

*Über die Auflösung eines Systemes von mehreren unbestimm-
ten Gleichungen des ersten Grades in ganzen Zahlen,
welche eine grössere Anzahl von Unbekannten in sich
schliessen, als sie zu bestimmen vermögen.*

Von Dr. J. Heger.

Probleme der unbestimmten Analytik haben wohl bisher nur eine sehr untergeordnete Anwendung in der Analysis gefunden; aber dem erwähnten Probleme kann dieser Vorwurf nicht gemacht werden, da dasselbe für die verschiedensten Gebiete der Analysis eine nicht geringe, nur bis jetzt noch wenig beachtete Wichtigkeit besitzt. Es lassen sich solche Fälle in Unzahl anführen. Hier mögen einige Beispiele genügen.

Die Auflösung eines Systemes von binomischen Gleichungen höheren Grades mit mehreren Unbekannten, wie z. B.

$$x^m y^n = 1, \quad x^p y^q = 1 \dots \dots \dots (\alpha)$$

hängt ab von der Auflösung eines Systemes von zwei unbestimmten Gleichungen des ersten Grades:

$$m\xi + n\eta = i, \quad p\xi + q\eta = j \dots \dots \dots (\beta)$$

mit vier Unbekannten: ξ, η, i, j in ganzen Zahlen, und zwar zunächst nur von der Ermittlung von drei speciellen solchen Auflösungen. Die erste, wo $i=0$ und $j=0$ ist, fällt unmittelbar in die Augen. Ausser dieser hat man noch zwei andere zu suchen, nämlich eine, wo $j=0$ ist und i den möglich kleinsten, von Null verschiedenen Werth besitzt, für welchen ξ und η ganze Zahlen sind, und noch eine zweite, wo j von Null verschieden und den kleinstmöglichen Zahlwerth hat, dessen diese Unbekannte fähig ist, ohne den anderen i, ξ, η gebrochene Werthe aufzunöthigen. Hat man diese vollkommen bestimmten Werthe von i und j ermittelt, die beziehungsweise durch J und \mathfrak{J} angedeutet sein sollen, so ist die Hauptschwierigkeit über-

wunden. Die Werthe von x und y ergeben sich unmittelbar alle aus den Formeln:

$$x = e^{2\pi\xi\sqrt{-1}}, \quad y = e^{2\pi\eta\sqrt{-1}} \quad . \quad . \quad . \quad (\gamma)$$

wenn man in den Gleichungen (β) die Unbekannten i der Reihe nach durch die ganzen Zahlen: 1, 2, 3, J , j aber durch: 1, 2, 3 . . . \mathfrak{J} ersetzt und zwar auf alle möglichen Weisen, deren Anzahl gleichkommt dem Producte $J\mathfrak{J}$, die Werthe von ξ und η sucht und in die Gleichungen (γ) substituirt. Alle so gewonnenen Werthe x, y , deren Anzahl gleich $J\mathfrak{J}$ ist, sind von einander verschieden, erschöpfen aber auch alle bestehenden Auflösungen des Systemes (α). Diese Methode ist auch anwendbar, wenn die Anzahl der binomischen Gleichungen und darin erscheinenden Unbekannten grösser wird.

Eine andere Anwendung der Systeme unbestimmter Gleichungen des ersten Grades findet sich bei der Darstellung vielgliedriger Ausdrücke in symbolischer Form mit Hilfe des Summenzeichens, das man dem allgemeinen Gliede vorsetzt, weil sie die Ausdehnung der Summe feststellen.

Diese Art der Anwendung unbestimmter Gleichungen in der Analysis ist unter allen die häufigste.

Ein Beispiel dieser Art und von der einfachsten Gestalt ist die bekannte Polynomialformel:

$$\begin{aligned} & [a + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_r x^r]^n = \\ & = \mathfrak{S} \left\{ \frac{n!}{\alpha! \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_r!} a^\alpha a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \dots a_r^{\alpha_r} x^{\alpha + 2\alpha_2 + \dots + \alpha_r} \right\}. \end{aligned}$$

