ABHANDLUNGEN UND MITTHEILUNGEN.

Über die directe Constructions-Methode der verticalaxigen Krystallgestalten aus den Kantenwinkeln.

Von **Rudolph Niemtschik**,
Assistenten der darstellenden Geometrie am k. k. polytechnischen Institute in Wien.

(Mit 3 Tafeln.)

(Vorgetragen in der Sitzung am 24. Juni 1859.)

Der Umstand, dass an Krystallen nur die Grösse der Kantenwinkel mit hinreichender Genauigkeit gemessen werden kann, macht es nothwendig, dass, wenn man ein geometrisch richtiges Bild von der Form eines Krystalles anfertigen will, dasselbe aus den Kantenwinkeln construirt werden müsse.

Die bis jetzt angewandte Methode Krystallgestalten aus den Kantenwinkeln zu construiren, besteht darin, dass man aus den gemessenen Kantenwinkeln die Längen der Axen der betreffenden Gestalt und wenn die Neigungswinkel der Axen gegen einander noch nicht bekannt sind, auch diese durch Rechnung sucht, dann die Axenlinien unter den bestimmten Neigungswinkeln zieht, auf denselben die gefundenen Axenwerthe aufträgt und die so erhaltenen Punkte durch Gerade entsprechend mit einander verbindet.

Eine directe Constructions-Methode der Krystallgestalten aus den Kantenwinkeln war bis jetzt noch nicht bekannt.

Die gewöhnlich angewandte Methode liefert zwar ein genaues Resultat und bietet dem Krystallographen besonders dann, wenn es sich um die Auffindung von gewissen Verhältnisszahlen handelt, Vortheile, die ihm keine graphische Methode zu ersetzen im Stande ist. Für die Construction von Krystallformen, namentlich der Hemieder und Tetartoeder, ist sie jedoch zu umständlich und nicht selten sehr zeitraubend; auch gewährt sie bei weitem nicht die klare Einsicht in den Zusammenhang der bestehenden Verhältnisse, die sonst wieder graphische Methoden so sehr auszeichnet und ist überdies auch nur jenen zugänglich, die aussergewöhnliche Kenntnisse aus der Mathematik besitzen.

Die eben angeführten Übelstände der bekannten Methode, so wie der Mangel einer directen Lösung für solche Aufgaben waren ohne Zweifel die Hauptursache, dass bis jetzt bei vielen krystallographischen Arbeiten zwar die Krystallform gezeichnet, dabei aber auf die Grösse der Kantenwinkel, den Hauptfactor in der Krystallographie, keine Rücksicht genommen wurde, und ist auch desshalb die in der genannten Wissenschaft dadurch entstandene Lücke nicht unbedeutend gewesen.

Die Methode, welche wir im Folgenden erörtern und später zur Darstellung der Krystallgestalten anwenden werden, beruht auf der Construction einer dreiflächigen Ecke, welche wir mit Zuhilfenahme einer Kugel direct aus den Kantenwinkeln bestimmen und desshalb auch die Methode selbst „die directe Constructions-Methode der Krystallgestalten aus den Kantenwinkeln“ nennen. Sie zeichnet sich vorzüglich dadurch aus, dass man mit Hilfe derselben jede beliebige Krystallgestalt unabhängig von der Grundgestalt und wenn dieselbe ein Hemieder oder Tetartoeder ist, unabhängig von der vollflächigen Gestalt blos aus der Grösse der Kantenwinkel äusserst genau darstellen kann, dass sie Jederman selbst dem Ungeübten im Construiren schnell zugänglich wird, und dass sie sich zur Darstellung der sämmtlichen den ersten vier Krystall-Systemen angehörigen Gestalten consequent anwenden lässt.

Bei der Construction der schiefaxigen Gestalten tritt eine unbedeutende Modification ein, und dies ist auch der Grund, wesshalb wir die Construction der schiefaxigen Gestalten für sich abgesondert vornehmen werden.

Unsere Aufgabe wird zunächst sein, die Richtigkeit des Principes unserer Constructions-Methode nachzuweisen. Haben wir dies gethan, so bestimmen wir nach diesem Principe der Reihe nach die bei den Gestalten der ersten vier Systeme am häufigsten vorkommenden Ecken und gehen dann erst zu der Construction der Krystallgestalten selbst über. Dadurch erreichen wir den Vortheil, dass wir uns in der Folge bei der Construction der Krystallgestalten kürzer fassen und auf diese Weise vielen sonst unvermeidlichen Wiederholungen im Texte vorbeugen können. Dem Leser wird ein solches Vorgehen auch schon desshalb willkommen sein, weil er fast ohne merklichen Übergang von den einfacheren Lösungen zu den schwierigeren geleitet wird.

Sowohl die Ecken als auch die Krystallgestalten sind hier in der orthogonalen Projection construirt, weil man aus dieser allgemeinen Projection die wahren Grössen aller erforderlichen Bestimmungsstücke am einfachsten finden und dann hieraus jede Krystallform in einer andern beliebigen Projection leicht darstellen kann.

Bei der Construction der körperlichen Ecken, welche die eigentliche Basis für das Zeichnen der Krystallgestalten bildet, lassen wir am Ende eines jeden Paragraphes ein kurzes praktisches Verfahren zum Construiren derselben folgen.

Die für die Berechnung der Axenwerthe und der nicht gegebenen Kantenwinkel und sonstigen Bestimmungsstücke hier entwickelten Formeln sind stets unmittelbar aus der betreffenden Figur abgeleitet und daher ebenfalls unabhängig von den Werthen der Grundgestalt.

Auch die Art und Weise der Entwickelung der hier aufgestellten Formeln ist eine eigenthümliche und verdient einer besonderen Beachtung gewürdigt zu werden.

§. 1. Construction der dreiflächigen Ecke.

Um die Richtigkeit der Methode, welche wir zur Darstellung der dreiflächigen Ecke aus den Kantenwinkeln anwenden, auf eine möglichst anschauliche Art nachzuweisen, wollen wir die zu construirende Ecke $S'a'b'c'$, $S''a''b''c''$ Taf. I, Fig. 1, deren Kantenwinkel K_1, K_2, K_3 gegeben sind, zuerst in einer solchen Lage bestimmen, wo die Ebene aSb mit der horizontalen Projections-Ebene zusammenfällt und die Ebene aSc auf die verticale Projections-Ebene senkrecht zu stehen kommt, wonach die von den Ebenen aSb und aSc gebildete Kante Sa senkrecht auf der Projectionsaxe AX und der von denselben Ebenen eingeschlossene Winkel $ntp = K_1$ in der verticalen Projections-Ebene in der wahren Grösse erscheint.

Offenbar handelt es sich dann nur darum, die Ebene bSc so zu bestimmen, dass sie mit der in der horizontalen Projections-Ebene liegenden Ebene aSb den Winkel K_2 und mit der Ebene aSc den Winkel K_3 einschliesse.

Zu diesem Behufe beschreibe man mit einem beliebigen Halbmesser $oy = R$ eine die beiden Ebenen aSb und aSc berührende Kugel $w'x'y'$, $e''n''p''$, deren Mittelpunkt o in der Halbirungsgeraden to des Winkels $ntp = K_1$ liegt, führe an den Hauptmeridian $e''n''p''$ zwei die Kugel berührende Ebenen Bsc und $B_1s_1c_1$, welche beziehungsweise mit den Ebenen aSb und aSc die Winkel $edp = K_2$ und $gfn = K_3$ einschliessen und rotire dieselben so, dass beide Ebenen an die Kugel stets tangirend bleiben und dass dabei die Ebene Bsc die Neigung K_2 gegen die Ebene aSb und die Ebene $B_1s_1c_1$ die Neigung K_3 gegen die Ebene aSc beibehält.

Durch die Umdrehung der Ebene Bsc entsteht nun eine die Kugel nach dem Horizontalkreise emh umhüllende Kegelfläche, deren Erzeugenden mit der Ebene aSb den Winkel K_2 bilden; es ist daher der Horizontalkreis emh der geometrische Ort der Berührungspunkte aller die Kugel tangirenden Ebenen, welche mit der Ebene aSb den Winkel K_2 einschliessen.

Durch die Umdrehung der Ebene $B_1s_1c_1$ entsteht ebenfalls eine Kegelfläche, welche jedoch die Kugel nach dem zu der Ebene aSc parallelen Kreise gmi umhüllt und deren Erzeugenden mit der Ebene aSc den Winkel K_3 einschliessen. Der Kreis gmi ist sonach der geometrische Ort der Berührungspunkte aller die Kugel tangirenden Ebenen, welche mit der Ebene aSc den Winkel K_3 bilden.

Haben nun die beiden Kreise emh und gmi irgend einen Punkt gemeinschaftlich, so wird die durch einen solchen Punkt an die Kugel berührend gelegte Ebene sowohl mit der Ebene aSb den Winkel K_2 als auch zugleich mit der Ebene aSc den Winkel K_3 einschliessen und daher die dritte Ebene bSc der zu bestimmenden Ecke sein.

Da in der vorliegenden Figur die beiden Kreise emh und gmi sich in den zwei Punkten m und m_1 schneiden, so sind auch zwei Ebenen möglich, welche mit der Ebene aSb den Winkel K_2 und zugleich mit der Ebene aSc den Winkel K_3 einschliessen; es werden daher in diesem Falle auch zwei blos durch die gegenseitige Stellung der Kanten von einander verschiedene dreiflächige Ecken mit den Kantenwinkeln K_1, K_2, und K_3 construirt werden können.

Für unsere Zwecke reicht es jedoch hin, wenn wir die Construction blos mit der einen, etwa mit jener, welcher die Berührungsebene des Punktes m angehört, vollständig durchführen, weil die zweite körperliche Ecke auf dieselbe Weise bestimmt werden kann.

Da die Berührungsebene des Punktes m mittelst zwei durch diesen Punkt gehenden Tangenten bestimmt ist, so wird man die Durchschnitte der Ebene bSc mit den Ebenen aSb und aSc auch dadurch erhalten, indem man die Durchdringungspunkte zweier solcher Tangenten mit den Ebenen aSb und aSc sucht und dieselben durch Gerade entsprechend mit einander verbindet.

Am einfachsten ist es jedoch, wenn man die Tangente md_1 in der Meridianebene des Punktes m, die andere uv horizontal annimmt, weil dadurch die Auffindung der Durchdringungspunkte sehr erleichtert wird.

Die Tangente md_1 hat nämlich dieselbe Neigung wie die Tangente ed, weil beide in Meridianebenen der Kugel liegen und dieselbe in Punkten eines und desselben Parallelkreises emh berühren; man braucht desshalb blos $p'd_1' = p'd'$ zu machen und d_1' nach d_1'' zu projiciren, um den Durchdringungspunkt d_1 der Tangente md_1 mit der Ebene aSb zu finden.

