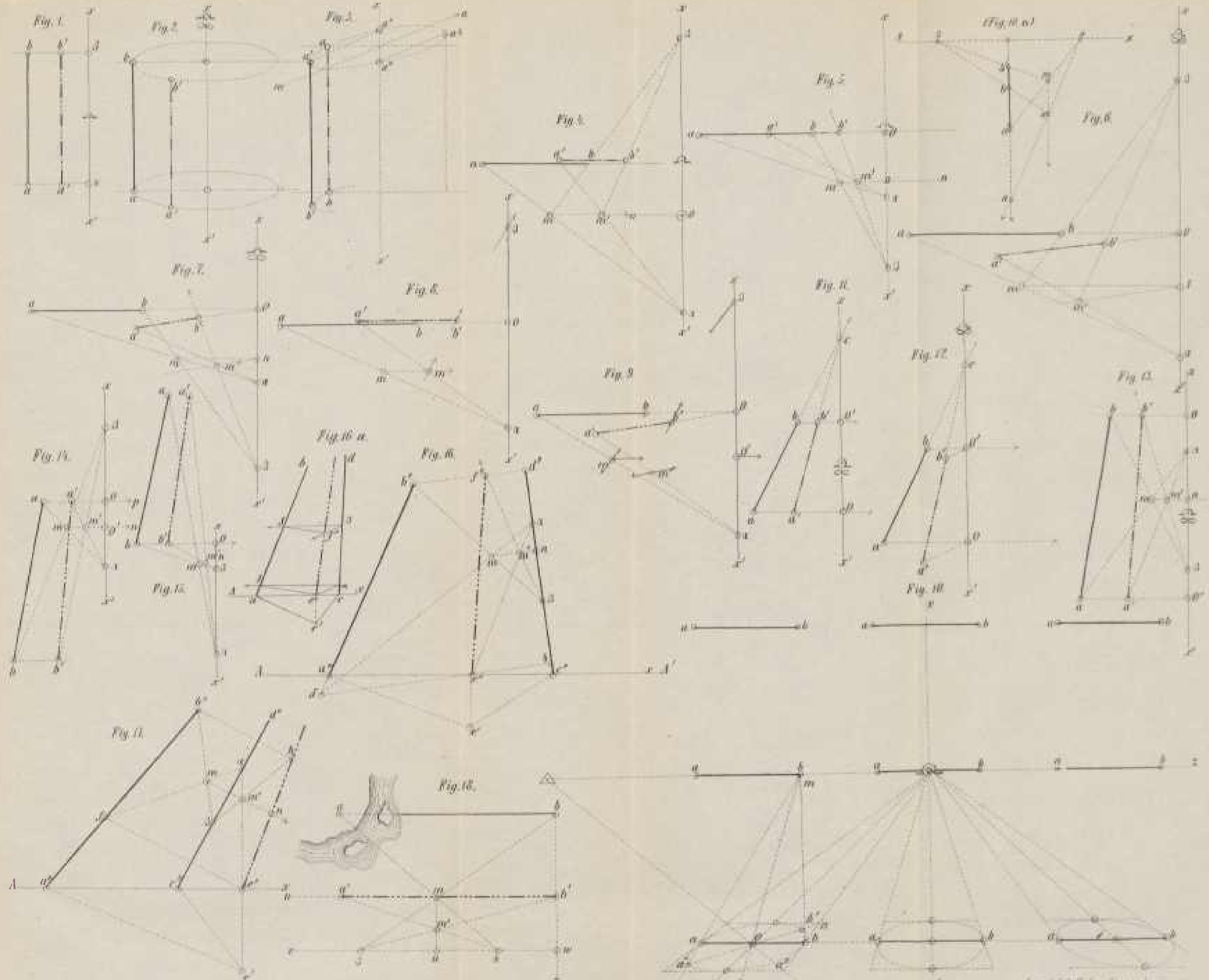
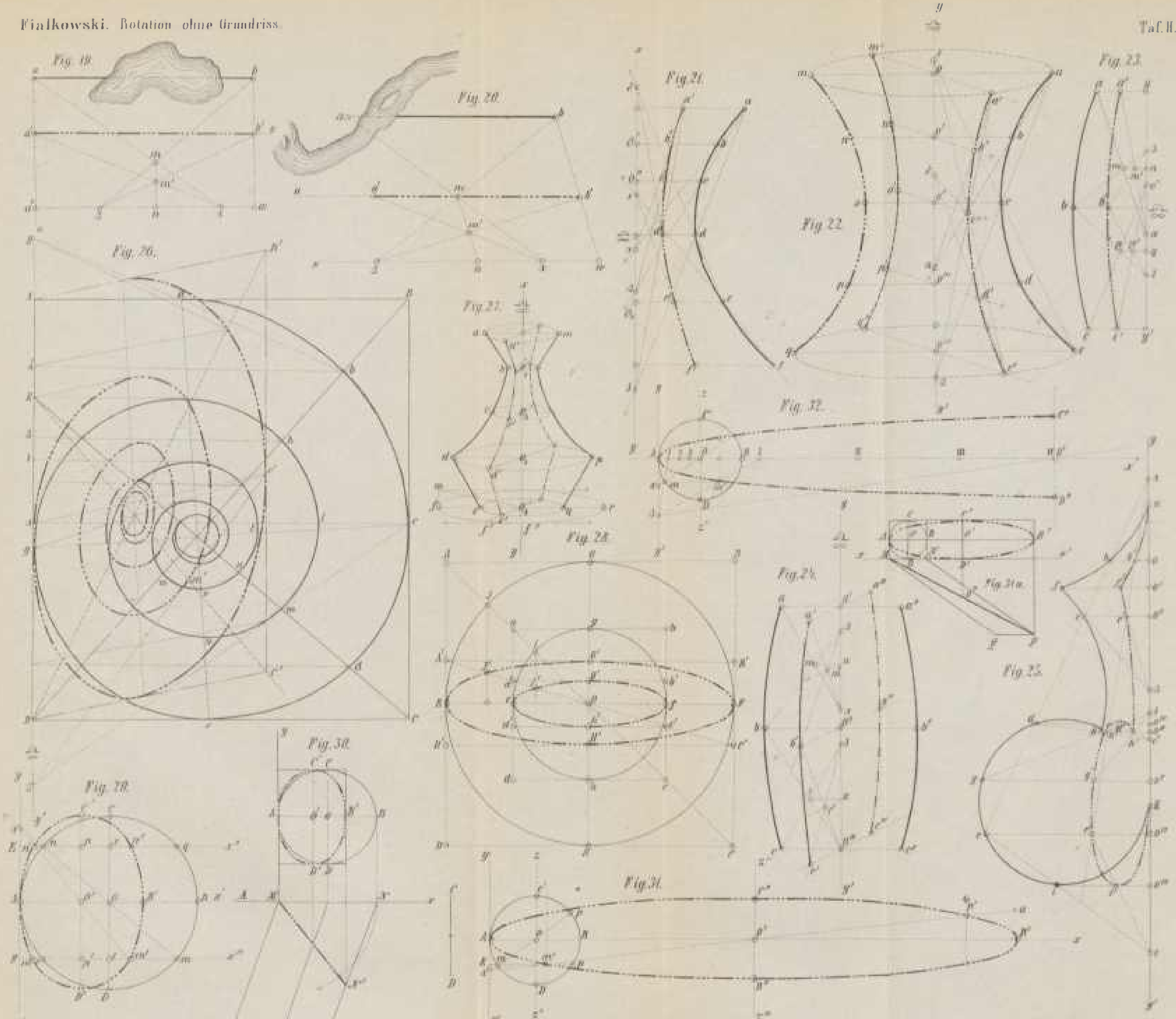


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 16 a.
Fig. 17.
Fig. 18.



