Integration der Differentialgleichung

(1) $$(a_2+b_2x)\, y''+ (a_1+b_1x)\, y'+ (a_0+b_0x)\, y=o.$$

Von **Simon Spitzer.**

(Vorgetragen in der Sitzung am 22. Mai 1857.)

Obige Differentialgleichung war in letzter Zeit Gegenstand der Untersuchungen Petzval's, die derselbe in seinem Werke „Integration der linearen Differentialgleichungen mit constanten und veränderlichen Coëfficienten", von welchem gegenwärtig vier Lieferungen erschienen sind, niederlegte. Ich habe mich vor Kurzem mit der Integration derselben Gleichung beschäftigt, und bin, durch eine glückliche Anwendung der von Liouville im 13. Bande des „Journal de l'école polytechnique" bei Gelegenheit der Integration der Gleichung

$$(mx^2+nx+p)\frac{d^2y}{dx^2}+(qx+r)\frac{dy}{dx}+sy=o$$

gebrauchten Methode, zu höchst einfachen Formeln gelangt, mittelst welcher das Integrale obiger Gleichung fast augenblicklich angegeben werden kann. Es war mir alsdann ein leichtes, die Methode auf die Integration von Differenzen, Gleichungen und Differentialgleichungen höherer Ordnung mit Coëfficienten der Form $a+bx$ auszudehnen.

Bevor ich zur Integration obiger Differentialgleichung schreite, will ich, der Einfachheit der Untersuchung wegen, statt der Constanten a_2 a_1 a_0 b_2 b_1 und b_0, andere, sich unsern Rechnungen inniger anschmiegende Constante einführen, zu denen ich auf folgende Weise gelange.

Ich bilde den Bruch

$$\frac{a_2u^2+a_1u+a_0}{b_2u^2+b_1u+b_0}$$

und zerlege denselben in Partialbrüche, sei

$$\frac{a_2u^2+a_1u+a_0}{b_2u^2+b_1u+b_0}=m+\frac{A}{u-\alpha}+\frac{B}{u-\beta}$$

so sind m, A, B, α und β die neu einzuführenden Constanten. — Aus dieser Gleichung, die sich auch so schreiben lässt:

$$\frac{a_2u^2+a_1u+a_0}{b_2u^2+b_1u+b_0}=\frac{mb_2\,[u^2-(\alpha+\beta)u+\alpha\beta]+A\,b_2(u-\beta)+B\,b_2(u-\alpha)}{b_2\,[u^2-(\alpha+\beta)\,u+\alpha\beta]}$$

folgen:

$$\begin{aligned}
a_2 &= mb_2\\
a_1 &= b_2\,[A+B-m(\alpha+\beta)]\\
a_0 &= b_2\,[m\,\alpha\beta-A\beta-B\alpha]\\
b_1 &= -b_2(\alpha+\beta)\\
b_0 &= b_2\,\alpha\beta
\end{aligned}$$

und werden diese Werthe in die vorgelegte Gleichung eingeführt, so nimmt dieselbe folgende Gestalt an:

$$(2)\quad (m+x)y''+[A+B-(\alpha+\beta)(m+x)]\,y'+[-A\beta-B\alpha+\alpha\beta(m+x)]\,y=o$$

und es handelt sich daher um die Integration dieser Gleichung.

Setzt man nun

$$y=e^{\alpha x}z$$

unter z eine neue Variable verstanden, so ist

$$\begin{aligned}
y' &= e^{\alpha x}(z'+\alpha z)\\
y'' &= e^{\alpha x}(z''+2\,\alpha z'+\alpha^2 z)
\end{aligned}$$

und aus der Gleichung (2) geht hervor die Gleichung

$$(3)\quad (m+x)\,z''+[A+B+(\alpha-\beta)\,(m+x)]\,z'+A(\alpha-\beta)\,z=o$$

welche einfacher gebaut ist, als die Gleichung (2), da im letzten Coëfficienten der mit x verknüpfte Theil verschwunden ist.

Wird nun diese Gleichung einer μ fachen Differentiation unterworfen, unter μ eine, einstweilen noch unbestimmte Zahl verstanden, so erhält man:

$$(4)\quad (m+x)z^{(\mu+2)}+[\mu+A+B+(\alpha-\beta)(m+x)]z^{(\mu+1)}+(\mu+A)(\alpha-\beta)z^{(\mu)}=o$$

und diese Gleichung vereinfacht sich, wenn man

$$\mu=-A$$

setzt, man erhält nämlich hiedurch

$$(m+x)z^{(-A+2)}+[B+(\alpha-\beta)\,(m+x)]z^{(-A+1)}=o$$

Durch Trennung der Variablen kommt man zu

$$\frac{d\,z^{(-A+1)}}{z^{(-A+1)}} = -\frac{B\,dx}{m+x} + (\beta-\alpha)\,dx$$

deren Integrale ist:

$$\log z^{(-A+1)} = (\beta-\alpha)\,x - B\log(m+x)$$

woraus folgt:

$$z^{(-A+1)} = \frac{e^{(\beta-\alpha)x}}{(m+x)^B}$$

Man hat daher

$$z = \frac{d^{A-1}}{dx^{A-1}}\left[\frac{e^{(\beta-\alpha)x}}{(m+x)^B}\right]$$

und folglich

$$y = e^{\alpha x}\frac{d^{A-1}}{dx^{A-1}}\left[\frac{e^{(\beta-\alpha)x}}{(m+x)^B}\right].$$

Vertauscht man in dieser Formel A mit B und zugleich α mit β, so erhält man das zweite particuläre Integrale; das vollständige Integrale der gegebenen Differentialgleichung ist daher:

$$(5)\qquad y = C_1 e^{\alpha x}\frac{d^{A-1}}{dx^{A-1}}\left[\frac{e^{(\beta-\alpha)x}}{(m+x)^B}\right] + C_2 e^{\beta x}\frac{d^{B-1}}{dx^{B-1}}\left[\frac{e^{(\alpha-\beta)x}}{(m+x)^A}\right]$$

Wir können, bevor wir weiter gehen, folgende Bemerkung nicht unterdrücken. Ist μ eine ganze positive Zahl, so ist die Gleichung (4), welche durch μ maliges Differenziren der Gleichung (3) hervorging, ganz tadelfrei; ist aber μ eine ganze negative Zahl, so wurde die Gleichung (3) einer $-\mu$ maligen Integration unterworfen, im zweiten Theile der Gleichung (4) sollte daher eigentlich statt Null folgender Ausdruck stehen:

$$A_1 + A_2 x + A_3 x^2 + \ldots\ldots + A_{-\mu-1}\,x^{-\mu-1}$$

ist endlich μ eine gebrochene, irrationale, oder gar imaginäre Zahl, so ist im zweiten Theil der Gleichung (4) eine Function von x zu setzen, deren $-\mu^{\text{ter}}$ Differentialquotient gleich Null ist; wir wollen diese, von Liouville in die Mathematik eingeführte, von ihm „fonction complémentaire“ genannte Function mit ψ bezeichnen, und haben somit:

$$(m+x)\,z^{(-A+2)} + [B + (\alpha-\beta)(m+x)]\,z^{(-A+1)} = \psi$$

woraus durch Integration und nachherige Substitution von $y = e^{\alpha x} z$

$$y=C_1e^{\alpha x}\frac{d^{A-1}}{dx^{A-1}}\left[\frac{e^{(\beta-\alpha).x}}{(m+x)^B}\right]+e^{\alpha x}\frac{d^{A-1}}{dx^{A-1}}\left[\frac{e^{(\beta-\alpha).x}}{(m+x)^B}\int(m+x)^{B-1}e^{(\alpha-\beta)x}\psi dx\right]$$

folgt, was ebenfalls ein vollständiges Integrale der vorgelegten Gleichung ist. Es ist in vielen Fällen, namentlich in dem jetzt eben durchgeführten, einfacher $\psi=o$ anzunehmen; man erhält auf diese Weise freilich nur ein particuläres Integrale, allein das zweite lässt sich, wie wir vorhin gemacht, sehr leicht durch blosse Vertauschung der Buchstaben aufstellen. Sollte bei der wirklichen Entwickelung der Formel (5) die Anzahl der in Rechnung tretenden Constanten grösser als zwei sein, so hat man den gewonnenen Ausdruck in die vorgelegte Gleichung zu substituiren; das Resultat, das offenbar identisch sein muss, gibt dann den nothwendigen Aufschluss über den Werth der überschüssigen Constanten. Sehr oft kommt man schon bei der wirklichen Berechnung eines particulären Integrals zum vollständigen Integrale. Einige Beispiele mögen zur Erläuterung dienen.

1. Beispiel: Es sei $A=o$, alsdann folgt aus (5)

$$y = C_1 e^{\alpha x}\int\frac{e^{(\beta-\alpha).x}}{(m+x)^B}dx + C_2 e^{\alpha x}$$

2. Beispiel: Es sei:

$$x y''+ a y'- b^2 x y = o.$$

In diesem Falle ist

$$\frac{a u}{u^2-b^2} = \frac{\frac{a}{2}}{u+b} + \frac{\frac{a}{2}}{u-b}$$

und folglich:

$$y = C_1 e^{-bx}\frac{d^{\frac{a}{2}-1}}{dx^{\frac{a}{2}-1}}\left[\frac{e^{2bx}}{x^{\frac{a}{2}}}\right] + C_2 e^{bx}\frac{d^{\frac{a}{2}-1}}{dx^{\frac{a}{2}-1}}\left[\frac{e^{-2bx}}{x^{\frac{a}{2}}}\right].$$

Ist $\frac{a}{2}$ eine ganze positive oder negative Zahl, so ist y sehr leicht entwickelbar; man hat nämlich die eingeklammerten Ausdrücke mehrmals zu differenziren, oder mehrmals zu integriren.

Man kann auch, um noch schneller zum Ziel zu gelangen, von folgender Formel Gebrauch machen:

$$\frac{d^\mu(PQ)}{dx^\mu} = P\frac{d^\mu Q}{dx^\mu} + \binom{\mu}{1}\frac{dP}{dx}\cdot\frac{d^{\mu-1}Q}{dx^{\mu-1}} + \binom{\mu}{2}\cdot\frac{d^2P}{dx^2}\cdot\frac{d^{\mu-2}Q}{dx^{\mu-2}} + \ldots.$$

setzt man nämlich:

$$P = x^{-\frac{a}{2}}, \qquad Q = e^{\pm 2bx},$$

wo von den beiden Zeichen $\pm$ das obere für das erste, das untere für das zweite particuläre Integrale gibt, so erhält man:

$$y = G_1 x^{-\frac{a}{2}} e^{bx} \left\{ 1 - \binom{\frac{a}{2}-1}{1} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{2bx} + \binom{\frac{a}{2}-1}{2} \frac{a}{2} \left(\frac{a}{2}+1\right) \cdot \frac{1}{4b^2x^2} - \ldots \right\} +$$
$$+ G_2 x^{-\frac{a}{2}} e^{-bx} \left\{ 1 + \binom{\frac{a}{2}-1}{1} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{2bx} + \binom{\frac{a}{2}-1}{2} \frac{a}{2} \left(\frac{a}{2}+1\right) \cdot \frac{1}{4b^2x^2} + \ldots \right\}$$

wo G_1 und G_2 die willkürlichen Constanten bezeichnen. Diese Reihen brechen, wie man sieht, jedesmal ab, wenn $\frac{a}{2}$ eine ganze positive oder negative Zahl ist. Hätte man z. B. $a = -2$, so bekäme man als Integrale der Gleichung

$$x y'' - 2 y' - b^2 x y = o$$

$$y = G_1 e^{bx}\left(x - \frac{1}{b}\right) + G_2 e^{-bx}\left(x + \frac{1}{b}\right).$$

Ist $\frac{a}{2}$ eine gebrochene oder irrationale oder gar imaginäre Zahl, so sind die für y aufgestellten Reihen divergent, denn es ist:

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \pm \frac{(a-2n)(a+2n-2)}{8bnx}$$

und dies wächst mit dem Wachsen von n über alle Grenzen.

Ist daher $\frac{a}{2}$ keine ganze Zahl, so ist das eben in Reihenform gefundene y unbrauchbar und man muss, um eine brauchbare Reihe zu erhalten, y auf andere Art entwickeln.