Da ferner die Tangente uv zu der Ebene aSb parallel ist, so durchdringt sie die Ebene aSb erst in unendlicher Entfernung und man muss daher, um die Kante Sb zu erhalten, den Punkt d_1 mit einem unendlich weit entfernten Punkte z der Tangente uv verbinden, d. h. die Kante Sb muss zu der Tangente uv parallel sein.

Verlängert man $d''m''$ und $u''v''$, bis die Verticaltrace Sc der Ebene aSc in den Punkten l'' und u'' geschnitten wird, projicirt die Punkte l'' und u'' nach l' und u' und verbindet l' mit u' durch die Gerade $u'\,l'$, so bekommt man die horizontale Projection der Kante Sc. Ihre verticale Projection liegt in der Verticaltrace Sc der Ebene aSc.

Hat man genau gezeichnet, so werden sich die beiden Kanten Sb und Sc, wie sich von selbst versteht, in einem Punkte S der Kante Sa schneiden und es wird S die Spitze der gesuchten dreiflächigen Ecke darstellen.

Untersucht man nun, unter welchen Bedingungen sich die beiden Kreise emh und gmi durchschneiden, so findet man unmittelbar aus der Figur 1, Taf. I, dass

$$K_1 + K_2 + K_3 > 180,$$
$$K_1 + K_2 + K_3 < 540$$

und überdies $\quad K_2 + K_3 < 180 + K_1$ sein muss.

Dies sind aber die drei Bedingungen, unter welchen überhaupt eine dreiflächige körperliche Ecke möglich ist. Diese Methode ist demnach für die Darstellung der dreiflächigen Ecke aus den Kantenwinkeln in allen möglichen Fällen anwendbar.

Für den Fall als $K_1 + K_2 + K_3 = 180^0$ ist, werden sich die beiden Kreise *emh* und *gmi* in einem Punkte des der Kante *Sa* abgewendeten Theiles des Hauptmeridians berühren, die Ebene *bSc* wird zu der Kante *Sa* parallel sein und man erhält durch den Durchschnitt der drei Ebenen *aSb*, *aSc* und *bSc* ein dreiseitiges Prisma mit den Kantenwinkeln K_1, K_2 und K_3.

Für den Fall als $K_2 + K_3 = 180 + K_1$ ist, werden sich die beiden Kreise *emh* und *gmi* in einem Punkte des der Kante *Sa* zugewendeten Theiles des Hauptmeridians berühren, die Ebene *bSc* wird zu der Kante *Sa* parallel sein und man erhält durch den Durchschnitt der drei Ebenen *aSb*, *aSc* und *bSc* ein dreiseitiges Prisma mit den Kantenwinkeln K_1, $180 - K_2$ und $180 - K_3$.

Verbindet man die Punkte *S* und *o* mit einander und mit den Punkten *m*, *n*, *p* durch die Geraden *So*, *Sm*, *Sn*, *Sp*, *om*, *on* und *op*, so findet man:

$$\sphericalangle Smo = \sphericalangle Sno = \sphericalangle Spo = 90^0.$$
$$om = on = op$$

als Radien einer Kugel, die Seite *So* den Dreiecken *mSo*, *nSo* und *pSo* gemeinschaftlich, daher

$$\triangle mSo \cong \triangle nSo \cong \triangle pSo$$

und

$$\sphericalangle mSo = \sphericalangle nSo = \sphericalangle pSo.$$
$$Sm = Sn = Sp$$

Zieht man von den Punkten *m*, *n*, *p* die Geraden *mw*, nw_1 und pw_2 senkrecht auf *So*, so hat man auch

$$\sphericalangle Swm = \sphericalangle Sw_1n = \sphericalangle Sw_2p = 90^0,$$
$$\sphericalangle mSw = \sphericalangle nSw_1 = \sphericalangle pSw_2.$$
$$Sm = Sn = Sp.$$

daher

$$\triangle mSw \cong \triangle nSw_1 \cong \triangle pSw_2$$

und

$$mw = nw_1 = pw_2,$$
$$Sw = Sw_1 = Sw_2.$$

Die Gerade So steht demnach im Mittelpunkte w des Kreises mnp auf dessen Ebene senkrecht.

Führt man durch die Punkte m, n, p an den durch dieselben gehenden Kreis mnp die Tangenten $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$ und $\alpha\beta$, so müssen sie sich in den Kanten der körperlichen Ecke $Sabc$ schneiden, denn sie liegen alle in der Ebene mnp und zugleich, da sie auf den Radien om, on, und op der Kugel beziehungsweise senkrecht stehen, auch in den Ebenen bSc, cSa und aSb.

Zieht man endlich auch noch die Geraden mn, np und pm, setzt Kürze halber $wm = wn = wp = r$, $pn = a$, $pm = b$, $mn = c$, $\sphericalangle\, pmn = A$, $\sphericalangle\, mnp = B$ und $\sphericalangle\, mpn = C$, so findet man:

$$a = 2R \sin\left(90 - \frac{K_1}{2}\right) = 2R \cos \frac{K_1}{2}$$

$$b = 2R \sin\left(90 - \frac{K_2}{2}\right) = 2R \cos \frac{K_2}{2}$$

$$c = 2R \sin\left(90 - \frac{K_3}{2}\right) = 2R \cos \frac{K_3}{2},$$

$$r = \frac{a}{2 \sin A} = \frac{b}{2 \sin B} = \frac{c}{2 \sin C}$$

oder wenn man statt der ganzen die halben Winkel setzt:

$$r = \frac{a}{4 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}} = \frac{b}{4 \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2}} = \frac{c}{4 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}}.$$

Da jedoch

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}; \quad \cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

$$\sin \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}}; \quad \cos \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{s(s-b)}{ac}}$$

$$\sin \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}; \quad \cos \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}$$

wobei $s = \frac{a+b+c}{2}$ bedeutet; so ist auch

$$r = \frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}} = \frac{abc}{\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}}$$

und wenn man statt a, b, c die obigen Werthe setzt

$$r = \frac{2R\cos\frac{K_1}{2}\cos\frac{K_2}{2}\cos\frac{K_3}{2}}{\sqrt{\left(\cos\frac{K_1}{2}+\cos\frac{K_2}{2}+\cos\frac{K_3}{2}\right)\left(\cos\frac{K_2}{2}+\cos\frac{K_3}{2}-\cos\frac{K_1}{2}\right)\left(\cos\frac{K_1}{2}+\cos\frac{K_3}{2}-\cos\frac{K_2}{2}\right)\left(\cos\frac{K_1}{2}+\cos\frac{K_2}{2}-\cos\frac{K_3}{2}\right)}}.$$

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke wSm und wmo folgt:

$$wS : wm = wm : wo$$

d. i.

$$wS : r = r : \sqrt{R^2 - r^2}.$$

mithin

$$wS = \frac{r^2}{\sqrt{R^2 - r^2}}.$$

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke wSm und Smo folgt aber

$$oS : om = om : ow$$

d. i.

$$oS : R = R : \sqrt{R^2 - r^2},$$

daher

$$oS = \frac{R^2}{\sqrt{R^2 - r^2}};$$

endlich ist auch

$$\alpha\beta = \alpha p + p\beta = r\,\text{tg.}\,\alpha wp + r\,\text{tg.}\,\beta wp = r\,(\text{tg.}\,A + \text{tg.}\,B)$$
$$\alpha\gamma = \alpha n + n\gamma = r\,\text{tg.}\,\alpha wp + r\,\text{tg.}\,\gamma wp = r\,(\text{tg.}\,A + \text{tg.}\,C)$$
$$\beta\gamma = \beta m + m\gamma = r\,\text{tg.}\,\beta wm + r\,\text{tg.}\,\gamma wm = r\,(\text{tg.}\,B + \text{tg.}\,C).$$

Es ist aber

$$\text{tg.}\,A = \frac{R\cos\frac{K_1}{2}}{\sqrt{r^2 - R^2\cos^2\frac{K_1}{2}}}$$

$$\text{tg. } B = \frac{R \cos \frac{K_2}{2}}{\sqrt{r^2 - R^2 \cos^2 \frac{K_2}{2}}}$$

$$\text{tg. } C = \frac{R \cos \frac{K_3}{2}}{\sqrt{r^2 - R^2 \cos^2 \frac{K_3}{2}}};$$

mithin

$$\alpha\beta = Rr \left[\frac{\cos \frac{K_1}{2}}{\sqrt{r^2 - R^2 \cos^2 \frac{K_1}{2}}} + \frac{\cos \frac{K_2}{2}}{\sqrt{r^2 - R^2 \cos^2 \frac{K}{2}}} \right]$$

$$\alpha\gamma = Rr \left[\frac{\cos \frac{K_1}{2}}{\sqrt{r^2 - R^2 \cos^2 \frac{K_1}{2}}} + \frac{\cos \frac{K_3}{2}}{\sqrt{r^2 - R^2 \cos^2 \frac{K_3}{2}}} \right]$$

und

$$\beta\gamma = Rr \left[\frac{\cos \frac{K_2}{2}}{\sqrt{r^2 - R^2 \cos^2 \frac{K_2}{2}}} + \frac{\cos \frac{K_3}{2}}{\sqrt{r^2 - R^2 \cos^2 \frac{K_3}{2}}} \right].$$

Aus den eben gewonnenen Daten geht nun für die Darstellung der dreiflächigen Ecke aus den Kantenwinkeln folgendes sehr einfache Verfahren hervor:

Man bestimme zuerst ein Dreieck *mnp* Taf. I, Fig. 2, dessen Seiten der Reihe nach gleich sind $2R \cos \frac{K_1}{2}$, $2R \cos \frac{K_2}{2}$, $2R \cos \frac{K_3}{2}$, also gleich den Sehnen der Mittelpunkts-Winkel von $180 - K_1$, $180 - K_2$, $180 - K_3$ im Kreise vom Halbmesser R und ziehe durch die Eckpunkte m, n, p an den dem Dreiecke umschriebenen Kreis die Tangenten $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ und $\gamma\alpha$, welche sich in den Punkten α, β und γ schneiden. Dann errichte man im Mittelpunkte w des Kreises *mnp* auf dessen Ebene die Senkrechte oS, verzeichne über oS als Hypotenuse ein Dreieck ozS, dessen Scheitel z des rechten Winkels in die Peripherie des Kreises *mnp* fällt, und dessen Kathete $zo = R$ ist und verbinde den dieser Kathete gegenüber liegenden Eckpunkt S mit den Punkten α, β, γ

durch die Geraden $S\alpha$, $S\beta$ und $S\gamma$, welche sofort die Kanten der gesuchten dreiflächigen Ecke bilden.