Aus d. k.k. Hof- u. Staatsdruckerei

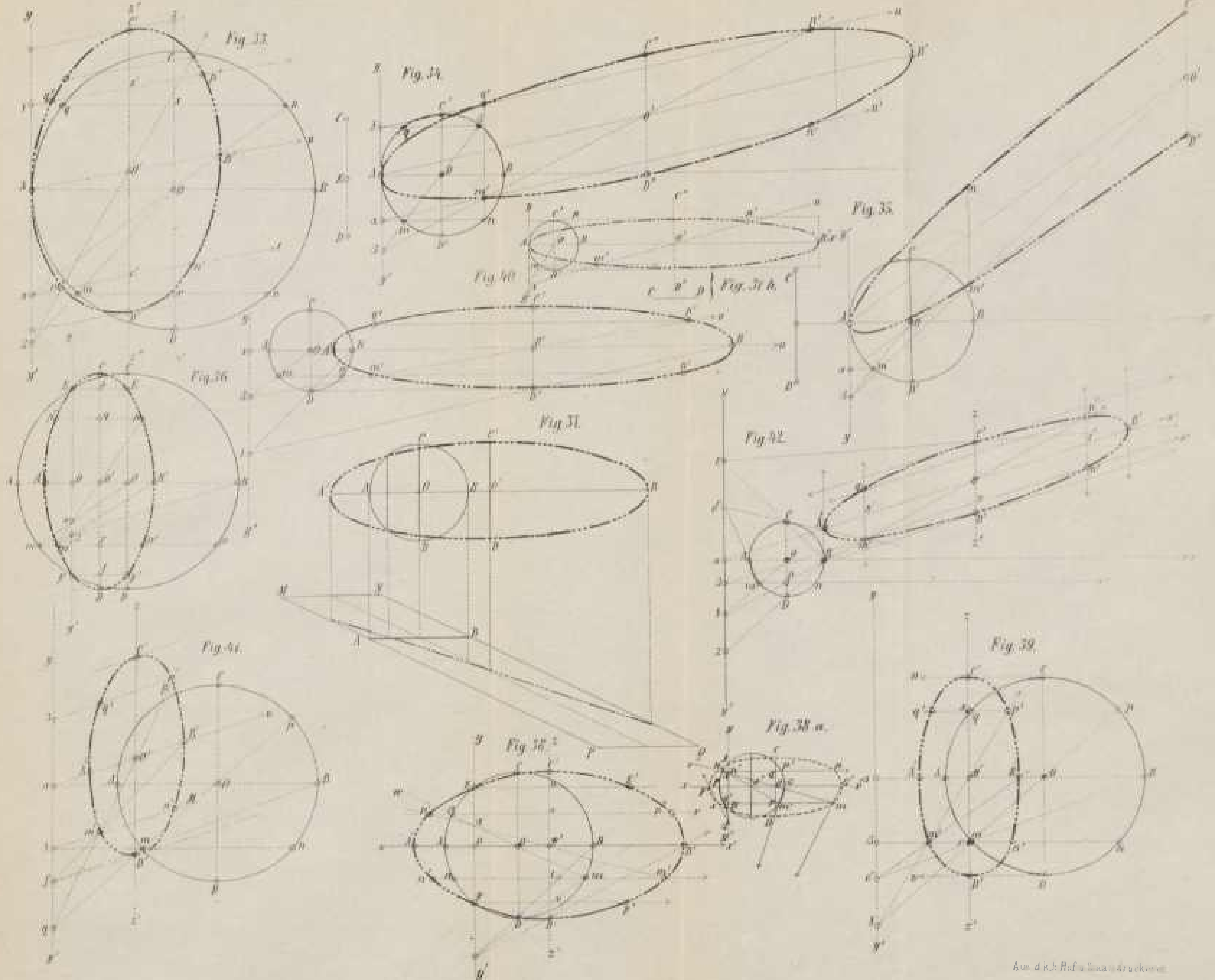


Fig. 33.
Fig. 34.
Fig. 35.
Fig. 36.
Fig. 37.
Fig. 37 b.
Fig. 38 a.
Fig. 38 b.
Fig. 39.
Fig. 40.
Fig. 41.
Fig. 42.