Hier bezieht sich die Summirung auf die Buchstaben $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$, und ist auf alle jene ganzen und positiven Werthe dieser Grössen auszudehnen, welche die Gleichung:

$$n = \alpha + \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_r$$

erfüllen. In diesem Falle liegt eine einzige Bedingungsgleichung vor und dieselbe ist auf alle möglichen Weisen in ganzen und positiven Zahlen aufzulösen, wenn das symbolisch ausgedrückte Polynom

wirklich entwickelt werden soll. Es können aber auch zwei und mehrere Bedingungsgleichungen zur Bestimmung der Ausdehnung der Summe auftreten. So z. B. ist in eben dieser Polynomialformel der Coefficient von x^m gegeben durch die Summe:

$$\sum \left\{ \frac{n!}{\alpha! \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_r!} a^\alpha a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \dots a_r^{\alpha_r} \right\}$$

und hier hat man die Summirung auf alle jene gauzen und positiven Werthe von $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ auszudehnen, welche gleichzeitig die zwei Gleichungen:

$$\begin{aligned} n &= \alpha + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_r \\ m &= \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \dots + r\alpha_r \end{aligned}$$

erfüllen. Ähnliche Formeln mit drei und noch mehr Bedingungsgleichungen lassen sich in Unzahl aufzählen; man begegnet ihnen in den verschiedensten Bereichen der Analysis.

Die Anwendungen der unbestimmten Gleichungen des ersten Grades und Systeme von solchen sind demnach sehr zahlreich und dadurch zur Genüge bewiesen, dass das oberwähnte Problem der unbestimmten Analytik eine nicht unbedeutende Wichtigkeit besitzt und jedenfalls viel öfter in Anwendung kommt, als die unbestimmten Probleme höheren Grades.

Es ist gewiss überraschend, dass gerade dieser Theil der unbestimmten Analytik noch, so zu sagen, in seiner Kindheit ist und keine allgemeine und zweckentsprechende Lösungsmethode für solche Systeme von Gleichungen besteht.

Die allgemeine Lösungsmethode für eine einzelne unbestimmte Gleichung des ersten Grades mit zwei Unbekannten ist schon lange bekannt. Euler hat sie zuerst angegeben und Lagrange zeigte später den Zusammenhang dieses Problems mit der Theorie der Kettenbrüche. Diese Methode ist gewisser Massen die Grundoperation für alle unbestimmten Probleme des ersten Grades.

Die Behandlung eines Systemes von mehreren unbestimmten Gleichungen des ersten Grades mit einer beliebig grossen Anzahl von Unbekannten war aber, einige specielle Fälle ausgenommen, nicht erledigt, sondern bestand mehr oder weniger nur in blossen Probiren, aber in keinem geregelten analytischen Verfahren. Der Weg, den man dabei einschlug, war stets den bekannten Auflösungs-

methoden für bestimmte Gleichungen des ersten Grades nachgebildet. Nun eignet sich aber von all' den verschiedenen Behandlungsweisen eines Systemes von mehreren bestimmten Gleichungen des ersten Grades nur das Substitutionsverfahren für die Auflösung eines Systems von mehreren unbestimmten Gleichungen. Dieses allein hatte einen Anspruch auf den Rang einer analytischen Methode. Alle übrigen für bestimmte Systeme bestehenden Auflösungsmethoden sind bei unbestimmten Gleichungen nicht anwendbar. Durch Elimination gelangt man nicht zum Ziele. Wenn aber schon bei den Systemen bestimmter Gleichungen des ersten Grades die Substitutionsmethode nicht allen Anforderungen genügt und andere Methoden von grösserer Durchsichtigkeit ein Bedürfniss sind, so stellt sich bei den unbestimmten Gleichungen ihre Mangelhaftigkeit in einem noch weit höheren Grade dar. Sehr oft handelt es sich weniger um das numerische Resultat als um die Feststellung eines allgemeinen Gesetzes. Ein Beispiel dieser Art ist der von Crammer gegebene Lehrsatz für die Auflösung eines Systemes von mehreren bestimmten Gleichungen des ersten Grades, überhaupt die Lehre von der Determinante. Dieser Satz ist für die numerische Berechnung meist nur von einer untergeordneten Rolle, findet aber in den verschiedensten Bereichen der Analysis seine Anwendung und ist von unbestreitbarer Wichtigkeit. Ein ähnliches Bedürfniss stellt sich auch bei den unbestimmten Problemen des ersten Grades heraus, und die auf das Substitutionsverfahren gegründete Auflösung ist keineswegs im Stande, diesen Anforderungen Genüge zu leisten. Von diesem Gesichtspunkte aus ist das erwähnte Problem der unbestimmten Analytik noch bis zum heutigen Tage als ungelöst zu betrachten. Die in der vorliegenden Abhandlung niedergelegten Resultate sind keineswegs nur eine Verbesserung oder Verallgemeinerung bereits bekannter Methoden, sondern vollkommen neu.