Setzt man nämlich alsdann

$$P = e^{\pm 2bx} \qquad Q = x^{-\frac{a}{2}}$$

so ist:

$$y = C_1 e^{bx} \left\{ \frac{d^{\frac{a}{2}-1}}{dx^{\frac{a}{2}-1}} \left(\frac{1}{x^{\frac{a}{2}}}\right) + 2b \binom{\frac{a}{2}-1}{1} \frac{d^{\frac{a}{2}-2}}{dx^{\frac{a}{2}-2}} \left(\frac{1}{x^{\frac{a}{2}}}\right) + 4b^2 \binom{\frac{a}{2}-1}{2} \frac{d^{\frac{a}{2}-3}}{dx^{\frac{a}{2}-3}} \left(\frac{1}{x^{\frac{a}{2}}}\right) + \ldots \right\} +$$
(6)
$$+ C_2 e^{-bx} \left\{ \frac{d^{\frac{a}{2}-1}}{dx^{\frac{a}{2}-1}} \left(\frac{1}{x^{\frac{a}{2}}}\right) - 2b \binom{\frac{a}{2}-1}{1} \frac{d^{\frac{a}{2}-2}}{dx^{\frac{a}{2}-2}} \left(\frac{1}{x^{\frac{a}{2}}}\right) + 4b^2 \binom{\frac{a}{2}-1}{2} \frac{d^{\frac{a}{2}-3}}{dx^{\frac{a}{2}-3}} \left(\frac{1}{x^{\frac{a}{2}}}\right) - \ldots \right\}$$

und die hier aufgestellten Reihen sind für jedes a convergent, wie wir gleich zeigen wollen. Behufs des Beweises bilden wir uns:

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \pm 2b \cdot \frac{\frac{a}{2}-n}{n} \cdot \frac{\dfrac{d^{\frac{a}{2}-n-1}}{d\, x^{\frac{a}{2}-n-1}} \left(\dfrac{1}{x^{\frac{a}{2}}}\right)}{\dfrac{d^{\frac{a}{2}-n}}{dx^{\frac{a}{2}-n}} \left(\dfrac{1}{x^{\frac{a}{2}}}\right)}$$

und unterscheiden jetzt zwei Fälle, nämlich 1. wenn a positiv und 2. wenn a negativ ist, jeder dieser Fälle muss wieder in zwei gesondert werden, nämlich in den, wo a ganz, und in den, wo a gebrochen ist.

1. Es sei a eine ganze und positive Zahl; wir können dieselbe auch als ungerade voraussetzen, da der Fall, wo sie gerade ist, schon besprochen wurde.

Wir haben alsdann:

$$(7) \qquad \frac{1}{x^{\frac{a}{2}}} = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)} \int_0^\infty e^{-\omega x} \omega^{\frac{a}{2}-1}\, d\omega$$

wo $\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)$ die Euler'sche Transcendente der zweiten Art ist, die durch folgende Formel definirt wird

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\omega} \omega^{\alpha-1}\, d\omega$$

welche für alle positiven Werthe von α angebbare Werthe hat. Wird die Gleichung (7) $-\frac{a}{2}+1$ Mal differenzirt, so erhält man:

$$\frac{d^{-\frac{a}{2}+1}}{dx^{-\frac{a}{2}+1}}\left(\frac{1}{x^{\frac{a}{2}}}\right) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)} \int_0^\infty (-\omega)^{-\frac{a}{2}+1} e^{-\omega x} \omega^{\frac{a}{2}-1} d\omega$$

und reducirt

$$\frac{d^{-\frac{a}{2}+1}}{dx^{-\frac{a}{2}+1}}\left(\frac{1}{x^{\frac{a}{2}}}\right) = \frac{(-1)^{1-\frac{a}{2}}}{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)} \cdot \frac{1}{x}.$$

Integrirt man nun beiderseits, so erhält man:

$$(8) \qquad \frac{d^{-\frac{a}{2}}}{dx^{-\frac{a}{2}}}\left(\frac{1}{x^{\frac{a}{2}}}\right) = \frac{(-1)^{1-\frac{a}{2}}}{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)} \log x.$$

Durch successive Integrationen folgen aus derselben, wenn man der Kürze halber den constanten Factor

$$\frac{(-1)^{1-\frac{a}{2}}}{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)} = K$$

setzt,

$$\frac{d^{-\frac{a}{2}-1}}{dx^{-\frac{a}{2}-1}}\left(\frac{1}{x^{\frac{a}{2}}}\right) = K\, x\, (\log x - 1)$$

$$\frac{d^{-\frac{a}{2}-2}}{dx^{-\frac{a}{2}-2}}\left(\frac{1}{x^{\frac{a}{2}}}\right)=K\,\frac{x^2}{2!}\left(\log x-1-\frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{d^{-\frac{a}{2}-3}}{dx^{-\frac{a}{2}-3}}\left(\frac{1}{x^{\frac{a}{2}}}\right)=K\,\frac{x^3}{3!}\left(\log x-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)$$

$$\frac{d^{-\frac{a}{2}-(n-a)}}{dx^{-\frac{a}{2}-(n-a)}}\left(\frac{1}{x^{\frac{a}{2}}}\right)=K\frac{x^{n-a}}{(n-a)!}\left(\log x-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\cdots-\frac{1}{n-a}\right)$$

Man hat daher

$$\frac{U_{n+1}}{U_n}=\pm 2b\cdot\frac{\frac{a}{2}-n}{n}\cdot\frac{x}{n-a+1}\cdot\frac{\log x-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\;.\;.\;.-\frac{1}{n-a+1}}{\log x-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\;.\;.\;.-\frac{1}{n-a}}$$

und dies nähert sich für wachsende n ohne Ende der Nulle.

2. Es sei a eine gebrochene, aber positive Zahl. Man hat alsdann

$$\frac{1}{x^{\frac{a}{2}}}=\frac{1}{\Gamma(\frac{a}{2})}\int_0^\infty e^{-\omega x}\omega^{\frac{a}{2}-1}d\,\omega$$

und wenn man beiderseits $\frac{a}{2}$ Mal differenzirt:

$$\frac{d^{\frac{a}{2}}}{dx^{\frac{a}{2}}}\left(\frac{1}{x^{\frac{a}{2}}}\right)=\frac{1}{\Gamma(\frac{a}{2})}\cdot\int_0^\infty(-\,\omega)^{\frac{a}{2}}\,e^{-\omega x}\omega^{\frac{a}{2}-1}\,d\,\omega$$

und dies gehörig reducirt, gibt:

$$\frac{d^{\frac{a}{2}}}{dx^{\frac{a}{2}}}\left(\frac{1}{x^{\frac{a}{2}}}\right)=\frac{(-1)^{\frac{a}{2}}\,\Gamma(a)}{\Gamma(\frac{a}{2})}\cdot\frac{1}{x^a}.$$

Man hat daher:

$$\frac{U_{n+1}}{U_n}=\pm 2b\,.\,\frac{\frac{a}{2}-n}{n}\,.\,\frac{\int^{(n+1)}\frac{1}{x^a}\,d\,x^{n+1}}{\int^{(n)}\frac{1}{x^a}\,d\,x^n}$$

Nun ist

$$\int^{(n)}\frac{1}{x^a}\,d\,x^n=\frac{x^{n-a}}{(1-a)\,(2-a)\,(3-a)\ldots(n-a)}$$

$$\int^{(n+1)}\frac{1}{x^a}\,d\,x^{n+1}=\frac{x^{n+1-a}}{(1-a)\,(2-a)\,(3-a)\ldots(n+1-a)}$$

folglich:

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \pm 2\, b \,.\, \frac{\frac{a}{2} - n}{n} \cdot \frac{x}{n+1-a}$$

was sich für wachsende n der Nulle nähert.

Nehmen wir nun an, a sei negativ; unsere Differentialgleichung ist dann

$$x\, y'' - a\, y' - b^2\, x\, y = o$$

und ihr Integrale in entwickelter Form:

$$y = C_1\, e^{\,b x} \left\{ \frac{d^{-\frac{a}{2}-1}}{dx^{-\frac{a}{2}-1}} \left(x^{\frac{a}{2}}\right) + 2\, b \binom{-\frac{a}{2}-1}{1} \frac{d^{-\frac{a}{2}-2}}{dx^{-\frac{a}{2}-2}} \left(x^{\frac{a}{2}}\right) + \right.$$

$$\left. + 4\, b^2 \binom{-\frac{a}{2}-1}{2} \frac{d^{-\frac{a}{2}-3}}{dx^{-\frac{a}{2}-3}} \left(x^{\frac{a}{2}}\right) + \ldots \right\} +$$

$$+ C_2\, e^{-b\, x} \left\{ \frac{d^{-\frac{a}{2}-1}}{dx^{-\frac{a}{2}-1}} \left(x^{\frac{a}{2}}\right) - 2\, b \binom{-\frac{a}{2}-1}{1} \frac{d^{-\frac{a}{2}-2}}{dx^{-\frac{a}{2}-2}} \left(x^{\frac{a}{2}}\right) + \right.$$

$$\left. + 4\, b^2 \binom{-\frac{a}{2}-1}{2} \frac{d^{-\frac{a}{2}-3}}{dx^{-\frac{a}{2}-3}} \left(x^{\frac{a}{2}}\right) - \ldots \right\}$$

ferner ist alsdann:

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \pm 2\, b \,.\, \frac{\frac{a}{2} + n}{n} \cdot \frac{\frac{d^{-\frac{a}{2}-n-1}}{dx^{-\frac{a}{2}-n-1}} \left(x^{\frac{a}{2}}\right)}{\frac{d^{-\frac{a}{2}-n}}{dx^{-\frac{a}{2}-n}} \left(x^{\frac{a}{2}}\right)}$$

3. Ist nun a eine ganze Zahl und ungerade, so hat man, wenn man

$$a = 2\, m + 1$$

setzt,

$$\frac{d^{-\frac{a}{2}-n-1}}{dx^{-\frac{a}{2}-n-1}} \left(x^{\frac{a}{2}}\right) = \frac{d^{-m-n-\frac{3}{2}}}{dx^{-m-n-\frac{3}{2}}} \left(x^{m+\frac{1}{2}}\right). \tag{9}$$

Wird nun $x^{m+\frac{1}{2}}$, $m+1$ mal differenzirt, so erhält man

$$(m+1)\,!\, \binom{m+\frac{1}{2}}{m+1} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$$

Die Gleichung (9) lässt sich nun so schreiben:

$$\frac{d^{-\frac{a}{2}-n-1}}{dx^{-\frac{a}{2}-n-1}} \left(x^{\frac{a}{2}}\right) = (m+1)\,!\, \binom{m+\frac{1}{2}}{m+1} \cdot \frac{d^{-2\, m-n-\frac{5}{2}}}{dx^{-2\, m-n-\frac{5}{2}}} \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

und wenn man vermöge der Gleichung (8)

$$\frac{d^{-\frac{1}{2}}}{dx^{-\frac{1}{2}}}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \frac{\sqrt{-1}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \log x$$

setzt, so erhält man:

$$\frac{d^{-\frac{a}{2}-n-1}}{dx^{-\frac{a}{2}-n-1}}\left(x^{\frac{a}{2}}\right) = \frac{\sqrt{-1}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \left(\frac{a+1}{2}\right)! \left(\frac{\frac{a}{2}}{\frac{a+1}{2}}\right) \int^{(a+n+1)} \log x \, . \, d\, x^{a+n+1}$$

Es ist somit:

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \pm 2\, b\, \frac{\frac{a}{2}+n}{n} \, . \, \frac{\int^{(a+n+1)} \log x \, . \, d\, x^{a+n+1}}{\int^{(a+n)} \log x \, . \, d\, x^{a+n}}$$

oder endlich:

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \pm 2\, b \, . \, \frac{\frac{a}{2}+n}{n} \, . \, \frac{x}{a+n+1} \, . \, \frac{\log x - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \ldots - \frac{1}{a+n+1}}{\log x - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \ldots - \frac{1}{a+n}}$$

was sich für wachsende n der Nulle nähert.

4. Ist endlich a eine gebrochene Zahl, so kann man sie stets auf die Form

$$a = 2\, m + \frac{2\, p}{q}$$

bringen, wo m eine ganze Zahl, und $\frac{p}{q}$ ein positiver Bruch ist, der kleiner als 1 ist.