Zieht man die Geraden om, on und op, so erhält man eine dreiflächige Ecke $omnp$ mit den Flächenwinkeln $180 - K_1$, $180 - K_2$ und $180 - K_3$, mithin die Supplementar-Ecke der ersteren.

Handelt es sich blos darum, eine Ebene bSc so zu bestimmen, dass sie mit der Ebene aSb den Winkel K_2, mit der Ebene aSc den Winkel K_3 einschliesse; so ist es nicht nothwendig, dass die Leitkugel die beiden Ebenen aSb und aSc berühre und dass ihr Mittelpunkt in der Halbirungslinie to des Winkels $ntp = K_1$ liege. Der Mittelpunkt o kann irgendwo im Raume innerhalb oder ausserhalb des Winkels $ntp = K_1$ sich befinden und die Leitkugel $w_2'x_2'y_2'$, $e_2''n_2''p_2''$ von einem beliebigen Halbmesser sein, so wird man, sobald die dreiflächige Ecke überhaupt möglich ist, immer auf die hier gezeigte Weise einen oder zwei Punkte auf der Oberfläche der Kugel von der Eigenschaft finden, dass die durch dieselben an die Kugel berührend gelegten Ebenen sowohl mit der Ebene aSb den Winkel K_2 als auch zugleich mit der Ebene aSc den Winkel K_3 einschliessen.

Wir wählten für die Aufsuchung der Ebene bSc blos desshalb eine die Ebenen aSb und cSc berührende Kugel, weil sich mit Hilfe derselben die früher aufgestellten Formeln und das aus diesen sich ergebende Verfahren zur Darstellung der dreiflächigen Ecke aus den Kantenwinkeln so einfach und leicht fassend ableiten lässt. Bei den meisten der folgenden Aufgaben werden wir den Mittelpunkt o in einen Punkt des Durchschnittes zweier Ebenen einer dreiflächigen Ecke versetzen.

Die Kugel $w''x''y''$, $e''n''p''$ nennen wir in der Folge kurzweg Leitkugel, weil wir mit Zuhilfenahme derselben die körperlichen Ecken bestimmen.

§. 2. Construction der dreiflächigen rhomboedrischen (trigonalen) Ecke.

Die dreiflächige rhomboedrische Ecke ist gleichwinkelig und gleichkantig. Ihre Axe ist sowohl gegen die Kanten als auch gegen die Begrenzungsebenen gleich geneigt und es halbirt jede durch die Axe und eine Kante gehende Ebene (Hauptschnittebene) den Kantenwinkel der in ihr liegenden Kante. Der Schnitt senkrecht auf die Axe ist ein gleichseitiges Dreieck (Trigon). Befindet sich diese Ecke in der aufrechten Stellung, so schliessen die Kanten so wie die Begrenzungsebenen mit der horizontalen Projections-Ebene gleiche Winkel ein und es müssen desshalb dann auch die horizontalen Projectionen der Flächenwinkel einander gleich sein.

Eine solche Ecke ist durch die Grösse einer Kante vollkommen bestimmt.

Um eine dreiflächige rhomboedrische Ecke aus der Grösse K_1 des Kantenwinkels zu construiren, ist es zweckmässig auf folgende Weise vorzugehen:

Man ziehe durch den Fusspunkt o' der vertical gestellten Axe So Taf. I. Fig. 3 die drei unter Winkeln von 120° sich schneidenden Geraden $o'a'$, $o'b'$, $o'c'$ als die horizontalen Projectionen der Kanten Sa, Sb, Sc der zu bestimmenden Ecke, führe an den Äquator fgr der von o aus mit dem Halbmesser $of = R$ beschriebenen Leitkugel die Tangenten ef und gh so, dass $\sphericalangle\, feo = \sphericalangle\, gho = \frac{K}{2}$ ist und rotire die Tangente ef um die auf oa senkrechte Gerade tu und die Tangente gh um die auf ab senkrechte Gerade xy als Drehungsaxe, wodurch zwei die Leitkugel nach den Kreisen fmi und gmk umhüllende Kegelflächen $dfmi$ und $lgmk$ gebildet werden, deren Spitzen in den Punkten d und l liegen und deren Erzeugenden mit den Hauptschnittebenen aSn und bSp beziehungsweise die Winkel $\frac{K}{2}$ einschliessen. Dann lege man an die beiden Kegelflächen eine tangirende Ebene aSb, welche, da sie gegen die Hauptschnittebenen aSn und bSp dieselbe Neigung $\frac{K}{2}$ wie die Erzeugenden der beiden Kegelflächen hat, eine Begrenzungsebene der gesuchten rhomboedrischen Ecke sein wird.

Da die Ebene aSb durch die beiden Kegelspitzen d und l geht, so muss sie die horizontale Projections-Ebene nach der Geraden dl schneiden. Als Berührungsebene der beiden Umhüllungskegel $dfmi$ und $lgmk$ muss sie aber die Leitkugel in dem den beiden Kreisen fmi und gmk gemeinschaftlichen Punkte m tangiren.

Ferner muss wegen der Gleichheit der Winkel, welche die Ebene aSb mit den Hauptschnittebenen aSn und bSp einschliesst, die horizontale Projection m' des Berührungspunktes m in der Halbirungsgeraden wm des Winkels $a'S'b'$ d. i. in der verlängerten $c'S'$ liegen und muss auch desshalb $o'a' = o'b'$ sein. —

Verlängert man die Geraden $a'S'$ und $b'S'$ über S' hinaus, macht $o'n' = o'p' = o'm'$, $o'c' = o'b' = o'a'$, so stellen die Punkte n', p' die horizontalen Projectionen der Berührungspunkte n, p und die Geraden $b'c'$ und $c'a'$ die Grundschnitte der zwei anderen Begrenzungsebenen der gesuchten rhomboedrischen Ecke $Sabc$ vor. Die verticalen Projectionen der Grundschnitte liegen bekanntlich in der Projectionsaxe AX, jene der Berührungspunkte in der durch die verticale Projection z'' des Durchschnittspunktes z des Hauptmeridians mit dem Horizontalkreise mnp gezogenen horizontalen Geraden.

Zieht man durch z'' an die Vertical-Contour der Leitkugel die Tangente $z''S''$ bis zum Durchschnitte S'' mit der Axe $o''S''$ und verbindet S'' mit den Punkten a'', b'', c'' durch die Geraden $S''a''$, $S''b''$ und $S''c''$, so ist dadurch auch die verticale Projection der gesuchten Ecke bestimmt.

Sollte der Punkt S'' nicht mehr auf die Zeichenfläche fallen, so ziehe man durch die Punkte m', n', p' an den Horizontalkreis $m'n'p'$ die Tangenten $\alpha'\beta'$, $\beta'\gamma'$ und $\gamma'\alpha'$, welche sich in den Punkten α', β' und γ' schneiden, projicire diese Punkte nach α'', β'' und γ'' und verbinde a'' mit α'', b'' mit β'' und c'' mit γ'' durch die Geraden $a''\alpha''$, $b''\beta''$ und $c''\gamma''$.

Zieht man die Geraden mn, np, pm, nennt r den Halbmesser des Berührungskreises mnp der drei die rhomboedrische Ecke bildenden Ebenen und k den Neigungswinkel dieser Ebenen gegen die horizontale Projections-Ebene, so findet man:

$$mn = np = pm = 2R \cos \frac{K}{2} .$$

Es ist aber auch

$$mn = r\sqrt{3} ,$$

mithin

$$r = \frac{2R \cos \frac{K}{2}}{\sqrt{3}} .$$

Ferner ist

$$wS = \frac{wm^2}{wo} = \frac{r^2}{\sqrt{R^2 - r^2}} = \frac{4R\cos^2\frac{K}{2}}{\sqrt{3\left(3-4\cos^2\frac{K}{2}\right)}}$$

$$oS = \frac{om^2}{wo} = \frac{R^2}{\sqrt{R^2 - r^2}} = \frac{R\sqrt{3}}{\sqrt{3-4\cos^2\frac{K}{2}}};$$

$$w\alpha = w\beta = w\gamma = \frac{r^2}{\sqrt{r^2 - R^2\cos^2\frac{K}{2}}} = \frac{4R}{\sqrt{3}}\cos\frac{K}{2}$$

$$oa = ob = oc = \frac{oS \,.\, w\alpha}{wS} = \frac{R^2}{r^2}\, w\alpha = \frac{R\sqrt{3}}{\cos\frac{K}{2}}$$

und

$$\sin k = \frac{r}{R} = \frac{2R\cos\frac{K}{2}}{R\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\cos\frac{K}{2}.$$

Hieraus lässt sich nun für die Darstellung der dreiflächigen rhomboedrischen Ecke aus den Kantenwinkeln folgende allgemeine Regel ableiten:

Man bestimme zuerst ein gleichseitiges Dreieck, dessen Seite gleich ist $2R\cos\frac{K}{2}$, also gleich der Sehne des Mittelpunktswinkels von $180 - K$ im Kreise vom Halbmesser R und ziehe durch die Eckpunkte m, n, p desselben an den dem Dreiecke umschriebenen Kreis mnp die Tangenten $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ und $\alpha\gamma$, welche sich in den Punkten α, β, γ schneiden. Dann construire man über der im Mittelpunkte w des Kreises mnp auf dessen Ebene senkrechten Geraden So als Hypotenuse ein Dreieck zSo so, dass der Scheitel z des rechten Winkels in die Peripherie des Kreises mnp fällt und die eine Kathete $zo = R$ ist und verbinde den dieser Kathete gegenüber liegenden Eckpunkt S mit den Punkten α, β und γ durch die Geraden $S\alpha$, $S\beta$ und $S\gamma$.

Zieht man die Geraden om, on und op, so erhält man eine dreiflächige rhomboedrische Ecke $omnp$ mit den Flächenwinkeln $180 - K$, also die Supplementar-Ecke der ersteren.

§. 3. Construction der ungleichkantigen sechsflächigen rhomboedrischen (ditrigonalen) Ecke.