Gauss hat in seinem berühmten Werke: *Disquisitiones arithmeticae*, pag. 26—30, wohl ein ähnliches Problem behandelt, nämlich die Auflösung eines Systemes von mehreren Congruenzen des ersten Grades mit einer gleich grossen Anzahl von Unbekannten und einem gemeinschaftlichen Modulus. Es gibt auch Fälle, in welchen sich ein System von mehreren unbestimmten Gleichungen darauf zurückführen lässt; allein dies ist keineswegs allgemein der Fall. Dort findet sich die Behauptung ausgesprochen, dass, ähnlich wie bei

Gleichungen, stets so viele Congruenzen erforderlich seien, als Unbekannte vorliegen. Die Behandlung dieses Problemes stützt sich auf die Giltigkeit dieser Behauptung und ist dem bekannten Eliminationsverfahren für lineare Gleichungen vollkommen nachgebildet. Nun kann man sich aber sehr leicht von der Unrichtigkeit der zu Grunde gelegten Behauptung überzeugen. Die vorausgesetzte Gleichheit zwischen der Anzahl der Congruenzen und jener der Unbekannten ist keine nothwendige. Eine einzige Congruenz genügt, um eine beliebig grosse Anzahl von Unbekannten zu bestimmen, und eine einzige Unbekannte kann mehrere verschiedene Congruenzen gleichzeitig erfüllen. Widersprüche, denen man gelegentlich dabei begegnet und die das Problem unmöglich machen, können sowohl bei einer einzigen Congruenz mit einer einzigen Unbekannten, als auch bei einem Systeme von mehreren Congruenzen mit einer beliebigen Anzahl von Unbekannten vorkommen; sie hängen von ganz anderen Umständen ab. Die von Gauss gegebene Auflösung ist daher keine allgemein anwendbare Methode, und es dürfte wohl schwer halten, sie für jene anderen Fälle anzupassen, wo die Anzahl der Congruenzen von jener der Gleichungen verschieden ist. Die in der vorliegenden Abhandlung auseinandergesetzte Lösungsmethode ist auf dieses Problem anwendbar und zwar nicht bloß unter der von Gauss gemachten Beschränkung, sondern ganz allgemein, selbst dann noch, wenn die Moduli der verschiedenen Congruenzen verschieden sind. Sie hat mit dem von Gauss eingeschlagenen Wege nicht die entfernteste Ähnlichkeit.

Um von den Hauptergebnissen in der vorliegenden Abhandlung eine klare Darstellung zu geben, ohne die Deutlichkeit durch eine unnütze Complication zu beeinträchtigen, eignet sich am besten ein System von zwei unbestimmten Gleichungen wie das folgende:

$$(A) \quad \begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 u + e_1 v + g_1 w &= k_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 u + e_2 v + g_2 w &= k_2. \end{aligned}$$

Hier sind x, y, z, u, v, w die Unbekannten und $a_1, b_1, c_1, \dots, a_2, b_2, c_2, \dots$ bestimmte ganze Zahlen, und es handelt sich um die Ermittlung der ganzen Werthe der Unbekannten, welche diese Gleichungen erfüllen.

Die Auflösung dieser Gleichungen zerfällt, wie jedes andere unbestimmte Problem, in drei getrennte Untersuchungen. Erstens

hat man die Frage zu beantworten, ob durch ganze Werthe sämtlicher Unbekannten beiden Gleichungen (*A*) gleichzeitig genügt werden könne, oder nicht. Zweitens sind gewisse specielle Auflösungen aufzusuchen, wobei die Werthe einiger Unbekannten beschränkt sind entweder auf Null, oder auf die numerisch kleinsten von Null verschiedenen ganzen Werthe, deren sie fähig sind, ohne den übrigen gebrochene Werthe aufzunöthigen. Drittens hat man aus den gefundenen speciellen Auflösungen eine allgemeine Formel zusammzusetzen, in der eine bestimmte Anzahl von willkürlichen Grössen erscheinen, denen man alle möglichen ganzen (sowohl die positiven als negativen) Zahlwerthe ertheilen darf und die alle bestehenden ganzen Auflösungen in sich schliesst.