Man hat dann

$$(10) \qquad \frac{d^{-\frac{a}{2}-n-1}}{dx^{-\frac{a}{2}-n-1}}\left(x^{\frac{a}{2}}\right) = \frac{d^{-m-n-1-\frac{p}{q}}}{dx^{-m-n-1-\frac{p}{q}}}\left(x^{m+\frac{p}{q}}\right).$$

Wird nun $x^{m+\frac{p}{q}}$ differenzirt, und zwar $m+1$ mal, so erhält man

$$(m+1)! \binom{m+\frac{p}{q}}{m+1} \frac{1}{x^{1-\frac{p}{q}}}$$

und die Gleichung (10) lässt sich folgendermassen schreiben:

$$\frac{d^{-\frac{a}{2}-n-1}}{dx^{-\frac{a}{2}-n-1}}\left(x^{\frac{a}{2}}\right) = (m+1)! \binom{\frac{a}{2}}{m+1} \frac{d^{-2m-n-2-\frac{p}{q}}}{dx^{-2m-n-2-\frac{p}{q}}}\left(\frac{1}{x^{1-\frac{p}{q}}}\right)$$

Nun ist aber vermöge der Gleichung (7)

$$\frac{1}{x^{1-\frac{p}{q}}} = \frac{1}{\Gamma\left(1-\frac{p}{q}\right)} \int_0^\infty e^{-\omega x} \omega^{-\frac{p}{q}} \, d\,\omega$$

folglich:

$$\frac{d^{1-\frac{p}{q}}}{dx^{1-\frac{p}{q}}} \left(\frac{1}{x^{1-\frac{p}{q}}}\right) = \frac{(-1)^{-\frac{p}{q}}}{\Gamma\left(1-\frac{p}{q}\right)} \int_0^\infty e^{-\omega x} \, \omega^{1-\frac{2p}{q}} \, d\,\omega.$$

Setzt man $\omega x = \alpha$, bei dieser Substitution x als constant betrachtend, so hat man:

$$\frac{d^{1-\frac{p}{q}}}{dx^{1-\frac{p}{q}}} \left(\frac{1}{x^{1-\frac{p}{q}}}\right) = \frac{(-1)^{-\frac{p}{q}}}{\Gamma\left(1-\frac{p}{q}\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(2-\frac{2p}{q}\right)}{x^{2-\frac{2p}{q}}}$$

demnach ist:

$$\frac{d^{-\frac{a}{2}-n-1}}{dx^{-\frac{a}{2}-n-1}} \left(x^{\frac{a}{2}}\right) = C \cdot \frac{d^{-2m-n-3}}{dx^{-2m-n-3}} \left(\frac{1}{x^{2-\frac{2p}{q}}}\right)$$

unter C die Zahl:

$$(m+1)! \binom{\frac{a}{2}}{m+1} (-1)^{-\frac{p}{q}} \cdot \frac{\Gamma\left(2-\frac{2p}{q}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{p}{q}\right)}$$

verstanden. Man hat daher:

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \pm 2b \cdot \frac{\frac{a}{2}+n}{n} \cdot \frac{\int^{(2m+n+3)} \frac{1}{x^{2-\frac{2p}{q}}} \, d\,x^{2m+n+3}}{\int^{(2m+n+2)} \frac{1}{x^{2-\frac{2p}{q}}} \, d\,x^{2m+n+2}}$$

Die wirkliche Integration gibt:

$$\int^{(2m+n+3)} \frac{d\,x^{2m+n+3}}{x^{2-\frac{2p}{q}}} = \frac{x^{a+n+1}}{\left(-1+\frac{2p}{q}\right)\frac{2p}{q}\left(1+\frac{2p}{q}\right)\ldots\left(a+n+1\right)}$$

$$\int^{(2m+n+2)} \frac{d\,x^{2m+n+2}}{x^{2-\frac{2p}{q}}} = \frac{x^{a+n}}{\left(-1+\frac{2p}{q}\right)\frac{2p}{q}\left(1+\frac{2p}{q}\right)\ldots\left(a+n\right)}$$

und wenn man diese Werthe substituirt, so erhält man

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \pm\, 2\,b\,.\,\frac{\frac{a}{2}+n}{n}\;.\;\frac{x}{a+n+1}$$

was wieder für wachsende Werthe von n gegen Null convergirt.

Wir haben durch dies dargethan, dass die in (6) enthaltenen unendlichen Reihen convergiren, wenn $\frac{a}{2}$ keine ganze Zahl ist. Es ist uns mithin die Integration der Gleichung:

$$x\,y'' + a\,y' - b^2 x\,y = o$$

sowohl durch geschlossene Formeln, als auch durch unendliche und convergente Reihen in allen Fällen gelungen. — Wir bemerken noch, dass die Gleichung (7) und die aus ihr gezogenen blos für positive Werthe von x gelten; aber für negative x ergeben sich, durch eine etwas geänderte Analyse ganz dieselben Endformeln, es genügt daher diese unsere Arbeit allen Bedingungen mathematischer Strenge [1]).

Bevor ich zur Betrachtung anderer Fälle schreite, will ich bemerken, dass in dem speciellen Falle wo A und B positiv, und ihre Summe gleich 1 ist, das Integrale der Gleichung (2)

$$(m+x)\,y'' + [A+B-(\alpha+\beta)\,(m+x)]\,y' + [-A\beta - B\alpha + \alpha\beta\,(m+x)]\,y = o$$

sich auch so darstellen lasse:

$$(11)\qquad y = C_1 \int_\alpha^\beta e^{u(m+x)}\,(u-\alpha)^{A-1}\,(u-\beta)^{B-1}\,du\, +$$

$$+\,C_2 \int_\alpha^\beta e^{u(m+x)}\,(u-\alpha)^{A-1}\,(u-\beta)^{B-1}\,\log\,[(m+x)\,(u-\alpha)\,(u-\beta)]\,du.$$

Ich habe vor Kurzem ein hierüber bezügliches Memoire Herrn **Borchard** zum Abdrucke in Crelle's Journal für Mathematik mitgetheilt, und erlaube mir hier, durch unmittelbare Substitution die Richtigkeit dieses Integrales darzuthun.

---

[1]) Man sehe auch hierüber im 9. Band von **Liouville**'s Journal: „*Memoire sur l'intégration d'une équation différentielle par J. A. Serret.*"

Aus (11) folgt:

$$y' = C_1 \int_\alpha^\beta u\, e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1}\, du +$$

$$+ \frac{C_2}{m+x} \int_\alpha^\beta e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1}\, du +$$

$$+ C_2 \int_\alpha^\beta u\, e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1} \log\left[(m+x)(u-\alpha)(u-\beta)\right] du$$

$$y'' = C_1 \int_\alpha^\beta u^2 e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1}\, du -$$

$$- \frac{C_2}{(m+x)^2} \int_\alpha^\beta e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1}\, du +$$

$$+ \frac{2C_2}{m+x} \int_\alpha^\beta u e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1}\, du +$$

$$+ C_2 \int_\alpha^\beta u^2 e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1} \log\left[(m+x)(u-\alpha)(u-\beta)\right] du$$

und werden diese Werthe in (2) eingeführt, so erhält man nach Weglassung zweier sich aufhebender Ausdrücke:

$$\begin{aligned} & C_1 \int_\alpha^\beta e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1} \Big\{ u - (A\beta + B\alpha) + \\ & \qquad + (m+x)\left[u^2 - u(\alpha+\beta) + \alpha\beta\right] \Big\}\, du + \\ (12)\quad & + C_2 \int_\alpha^\beta e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1} \log\left[(m+x)(u-\alpha)\,.\right. \\ & \qquad \left. .\,(u-\beta)\right] \Big\{ u - (A\beta + B\alpha) + (m+x)\,. \\ & \qquad .\left[u^2 - u(\alpha+\beta) + \alpha\beta\right] \Big\}\, du + \\ & + C_2 \int_\alpha^\beta e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1} (u-\alpha+u-\beta)\, du. \end{aligned}$$

Setzt man statt:

$$u^2 - u(\alpha+\beta) + \alpha\beta$$

seinen Werth

$$(u-\alpha)(u-\beta)$$

so hat man, durch Anwendung der Methode des theilweisen Integrirens

$$C_1 \int_\alpha^\beta e^{u(m+x)} (u-\alpha)^A (u-\beta)^B (m+x)\, du =$$

$$- C_1 \int_\alpha^\beta e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1} [u - B\alpha - A\beta]\, du$$

$$C_2 \int_\alpha^\beta e^{u(m+x)} (u-\alpha)^A (u-\beta)^B (m+x) \log [(m+x) \, .$$
$$. (u-\alpha)(u-\beta)]\, du =$$
$$- C_2 \int_\alpha^\beta e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1} \log [(m+x)(u-\alpha) \, .$$
$$. (u-\beta)] (u - B\alpha - A\beta)\, du$$
$$- C_2 \int_\alpha^\beta e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1} (u-\alpha+u-\beta)\, du$$

und dies in (12) substituirt, führt zum Resultate Null, woraus dann folgt, dass (11) wirklich das Integrale der Gleichung (2) ist.

Wir haben bisher vorausgesetzt dass sich der Bruch

$$\frac{a_2 u^2 + a_1 u + a_0}{b_2 u^2 + b_1 u + b_0}$$

dessen Zähler und Nenner wir kurz mit U_0 und U_1 bezeichnen wollen, eine Zerlegung auf folgende Weise gestatte:

$$\frac{U_0}{U_1} = m + \frac{A}{u-\alpha} + \frac{B}{u-\beta}$$

wir haben daher jetzt jene Fälle zu discutiren, wo eine solche Zerlegung nicht angeht. Diese Fälle sind:

1. Wenn $b_2 u^2 + b_1 u + b_0 = o$ zwei gleiche Wurzeln hat;

2. wenn der Nenner durch Nullwerden des b_2 die Form $b_1 u + b_0$ hat, endlich

3. wenn b_2 und b_1 gleich Null sind, somit U_1 eine reine Constante wird.

Im ersten Falle gestattet der Bruch folgende Zerlegung in Partialbrüche:

$$(13) \qquad \frac{a_2 u^2 + a_1 u + a_0}{b_2 u^2 + b_1 u + b_0} = m + \frac{A}{(u-\alpha)^2} + \frac{B}{u-\alpha}$$

und jetzt wollen wir, analog dem frühern, in die Gleichung (1) statt den Constanten a_2 a_1 a_0 b_2 b_1 und b_0 die Constanten m A B und α einführen.

Die Gleichung (13) gibt entwickelt:

$$\frac{a_2 u^2 + a_1 u + a_0}{b_2 u^2 + b_1 u + b_0} = \frac{mb_2 (u^2 - 2\alpha u + \alpha^2) + Ab_2 + Bb_2 (u-\alpha)}{b_2 (u^2 - 2\alpha u + \alpha^2)}$$

und hieraus folgen:

$$\begin{aligned} a_2 &= mb_2 \\ a_1 &= b_2 (B - 2\alpha m) \\ a_0 &= b_2 (m\alpha^2 - B\alpha + A) \\ b_1 &= -2\alpha b_2 \\ b_0 &= \alpha^2 b_2 \end{aligned}$$

Die Gleichung (1) nimmt durch Substitution dieser Werthe folgende Gestalt an:

$$(m+x)y'' + [B - 2\alpha(m+x)]y' + [A - B\alpha + \alpha^2(m+x)]y = o$$

Setzt man nun auch hier:

$$y = e^{\alpha x} z,$$

so erhält man

$$(m+x)z'' + Bz' + Az = o$$

welche durch Einführung einer neuen unabhängig Variablen ξ mittelst der Substitution

$$\xi^2 = m + x$$

folgende Gestalt annimmt:

$$\xi \frac{d^2 z}{d\xi^2} + (2B-1)\frac{dz}{d\xi} + 4Az\xi = o$$

eine Gleichung, mit deren Integration wir uns vorher beschäftigten. Man hat nämlich, da für dieselbe

$$\frac{U_0}{U_1} = \frac{(2B-1)u}{u^2+4A} = \frac{B-\frac{1}{2}}{u+2\sqrt{-A}} + \frac{B-\frac{1}{2}}{u-2\sqrt{-A}}$$

ist, für z folgenden Ausdruck:

$$z = C_1 e^{-2\xi\sqrt{-A}} \frac{d^{B-\frac{3}{2}}}{d\xi^{B-\frac{3}{2}}}\left[\frac{e^{4\xi\sqrt{-A}}}{\xi^{B-\frac{1}{2}}}\right] + C_2 e^{2\xi\sqrt{-A}} \frac{d^{B-\frac{3}{2}}}{d\xi^{B-\frac{3}{2}}}\left[\frac{e^{-4\xi\sqrt{-A}}}{\xi^{B-\frac{1}{2}}}\right]$$

somit ist das Integrale der vorgelegten Gleichung:

$$y = C_1 e^{\alpha x - 2\sqrt{-A(m+x)}} \frac{d^{B-\frac{3}{2}}}{d\xi^{B-\frac{3}{2}}} \left[\frac{e^{4\xi\sqrt{-A}}}{\xi^{B-\frac{1}{2}}}\right] +$$

$$+ C_2 e^{\alpha x + 2\sqrt{-A(m+x)}} \frac{d^{B-\frac{3}{2}}}{d\xi^{B-\frac{3}{2}}} \left[\frac{e^{-4\xi\sqrt{-A}}}{\xi^{B-\frac{1}{2}}}\right]$$

ein Ausdruck, in welchem nach ausgeführter Differentiation statt ξ, $\sqrt{m+x}$ zu setzen ist.