Diese rhomboedrische Ecke ist gleichwinkelig und zweikantig. Die Kanten wechseln als schärfere und stumpfere regelmässig ab. Die Axe ist gegen alle Begrenzungsebenen und gegen die abwechselnden Kanten gleichgeneigt und es halbirt jede Hauptschnittebene die Kantenwinkel der in ihr liegenden Kanten. Der auf die Axe senkrechte Schnitt ist ein symmetrisches Sechseck (Ditrigon) mit gleichen Seiten und abwechselnd gleichen Winkeln. Steht diese Ecke aufrecht, so schliessen alle Begrenzungsebenen und die abwechselnden Kanten mit der horizontalen Projections-Ebene unter sich gleiche Winkel ein und es müssen desshalb dann auch die horizontalen Projectionen der Flächenwinkel in einerlei Grösse erscheinen.

Zur Bestimmung einer solchen Ecke ist die Grösse zweier Kanten erforderlich.

Um eine ungleichkantige sechsflächige rhomboedrische Ecke aus den Kantenwinkeln K_1 und K_2 zu construiren, ziehe man durch den Fusspunkt o' der verticalen Axe So Taf. 1, Fig. 4 die drei unter den Winkeln von 60° sich schneidenden Geraden $a'd'$, $b'e'$, $c'f'$ als die horizontalen Projectionen der Kanten Sa, Sb, Sc, Sd, Se, Sf der zu bestimmenden Ecke, führe an den Äquator der von o aus mit dem Halbmesser $oh = R$ beschriebenen Leitkugel die Tangenten gh und ik so, dass $\sphericalangle\, ogh = \frac{K_1}{2}$, $\sphericalangle\, iko = \frac{K_2}{2}$ wird, und rotire die Tangente gh um die auf od senkrechte Gerade tu und die Tangente ik um die auf be senkrechte Gerade xy als Drehungsaxe, wodurch zwei die Leitkugel nach den Kreisen hml und imo umhüllende Kegelflächen gebildet werden, deren Spitzen die Punkte u und y vorstellen und deren Erzeugenden mit den Hauptschnittebenen aSd und bSe beziehungsweise die Winkel $\frac{K_1}{2}$ und $\frac{K_2}{2}$ einschliessen. Dann lege man an die beiden Kegelflächen eine tangirende Ebene aSb, welche, wie aus dem Vorhergehenden einleuchtet, die Leitkugel in dem den beiden Kreisen hml und imv gemeinschaftlichen Punkte m berühren, und da sie zugleich durch die Spitzen y und u der beiden Kegelflächen gehen muss, die horizontale Projections-Ebene nach der Geraden uy schneiden wird.

Als Berührungsebene der Kegelfläche *hmlu* muss sie gegen die Hauptschnittebene *aSd* die Neigung $\frac{K_1}{2}$, als Berührungsebene der Kegelfläche *imvy* aber auch zugleich gegen die Hauptschnittebene *bSe* die Neigung $\frac{K_2}{2}$ haben und demnach eine Begrenzungsebene der gesuchten rhomboedrischen Ecke sein.

Weil aber die sämmtlichen Begrenzungsebenen einer solchen rhomboedrischen Ecke gegen die horizontale Projections-Ebene eine gleiche, gegen die Hauptschnittebenen *mSd*, *bSe* und *cSf* eine symmetrische Lage haben, so müssen auch ihre Berührungspunkte und ihre Grundschnitte gegen die genannten Hauptschnittebenen symmetrisch angeordnet sein.

Beschreibt man demnach mit dem Halbmesser *wm* den Horizontalkreis *mnpqrs*, zieht $m'n' \perp b'c'$, $m's' \perp a'd'$, $n'p'$ und $s'r' \perp f'c'$, $p'q' \perp a'd'$, $q'r' \perp b'e'$, macht $o'c' = o'e' = o'a'$, $o'd' = o'f' = o'b$ und verbindet die Punkte a', b', c', d', e', f' durch die Geraden $b'c'$, $c'd'$, $d'e'$, $e'f'$ und $f'a'$; so bilden die Punkte n', p', q', r' und s' die horizontalen Projectionen der Berührungspunkte, die Geraden $b'c'$, $c'd'$, $d'e'$, $e'f'$ und $f'a'$ die Grundschnitte der fünf anderen Begrenzungsebenen *bSc*, *cSd*, *dSe*, *eSf* und *fSa*. Die verticalen Projectionen $a''b''$, $b''c''$, $c''d''$, $d''e''$, $e''f''$ und $f''a''$ der Grundschnitte liegen in der Projectionsaxe *AX*, die der Berührungspunkte in der durch die verticale Projection z'' des dem Hauptmeridian und dem Horizontalkreise *mnpqrs* gemeinschaftlichen Punktes *z* gezogenen horizontalen Geraden $\varepsilon''\beta''$.

Führt man durch z'' an die Vertical-Contour der Leitkugel die Tangente $z''S''$, bis sie die $o''S''$ im Punkte S'' schneidet und verbindet den Punkt S'' mit den Punkten a'', b'', c'', d'', e'', f'' durch die Geraden $S''a''$, $S''b''$, $S''c''$, $S''d''$, $S''e''$ und $S''f''$; so bilden diese Geraden die verticalen Projectionen der Kanten der gesuchten rhombischen Ecke *Sabcdef*.

Sollte der Punkt S'' ausserhalb der Zeichenfläche fallen, so führe man durch die Punkte m', n', p', q', r' und s' an den Horizontalkreis $m'n'p'q'r's'$ die Tangenten $\alpha'\beta'$, $\beta'\gamma'$, $\gamma'\delta'$, $\delta'\varepsilon'$, $\varepsilon'\varphi'$ und $\varphi'\alpha'$, welche sich in den Punkten α', β', γ', δ', ε', φ' schneiden, projicire diese Punkte nach α'', β'', γ'', δ'', ε'', φ'' und ziehe die Geraden $a''\alpha''$, $b''\beta''$, $c''\gamma''$, $d''\delta''$, $e''\varepsilon''$ und $f''\varphi''$.

Bezeichnet r den Halbmesser des Berührungskreises *mnpqrs* der sechs die rhomboedrische Ecke *Sabcdef* bildenden Ebenen und k den Neigungswinkel dieser Ebenen gegen die horizontale Projections-Ebene, so findet man:

$$ms = np = qr = 2R \cos \frac{K_1}{2}$$

$$mn = pq = rs = 2R \cos \frac{K_2}{2}$$

$$m\nu = R \cos \frac{K_1}{2} = r \sin x,$$

daher

$$\sin x = \frac{R}{r} \cos \frac{K_1}{2}$$

und

$$\cos x = \frac{1}{r} \sqrt{r^2 - R^2 \cos^2 \frac{K_1}{2}}$$

$$m\mu = R \cos \frac{K_2}{2} = r \sin (60 - x) = r (\sin 60 \cos x - \cos 60 \sin x) =$$

$$= r \left[\frac{\sqrt{3}}{2r} \sqrt{r^2 - R^2 \cos^2 \frac{K_1}{2}} - \frac{R}{2r} \cos \frac{K_1}{2}\right]$$

oder

$$2R \cos \frac{K_2}{2} + R \cos \frac{K_1}{2} = \sqrt{3} \sqrt{r^2 - R^2 \cos^2 \frac{K_1}{2}}$$

$$4R^2 \cos^2 \frac{K_2}{2} + R^2 \cos^2 \frac{K_1}{2} + 4R^2 \cos \frac{K_1}{2} \cos \frac{K_2}{2} = 3r^2 - 3R^2 \cos^2 \frac{K_1}{2}$$

hieraus

$$r = \frac{2R}{\sqrt{3}} \sqrt{\cos^2 \frac{K_1}{2} + \cos^2 \frac{K_2}{2} + \cos \frac{K_1}{2} \cos \frac{K_2}{2}};$$

ferner ist

$$wS = \frac{r^2}{\sqrt{R^2 - r^2}} = \frac{4R \left(\cos^2 \frac{K_1}{2} + \cos^2 \frac{K_2}{2} + \cos \frac{K_2}{2} \cos \frac{K_1}{2}\right)}{\sqrt{3} \sqrt{3 - 4 \left(\cos^2 \frac{K_1}{2} + \cos^2 \frac{K_2}{2} + \cos \frac{K_1}{2} \cos \frac{K_2}{2}\right)}} =$$

$$= \frac{4R \left(\cos^2 \frac{K_1}{2} + \cos^2 \frac{K_2}{2} + \cos \frac{K_1}{2} \cos \frac{K_2}{2}\right)}{\sqrt{3} \sqrt{3 \sin^2 \frac{K_1}{2} - \left(\cos \frac{K_1}{2} + 2 \cos \frac{K_2}{2}\right)^2}}$$

$$oS = \frac{R^2}{\sqrt{R^2 - r^2}} = \frac{R\sqrt{3}}{\sqrt{3 - 4\left(\cos^2\frac{K_1}{2} + \cos^2\frac{K_2}{2} + \cos\frac{K_1}{2}\cos\frac{K_2}{2}\right)}} =$$

$$= \frac{R\sqrt{3}}{\sqrt{3\sin^2\frac{K_1}{2} - \left(\cos\frac{K_1}{2} + 2\cos\frac{K_2}{2}\right)^2}};$$

$$w\alpha = \frac{r^2}{\sqrt{r^2 - R^2\cos^2\frac{K_1}{2}}},$$

$$w\beta = \frac{r^2}{\sqrt{r^2 - R^2\cos^2\frac{K_2}{2}}},$$

$$oa = oc = oe = \frac{oS.w\alpha}{wS} = \frac{R^2.w\alpha}{r^2} = \frac{R\sqrt{3}}{\cos\frac{K_1}{2} + 2\cos\frac{K_2}{2}}.$$

Auf dieselbe Weise findet man:

$$ob = od = of = \frac{oS.w\beta}{wS} = \frac{R\sqrt{3}}{\cos\frac{K_2}{2} + 2\cos\frac{K_1}{2}}$$

und endlich

$$\sin k = \frac{r}{R} = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\cos^2\frac{K_1}{2} + \cos^2\frac{K_2}{2} + \cos\frac{K_1}{2}\cos\frac{K_2}{2}}$$

Aus diesen Daten folgt für die Darstellung der ungleichkantigen sechsflächigen rhomboedrischen Ecke folgende Regel:

Man bestimme zuerst ein Kreissechseck *mnpqrs*, dessen Seiten abwechselnd gleich sind, $2R\cos\frac{K_1}{2}$, $2R\cos\frac{K_2}{2}$, mithin gleich den Sehnen der Mittelpunktswinkel von $180 - K_1$, $180 - K_2$ im Kreise vom Halbmesser R und ziehe durch die Eckpunkte m, n, p, q, r, s an den dem Sechsecke umschriebenen Kreis *mnpqrs* die Tangenten $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta$, $\delta\varepsilon$, $\varepsilon\varphi$ und $\varphi\alpha$, welche sich in den Punkten α, β, γ, δ, ε, φ schneiden. Dann verzeichne man über der im Mittelpunkte w des Kreises *mnpqrs* auf dessen Ebene senkrechten Geraden oS als Hypotenuse ein Dreieck zSo, dessen Scheitel z des rechten Winkels in die Peripherie des Kreises *mnpqrs* fällt und dessen Kathete $zo = R$ ist, und verbinde den der Kathete zo gegenüberliegenden Eckpunkt S mit den Punkten α, β, γ, δ, ε, φ durch die Geraden $S\alpha$, $S\beta$, $S\gamma$, $S\delta$, $S\varepsilon$ und $S\varphi$.