Alle diese drei Untersuchungen werden nicht an dem vorgelegten Systeme vollführt, sondern an einer Gruppe von Grössen, die daraus abgeleitet werden und mit der Determinante eines Systemes von zwei bestimmten Gleichungen Ähnlichkeit besitzen. Aus den vier Coefficienten:

$$\begin{array}{cc} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{array}$$

lässt sich nämlich eine Grösse ($a_1 b_2 - a_2 b_1$) bilden. Diese ist die Determinante des folgenden Systemes von zwei Gleichungen:

$$\begin{array}{l} a_1 x + b_1 y = k_1 \\ a_2 x + b_2 y = k_2; \end{array}$$

sie soll kurz durch (*ab*) bezeichnet werden.

Bei dem vorliegenden Systeme (*A*) lassen sich mehrere solche Grössen bilden. Sie sind folgende:

$$\begin{array}{cccccc} (ab) & (ac) & (ad) & (ae) & (ag) & \\ & (bc) & (bd) & (be) & (bg) & (D) \\ & & (cd) & (ce) & (cg) & \\ & & & (de) & (dg) & \\ & & & & (eg) & \end{array}$$

Man kann sie füglich die Determinanten des vorliegenden Systemes nennen.

Ausser diesen Grössen (*D*) bestehen noch andere, ihnen ähnliche:

$$(ka) \quad (kb) \quad (kc) \quad (kd) \quad (ke) \quad (kg). \quad (K)$$

Diese Gleichungen leiten sich aus den Grössen (D) und (K) ab nach einer Regel, die später folgen wird; x, y, z, \dots, u, v, w sind die eigentlichen Unbekannten und mit x, y, z, \dots, u, v, w identisch wenn der Grösse \mathfrak{N} , welche in diesen Formeln erscheint, der Werth $\mathfrak{N}=1$ ertheilt wird. Im Allgemeinen sind: $\frac{x}{\mathfrak{N}}, \frac{y}{\mathfrak{N}}, \frac{z}{\mathfrak{N}}, \frac{u}{\mathfrak{N}}, \frac{v}{\mathfrak{N}}, \frac{w}{\mathfrak{N}}$ mit x, y, z, u, v, w identisch, so dass diese Formeln auch geeignet sind, die Werthe der Unbekannten in Bruchform zu erhalten. Die erste Gruppe dieser Gleichungen (B) , umfasst lauter unbestimmte Gleichungen mit je zwei Unbekannten. $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}, \mathfrak{U}$ sind nämlich Hilfsunbekannte, deren Werthe aber nicht gesucht werden. Man könnte sie auch aus den Formeln (B) herauschaffen, wenn man statt des Gleichheitszeichens $=$ das Congruenzzeichen \equiv setzt und die Coefficienten der Hilfsgrössen als die Modulus dieser Congruenzen ansetzt. Die Auflösung dieser Gleichungen oder Congruenzen beginnt man mit der ersten derselben, nachdem man früher \mathfrak{N} durch Eins oder einen andern durch die Umstände verlangten Werth ersetzt hat; sie liefert immer einen ganzen Werth für x . Nun gelangt man zur zweiten Gleichung, ersetzt in ihr \mathfrak{N} und x durch ihre bestimmten Werthe und findet aus ihr einen ganzen Werth für y . In derselben Weise findet man aus der dritten Gleichung den Werth von z und aus der vierten jenen von u , sämmtlich in ganzen Zahlen. Im Grunde findet man für jede dieser Grössen unendlich viele ganze Werthe, aber man braucht nur einen einzigen und zwar meistens den numerisch kleinsten zu ermitteln. Die gefundenen Werthe x, y, z, u setzt man nun in die beiden Gleichungen (C) und erhält so unmittelbar v und w gleichfalls in ganzen Zahlen. Die erhaltenen Werthe: x, y, z, u, v, w sind nun die Zähler der mit dem Nenner \mathfrak{N} versehenen gebrochenen Werthe von x, y, z, u, v, w ; und wenn $\mathfrak{N} = 1$ angenommen wurde, stellen sie die Werthe der Unbekannten selber dar.