In dem speciellen Falle, wo $A = o$ ist, sind die beiden jetzt eben gefundenen particulären Integrale nicht von einander verschieden, es ist besser in diesem Falle zu der Gleichung

$$(m+x)\, z'' + Bz' = o$$

selbst zu gehen, sie gibt

$$z = C_1 + \frac{C_2}{(m+x)^{B-1}}$$

oder wenn $B = 1$ ist,

$$z = C_1 + C_2 \log (m + x).$$

folglich ist das Integrale der Gleichung

$$(m+x)\, y'' + [B - 2\alpha(m+x)]\, y' + [-B\alpha + \alpha^2(m+x)]\, y = o$$

$$y = C_1 e^{\alpha x} + \frac{C_2 e^{\alpha x}}{(m+x)^{B-1}}$$

oder wenn in demselben $B = 1$ ist,

$$y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\alpha x} \log (m + x).$$

B e i s p i e l. Es sei

$$x y'' - y = o.$$

Man hat hier:

$$\frac{U_0}{U_1} = - \frac{1}{u^2}$$

folglich:

$$m = o, \ \alpha = o, \ B = o, \ A = -1,$$

es ist daher das Integrale obiger Gleichung:

$$y = C_1 e^{-2\sqrt{x}} \int^{(\frac{3}{2})} \sqrt{\xi}\, e^{4\xi} d\xi^{\frac{3}{2}} + C_2 e^{2\sqrt{x}} \int^{(\frac{3}{2})} \sqrt{\xi}\, e^{-4\xi}\, d\xi^{\frac{3}{2}}$$

ein Ausdruck, in welchem nach ausgeführter Integration

$$\xi = \sqrt{x}$$

zu setzen ist.

Man kann das Integrale der Gleichung $xy'' - y = o$ auch durch unendliche, äusserst convergente Reihen wiedergeben. Wir haben vor mehreren Jahren im 26. Bande von Grunert's Archiv für Mathematik das complete Integrale der Gleichung $xy^{(n)} - y = o$ entwickelt, und ersehen, aus der jüngst erschienenen 4. Lieferung von Petzval's „Integration der linearen Differenzialgleichungen" dass in neuester Zeit Petzval denselben Weg einzuschlagen, für gut findet.

Wir erhielten für die vorgelegte Gleichung:

$$y = C_1 \left\{ x + \frac{x^2}{1!2!} + \frac{x^3}{2!3!} + \frac{x^4}{3!4!} + \ldots \right\} +$$
$$+ C_2 \left\{ 1 + (x + \frac{x^2}{1!2!} + \frac{x^3}{2!3!} + \frac{x^4}{3!4!} + \ldots) \log x \right\} -$$
$$- C_2 \left\{ \frac{x^2}{1!2!}(1 + \tfrac{1}{2}) + \frac{x^3}{2!3!}(1 + \tfrac{2}{2} + \tfrac{1}{3}) + \frac{x^4}{3!4!}(1 + \tfrac{2}{2} + \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{4}) + \ldots \right\}$$

was sich in geschlossener Form so schreiben lässt:

$$y = A\sqrt{x} \int_0^\pi \cos\omega\, e^{2\sqrt{x}\cos\omega}\, d\omega + B \int_0^\pi e^{2\sqrt{x}\cos\omega} d\omega +$$
$$+ 2B\sqrt{x} \int_0^\pi \cos\omega\, e^{2\sqrt{x}\cos\omega} \log(\sqrt{x}\, \sin^2\omega)\, d\omega$$

Die Entwicklung dieses geschlossenen Ausdruckes der Gleichung

$$xy'' - y = o$$

haben wir Herrn Schlömilch zum Abdrucke in seiner mathematischen Zeitschrift eingesandt.

Es ist bemerkenswerth, dass das Integrale der Gleichung

$$(m + x) z'' + B z' + A z = o$$

sich noch auf eine andere, viel einfachere Weise darstellen lässt, ich fand dasselbe durch eine glückliche Voraussetzung der Form dieses Integrales. Ich setze nämlich:

$$z = \frac{d^n}{dx^n} \left[e^{\lambda\sqrt{m + x}} \right]$$

unter n und λ constante Zahlen verstanden.

Hieraus folgen:

$$z^{(-n)} = e^{\lambda\sqrt{m+x}}$$

$$\log z^{(-n)} = \lambda \sqrt{m+x}$$

durch einmaliges Differenziren erhält man:

$$\frac{z^{(-n+1)}}{z^{(-n)}} = \frac{\lambda}{2\sqrt{m+x}}$$

und durch Quadriren und ordnen:

$$4\,(m+x)\,[z^{(-n+1)}]^2 = \lambda^2\,[z^{(-n)}]^2.$$

Wird nun diese Gleichung differenzirt, so erhält man:

$$4\,[z^{(-n+1)}]^2 + 8\,(m+x)\,z^{(-n+1)}\,z^{(-n+2)} = 2\lambda^2\,z^{(-n)}\,z^{(-n+1)}$$

welche durch $z^{(-n+1)}$ abkürzbar ist. Man hat nämlich alsdann:

$$4\,z^{(-n+1)} + 8\,(m+x)\,z^{(-n+2)} = 2\lambda^2\,z^{(-n)}$$

und wird nun diese Gleichung n Mal differenzirt, und geordnet, so erhält man:

$$(m+x)\,z'' + (n+\tfrac{1}{2})\,z' - \frac{\lambda^2}{4}\,z = o$$

welche mit der vorgelegten Gleichung zusammenfällt, wenn man

$$B = n + \tfrac{1}{2}$$

$$A = -\frac{\lambda^2}{4}$$

setzt, es ist somit das Integrale derselben:

$$z = C_1\,\frac{d^{B-\frac{1}{2}}}{dx^{B-\frac{1}{2}}}\left[\,e^{2\sqrt{-A\,(m+x)}}\,\right] + C_2\,\frac{d^{B-\frac{1}{2}}}{dx^{B-\frac{1}{2}}}\left[\,e^{-2\sqrt{-A\,(m+x)}}\,\right]$$

und folglich das Integrale von:

$$(m+x)\,y'' + [B - 2\alpha\,(m+x)]\,y' + [A - B\alpha + \alpha^2\,(m+x)]\,y = o$$

entweder*)

$$y = C_1\,e^{\alpha x}\,\frac{d^{B-\frac{1}{2}}}{dx^{B-\frac{1}{2}}}\left[\,e^{2\sqrt{-A\,(m+x)}}\,\right] + C_2\,e^{\alpha x}\,\frac{d^{B-\frac{1}{2}}}{dx^{B-\frac{1}{2}}}\left[\,e^{-2\sqrt{-A\,(m+x)}}\,\right]$$

oder falls $A = o$ ist

*) Das Integrale der Gleichung $xy'' - y = o$ ist nach dieser Formel:

$$y = C_1 \int^{(\frac{1}{2})} e^{2\sqrt{x}}\,dx^{\frac{1}{2}} + C_2 \int^{(\frac{1}{2})} e^{-2\sqrt{x}}\,dx^{\frac{1}{2}}$$

$$y = C_1 e^{\alpha x} + \frac{C_2 e^{\alpha x}}{(m+x)^{B-1}}$$

oder falls $A = o$, $B = 1$ ist,

$$y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\alpha x} \log (m+x).$$

Anmerkung. Die Riccati'sche Gleichung $y'' - a^2 x^n y = o$ geht durch Einführung einer neuen, unabhängigen Variablen t mittelst der Gleichung $t = x^{n+2}$ über in:

$$t \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{n+1}{n+2} \frac{dy}{dt} - \frac{a^2}{(n+2)^2} y = o,$$

deren Integrale ist:

$$y = \frac{d^{\frac{n}{2n+4}}}{dt^{\frac{n}{2n+4}}} \left[C_1 e^{\frac{2a\sqrt{t}}{n+2}} + C_2 e^{-\frac{2a\sqrt{t}}{n+2}} \right]$$

Betrachten wir nun den Fall, wo U_1 ein Polynom des ersten Grades ist, also die vorgelegte Gleichung die Gestalt hat:

$$a_2 y'' + (a_1 + b_1 x) y' + (a_0 + b_0 x) y = o.$$

Es ist alsdann:

$$\frac{U_0}{U_1} = \frac{a_2 u^2 + a_1 u + a_0}{b_1 u + b_0} = mu + n + \frac{A}{u - \alpha},$$

woraus folgen

$$\begin{aligned} a_2 &= m b_1 \\ a_1 &= b_1 (n - m\alpha) \\ a_0 &= b_1 (A - n\alpha) \\ b_0 &= - b_1 \alpha \end{aligned}$$

folglich nimmt die zu integrirende Gleichung die Gestalt an:

$$my'' + (-m\alpha + n + x) y' + [A - \alpha (n+x)] y = o.$$

Setzt man

$$y = e^{\alpha x} z,$$

so erhält man

$$mz'' + (m\alpha + n + x) z' + Az = o.$$

Wird diese Gleichung $- A$ Mal differenzirt, so erhält man

$$mz^{(2-A)} + (m\alpha + n + x) z^{(1-A)} = o.$$

trennt man hier die Variablen, so ist

$$\frac{dz^{(1-A)}}{z^{(1-A)}} = -\frac{m\alpha + n + x}{m}\, dx$$

und durch Integration:

$$\log z^{(1-A)} = -\frac{m\alpha + n}{m}\, x - \frac{x^2}{2m}.$$

Man hat daher

$$z^{(1-A)} = e^{-\frac{m\alpha+n}{m}x - \frac{x^2}{2m}}$$

und

$$z = \frac{d^{A-1}}{dx^{A-1}}\left[e^{-\frac{m\alpha+n}{m}x - \frac{x^2}{2m}}\right]$$

folglich

$$y = e^{\alpha x}\frac{d^{A-1}}{dx^{A-1}}\left[e^{-\frac{m\alpha+n}{m}x - \frac{x^2}{2m}}\right].$$

Dies ist freilich nur ein particuläres Integrale, aber es lässt sich leicht auch ein zweites particuläres Integrale bestimmen, die Summe beider gibt dann das complete.

Ich setze das zweite Integrale in folgender Form voraus:

$$y = e^{m_1 x + m_2 x^2}\frac{d^{A_1}}{dx^{A_1}}\left[e^{n_1 x + n_2 x^2}\right]$$

hieraus folgt, wenn man

$$y = e^{m_1 x + m_2 x^2}\, z$$

setzt,

$$z = \frac{d^{A_1}}{dx^{A_1}}\left[e^{n_1 x + n_2 x^2}\right]$$

und hieraus

$$z^{(-A_1)} = e^{n_1 x + n_2 x^2}$$

$$\log z^{(-A_1)} = n_1 x + n_2\, x^2.$$

Durch ein einmaliges Differenziren derselben und Fortschaffen der Brüche erhält man

$$z^{(1-A_1)} = (n_1 + 2\, n_2\, x)\, z^{(-A_1)}$$

und durch ein ferneres A_1+1 maliges Differenziren:

$$z'' - (n_1 + 2\, n_2\, x)\, z' - 2\, n_2\, (A_1 + 1)\, z = o$$

Setzt man hierein für z seinen Werth

$$z = ye^{-m_1x-m_2x^2}$$

und für

$$z' = e^{-m_1x-m_2x^2}[y'-(m_1x+2m_2x)y]$$

$$z'' = e^{-m_1x-m_2x^2}\ [y''-2(m_1+2m_2x)y'+(m_1^2-2m_2+4m_1m_2x+ \\ +4m_2^2x^2)y]$$

so erhält man:

$$y''-\Big\{2m_1+n_1+2x\,(2m_2+n_2)\Big\}\,y'+\Big\{m_1^2-2m_2+m_1n_1- \\ -2n_2(A_1+1)+2x(2m_1m_2+m_1n_2+m_2n_1)+4m_2x^2(m_2+n_2)\Big\}\,y=o$$

welche mit der Gleichung

$$my''+(-m\alpha+n+x)\,y'+[A-\alpha(n+x)]\,y=o$$

äquiparirt, zu folgenden Gleichungen führt:

$$-\alpha+\frac{n}{m}=-2m_1-n_1$$

$$\frac{1}{m}=-4m_2-2n_2$$

$$\frac{A-\alpha n}{m}=m_1^2-2m_2+m_1n_1-2n_2(A_1+1)$$

$$-\ \frac{\alpha}{m}=4m_1m_2+2m_1n_2+2m_2n_1$$

$$o=m_2+n_2$$

woraus

$$m_1=-\frac{n}{m}$$

$$m_2=-\frac{1}{2m}$$

$$A_1=-A$$

$$n_1=\frac{m\alpha+n}{m}$$

$$n_2=\frac{1}{2m}$$

hervorgehen. Es ist somit das zweite particuläre Integrale obiger Gleichung

$$y = e^{-\frac{n}{m}x - \frac{x^2}{2m}} \frac{d^{-A}}{dx^{-A}} \left[e^{\frac{m\alpha+n}{m}x + \frac{x^2}{2m}} \right]$$

und folglich ist das vollständige Integrale obiger Gleichung:

$$y = C_1 e^{\alpha x} \frac{d^{A-1}}{dx^{A-1}} \left[e^{-\frac{m\alpha+n}{m}x - \frac{x^2}{2m}} \right] + C_2 e^{-\frac{n}{m}x - \frac{x^2}{2m}} \frac{d^{-A}}{dx^{-A}} \left[e^{\frac{m\alpha+n}{m}x + \frac{x^2}{2m}} \right]$$

Beispiel: Es sei

$$y'' - b_1 xy' + y\left(-\frac{b_0{}^2}{b_1{}^2} + b_0 x\right) = o,$$

hier ist

$$\frac{U_0}{U_1} = \frac{u^2 - \frac{b_0^2}{b_1^2}}{-b_1 u + b_0} = -\frac{u}{b_1} - \frac{b_0}{b_1{}^2}$$

daher hat man:

$$m = -\frac{1}{b_1},\ n = -\frac{b_0}{b_1{}^2},\ \mathrm{A} = o,\ \alpha = \frac{b_0}{b_1}$$

und folglich ist:

$$y = C_1 e^{\frac{b_0 x}{b_1}x} \int e^{-\frac{2b_0}{b_1}x + \frac{b_1 x^2}{2}} dx + C_2 e^{\frac{b_0 x}{b_1}x}$$

das vollständige Integrale obiger Differentialgleichung.