Verbindet man den Punkt o mit den Punkten m, n, p, q, r, s durch die Geraden om, on, op, oq, or und os, so erhält man eine sechsflächige Ecke, deren Flächenwinkel abwechselnd gleich sind $180 - K_1$ und $180 - K_2$.

§. 4. Construction der gleichkantigen sechsflächigen rhomboedrischen (hexagonalen) Ecke.

Diese Ecke ist gleichwinkelig. Ihre Axe ist sowohl gegen die Kanten als auch gegen die Begrenzungsebenen gleichgeneigt und es halbirt jede Hauptschnittebene die Kantenwinkel der in ihr liegenden Kanten. Der Schnitt senkrecht auf die Axe ist ein regelmässiges Sechseck (Hexagon). Befindet sich die Ecke in der aufrechten Stellung, so schliessen die Kanten so wie die Begrenzungsebenen mit der horizontalen Projections-Ebene gleiche Winkel ein und es müssen daher dann auch die horizontalen Projectionen der Flächenwinkel in gleicher Grösse erscheinen. — Eine solche Ecke ist durch die Grösse einer Kante vollkommen bestimmt. Soll eine gleichkantige sechsflächige rhomboedrische Ecke aus dem Kantenwinkel K construirt werden, so ziehe man durch den Fusspunkt o' der rhomboedrischen Axe So Taf. I, Fig. 5 die drei unter Winkeln von 60° sich schneidenden Geraden $a'd'$, $b'e'$, $c'f'$ als die horizontalen Projectionen der Axenkanten Sa, Sb, Sc, Sd, Se, Sf der zu bestimmenden Ecke, führe an die Horizontal-Contour der von o aus mit dem Halbmesser $oh = R$ beschriebenen Leitkugel die Tangenten gh und ik unter den Winkeln $ogh = iko = \frac{K}{2}$ gegen die Hauptschnittebenen aSd und bSc geneigt und rotire die Tangente gh um die auf ad senkrechte Gerade tu und die Tangente ik um die auf be senkrechte Gerade xy als Drehungsaxe, wodurch zwei die Leitkugel nach den Kreisen hmp und imr umhüllende Kegelflächen $hmpu$ und $imry$ entstehen, deren Erzeugenden beziehungsweise mit den Ebenen aSd und bSc die Winkel $\frac{K}{2}$ einschliessen und deren Spitzen die Punkte u und y bilden.

Dann lege man an die beiden Kegelflächen eine tangirende Ebene aSb, welche die Leitkugel in dem den beiden Kreisen hmp und imr gemeinschaftlichen Punkte m berühren, die horizontale Projections-Ebene nach der Geraden uy schneiden und mit den beiden Hauptschnittebenen aSd und bSc zugleich den Winkel $\frac{K}{2}$ einschliessen wird. Sie wird daher eine Begrenzungsebene der gesuchten rhomboedrischen Ecke bilden.

Wegen der Gleichheit der Winkel, welche die Ebene aSb mit den auf der horizontalen Projections-Ebene senkrechten und durch den Mittelpunkt o der Leitkugel gehenden Hauptschnittebenen aSd und bSc einschliesst, muss die horizontale Projection m' des Berührungspunktes m in der Halbirungsgeraden $m'q'$ des Winkels $a'o'b'$ liegen und muss auch desshalb $o'a' = o'b'$ sein.

Zieht man die Halbirungsgeraden $n'r'$, $p's'$ der Winkel $b'o'c'$ und $c'o'd'$, macht $w'n' = w'p' = w'q' = w'r' = w's' = w'm'$; $o'c' = o'd' = o'e' = o'f' = o'a' = o'b'$ und verbindet die Punkte a', b', c', d', e', f' durch die Geraden $b'c'$, $c'd'$, $d'e'$, $e'f'$ und $f'a'$, so stellen die Punkte n', p', q', r', s' die horizontalen Projectionen der Berührungspunkte, die Geraden $b'c'$, $c'd'$, $d'e'$, $e'f'$ und $f'a'$ die Grundschnitte der anderen fünf Begrenzungsebenen bSc, cSd, dSe, eSf und fSa vor. Die verticalen Projectionen $a''b''$, $b''c''$, $c''d''$, $d''e''$, $e''f''$ und $f''a''$ der Grundschnitte liegen in der Projectionsaxe AX, jene der Berührungspunkte in der durch die verticale Projection z'' des Durchschnittspunktes z des Hauptmeridians mit dem Horizontalkreise $mnpqrs$ der Leitkugel gezogenen horizontalen Geraden $\varepsilon''\beta''$.

Errichtet man im Punkte z'' die Gerade $z''S''$ senkrecht auf $z''o''$, verlängert sie bis zum Durchschnitte S'' mit der rhomboedrischen Axe $S''o''$ und verbindet den Punkt S'' mit den Punkten a'', b'', c'', d'', e'', f'' durch die Geraden $S''a''$, $S''b''$, $S''c''$, $S''d''$, $S''e''$ und $S''f''$, so bilden diese die verticale Projection der gesuchten rhomboedrischen Ecke $Sabcdef$ selbst.

Fällt der Punkt S'' nicht mehr auf die Zeichenfläche, so ziehe man durch die Punkte m', n', p', q', r', s' an den Horizontalkreis $m'n'p'q'r's'$ die Tangenten $\alpha'\beta'$, $\beta'\gamma'$, $\gamma'\delta'$, $\delta'\varepsilon'$, $\varepsilon'\varphi'$ und $\varphi'\alpha'$, projicire ihre Durchschnittspunkte α', β', γ', δ', ε', φ' nach α'', β'', γ'', δ'', ε'', φ'' und verbinde die letzteren mit den Punkten a'', b'', c'', d'', e'', f'' durch die Geraden $a''\alpha''$, $b''\beta''$, $c''\gamma''$, $d''\delta''$, $e''\varepsilon''$ und $f''\varphi''$.

Nennt man wieder r den Halbmesser des Berührungskreises $mnpqrs$ und k den Neigungswinkel der Begrenzungsebenen mit der Horizontal-Projectionsebene, so erhält man:

$$mn = np = pq = qr = rs = sm = 2R \cos \frac{K}{2}$$

und auch

$$r = 2R \cos \frac{K}{2};$$

ferner

$$wS = \frac{r^2}{\sqrt{R^2 - r^2}} = \frac{4R \cos^2 \frac{K}{2}}{\sqrt{1 - 4 \cos^2 \frac{K}{2}}},$$

$$oS = \frac{R^2}{\sqrt{R^2 - r^2}} = \frac{R}{\sqrt{1 - 4 \cos^2 \frac{K}{2}}},$$

$$w\alpha = \frac{r^2}{\sqrt{r^2 - R^2 \cos^2 \frac{K}{2}}} = \frac{4R \cos \frac{K}{2}}{\sqrt{3}},$$

$$oa = \frac{oS \,.\, w\alpha}{wS} = \frac{R^2}{\sqrt{r^2 - R^2 \cos^2 \frac{K}{2}}} = \frac{R}{\sqrt{3} \cos \frac{K}{2}}$$

und endlich

$$\sin k = \frac{r}{R} = 2 \cos \frac{K}{2}.$$

Hieraus folgt für die Construction der gleichkantigen sechsflächigen rhomboedrischen Ecke aus den Kantenwinkeln folgende Regel:

Man construire ein regelmässiges Sechseck $mnpqrs$, bei welchem die Seite gleich ist $2R \cos \frac{K}{2}$, mithin gleich der Sehne des Mittelpunktswinkels von $180 - K$ im Kreise vom Halbmesser R und ziehe durch die Eckpunkte m, n, p, q, r, s desselben an den dem Sechsecke umschriebenen Kreis $mnpqrs$ die Tangenten $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta$, $\delta\varepsilon$, $\varepsilon\varphi$ und $\varphi\alpha$, die sich in den Punkten α, β, γ, δ, ε, φ schneiden. Dann verzeichne man über der im Mittelpunkte w des Kreises $mnpqrs$ auf dessen Ebene senkrechten Geraden oS als Hypotenuse ein Dreieck zSo, dessen Scheitel z des rechten Winkels in die Peripherie des Kreises *mnpqrs* fällt und dessen eine Kathete $zo = R$ ist und verbinde den dieser Kathete gegenüberliegenden Eckpunkt S mit den Punkten α, β, γ, δ, ε, φ durch die Geraden $S\alpha$, $S\beta$, $S\gamma$, $S\delta$, $S\varepsilon$ und $S\varphi$.

Zieht man die Geraden *om*, *on*, *op*, *oq*, *or* und *os*, so erhält man eine sechsflächige Ecke, *omnpqrs* mit den Flächenwinkeln $(180 - K)$.

§. 5. Construction der vierflächigen pyramidalen (tetragonalen) Ecke.

Diese pyramidale Ecke ist gleichwinkelig und gleichkantig. Ihre Axe ist sowohl gegen die Kanten als auch gegen die Begrenzungsebenen gleich geneigt und es halbirt jede Hauptschnittebene die Kantenwinkel der in ihr liegenden Kanten. Der Schnitt senkrecht auf die Axe ist ein Quadrat (Tetragon). Steht die Ecke aufrecht, so schliessen die Kanten so wie die Begrenzungsebenen mit der horizontalen Projectionsebene gleiche Winkel ein, und es müssen desshalb dann auch die horizontalen Projectionen der Flächenwinkel in gleicher Grösse erscheinen. Eine solche Ecke ist durch die Grösse einer Kante vollkommen bestimmt.