Aus der Form dieser Gleichungen folgt wohl keineswegs durch den blossen Anblick, dass sie ganze Zahlwerthe für x, y, z, u, v, w zu liefern vermögen, allein die in den zweiten Theilen angedeuteten Divisionen durch f, f_x, f_y, f_z (*eq*) lassen sich immer ohne Rest vollführen, wenn man für \mathfrak{N}, x, y, z, u die durch die Analyse gegebenen Werthe setzt.

In diesen Gleichungen erscheinen Grössen, deren Bedeutung erst angegeben werden muss. φ ist der grösste gemeinschaftliche

Factor aller Grössen (D) und (K) zusammengenommen, $\varphi\varphi_k = f$ den grössten gemeinschaftlichen Factor aller Grössen (D); $f_x = \varphi\varphi_k\varphi_x$ den grössten gemeinschaftlichen Factor aller jener Grössen (D), die kein a in sich enthalten, somit nach dem Weglöschen der ersten Horizontalreihe derselben übrig bleiben. $f_y = \varphi\varphi_k\varphi_x\varphi_y$ entspricht allen von a und b freien, d. h. nach dem Weglöschen der zwei obersten Horizontalreihen übrig bleibenden Determinanten (D), $f_z = \varphi\varphi_k\varphi_x\varphi_y\varphi_z$ den von a, b, c freien und endlich $\varphi\varphi_k\varphi_x\varphi_y\varphi_z\varphi_u$ ist gleich (eg). $\varphi\varphi_k\psi_x$ ist der grösste gemeinschaftliche Factor aller jener Determinanten, welche a enthalten, und die erste Horizontalreihe in (D) bilden; $\varphi\varphi_k\varphi_x\psi_y$ entspricht der zweiten Horizontalreihe, $\varphi\varphi_k\varphi_x\varphi_y\psi_z$ der dritten, $\varphi\varphi_k\varphi_x\varphi_y\varphi_z\psi_u$ der vierten.

Nach dieser Auseinandersetzung ist es klar, dass ψ_x gegen φ_x , ψ_y gegen φ_y , ψ_z gegen φ_z , ψ_u gegen φ_u relative Primzahlen sind und demnach die Gleichungen (B) ganze Auflösungen besitzen, weil die in den zweiten Theilen erscheinenden Ausdrücke in Wirklichkeit keine Brüche sind, sondern ganze Zahlen.

Die im zweiten Theile der Gleichungen erscheinenden Grössen K, A, B, C sind durch folgende Formeln gegeben:

$$K_x = (kb)\beta + (kc)\gamma + (kd)\delta + (ke)\varepsilon + (kg)\eta$$

$$K_y = (kc)\gamma' + (kd)\delta' + (ke)\varepsilon' + (kg)\eta'$$

$$A_y = (ac)\gamma' + (ad)\delta' + (ae)\varepsilon' + (ag)\eta'$$

$$K_z = (kd)\delta'' + (ke)\varepsilon'' + (kg)\eta''$$

$$A_z = (ad)\delta'' + (ae)\varepsilon'' + (ag)\eta''$$

$$B_z = (bd)\delta'' + (be)\varepsilon'' + (bg)\eta''$$

$$K_u = (ke)\varepsilon''' + (kg)\eta'''$$

$$A_u = (ae)\varepsilon''' + (ag)\eta'''$$

$$B_u = (be)\varepsilon''' + (bg)\eta'''$$

$$C_u = (ce)\varepsilon''' + (cg)\eta'''$$

und die Grössen $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \eta$ bedeuten ganze Zahlen, welche die Gleichungen erfüllen.

$$(ab)\beta + (ae)\gamma + (ad)\delta + (ae)\varepsilon + (ag)\eta = \varphi\varphi_k\psi_x$$

$$(bc)\gamma' + (bd)\delta' + (be)\varepsilon' + (bg)\eta' = \varphi\varphi_k\varphi_x\psi_y$$

$$(cd)\delta'' + (ce)\varepsilon'' + (cg)\eta'' = \varphi\varphi_k\varphi_x\varphi_y\psi_z$$

$$(de)\varepsilon''' + (dg)\eta''' = \varphi\varphi_k\varphi_x\varphi_y\varphi_z\psi_u.$$

Hieraus ist ersichtlich, wie die Gleichungen (B) zu bilden sind. Es wird dazu die Auflösung von unbestimmten Hilfsleichungen in ganzen Werthen nach β , γ , δ , ε , η erfordert. Die anderen Gleichungen (C) gehen auf bekannte Weise durch Elimination von w , beziehungsweise von y hervor.