Betrachten wir endlich die Gleichung

$$a_2 y'' + a_1 y' + (a_0 + x) y = o$$

welche dem letzten Ausnahmsfalle entspricht, hier führt der Laplace'sche Weg, welchen auch Petzval adoptirte, zum Integrale. Setzen wir nämlich

$$y = \int_{u_1}^{u_2} e^{ux} V du$$

unter V eine, einstweilen noch unbestimmte Function von u und unter u_1 und u_2 constante Zahlen verstanden, so haben wir

$$y' = \int_{u_1}^{u_2} u e^{ux} V du, \qquad y'' = \int_{u_1}^{u_2} u^2 e^{ux} V du$$

und diese Werthe substituirt, geben:

$$\int_{u_1}^{u_2} [a_2 u^2 + a_1 u + a_0 + x] e^{ux} V du = o.$$

Da nun

$$\int_{u_1}^{u_2} x e^{ux} V du = \{e^{ux} V\}_{u_1}^{u_2} - \int_{u_1}^{u_2} e^{ux} \frac{dV}{du} du$$

ist, so erhält man:

$$\{e^{ux} V\}_{u_1}^{u_2} + \int_{u_1}^{u_2} \left[(a_2 u^2 + a_1 u + a_0) V - \frac{dV}{du}\right] e^{ux} du = o$$

was identisch wird, wenn man V so wählt, auf dass

$$(a_2 u^2 + a_1 u + a_0) V - \frac{dV}{du} = o$$

wird, und u_1 und u_2 so, dass

$$e^{ux} V = o$$

ist. Hieraus findet man:

$$V = e^{\frac{a_2}{3} u^3 + \frac{a_1}{2} u^2 + a_0 u}$$

und als Gleichung zur Bestimmung der Grenzen:

$$a_2 u^3 = -\infty.$$

Seien die Wurzeln dieser Gleichung

$$\mu_1 \infty, \ \mu_2 \infty, \ \mu_3 \infty,$$

so erhält man, wie man leicht einsieht, für y folgenden Werth:

$$y = C_1 \int_0^{\mu_1 \infty} e^{\frac{a_2}{3} u^3 + \frac{a_1}{2} u^2 + (a_0 + x) u} du +$$

$$+ C_2 \int_0^{\mu_2 \infty} e^{\frac{a_2}{3} u^3 + \frac{a_1}{2} u^2 + (a_0 + x) u} du +$$

$$+ C_3 \int_0^{\mu_3 \infty} e^{\frac{a_2}{3} u^3 + \frac{a_1}{2} u^2 + (a_0 + x) u} du$$

unter C_1, C_2, C_3 willkürliche Constanten verstanden, deren Summe gleich Null ist.

Und nun haben wir die Gleichung (1) in allen Fällen integrirt, und wenden uns jetzt zur

Integration der Differenzengleichung

$$(a_2 + b_2 x) \frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} + (a_1 + b_1 x) \frac{\Delta y}{\Delta x} + (a_0 + b_0 x) y = o,$$

die in mehreren Fällen eine ganz analoge Behandlung, wie die Integration der Differentialgleichung (1) gestattet, nur sind die Formeln viel verwickelter, und die zu betretenden Wege fast ganz ungebahnt.

Setzen wir erst obige Gleichung in folgender Form voraus:

$$(14) \qquad (m + x) \Delta^2 y + [A + B - (\alpha + \beta)(m + x)] h \Delta y + \\ + [-A\beta - B\alpha + \alpha\beta (m+x)] h^2 y = o$$

wo der Kürze halber $\Delta x = h$ gesetzt wurde, und substituiren in dieselbe

$$y = e^{ux} z$$

somit

$$\Delta y = e^{ux} [z(e^{uh} - 1) + e^{uh} \Delta z]$$

$$\Delta^2 y = e^{ux} [z(e^{uh} - 1)^2 + 2 \Delta z\, e^{uh} (e^{uh} - 1) + \Delta^2 z\, e^{2uh}];$$

wir erhalten dadurch:

$$(15) \; (m+x) e^{2uh} \Delta^2 z + [h(A+B) + (2e^{uh} - 2 - h\alpha - h\beta)(m+x)] \\ . \; e^{uh} \Delta z + [(A + B)(e^{uh} - 1) h - h^2 (A\beta + B\alpha) + \\ + \left\{(e^{uh} - 1)^2 - h(\alpha + \beta)(e^{uh} - 1) + h^2 \alpha\beta\right\} (m + x)] z = o.$$

Wählt man nun u so, auf dass:

$$(e^{uh} - 1)^2 - h(\alpha+\beta)(e^{uh} - 1) + h^2 \alpha\beta = o$$

wird, so folgt hieraus

$$e^{uh} - 1 = h\alpha \text{ und } e^{uh} - 1 = h\beta.$$

Der erste Werth gibt:

$$u = \frac{log\,(1 + h\alpha)}{h}$$

und dies in (15) eingeführt, liefert uns folgende Gleichung:

$$(16) \qquad (m+x)(1+h\alpha)^2 \Delta^2 z + h(1+h\alpha) \Delta z [A + B + (\alpha - \beta) . \\ . (m+x)] + Ah^2 (\alpha - \beta) z = o$$

Man sieht hieraus, dass die Substitution

$$y = (1+h\alpha)^{\frac{x}{h}} z$$

in die Gleichung (14) gemacht, eine ähnliche Vereinfachung nach sich zieht, wie die Substitution $y=e^{\alpha x}z$ in die eben so gebaute Differentialgleichung; die neu erhaltene Gleichung ist nämlich in ihrem letzten Coëfficienten von x befreiet.

Wird die Gleichung (16) beiderseits einer μ fachen Differenzennehmung unterworfen, so erhält man

$$(1+h\alpha)^2 \left[(m+x)\,\Delta^{\mu+2} z + \mu\, h\, (\Delta^{\mu+1} z + \Delta^{\mu+2} z) \right] + h(1+h\alpha)\,.$$
$$.\left[\left\{ A+B+(\alpha-\beta)(m+x) \right\} \Delta^{\mu+1} z + \mu\, h\, (\alpha-\beta)\, (\Delta^{\mu} z + \right.$$
$$\left. + \Delta^{\mu+1} z) \right] + Ah^2 (\alpha-\beta)\, \Delta^{\mu} z = o$$

und dies gibt geordnet:

$$(1+h\alpha)^2 (m+x+h\mu)\Delta^{\mu+2} z + h\,(1+h\alpha) \left[A+B+\mu\,(1+h\alpha) + \right.$$
$$\left. +(\alpha-\beta)(m+x+h\mu) \right] \Delta^{\mu+1} z + \left[A+\mu(1+h\alpha) \right] h^2 (\alpha-\beta) \Delta^{\mu}\; z = o$$

Wir wählen nun μ dermassen, auf dass

$$A + \mu\,(1+h\alpha) = o$$

wird, und erhalten dadurch

$$(1+h\alpha)(m+x+h\mu)\Delta^{\mu+2} z + [B+(\alpha-\beta)(m+x+h\mu)\, h\Delta^{\mu+1} z = o.$$

Aus ihr folgt:

$$\frac{\Delta^{\mu+2} z}{\Delta^{\mu+1} z} = \frac{-B+(\beta-\alpha)\,(m+x+h\mu)h}{(1+h\alpha)\,(m+x+h\,\mu)}$$

und aus dieser wieder

$$\frac{\Delta^{\mu+2} z + \Delta^{\mu+1} z}{\Delta^{\mu+1} z} = \frac{-B+(1+\beta h)\,(m+x+h\,\mu)}{(1+h\alpha)\,(m+x+h\,\mu)}$$

Nimmt man beiderseits die Logarithmen, so erhält man:

$$\log \frac{\Delta^{\mu+2} z + \Delta^{\mu+1} z}{\Delta^{\mu+1} z} = \Delta \log \Delta^{\mu+1} z = \log \frac{-B+(1+h\beta)(m+x+h\,\mu)}{(1+h\alpha)\,(m+x+h\,\mu)}$$

hieraus folgt:

$$\log \Delta^{\mu+1} z = \Sigma\, \log \frac{-B+(1+h\beta)(m+x+h\mu)}{(1+h\alpha)\,(m+x+h\,\mu)}$$

und hieraus

$$\Delta^{\mu+1} z = e^{\Sigma \log \frac{-B+(1+h\beta)(m+x+h\mu)}{(1+h\alpha)(m+x+h\mu)}}$$

Man hat daher:

$$z = \Delta^{-\mu-1} e^{\Sigma \log \frac{-B+(1+h\beta)(m+x+h\mu)}{(1+h\alpha)(m+x+h\mu)}}$$

und endlich, wenn man

$$y=(1+h\alpha)^{\frac{x}{h}} z$$

und

$$\mu = -\frac{A}{1+h\alpha}$$

setzt,

$$y=(1+h\alpha)^{\frac{x}{h}} \Delta^{\frac{A-1-h\alpha}{1+h\alpha}} e^{\Sigma \log \frac{-Bh(1+h\alpha)-Ah(1+h\beta)+(m+x)(1+h\alpha)(1+h\beta}{(1+h\alpha)[(m+x)(1+h\alpha)-Ah]}}$$

Verwechselt man in dieser Formel A mit B und zugleich α mit β, so gewinnt man das zweite particuläre Integrale. Das vollständige Integrale ist daher:

$$y=C_1(1+\alpha h)^{\frac{x}{h}} \cdot \frac{\Delta^{\frac{A-1-h\alpha}{1+h\alpha}}}{h^{\frac{A-1-h\alpha}{1+h\alpha}}} e^{\Sigma \log \frac{(1+h\alpha)(1+h\beta)(m+x)-Ah(1+h\beta)-Bh(1+h\alpha)}{(1+h\alpha)[(m+x)(1+h\alpha)-Ah]}} +$$

$$+ C_2(1+\beta h)^{\frac{x}{h}} \cdot \frac{\Delta^{\frac{B-1-h\beta}{1+h\beta}}}{h^{\frac{B-1-h\beta}{1+h\beta}}} e^{\Sigma \log \frac{(1+h\alpha)(1+h\beta)(m+x)-hA(1+h\beta)-Bh(1+h\alpha)}{(1+h\beta)[(m+x)(1+h\beta)-Bh]}}$$

unter C_1 und C_2 willkürliche Constanten oder solche Functionen von x verstanden, die beim Wachsen von x um h ungeändert bleiben.

Ist $1+h\alpha$ oder $1+h\beta$ gleich Null, so wird eins der beiden hier angeführten particulären Integrale unbrauchbar, das andere hingegen vereinfacht, so ist namentlich, wenn $1+h\alpha=o$ ist,

$$y = C(1+h\beta)^{\frac{x}{h}} \Delta^{\frac{B-1-h\beta}{1+h\beta}} e^{\Sigma \log \frac{hA}{Bh-(m+x)(1+h\beta)}}$$

Ein anderer, ebenfalls erwähnenswerther Fall, wo die Integrale der Differenzen-Gleichungen in einfacherer Gestalt auftreten, ist der wo A oder B gleich Null ist, so hat man für A gleich Null folgendes:

$$y = C_1 h(1+\alpha h)^{\frac{x}{h}} \Sigma e^{\Sigma \log \frac{(1+h\beta)(m+x)-hB}{(1+h\alpha)(m+x)}} +$$

$$+ C_2(1+\beta h)^{\frac{x}{h}} \frac{\Delta^{\frac{B-1-h\beta}{1+h\beta}}}{h^{\frac{B-1-h\beta}{1+h\beta}}} e^{\Sigma \log \frac{1+h\alpha}{1+h\beta}}$$

Nun ist

$$e^{\Sigma \log \frac{1+h\alpha}{1+h\beta}} = e^{\frac{x}{h} \log \frac{1+h\alpha}{1+h\beta}}$$

und

$$\Delta^{\frac{B-1-h\beta}{1+h\beta}} e^{\Sigma \log \frac{1+h\alpha}{1+h\beta}} = \left(e^{\log \frac{1+h\alpha}{1+h\beta}} - 1\right)^{\frac{B-1-h\beta}{1+h\beta}} \left(\frac{1+h\alpha}{1+h\beta}\right)^{\frac{x}{h}}$$

somit

$$y = C_1 h (1+\alpha h)^{\frac{x}{h}} \Sigma e^{\Sigma \log \frac{(1+h\beta)(m+x)-Bh}{(1+h\alpha)(m+x)}} + C_2' (1+h\alpha)^{\frac{x}{h}}$$

wo der Kürze halber statt:

$$C_2 \left(\frac{\alpha-\beta}{1+h\beta}\right)^{\frac{B-1-h\beta}{1+h\beta}}$$

der eine Buchstabe C_2' gesetzt wurde, und der eben so wie C_2 eine willkürliche Constante repräsentirt.