Um eine vierflächige pyramidale Ecke aus der Grösse K des Kantenwinkels zu construiren, ziehe man durch den Fusspunkt o' der pyramidalen Axe So Taf. I, Fig. 6 die zwei unter rechten Winkeln sich schneidenden Geraden $a'c'$, $b'd'$ als die horizontalen Projectionen der Axenkanten Sa, Sb, Sc, Sd, führe an den Äquator der von o aus mit dem Halbmesser $of = R$ beschriebenen Leitkugel die Tangenten ef und gh unter den Winkeln $oef = gho = \frac{K}{2}$ gegen die Hauptschnittebenen aSc und bSd geneigt und rotire die Tangente ef um die Gerade bd und die Tangente gh um die Gerade ac als Drehungsaxe, wodurch zwei die Leitkugel nach den Kreisen *fmn* und *gmq* umhüllende Kegelflächen *fmnb* und *gmqa* gebildet werden, deren Spitzen die Punkte b und a bilden und deren Erzeugenden mit den Hauptschnittebenen aSc und bSd beziehungsweise die Winkel $\frac{K}{2}$ einschliessen. Dann lege man an die beiden Kegelflächen eine tangirende Ebene aSb, welche die Leitkugel in dem den beiden Kreisen *hmp* und *imr* gemeinschaftlichen Punkte m berühren, die horizontale Projections-Ebene nach der Geraden ab schneiden und mit den beiden

Hauptschnittebenen aSc und bSd zugleich die Winkel $\frac{K}{2}$ einschliessen wird. Diese Ebene wird demnach eine Begrenzungsebene der gesuchten pyramidalen Ecke vorstellen.

Wegen der Gleichheit der Neigungswinkel der Ebene aSb gegen die Haupstchnittebenen aSc und bSd muss $\sphericalangle a'o'm' = \sphericalangle b'o'm'$ und $o'a' = o'b'$ sein.

Halbirt man den Winkel $b'o'c' = d'o'a'$ durch die Gerade $n'q'$, macht $w'n' = w'p' = w'q' = w'm'$, $o'c' = o'd' = o'a' = o'b'$ und zieht die Geraden $b'c'$, $c'd'$, $d'a'$; so sind die Punkte n', p', q' die horizontalen Projectionen der Berührungspunkte, die Geraden $b'c'$, $c'd'$, $d'a'$ die Grundschnitte der drei anderen Begrenzungsebenen bSc, cSd und dSa.

Die verticalen Projectionen $a''b''$, $b''c''$, $c''d''$, $d''a''$ der Grundschnitte liegen in der Projectionsaxe AX, die der Berührungspunkte in der durch die verticale Projection z'' des dem Hauptmeridian und dem Horizontalkreise $mnpq$ gemeinschaftlichen Punktes z horizontal gezogenen Geraden $\delta''\beta''$.

Führt man durch z'' an die Vertical-Contour der Leitkugel die Tangente $z''S''$ bis zum Zusammentreffen S'' mit der pyramidalen Axe $o''S''$ und verbindet den Punkt S'' mit den Punkten a'', b'', c'', d'', so bekommt man dadurch die verticale Projection der gesuchten pyramidalen Ecke $Sabcd$.

Sollte der Punkt S'' ausserhalb der Zeichenfläche fallen, so führe man durch die Punkte m', n', p', q' an den Horizontalkreis $m'n'p'q'$ die Tangenten $\alpha'\beta'$, $\beta'\gamma'$, $\gamma'\delta'$, $\delta'\varepsilon'$, projicire ihre Durchschnittspunkte α', β', γ', δ' nach α'', β'', γ'', δ'' und ziehe die Geraden $a''\alpha''$, $b''\beta$, $c''\gamma''$, $d''\delta''$.

Heisst man r den Halbmesser des Horizontalkreises $mnpq$ und k den Neigungswinkel der Begrenzungsebenen gegen die horizontale Projections-Ebene, so findet man:

$$mn = np = pq = qm = 2R \cos \frac{K}{2}.$$

$$r = mn \cos 45 = \frac{2R \cos \frac{K}{2}}{\sqrt{2}} = R\sqrt{2} \cos \frac{K}{2}$$

$$wS = \frac{r^2}{\sqrt{R^2 - r^2}} = \frac{2R \cos^2 \frac{K}{2}}{\sqrt{1 - 2\cos^2 \frac{K}{2}}} = \frac{2R \cos^2 \frac{K}{2}}{\sqrt{\cos(180 - K)}}$$

$$oS = \frac{R^2}{\sqrt{R^2 - r^2}} = \frac{R}{\sqrt{1 - 2\cos^2\frac{K}{2}}} = \frac{R}{\sqrt{\cos(180 - K)}}$$

$$w\alpha = \frac{r^2}{\sqrt{r^2 - R^2\cos^2\frac{K}{2}}}$$

$$oa = \frac{oS \,.\, w\alpha}{wS} = \frac{R^2}{\sqrt{r^2 - R^2\cos^2\frac{K}{2}}} = \frac{R}{\cos\frac{K}{2}} = R\sec\frac{K}{2}$$

$$\sin k = \frac{r}{R} = \sqrt{2}\cos\frac{K}{2}.$$

Aus diesem ergibt sich für die Construction der vierflächigen pyramidalen Ecke aus den Kantenwinkeln folgende Regel:

Man bestimme zuerst ein Quadrat *mnpq*, dessen Seite gleich ist der Sehne des Mittelpunktswinkels von 180 — K im Kreise vom Halbmesser R und ziehe durch die Eckpunkte m, n, p, q desselben an den dem Quadrate umschriebenen Kreis *mnpq* die Tangenten $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta$, $\delta\alpha$, welche sich in den Punkten α, β, γ, δ schneiden. Dann verzeichne man über der im Mittelpunkte w des Kreises *mnpq* auf dessen Ebene senkrechten Geraden oS als Hypotenuse ein Dreieck zSo, dessen Scheitel z des rechten Winkels in die Peripherie des Kreises *mnpq* fällt und dessen Kathete $zo = R$ ist und verbinde den dieser Kathete gegenüberliegenden Eckpunkt S mit den Punkten α, β, γ, δ durch die Geraden $S\alpha$, $S\beta$, $S\gamma$, $S\delta$.

Zieht man überdies die Geraden *om*, *on*, *op*, *oq*, so erhält man eine vierflächige pyramidale Ecke *omnpq* mit den Flächenwinkeln 180 — K.

§. 6. Construction der achtflächigen pyramidalen (ditetragonalen) Ecke.

Die achtflächigen pyramidalen Ecken sind gleichwinkelig und zweikantig. Die Kanten wechseln als schärfere und stumpfere regelmässig ab. Die Axe ist gegen alle Begrenzungsebenen und gegen je vier einander gegenüberliegende Kanten gleichgeneigt und es halbirt jede Hauptschnittebene die Kantenwinkel der in ihr befindlichen

Kanten. Der Schnitt senkrecht auf die Axe ist ein symmetrisches Achteck (Ditetragon) mit gleichen Seiten und abwechselnd gleichen Winkeln. Stehen diese Ecken aufrecht, so schliessen die Begrenzungsebenen und je vier einander gegenüber liegende Kanten mit der horizontalen Projections-Ebene gleiche Winkel ein und es müssen desshalb dann auch die horizontalen Projectionen der Flächenwinkel einerlei Grösse haben. Zur Bestimmung einer solchen Ecke ist die Grösse zweier Kanten erforderlich.

Um eine achtflächige pyramidale Ecke aus den Kantenwinkeln K_1 und K_2 zu construiren, ziehe man durch den Fusspunkt o' der pyramidalen Axe So Taf. I, Fig. 7 die vier unter Winkeln von 45° und beziehungsweise 90° sich schneidenden Geraden $a'e'$, $b'f'$, $c'g'$, $d'h'$ als die horizontalen Projectionen der Axenkanten Sa, Sb, Sc, Sd, Se, Sf, Sg und Sh, führe an die Horizontal-Contour der von o aus mit dem Halbmesser $ok = R$ beschriebenen Leitkugel die Tangenten ik und xl so, dass $\sphericalangle\, oik = \frac{K_1}{2}$ und $\sphericalangle\, olx = \frac{K_2}{2}$ ist und rotire die Tangenten ik, um die Gerade gy und die Tangente xl um die Gerade dt als Drehungsaxe, wodurch zwei die Leitkugel nach den Kreisen kmq und xms umhüllende Kegelflächen entstehen, deren Spitzen die Punkte y und t bilden und deren Erzeugenden mit den Hauptschnittebenen aSc und bSf beziehungsweise die Winkel $\frac{K_1}{2}$ und $\frac{K_2}{2}$ einschliessen. Dann lege man an die beiden Kegelflächen eine tangirende Ebene aSb, welche die Leitkugel in dem den beiden Kreisen kmq und xms gemeinschaftlichen Punkte m berühren, die horizontale Projections-Ebene nach der Geraden ty schneiden, mit der Hauptschnittebene aSe den Winkel $\frac{K_1}{2}$, mit der Hauptschnittebene bSf den Winkel $\frac{K_2}{2}$ einschliessen und daher eine Begrenzungsebene der gesuchten pyramidalen Ecke sein wird.

Weil aber die Begrenzungsebenen einer solchen pyramidalen Ecke gegen die Hauptschnittebenen eine symmetrische Lage haben, so müssen auch ihre Berührungspunkte, so wie ihre Grundschnitte gegen die Hauptschnittebenen symmetrisch angeordnet sein. Macht man demnach $\sphericalangle\, n'o'\beta' = \sphericalangle\, p'o'\delta' = \sphericalangle\, q'o'\delta' = \sphericalangle\, r'o'\varphi'$; $\sphericalangle\, \beta'o'\varphi' = \sphericalangle\, n'o'k' = \sphericalangle\, r'o'k = \sphericalangle\, m'o'\beta'$; $o'n' = o'p' = o'q' = o'r' = o's' = o'u' = o'r' = o'm'$; $o'c' = o'e' = o'g' = o'a'$; $o'd' = o'f' = o'h' = o'b'$ und zieht die Geraden $b'c'$, $c'd'$, $d'e'$, $e'f$, $f'g'$, $g'h'$ und

$h'a'$; so bilden diese Geraden die Grundschnitte, die Punkte n', p', q', r', s', u', v' die horizontalen Projectionen der Berührungspunkte der andern sieben Begrenzungsebenen bSc, cSd, dSe, eSf, fSg, gSh und hSa.

Die verticalen Projectionen $a''b''$, $b''c''$, $c''d''$, $d''e''$, $e''f''$, $f''g''$, $g''h''$ und $h''a''$ der Grundschnitte liegen in der Projectionsaxe AX, jene der Berührungspunkte in der durch z'' gezogenen horizontalen Geraden.

Führt man durch z'' an die Vertical-Contour der Leitkugel die Tangente $z''S''$, bis sie die pyramidale Axe $o''S''$ im Punkte S'' trifft und verbindet den Punkt S'' mit den Punkten a'', b'', c'', d'', e'', f'', g'', h'' durch die Geraden $S''a''$, $S''b''$, $S''c''$, $S''d''$, $S''e''$, $S''f''$, $S''g''$ und $S''h''$, so bekommt man die verticale Projection der gesuchten pyramidalen Ecke.