3. Aufstellung der allgemeinen Formel für ganze Auflösungen des vorgelegten Systemes.

Diese Formel ist folgende:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + x_1 \xi_1 \\ y &= y_0 + y_1 \xi_1 + y_2 \xi_2 \\ z &= z_0 + z_1 \xi_1 + z_2 \xi_2 + z_3 \xi_3 \\ u &= u_0 + u_1 \xi_1 + u_2 \xi_2 + u_3 \xi_3 + u_4 \xi_4 \\ v &= v_0 + v_1 \xi_1 + v_2 \xi_2 + v_3 \xi_3 + v_4 \xi_4 \\ w &= w_0 + w_1 \xi_1 + w_2 \xi_2 + w_3 \xi_3 + w_4 \xi_4. \end{aligned} \tag{E}$$

Sie enthält vier willkürliche Grössen ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 , ξ_4 , weil im Systeme (A) vier Unbekannte überschüssig sind. Hier handelt es sich um Bestimmung der Zahlwerthe der Coëfficienten x_0 , x_1 , y_0 , y_1 , y_2 Man findet jede Verticalreihe von solchen Coëfficienten durch eine gesonderte Rechnung, aber immer durch Auflösung der Gleichungen (B) und (C). Die erste Verticalreihe von Coëfficienten: x_0 , y_0 , z_0 , u_0 , v_0 , w_0 ergibt sich (vorausgesetzt, dass ganze Auflösungen möglich sind, d. h. dass $\varphi_n = \frac{f}{\varphi}$ zufällig den Werth Eins besitzt), wenn man $\mathfrak{N}=1$ annimmt und nun die Gleichungen (B) und (C) der Reihe nach auflöst und für x_0 , y_0 , z_0 , u_0 die numerisch kleinsten Werthe erwählt, deren sie fähig sind. Die zweite Verticalreihe der Coëfficienten: x_1 , y_1 , z_1 , u_1 , v_1 , w_1 geht hervor, wenn man $\mathfrak{N} = 0$ setzt und für x_1 den numerisch kleinsten, aber von Null verschiedenen Werth φ_x annimmt, wodurch die erste der Gleichungen (B) identisch erfüllt ist. Die übrigen liefern der Reihe nach y_1 , z_1 , u_1 , v_1 , w_1 in bekannter Weise. Für die dritte Verticalreihe hat man von den Anfangswerthen: $\mathfrak{N} = 0$, $x = 0$, $y = \varphi_y$ auszugehen, für die vierte $\mathfrak{N} = 0$, $x = 0$, $y = 0$, $z = \varphi_z$ und für die fünfte und letzte $\mathfrak{N} = 0$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $u = \varphi_u$ anzunehmen und die Gleichungen (B) und (C) aufzulösen.

Hiermit sind alle Coëfficienten der Formel (E) bekannt und das vorgelegte Problem vollständig gelöst.

Für Systeme von mehreren Gleichungen bleibt der Gang der Rechnung im Wesentlichen derselbe, nur treten Determinanten von höherer Ordnung auf und in grösserer Anzahl.

Hierdurch vermehrt sich der Rechnungsaufwand allerdings, aber es ist dies nicht ein Nachtheil, hervorgerufen durch eine unzweckmässige Methode, sondern in der Natur eines solchen Problems begründet.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse](#)

Jahr/Year: 1856

Band/Volume: [21](#)

Autor(en)/Author(s): Heger Ignaz Jacob

Artikel/Article: [Über die Auflösung eines Systems von mehreren unbestimmten Gleichungen des ersten Grades in ganzen Zahlen, welche eine grössere Anzahl von Unbekannten in sich schliessen, als sie zu bestimmen vermögen. 550-560](#)