Nachdem wir hiemit die Integration der Gleichung (14) beendigt haben, wenden wir uns zu folgender Differenzen-Gleichung:

$$m \Delta^2 y + (-m\alpha + n + x) h \Delta y + (A - n\alpha - \alpha x) h^2 y = o.$$

Wir substituiren in dieselbe:

$$y = e^{ux} z$$

und erhalten hiedurch:

$$m e^{2uh} \Delta^2 z + [2m(e^{uh}-1) + h(-m\alpha+n+x)] e^{uh} \Delta z + [m(e^{uh}-1)^2 +$$
$$+ h(n+x-m\alpha)(e^{uh}-1) + h^2(A-n\alpha-\alpha x)] z = o.$$

Setzt man nun:

$$e^{uh} = 1 + \alpha h$$

d. h. setzt man:

$$u = \frac{\log(1+\alpha h)}{h}$$

so erhält man:

$$m \Delta^2 z (1+\alpha h)^2 + h(1+\alpha h)(m\alpha+n+x) \Delta z + h^2 A z = o$$

und nimmt man eine μ fache Differenzirung vor, so erhält man:

$$m(1+\alpha h)^2 \Delta^{\mu+2} z + h(1+\alpha h)(m\alpha + n + x + \mu h) \Delta^{\mu+1} z +$$
$$+ h^2 [\mu(1+\alpha h) + A] \Delta^\mu z = o.$$

Diese Gleichung vereinfacht sich für

$$\mu(1+\alpha h) + A = o$$

sie geht nämlich hiedurch über in:

$$m(1+\alpha h)\,\Delta^{\mu+2} z + h(m\alpha + n + x + \mu h)\,\Delta^{\mu+1} z = o.$$

Aus dieser folgen successive:

$$\frac{\Delta^{\mu+2} z + \Delta^{\mu+1} z}{\Delta^{\mu+1} z} = \frac{m - h(n+x+\mu h)}{m(1+\alpha h)}$$

$$log \frac{\Delta^{\mu+2} z + \Delta^{\mu+1} z}{\Delta^{\mu+1} z} = \Delta\, log\, \Delta^{\mu+1} z = log\, \frac{m - h(n+\mu h + x)}{m(1+\alpha h)}$$

$$log\, \Delta^{\mu+1} z = \Sigma\, log \frac{m - h(n+\mu h + x)}{m(1+\alpha h)}$$

$$z = \Delta^{-\mu-1}\, e^{\Sigma\, log \frac{m-h(n+\mu h+x)}{m(1+\alpha h)}}$$

und setzt man endlich:

$$y = (1+\alpha h)^{\frac{x}{h}} z$$

und

$$\mu = -\frac{A}{1+\alpha h},$$

so folgt:

$$y = C(1+\alpha h)^{\frac{x}{h}} \cdot \frac{\Delta^{\frac{A-1-\alpha h}{1+\alpha h}}}{h^{\frac{A-1-\alpha h}{1+\alpha h}}}\, e^{\Sigma\, log \frac{(m-hn-hx)(1+\alpha h)+Ah^2}{m(1+\alpha h)^2}}$$

unter C wieder eine willkürliche Function von x verstanden, die beim Wachsen von x um h ungeändert bleibt. Ich bemerke noch dass die hier gefundenen Integrale der Differenzen-Gleichungen sich augenblicklich in die vorhin gefundenen Integrale der Differenzialgleichungen verwandeln, wenn man h gegen Null convergiren lässt.

Integration der Differentialgleichung.

$$(a_3+b_3 x)y''' + (a_2+b_2 x)y'' + (a_1+b_1 x)y' + (a_0+b_0 x)y = o.$$

Die Integration dieser Gleichung lässt sich eben so einfach durchführen, wie die Integration einer Gleichung zweiter Ordnung. Wir bilden uns nämlich den Bruch

$$\frac{a_3 u^3 + a_2 u^2 + a_1 u + a_0}{b_3 u^3 + b_2 u^2 + b_1 u + b_0}$$

dessen Zähler und Nenner wir kurz mit U_0 und U_1 bezeichnen, und zerlegen denselben in Partialbrüche; gesetzt den Fall, es sei

$$(17)\quad \frac{a_3\, u^3 + a_2\, u^2 + a_1\, u + a_0}{b_3\, u^3 + b_2\, u^2 + b_1\, b + b_0} = m + \frac{A}{u-\alpha} + \frac{B}{u-\beta} + \frac{C}{u-\gamma}$$

so führen wir in die gegebene Gleichung statt den Constanten a_3 a_2 a_1 a_0 b_3 b_2 b_1 und b_0 neue Constanten ein, nämlich m $A, B, C, \alpha, \beta, \gamma$ mittelst folgenden aus der Gleichung (17) hervorgehenden Relationen:

$$a_3 = mb_3$$
$$a_2 = b_3\,[A+B+C-m(\alpha+\beta+\gamma)]$$
$$a_1 = b_3\,[m(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)-A(\beta+\gamma)-B(\alpha+\gamma)-C(\alpha+\beta)]$$
$$a_0 = b_3\,[A\beta\gamma+B\alpha\gamma+C\alpha\beta-m\alpha\beta\gamma]$$
$$b_2 = -b_3(\alpha+\beta+\gamma)$$
$$b_1 = b_3(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)$$
$$b_0 = -b_3\,\alpha\beta\gamma$$

Die nach Einführung dieser Werthe hervorgehende Gleichung ist:

$$(18)\quad (m+x)y''' + [A+B+C-(\alpha+\beta+\gamma)(m+x)]\,y'' + \\ +[-A(\beta+\gamma)-B(\alpha+\gamma)-C(\alpha+\beta)+(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)\,. \\ .\,(m+x)]\,y' + [A\beta\gamma+B\alpha\gamma+C\alpha\beta-\alpha\beta\gamma(m+x)]\;y = o$$

durch die Substitution

$$y = e^{\alpha x}\, z$$

erhält man:

$$(m+x)z''' + [A+B+C+(2\alpha-\beta-\gamma)(m+x)]\,z'' + [2\alpha\,. \\ .\,(A+B+C)-A(\beta+\gamma)-B(\alpha+\gamma)-C(\alpha+\beta)+(\alpha^2-\alpha\beta- \\ -\alpha\gamma+\beta\gamma)(m+x)]\,z' + A(\alpha^2-\alpha\beta-\alpha\gamma+\beta\gamma)\,z = o$$

und diese Gleichung ist einfacher als die Gleichung (18), da der Coëfficient des letzten Gliedes eine Constante ist.

Wird nun diese Gleichung μ mal differenzirt, so erhält man:

$$(m+x)\,z^{(\mu+3)} + [\mu+A+B+C+(2\alpha-\beta-\gamma)(m+x)]\,z^{(\mu+2)} + \\ +[\mu(2\alpha-\beta-\gamma)+2\alpha(A+B+C)-A(\beta+\gamma)-B(\alpha+\gamma)- \\ -C(\alpha+\beta)+(\alpha^2-\alpha\beta-\alpha\gamma+\beta\gamma)(m+x)]\,z^{(\mu+1)} + \\ +(\mu+A)(\alpha^2-\alpha\beta-\alpha\gamma+\beta\gamma)\,z^{(\mu)} = o$$

und diese Gleichung vereinfacht sich für

$$\mu + A = o,$$

man erhält alsdann nämlich

$$(19)\quad (m+x)\,z^{(-A+3)} + [B+C+(2\alpha-\beta-\gamma)(m+x)]\,z^{(-A+2)} + \\ +[2\alpha(B+C)-B(\alpha+\gamma)-C(\alpha+\beta)+ \\ +(\alpha^2-\alpha\beta-\alpha\gamma-\beta\gamma)(m+x]\,z^{(-A+1)} = o.$$

Diese Gleichung ist bezüglich $z^{(-A+1)}$ eine Differentialgleichung zweiter Ordnung und kann mittelst der Formel (5) integrirt werden. Die daselbst vorkommenden Buchstaben ergeben sich durch die Zerlegung des folgenden Bruchs in Partialbrüche:

$$\frac{mu^2+[B+C+m(2\alpha-\beta-\gamma)]u+2\alpha(B+C)-B(\alpha+\gamma)-C(\alpha+\beta)+m(\alpha^2-\alpha\beta-\alpha\gamma+\beta\gamma)}{u^2+(2\alpha-\beta-\gamma)u+\alpha^2-\alpha\beta-\alpha\gamma+\beta\gamma}$$

und diese sind:

$$m+\frac{C}{u+\alpha-\gamma}+\frac{B}{u+\alpha-\beta}$$

das Integral der Gleichung (19) ist daher

$$z^{(-A+1)}=C_1 e^{(\gamma-\alpha)x}\frac{d^{C-1}}{dx^{C-1}}\left[\frac{e^{(\beta-\gamma)x}}{(m+x)^B}\right]+C_2 e^{(\beta-\alpha)x}\frac{d^{B-1}}{dx^{B-1}}\left[\frac{e^{(\gamma-\beta)x}}{(m+x)^C}\right]$$

woraus folgt:

$$z=C_1\frac{d^{A-1}}{dx^{A-1}}\left\{e^{(\gamma-\alpha)x}\frac{d^{C-1}}{dx^{C-1}}\left[\frac{e^{(\beta-\gamma)x}}{(m+x)^B}\right]\right\}+$$
$$+C_2\frac{d^{A-1}}{dx^{A-1}}\left\{e^{(\beta-\alpha)x}\frac{d^{B-1}}{dx^{B-1}}\left[\frac{e^{(\gamma-\beta)x}}{(m+x)^C}\right]\right\}$$

und nun ergibt sich y aus der Gleichung $y=e^{\alpha x}z$, es ist daher ein particuläres Integral:

$$y=e^{\alpha x}\frac{d^{A-1}}{dx^{A-1}}\left\{e^{(\beta-\alpha)x}\frac{d^{B-1}}{dx^{B-1}}\left[\frac{e^{(\gamma-\beta)x}}{(m+x)^C}\right]\right\}$$

und durch Vertauschung der Buchstaben α, β, γ sowohl als auch A, B, C nach einem einfachen Permutationsgesetze ergeben sich die andern. Es ist daher das vollständige Integrale der vorgelegten Gleichung:

$$y=C_1 e^{\alpha x}\frac{d^{A-1}}{dx^{A-1}}\left\{e^{(\beta-\alpha)x}\frac{d^{B-1}}{dx^{B-1}}\left[\frac{e^{(\gamma-\beta)x}}{(m+x)^C}\right]\right\}+$$
$$+C_2 e^{\beta x}\frac{d^{B-1}}{dx^{B-1}}\left\{e^{(\gamma-\beta)x}\frac{d^{C-1}}{dx^{C-1}}\left[\frac{e^{(\alpha-\gamma)x}}{(m+x)^A}\right]\right\}+$$
$$+C_3 e^{\gamma x}\frac{d^{C-1}}{dx^{C-1}}\left\{e^{(\alpha-\gamma)x}\frac{d^{A-1}}{dx^{A-1}}\left[\frac{e^{(\beta-\alpha)x}}{(m+x)^B}\right]\right\}$$

Diese Analyse ist unzulässig, wenn der $\frac{U_0}{U_1}$ genannte Bruch sich nicht auf folgende Art zerlegen lässt:

$$m+\frac{A}{u-\alpha}+\frac{B}{u-\beta}+\frac{C}{u-\gamma}$$

Die verschiedenen Formen, welche $\frac{U_0}{U_1}$ noch annehmen kann, sind:

1. $\frac{U_0}{U_1} = m + \frac{A}{(u-\alpha)^2} + \frac{B}{u-\alpha} + \frac{C}{u-\beta}$
2. $\frac{U_0}{U_1} = m + \frac{A}{(u-\alpha)^3} + \frac{B}{(u-\alpha)^2} + \frac{C}{u-\alpha}$
3. $\frac{U_0}{U_1} = m + nu + \frac{A}{u-\alpha} + \frac{B}{u-\beta}$
4. $\frac{U_0}{U_1} = m + nu + \frac{A}{(u-\alpha)^2} + \frac{B}{u-\alpha}$
5. $\frac{U_0}{U_1} = m + nu + pu^2 + \frac{A}{u-\alpha}$
6. $\frac{U_0}{U_1} = m + nu + pu^2 + qu^3$

und nun wollen wir versuchen, die Integration der Differentialgleichungen in diesen verschiedenen Fällen zu bewerkstelligen.