Fiele der Punkt S'' ausserhalb der Zeichenfläche, so ziehe man wieder durch die Punkte m', n', p', q', r', s', u', v' an den Horizontalkreis $m'n'p'q'r's'u'v$ die Tangenten $\alpha'\beta'$, $\beta'\gamma'$, $\gamma'\delta'$, $\delta'\varepsilon'$, $\varepsilon'\varphi'$, $\varphi'\psi'$, $\psi'k'$ und $k'\alpha'$, projicire ihre Durchschnittspunkte α', β', γ', δ', ε', φ', ψ' und k' nach α'', β'', γ'', δ'', ε'', φ'', ψ'' und k'' und verbinde die letzteren mit den Punkten a'', b'', c'', d'', e'', f'', g'' und h'' durch die Geraden $a''\alpha''$, $b''\beta''$, $c''\gamma''$, $d''\delta''$, $e''\varepsilon''$, $f''\varphi''$, $g''\psi''$ und $h''k''$.

Bezeichnet r den Halbmesser des Horizontalkreises $mnpqrsuv$ und k den Neigungswinkel der Begrenzungsebenen gegen die horizontale Projections-Ebene, so findet man:

$$vm = np = qr = su = 2R \cos \frac{K_1}{2},$$

$$mn = pq = rs = uv = 2R \cos \frac{K_2}{2}$$

$$m\nu = \frac{vm}{2} = R \cos \frac{K_1}{2}$$

oder

$$m\nu = wm \sin mw\nu = r \sin x,$$

mithin

$$\sin x = \frac{R}{r} \cos \frac{K_1}{2}$$

und

$$\cos x = \frac{1}{r} \sqrt{r^2 - R^2 \cos^2 \frac{K_1}{2}};$$

ferner ist $$m\mu = \frac{mn}{2} = R \cos \frac{K_2}{2}$$

oder

$$m\mu = wm \sin mw\mu = r \sin (45 - x),$$

mithin

$$R \cos \frac{K_2}{2} = r [\sin 45 \cos x - \cos 45 \sin x]$$

$$= \frac{r}{\sqrt{2}} \left[\frac{1}{r} \sqrt{r^2 - R^2 \cos^2 \frac{K_1}{2}} - \frac{1}{r} R \cos \frac{K_1}{2}\right]$$

oder $$R \sqrt{2} \cos \frac{K_2}{2} + R \cos \frac{K_1}{2} = \sqrt{r^2 - R^2 \cos^2 \frac{K_1}{2}}$$

und

$$r^2 = 2 R^2 \left(\cos^2 \frac{K_1}{2} + \cos^2 \frac{K_2}{2} + \sqrt{2} \cos \frac{K_1}{2} \cos \frac{K_2}{2}\right)$$

daher

$$r = R \sqrt{2} \sqrt{\cos^2 \frac{K_1}{2} + \cos^2 \frac{K_2}{2} + \sqrt{2} \cos \frac{K_1}{2} \cos \frac{K_2}{2}}.$$

Dann ist

$$wS = \frac{r^2}{\sqrt{R^2 - r^2}} = \frac{2R\left(\cos^2 \frac{K_1}{2} + \cos^2 \frac{K_2}{2} + \sqrt{2} \cos \frac{K_1}{2} \cos \frac{K_2}{2}\right)}{\sqrt{1 - 2\left(\cos^2 \frac{K_1}{2} + \cos^2 \frac{K_2}{2} + \sqrt{2} \cos \frac{K_1}{2} \cos \frac{K_2}{2}\right)}} =$$

$$= \frac{2R\left(\cos^2 \frac{K_1}{2} + \cos^2 \frac{K_2}{2} + \sqrt{2} \cos \frac{K_1}{2} \cos \frac{K_2}{2}\right)}{\sqrt{\sin^2 \frac{K_1}{2} - \left(\cos^2 \frac{K_1}{2} + \sqrt{2} \cos \frac{K_2}{2}\right)^2}},$$

$$oS = \frac{R^2}{\sqrt{R^2 - r^2}} = \frac{R}{\sqrt{1 - 2\left(\cos^2 \frac{K_1}{2} + \cos^2 \frac{K_2}{2} + \sqrt{2} \cos \frac{K_1}{2} \cos \frac{K_2}{2}\right)}} =$$

$$= \frac{R}{\sqrt{\sin^2 \frac{K_1}{2} - \left(\cos^2 \frac{K_1}{2} + \sqrt{2} \cos \frac{K_2}{2}\right)^2}}$$

$$w\alpha = \frac{r^2}{\sqrt{r^2 - R^2 \cos^2 \frac{K_1}{2}}},$$

$$w\beta = \frac{r^2}{\sqrt{r^2 - R^2 \cos^2 \frac{K_2}{2}}}.$$

$$oa = \frac{oS \cdot w\alpha}{wS} = \frac{R^2}{r^2} \cdot \frac{r^2}{\sqrt{r^2 - R^2 \cos^2 \frac{K_1}{2}}} = \frac{R^2}{\sqrt{r^2 - R^2 \cos^2 \frac{K_1}{2}}},$$

und wenn man für r den oben gefundenen Werth setzt

$$oa = \frac{R}{\cos \frac{K_1}{2} + \sqrt{2} \cos \frac{K^2}{2}};$$

ferner ist $$ob = \frac{oS \,.\, w\beta}{wS} = \frac{R}{\cos\frac{K_2}{2} + \sqrt{2}\cos\frac{K_1}{2}}$$

und endlich

$$\sin k = \frac{r}{R} = \sqrt{2}\sqrt{\cos^2\frac{K_1}{2} + \cos^2\frac{K_2}{2} + \sqrt{2}\cos\frac{K_1}{2}\cos\frac{K_2}{2}}\,.$$

Hieraus folgt für die Construction der achtflächigen pyramidalen Ecke aus den Kantenwinkeln folgende Regel:

Man bestimme zuerst ein Kreisachteck *mnpqrsuv*, dessen Seiten abwechselnd gleich sind den Sehnen der Mittelpunktswinkel von 180 — K_1, 180 — K_2 im Kreise vom Halbmesser R und führe durch die Eckpunkte m, n, p, q, r, s, u, v an den dem Achtecke umschriebenen Kreis die Tangenten $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta$, $\delta\varepsilon$, $\varepsilon\varphi$, $\varphi\psi$, ψk und $k\alpha$, welche sich in den Punkten α, β, γ, δ, ε, φ, ψ und k schneiden. Dann verzeichne man über der im Mittelpunkte w des Kreises *mnpqrsuv* auf dessen Ebene senkrechten Geraden oS als Hypotenuse ein Dreieck zSo so, dass der Scheitel z des rechten Winkels in die Peripherie des Kreises fällt und die Kathete $zo = R$ ist und verbinde den dieser Kathete gegenüber liegenden Eckpunkt S mit den Punkten α, β, γ, δ. ε. φ, ψ und k durch die Geraden $S\alpha$, $S\beta$, $S\gamma$, $S\delta$. $S\varepsilon$. $S\varphi$, $S\psi$ und Sk.

Zieht man die Geraden om, on, op, oq, or, os, ou und ov, so bilden diese eine achtflächige Ecke, deren Flächenwinkel abwechselnd gleich sind 180 — K_1, 180 — K_2.

§. 7. Construction der prismatischen (rhombischen) Ecke.

Die prismatische Ecke ist vierflächig, gleichwinkelig und zweikantig. Die Kanten wechseln als schärfere und stumpfere regelmässig ab. Die Axe ist gegen alle Begrenzungsebenen und gegen je zwei einander gegenüberliegende Kanten gleichgeneigt und es halbirt jede Hauptschnittebene die Kantenwinkel der in ihr befindlichen Kanten. Der auf die Axe senkrechte Schnitt ist ein Rhombus. Befindet sich eine solche Ecke in der aufrechten Stellung, so schliessen alle

Begrenzungsebenen und je zwei einander gegenüberliegende Kanten mit der horizontalen Projections-Ebene gleiche Winkel ein und es müssen desshalb dann auch die horizontalen Projectionen der Flächenwinkel einander gleich sein.

Zur Bestimmung dieser Ecke ist die Grösse zweier Kanten erforderlich.

Soll eine prismatische Ecke aus den Kantenwinkeln K_1 und K_2 dargestellt werden, so ziehe man durch den Fusspunkt o' der verticalen Axe So Taf. I, Fig. 8 die zwei unter rechten Winkeln sich schneidenden Geraden $a'c'$ und $b'd'$ als die horizontalen Projectionen der Axenkanten Sa, Sb, Sc, Sd der zu bestimmenden Ecke, führe an die Horizontal-Contour der von o aus mit dem Halbmesser $of = R$ beschriebenen Leitkugel die Tangenten ef und gh so, dass $\sphericalangle\ oef = \frac{K_1}{2}$ und $\sphericalangle\ gho = \frac{K_2}{2}$ ist und rotire die Tangente ef um die Gerade bd und die Tangente gh um die Gerade ac als Drehungsaxe, wodurch zwei die Leitkugel nach den Kreisen fmn und gmq umhüllende Kegelflächen $fmnb$ und $gmqa$ gebildet werden, deren Erzeugenden mit den Hauptschnittebenen aSc und bSd beziehungsweise die Winkel $\frac{K_1}{2}$ und $\frac{K_2}{2}$ einschliessen und deren Spitzen in den Punkten b und a liegen.

Aus dem Vorhergehenden ist es nun für sich klar, dass die an die beiden Kegelflächen berührend gelegte Ebene die Leitkugel in dem den beiden Kreisen fmn und gmq gemeinschaftlichen Punkte m berühre, dass sie die horizontale Projections-Ebene nach der Geraden $a'b'$ schneide und dass sie mit der Hauptschnittebene aSc den Winkel $\frac{K_1}{2}$, mit den Hauptschnittebenen bSd den Winkel $\frac{K_2}{2}$ einschliesse und daher eine Begrenzungsebene der gesuchten prismatischen Ecke sei. Ferner ist es auch für sich klar, dass, wenn man $m'n' \perp d'b'$, $m'q' \perp a'c'$ zieht; $q'\mu' = p'\mu'$, $n'\nu' = \nu'm'$, $o'c' = o'a'$ und $o'd' = o'b$ macht; $n'p' \parallel q'm'$, $p'q' \parallel m'n'$ führt und die Punkte b', c', d', a' durch die Geraden $b'c'$, $c'd'$, $d'a'$ verbindet, die Punkte n', p', q' die horizontalen Projectionen der Berührungspunkte und die Geraden $b'c'$, $c'd'$, $d'a'$ die Grundschnitte der drei anderen Begrenzungsebenen bSc, cSd, und dSa seien.