Integration derjenigen Differentialgleichung dritter Ordnung, für welche

$$\frac{U_0}{U_1} = m + \frac{A}{(u-\alpha)^2} + \frac{B}{u-\alpha} + \frac{C}{u-\beta}$$

ist.

Aus dieser Gleichung folgt, wenn man statt U_0 und U_1 ihre Werthe setzt:

$$\begin{aligned}
a_3 &= mb_3 \\
a_2 &= b_3\,[B+C-m\,(2\alpha+\beta)] \\
a_1 &= b_3\,[m\,(\alpha^2+2\alpha\beta) + A-B\,(\alpha+\beta) - 2\alpha C] \\
a_0 &= b_3\,[-m\alpha^2\beta - A\beta+B\alpha\beta+\alpha^2 C] \\
b_2 &= -\,b_3\,(2\alpha+\beta) \\
b_1 &= b_3\,(\alpha^2+2\alpha\beta) \\
b_0 &= -\,b_3\,\alpha^2\beta
\end{aligned}$$

und folglich ist die Gestalt unserer jetzt zu integrirenden Gleichung

$$\begin{aligned}
&(m+x)\,y''' + [B+C-(2\alpha+\beta)\,(m+x)]\,y'' + [A-B(\alpha+\beta)- \\
&- 2\alpha C + (m+x)\,(\alpha^2+2\alpha\beta)]\,y' + [\alpha^2 C+B\alpha\beta-A\beta- \\
&- \alpha^2\beta\,(m+x)]\,y = o.
\end{aligned}$$

Die Substitution

$$y = e^{\beta x}\,z$$

gibt:

$$(m+x)z'''+[B+C+2(\beta-\alpha)(m+x)]z''+[A+(\beta-\alpha)\,.$$
$$.\,(B+2C)+(\beta-\alpha)^2(m+x)]z'+C(\beta-\alpha)^2 z=o$$

und ein μ faches Differenziren derselben führt auf:

$$(m+x)z^{(\mu+3)}+[\mu+B+C+2(\beta-\alpha)(m+x)]z^{(\mu+2)}+$$
$$+[2\mu(\beta-\alpha)+A+(\beta-\alpha)(B+2C)+(\beta-\alpha)^2(m+x)]z^{(\mu+1)}+$$
$$+(\mu+C)(\beta-\alpha)^2 z^{(\mu)}=o.$$

Setzen wir nun:

$$\mu+C=o,$$

so erhalten wir:

$$(20)\qquad (m+x)z^{(\mu+3)}+[B+2(\beta-\alpha)(m+x)]z^{(\mu+2)}+[A+$$
$$+B(\beta-\alpha)+(\beta-\alpha)^2(m+x)]z^{(\mu+1)}=o.$$

Diese lässt sich nun so behandeln, wie die Differentialgleichungen zweiter Ordnung, denn sie ist eigentlich eine solche, wenn $z^{(\mu+1)}$ als die abhängige Variable angesehen wird. Bilden wir daher behufs der Integration den $\frac{U_0}{U_1}$ genannten Bruch, dieser ist:

$$\frac{mu^2+[B+2m(\beta-\alpha)]u+A+B(\beta-\alpha)+m(\beta-\alpha)^2}{u^2+2u(\beta-\alpha)+(\beta-\alpha)^2}$$

und gibt in Partialbrüche zerlegt:

$$m+\frac{A}{(u+\beta-\alpha)^2}+\frac{B}{u+\beta-\alpha}$$

Das Integral der Gleichung (20) ist daher:

$$z^{(-C+1)}=C_1 e^{(\alpha-\beta)x}\frac{d^{B-\frac{1}{2}}}{dx^{B-\frac{1}{2}}}\left[e^{2\sqrt{-A(m+x)}}\right]+$$
$$+C_2 e^{(\alpha-\beta)x}\frac{d^{B-\frac{1}{2}}}{dx^{B-\frac{1}{2}}}\left[e^{-2\sqrt{-A(m+x)}}\right]$$

oder falls $A=o$ ist:

$$z^{(-C+1)}=C_1\ e^{(\alpha-\beta)x}+\frac{C_2\,e^{(\alpha-\beta)x}}{(m+x)^{B-1}}$$

oder endlich falls $A=o,\ B=1$ ist:

$$z^{(-C+1)}=C_1 e^{(\alpha-\beta)x}+C_2 e^{(\alpha-\beta)x}\ log\,(m+x)$$

und folglich erscheint das Integrale unserer jetzt eben in Betracht habenden Gleichung in folgenden Formen:

$$y = C_1 e^{\beta x} \frac{d^{C-1}}{dx^{C-1}} \left\{ e^{(\alpha-\beta)x} \frac{d^{B-\frac{1}{2}}}{dx^{B-\frac{1}{2}}} \left[e^{2\sqrt{-A(m+x)}} \right] \right\} +$$
$$+ C_2 e^{\beta x} \frac{d^{C-1}}{dx^{C-1}} \left\{ e^{(\alpha-\beta)x} \frac{d^{B-\frac{1}{2}}}{dx^{B-\frac{1}{2}}} \left[e^{-2\sqrt{-A(m+x)}} \right] \right\}$$

oder wenn $A = o$ ist:

$$y = C_1 e^{\alpha x} + \quad C_2 e^{\beta x} \frac{d^{C-1}}{dx^{C-1}} \left[\frac{e^{(\alpha-\beta)x}}{(m+x)^{B-1}} \right]$$

oder wenn $A = o$, $B = 1$ ist:

$$y = C_1 e^{\alpha x} + \quad C_2 e^{\beta x} \frac{d^{C-1}}{dx^{C-1}} \left[e^{(\alpha-\beta)x} \log (m+x) \right]$$

Diese hier angeführten Integrale enthalten blos zwei willkürliche Constante, und müssen daher noch durch ein drittes mit einer willkürlichen Constante versehenes particuläres Integrale completirt werden.

Integration derjenigen Differentialgleichung, für welche

$$\frac{U_0}{U_1} = m + \frac{A}{(u-\alpha)^3} + \frac{B}{(u-\alpha)^2} + \frac{C}{u-\alpha}$$

ist.

Aus dieser Gleichung folgen

$$\begin{aligned}
a_3 &= mb_3 \\
a_2 &= b_3\,(-3\,\alpha\, m + C) \\
a_1 &= b_3\,(3\,\alpha^2 m - 2\,\alpha\, C + B) \\
a_0 &= b_3\,(-\alpha^3 m + \alpha^2 C - \alpha B + A) \\
b_2 &= -\,3\,\alpha\, b_3 \\
b_1 &= 3\,\alpha^2 b_3 \\
b_0 &= -\,\alpha_3\, b_3
\end{aligned}$$

somit ist die zu integrirende Gleichung:

$$(m+x)y''' + [\,C - 3\,\alpha\,(m+x)\,]\,y'' + [B - 2\,\alpha\, C + 3\,\alpha^2\,(m+x)]\,y' +$$
$$+ [\,A - B\,\alpha + C\alpha^2 - \alpha^3\,(m+x)\,]\,y = o$$

und diese geht für

$$y = e^{\alpha x} z$$

über in

$$(m+x)\,z''' + Cz'' + Bz' + Az = o$$

welche sich durch μ malige Differentiation in folgende verwandelt:

$$(m+x)\,z^{(\mu+3)}+(\mu+C)z^{(\mu+2)}+Bz^{(\mu+1)}+Az^{(\mu)}=o$$

und sich folglich für:

$$\mu+C=o$$

vereinfacht. Man erhält nämlich:

$$(m+x)\,z^{(-C+3)}+Bz^{(-C+1)}+Az^{(-C)}=o$$

und wenn man

$$z^{(-C)}=u \text{ und } m+x=\xi$$

setzt,

(20) $$\xi u'''+Bu'+Au=o$$

für welche wir gar keinen andern, uns zusagenden Integrationsweg kennen, als den durch unendliche Reihen.

In dem speciellen Falle wo

$$A=o$$

ist, geht obige Gleichung über in:

$$(m+x)\,z'''+Cz''+Bz'=o$$

welche für

$$z'=u$$

eine Gleichung zweiter Ordnung wird, deren Integration uns vollständig gelang. Eben so ist in dem speciellen Falle wo $B=o$ die Integration der Gleichung

$$\xi u'''+Au=o$$

ausführbar. Wir haben im 26. Band von Grunert's Archiv für Mathematik das Integral dieser Gleichung durch unendliche convergente Reihen gegeben.

Endlich lässt sich leicht das Integrale angeben, wenn

$$A=o \text{ und } B=o,$$

oder wenn

$$A=B=C=o$$

ist.

Integration derjenigen Differentialgleichung, für welche

$$\frac{U_0}{U_1}=m+nu+\frac{A}{u-\alpha}+\frac{B}{u-\beta}$$

ist.

In diesem Falle hat man

$$
\begin{aligned}
a_3 &= mb_2\\
a_2 &= b_2\,[n-m\,(\alpha+\beta)]\\
a_1 &= b_2\,[A+B-n\,(\alpha+\beta)+m\alpha\beta]\\
a_0 &= b_2\,[n\alpha\beta-A\beta-B\alpha]\\
b_1 &= -\,b_2\,(\alpha+\beta)\\
b_0 &= b_2\,\alpha\beta
\end{aligned}
$$

und zur Differentialgleichung

$$
\begin{aligned}
&my''' + [n-m\,(\alpha+\beta)+x]\,y'' + [m\alpha\beta + A+B-(n+x)\;.\\
&.\;(\alpha+\beta)]\,y' + [-A\beta-B\alpha+\alpha\beta\,(n+x)]\,y = o.
\end{aligned}
$$

Die Substitution

$$y = e^{\alpha x} z$$

gibt:

$$
\begin{aligned}
&mz''' + [(2\alpha-\beta)\,m+n+x]\,z'' + [\alpha^2 m-\alpha\beta m+A+B+\\
&\quad+(\alpha-\beta)\,(n+x)]\,z' + A\,(\alpha-\beta)\,z = o
\end{aligned}
$$

und ein μ maliges Differenziren führt auf:

$$
\begin{aligned}
&mz^{(\mu+3)} + [(2\alpha-\beta)\,m+n+x]\,z^{(\mu+2)} + [\mu+\alpha^2 m-\alpha\beta m+\\
&+A+B+(\alpha-\beta)\,(n+x)]\,z^{(\mu+1)} + (\mu+A)\,(\alpha-\beta)\,z^{(\mu)} = o.
\end{aligned}
$$

Nun setzen wir

$$\mu + A = o$$

und erhalten dadurch:

$$
\begin{aligned}
&mz^{(\mu+3)} + [(2\alpha-\beta)\,m+n+x]\,z^{(\mu+2)} + [\alpha^2 m-\alpha\beta m+B+\\
&\quad+(\alpha-\beta)\,(n+x)]\,z^{(\mu+1)} = o,
\end{aligned}
$$

die wir, da sie bezüglich $z^{(\mu+1)}$ von der zweiten Ordnung ist, zu integriren vermögen. Wir bilden uns daher den, dieser Gleichung entsprechenden Bruch

$$\frac{mu^2+[(2\alpha-\beta)\,m+n]\,u+\alpha^2 m-\alpha\beta m+B+n\,(\alpha-\beta)}{u+\alpha-\beta}$$

der zerlegt Folgendes gibt:

$$mu+\alpha m+n+\frac{B}{u+\alpha-\beta}$$

folglich ist:

$$
\begin{aligned}
z^{(\mu+1)} = C_1\,e^{(\beta-\alpha)\,x}\,\frac{d^{B-1}}{dx^{B-1}}\left[e^{-\frac{m\beta+n}{m}x-\frac{x^2}{2m}}\right]+\\
+\,C_2\,e^{-\frac{\alpha m+n}{m}x-\frac{x^2}{2m}}\,\frac{d^{-B}}{dx^{-B}}\left[e^{\frac{m\beta+n}{m}x+\frac{x^2}{2m}}\right]
\end{aligned}
$$

und daher

$$y = C_1 e^{\alpha x} \frac{d^{A-1}}{dx^{A-1}} \left\{ e^{(\beta-\alpha)x} \frac{d^{B-1}}{dx^{B-1}} \left[e^{-\frac{m\beta+n}{m}x - \frac{x^2}{2m}} \right] \right\} +$$

$$+ C_2 e^{\alpha x} \frac{d^{A-1}}{dx^{A-1}} \left\{ e^{-\frac{\alpha m+n}{m}x - \frac{x^2}{2m}} \frac{d^{-B}}{dx^{-B}} \left[e^{\frac{m\beta+n}{m}x + \frac{x^2}{2m}} \right] \right\}$$

Vertauscht man α mit β und zugleich A mit B, so erhält man wieder particuläre Integrale, somit hat man:

$$y = C_1 e^{\alpha x} \frac{d^{A-1}}{dx^{A-1}} \left\{ e^{(\beta-\alpha)x} \frac{d^{B-1}}{dx^{B-1}} \left[e^{-\frac{m\beta+n}{m}x - \frac{x^2}{2m}} \right] \right\} +$$

$$+ C_2 e^{\alpha x} \frac{d^{A-1}}{dx^{A-1}} \left\{ e^{-\frac{\alpha m+n}{m}x - \frac{x2}{2m}} \frac{d^{-B}}{dx^{-B}} \left[e^{\frac{m\beta+n}{m}x + \frac{x^2}{2m}} \right] \right\} +$$

$$+ C_3 e^{\beta x} \frac{d^{B-1}}{dx^{B-1}} \left\{ e^{(\alpha-\beta)x} \frac{d^{A-1}}{dx^{A-1}} \left[e^{-\frac{m\alpha+n}{m}x - \frac{x^2}{2m}} \right] \right\} +$$

$$+ C_4 e^{\beta x} \frac{d^{B-1}}{dx^{B-1}} \left\{ e^{-\frac{\beta m+n}{m}x - \frac{x^2}{2m}} \frac{d^{-A}}{dx^{-A}} \left[e^{\frac{m\alpha+n}{m}x + \frac{x^2}{2m}} \right] \right\}$$

Da die vorgelegte Gleichung von der dritten Ordnung ist, so hat ihr completes Integrale auch nur drei willkürliche Constante. Da nun ferner jede den hier aufgestellten vier Ausdrücken für sich genügt, so kann man irgend einen von denselben weglassen; und hat dann das vollständige Integrale.

Integration derjenigen Differentialgleichung, für welche

$$\frac{U_0}{U_1} = mu + n + \frac{A}{(u-\alpha)^2} + \frac{B}{u-\alpha}$$

ist.

In diesem Falle hat man

$$a_3 = mb_2$$
$$a_2 = b_2\,(n-2\alpha m)$$
$$a_1 = b_2\,(m\alpha^2-2\alpha n+B)$$
$$a_0 = b_2\,(n\alpha^2-B\alpha+A)$$
$$b_1 = -2\alpha\, b_2$$
$$b_0 = b_2\, \alpha^2$$

und die zu integrirende Differentialgleichung heisst:

$$my''' + (n - 2\alpha m + x) y'' + [m\alpha^2 + B - 2\alpha(n+x)] y' + \\ + [A - B\alpha + \alpha^2 (n+x)] y = o.$$

Durch Substitution von

$$y = e^{\alpha x} z$$

erhält man:

$$mz''' + (\alpha m + n + x) z'' + Bz' + Az = o.$$

welche mittelst der von Petzval gebrauchten Integrations-Methode, welche eigentlich von Laplace herrührt, zu particulären Integralen von der Form führt:

$$y = \int u^{B-2} e^{m \frac{u^2}{2} + (\alpha m + n + x) u - \frac{A}{u}} du$$

mit Integrationsgrenzen, welche constant sind, und aus der Gleichung

$$u^B e^{m \frac{u^2}{2} + (\alpha m + n + x) u - \frac{A}{u}} = o$$

hervorzugehen haben; wir gestehen offen, dass uns dieses Integrale nicht zusagt (in unserem nächsten Memoire werden wir es durch ein, uns mehr zusagendes ersetzen), es sei denn, dass

$$A = o$$

wäre. In diesem Falle hätte man:

$$z' = C_1 \frac{d^{B-1}}{dx^{B-1}} \left[e^{-\frac{m\alpha+n}{m} x - \frac{x^2}{2m}} \right] + \\ + C_2 e^{-\alpha x - \frac{n}{m} x - \frac{x^2}{2m}} \frac{d^{-B}}{dx^{-B}} \left[e^{\frac{m\alpha+n}{m} x + \frac{x^2}{2m}} \right]$$

somit:

$$y = C_1 e^{\alpha x} \frac{d^{B-2}}{dx^{B-2}} \left[e^{-\frac{m\alpha+n}{m} x - \frac{x^2}{2m}} \right] + \\ + C_2 e^{\alpha x} \int e^{-\frac{m\alpha+n}{m} x - \frac{x^2}{2m}} \frac{d^{-B}}{dx^{-B}} \left[e^{\frac{m\alpha+n}{m} x + \frac{x^2}{2m}} \right] dx$$

Ist $A = o$ und $B = o$, so findet man:

$$y = (C_1 + C_2 x) e^{\alpha x} + C_3 \iint e^{-\frac{\alpha m+n}{m} x - \frac{x^2}{2m}} dx^2.$$

Integration jener Differentialgleichung, für welche

$$\frac{U_0}{U_1} = m+nu+pu^2 + \frac{A}{u-\alpha}$$

ist.

Hier hat man

$$a_3 = b_1 p$$
$$a_2 = b_1 (n-\alpha p)$$
$$a_1 = b_1 (m-\alpha n)$$
$$a_0 = b_1 (A-\alpha m)$$
$$b_0 = - b_1 \alpha$$

folglich ist die zu integrirende Differentialgleichung:

$$py''' + (n-\alpha p) y'' + (m-\alpha n+x) y' + (A-\alpha m-\alpha x) y = o$$

für

$$y = e^{\alpha x} z$$

erhält man:

$$pz''' + (n+2\alpha p) z'' + (\alpha^2 p+\alpha n+m+x) z' + Az = o$$

und durch ein $-A$ maliges Differenziren:

$$pz^{(-A+3)} + (n+2\alpha p) z^{(-A+2)} + (\alpha^2 p + \alpha n+m+x) z^{(-A+1)} = o,$$

deren Integrale Folgendes ist:

$$z^{(-A+1)} = C_1 \int_0^{\mu_1 \infty} e^{\frac{p}{3} u^3 + \left(\frac{n}{2} + \alpha p\right) u^2 + u(m+\alpha n+\alpha^2 p+x)} du +$$

$$+ C_2 \int_0^{\mu_2 \infty} e^{\frac{p}{3} u^3 + \left(\frac{n}{2} + \alpha p\right) u^2 + u(m+\alpha n+\alpha^2 p+x)} du +$$

$$+ C_3 \int_0^{\mu_3 \infty} e^{\frac{p}{3} u^3 + \left(\frac{n}{2} + \alpha p\right) u^2 + u(m+\alpha n+\alpha^2 p+x)} du$$

unter $\mu_1 \infty$ $\mu_2 \infty$ $\mu_3 \infty$ die Wurzeln der Gleichung

$$pu^3 = -\infty$$

und unter $C_1\, C_2\, C_3$ willkürliche Constante verstanden, deren Summe gleich Null ist. Es ist daher:

$$y = C_1\, e^{\alpha x}\int_0^{\mu_1\infty} u^{A-1}\, e^{\frac{p}{3}u^3+\left(\alpha p+\frac{n}{2}\right)u^2+(m+\alpha n+\alpha^2 p+x)}\, du +$$

$$+ C_2\, e^{\alpha x}\int_0^{\mu_2\infty} u^{A-1}\, e^{\frac{p}{3}u^3+\left(\alpha p+\frac{n}{2}\right)u^2+(m+\alpha n+\alpha^2 p+x)}\, du +$$

$$+ C_3\, e^{\alpha x}\int_0^{\mu_3\infty} u^{A-1}\, e^{\frac{p}{3}u^3+\left(\alpha p+\frac{n}{2}\right)u^2+(m+\alpha n+\alpha^2 p+x)}\, du.$$

Man hätte auch hier gleich vom Anfang an, und wenn $A>o$ ist, sogar mit mehr Erfolg die von Petzval angewandte Methode benützen können. Es wäre nämlich nach derselben für positives A

$$y = K_1\int_0^{\mu_1\infty} (u-\alpha)^{A-1}\, e^{\frac{p}{3}u^3+\frac{n}{2}u^2+(m+x)u}\, du +$$

$$+ K_2\int_0^{\mu_2\infty} (u-\alpha)^{A-1}\, e^{\frac{p}{3}u^3+\frac{n}{2}u^2+(m+x)u}\, du +$$

$$+ K_3\int_0^{\mu_3\infty} (u-\alpha)^{A-1}\, e^{\frac{p}{3}u^3+\frac{n}{2}u^2+(m+x)u}\, du$$

unter $K_1\, K_2\, K_3$ willkürliche Constante verstanden.

Wir kommen endlich zur

Integration derjenigen Differentialgleichung, für welche

$$\frac{U_0}{U_1} = m+nu+pu^2+qu^3$$

ist.

Da hat man:

$$\frac{a_0}{b_0} = m, \quad \frac{a_1}{b_0} = n, \quad \frac{a_2}{b_0} = p, \quad \frac{a_3}{b_0} = q$$

und die Differentialgleichung ist:

$$qy'''+py''+ny'+(m+x)\,y = o.$$

Durch Benützung der von Petzval angewandten Methode kömmt man auf das Integral:

$$
\begin{aligned}
y = {} & C_1 \int_0^{\mu_1 \infty} e^{m(u+x) + \frac{n}{2} u^2 + \frac{p}{3} u^3 + \frac{q}{4} u^4} du + \\
& + C_2 \int_0^{\infty \mu_2} e^{m(u+x) + \frac{n}{2} u^2 + \frac{p}{3} u^3 + \frac{q}{4} u^4} du + \\
& + C_3 \int_0^{\mu_3 \infty} e^{m(u+x) + \frac{n}{2} u^2 + \frac{p}{3} u^3 + \frac{q}{4} u^4} du + \\
& + C_4 \int_0^{\mu_4 \infty} e^{m(u+x) + \frac{n}{2} u^2 + \frac{p}{3} u^3 + \frac{q}{4} u^4} du
\end{aligned}
$$

unter C_1 C_2 C_3 C_4 willkürliche Constante verstanden, deren Summe gleich Null ist, und unter μ_1 μ_2 μ_3 μ_4 Zahlen, welche die Wurzeln der Gleichung:

$$qu^4 = -1$$

sind.

Wir könnten nun auf dieselbe Weise die Integration der Differenzen-Gleichungen dritter Ordnung behandeln und alsdann uns mit Gleichungen der vierten und höhern Ordnung beschäftigen, u. s. f. allein, da wir keine neuen Methoden bei denselben zu erörtern haben, so wollen wir diesen Aufsatz mit folgender allgemeiner Bemerkung schliessen:

Wenn die Gleichung:

$$
\begin{aligned}
(21) \qquad & (a_n + b_n x)\, y^{(n)} + (a_{n-1} + b_{n-1} x)\, y^{(n-1)} + \ldots \\
& + (a_1 + b_1 x)\, y' + (a_0 + b_0 x)\, y = o
\end{aligned}
$$

gegeben ist, und der aus den Coëfficienten derselben gebildete Bruch

$$\frac{U_0}{U_1} = \frac{a_n u^n + a_{n-1} u^{n-1} + \ldots + a_1 u + a}{b_n u^n + b_{n-1} u^{n-1} + \ldots + b_1 u + b_0}$$

sich so in Partialbrüche zerlegen lässt, auf dass

$$\frac{U_0}{U_1} = \frac{A}{u - \alpha} + \frac{P}{Q}$$

ist, unter $u-\alpha$ einen in U_1 nicht wiederholt vorkommenden Factor verstanden, so lässt sich die Gleichung (21) durch Substitution von

$$= e^{\alpha x} \frac{d^{A-1}}{dx^{A-1}} z$$

und nachheriger $-A$ maligen Differentionen auf eine Gleichung von derselben Form wie (21) bringen, die aber um eine Einheit in der Ordnungszahl niedriger ist. Ferner hat U_1 verschiedene Factoren:

$$u-\alpha_1 \quad u-\alpha_2, \quad u-\alpha_3 \ . \ \ . \ \ . \ u-\alpha_r$$

von denen keiner wiederholt in U_1 vorkommt, so lässt sich durch successive Anwendung des eben besprochenen Verfahrens der Grad der vorgelegten Gleichung um r Einheiten erniedrigen.

Da wir ferner immerwährend die Function complémentaire ausser Acht gelassen haben, so bleibt uns zur Verificirung der gewonnenen Integrale nichts anders übrig, als eine directe Substitution in die vorgelegte Gleichung. Und nun wenden wir uns zur Integration anders gebauter Differentialgleichungen.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1857

Band/Volume: 25

Autor(en)/Author(s): Spitzer Simon

Artikel/Article: Integration und Differentialgleichung. 31-70