Die verticalen Projectionen $a''b''$, $b''c''$, $c''d''$, $d''a''$ der Grundschnitte liegen in der Projectionsaxe AX, jene der Berührungspunkte in der durch die verticale Projection z'' des dem Hauptmeridian und dem Horizontalkreise $mnpq$ gemeinschaftlichen Punktes z horizontal gezogenen Geraden $\delta''\beta''$.

Zieht man durch den Punkt z'' die Tangente $z''S''$, bis sie die prismatische Axe $o''S''$ im Punkte S'' schneidet und verbindet S'' mit den Punkten a'', b'', c'', d'' durch die Geraden $S''a''$, $S''b''$, $S''c'$ und $S''d''$, so ist dadurch die verticale Projection der gesuchten Ecke bestimmt.

Sollte der Punkt S'' nicht mehr auf die Zeichenfläche fallen, so führe man wieder durch die Punkte m', n', p', q' an den Horizontalkreis $m'n'p'q'$ die Tangenten $\alpha'\beta'$, $\beta'\gamma'$, $\gamma'\delta'$, $\delta'\alpha'$, projicire ihre Durchschnittspunkte α', β', γ', δ' nach α'', β'', γ'', δ'' und ziehe die Geraden $a''\alpha''$, $b''\beta''$, $c''\gamma''$ und $d''\delta''$.

Nennt man r den Halbmesser des Horizontalkreises $mnpq$ und k den Neigungswinkel der Begrenzungsebenen gegen die Horizontal-Ebene, so findet man:

$$mq = pn = 2R \cos \frac{K_1}{2}$$

$$mn = pq = 2R \cos \frac{K_2}{2}$$

$$r = R \sqrt{\cos^2 \frac{K_1}{2} + \cos^2 \frac{K_2}{2}}$$

$$wS = \frac{r^2}{\sqrt{R^2 - r^2}} = \frac{R\left(\cos^2 \frac{K_1}{2} + \cos^2 \frac{K_2}{2}\right)}{\sqrt{\sin^2 \frac{K_1}{2} - \cos^2 \frac{K_2}{2}}}$$

$$oS = \frac{R^2}{\sqrt{R^2 - r^2}} = \frac{R}{\sqrt{\sin^2 \frac{K_1}{2} - \cos^2 \frac{K_2}{2}}}$$

$$oa = oc = \frac{og}{\cos goa} = \frac{R}{\cos \frac{K_2}{2}}$$

$$ob = od = \frac{of}{\cos fob} = \frac{R}{\cos \frac{K_1}{2}}$$

$$\sin k = \frac{r}{R} = \sqrt{\cos^2 \frac{K_1}{2} + \cos^2 \frac{K_2}{2}}$$

Hieraus folgt für die Construction der prismatischen Ecke aus den Kantenwinkeln folgende Regel:

Man bestimme zuerst ein Rechteck *mnpq*, dessen Seiten gleich sind $2R \cos \frac{K_1}{2}$ und $2R \cos \frac{K_2}{2}$, mithin gleich den Sehnen der Mittelpunktswinkel von $180 - K_1$ und $180 - K_2$ im Kreise vom Halbmesser R und ziehe durch die Eckpunkte m, n, p. q an den dem Rechtecke umschriebenen Kreis die Tangenten $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta$ und $\delta\alpha$, welche sich in den Punkten α. β, γ und δ schneiden. Dann verzeichne man über der im Mittelpunkte w des Kreises *mnpq* auf dessen Ebene senkrechten Geraden oS als Hypotenuse ein Dreieck oSz so, dass der Scheitel z des rechten Winkels in die Peripherie des Kreises *mnpq* fällt und die Kathete $zo = R$ ist und verbinde den dieser Kathete gegenüber liegenden Eckpunkt S mit den Punkten α, β, γ, δ durch die Geraden $S\alpha$, $S\beta$, $S\gamma$ und $S\delta$.

Zieht man die Geraden *om*, *on*, *op* und *oq*, so bekommt man eine vierflächige Ecke *omnpq*, deren Flächenwinkel abwechselnd gleich sind $180 - K_1$ und $180 - K_2$. —

Bevor wir zu der Construction der Krystallgestalten selbst übergehen, wollen wir früher noch zeigen, wie man die horizontale Projection des Durchschnittes zweier eine Kugel berührenden Ebenen findet, welche mit einander einen bestimmten Winkel K einschliessen und gegen eine durch den Mittelpunkt der Kugel gehende Gerade gleichgeneigt sind.

§. 8.

Führt man an die Horizontal-Contour der Kugel $u'v'w'$, $v''w''z''$ Taf. I, Fig. 9 die zwei den Winkel $\varphi\sigma\psi = K$ einschliessenden Tangenten $\sigma\varphi$ und $\sigma\psi$, beschreibt von o aus mit dem Halbmesser $o\sigma$ den Horizontalkreis $\sigma'S's'$, $\sigma''S''s''$ und legt durch eine beliebige diesen Kreis schneidende Gerade $e'f'$, $e''f''$, deren horizontale Projection $e'f'$ jedoch Tangente an den Kreis $\sigma'S's'$ ist, zwei die Kugel $u'v'w'$ $v''w''z''$ berührende Ebenen; so werden die beiden Ebenen den Winkel K mit einander einschliessen und zugleich gegen die verticale Gerade $t't_1'$, $t''t_1''$ gleichgeneigt sein.

Beweis. Zieht man $oS \perp ef$ und durch S an den Äquator der Kugel $u'v'w'$, $v''w''z''$ die Tangente $S'h'$, $S''h''$, welche die Kugel in dem Punkte p', p'' berührt, errichtet $wp \perp oS$ und beschreibt von

w aus mit dem Halbmesser wp den Kreis pmn, dessen Ebene auf der Geraden oS senkrecht steht, so stellt dieser Kreis den geometrischen Ort der Berührungspunkte aller durch den Punkt S gehenden die Kugel tangirenden Ebenen vor und es werden desshalb auch die Berührungspunkte der beiden Ebenen mef und nef mit der Kugel in diesem Kreise liegen müssen.

Weil aber die Schenkel des Neigungswinkels zweier Ebenen auf der Durchschnittslinie der beiden Ebenen senkrecht stehen und jede Ebene die Kugel in einem Punkte berührt, dessen Verbindungslinie mit dem Mittelpunkte der Kugel das Perpendikel auf diese Ebene bildet; so wird offenbar die durch den Mittelpunkt o auf die Gerade ef senkrecht geführte Ebene mSn sowohl den Neigungswinkel als auch die Berührungspunkte der beiden Ebenen mef und nef enthalten müssen.

Da die Gerade ef zu der verticalen Projections-Ebene parallel ist, so wird die auf ihr senkrechte Ebene mSn eine vertical projicirende sein und daher den Kreis pmn in den Punkten m'', n'', deren horizontalen Projectionen m', n' sind, und die Ebenen mef und nef nach den Geraden $m'S'$, $m''S''$; $n'S'$, $n''S''$ schneiden müssen, und es werden die Punkte m, n die Berührungspunkte und der von den Geraden mS und nS eingeschlossene Winkel mSn der Neigungswinkel der beiden Ebenen mef und nef sein.

Zieht man die Geraden mo und no und vergleicht die beiden Vierecke $monS$ und $\varphi o \psi \sigma$ mit einander, so findet man:

$$\sphericalangle omS = \sphericalangle o\varphi\sigma = 90^0, \text{ weil } om \perp \text{pl. } mef \text{ und } o\varphi \perp \varphi\sigma,$$
$$\sphericalangle onS = \sphericalangle o\psi\sigma = 90^0, \quad „ \quad on \perp \text{pl. } nef \quad „ \quad o\psi \perp \psi\sigma,$$

$om = o\varphi$, $on = o\psi$ als Radien einer Kugel, $oS = o\sigma$ als Radien des Kreises σSs, folglich auch

$$\sphericalangle moS = \sphericalangle noS = \sphericalangle \varphi o\sigma = \sphericalangle \psi o\sigma = \frac{K}{2}$$

und

$$\sphericalangle moS + \sphericalangle noS = \sphericalangle \varphi o\sigma + \sphericalangle \psi o\sigma = K$$

d. i.

$$\sphericalangle mSn = \sphericalangle \varphi\sigma\psi = K.$$

Die beiden Ebenen mef und nef schliessen demnach den Winkel K mit einander ein.

Um die Winkel, welche die beiden Ebenen *mef* und *nef* mit der Geraden tt_1 einschliessen, zu erhalten, lege man durch die Gerade tt_1 zwei Ebenen *mot* und *not*, welche beziehungsweise auf den Ebenen *mef* und *nef* senkrecht stehen und bestimme ihre Durchschnitte *mt* und nt_1 mit den Ebenen *mef* und *nef*, welche Geraden bekanntlich mit der tt_1 die gesuchten Neigungswinkel bilden werden.

Weil die Ebenen *mot* und *not* durch die Gerade tt_1 gehen und beziehungsweise auf den Ebenen *mef* und *nef* senkrecht stehen, so werden offenbar ihre Durchschnitte *mt* und *nt* sowohl durch die Durchdringungspunkte t, t_1 der Geraden tt_1, als auch durch die Durchdringungspunkte *m* und *n* der Perpendikel *om* und *on* mit den Ebenen *mef* und *nef* gehen müssen.

Führt man durch die Gerade tt_1 eine zu der verticalen Projections-Ebene parallele Hilfsebene $\mu o \nu$, so schneidet sie die in den Ebenen *mef* und *nef* liegenden Geraden *Sm* und *Sn* in den Punkten μ und ν, und da sie zugleich zu *ef* parallel ist, die Ebenen *mef* und *nef* nach den zu *ef* parallelen Geraden μt und νt_1. Da aber die Geraden tt_1 und μt_1 in der Ebene μto, die Geraden tt_1 und νt in der Ebene νto und die Geraden μt und νt beziehungsweise in den Ebenen *mef* und *nef* liegen; so müssen sich die Geraden tt_1 und μt und die Geraden tt_1 und νt schneiden und zwar in den Punkten t und t_1, welche beziehungsweise den Ebenen *mef* und *nef* angehören und es sind daher t, t_1 die Durchdringungspunkte der Geraden tt_1 mit den Ebenen *mef* und *nef*.

Zieht man nun die Geraden *mt* und *nt*, so sind die von diesen Geraden mit der tt_1 eingeschlossenen Winkel *mto* und *nto* die gesuchten Neigungswinkel der tt_1 mit den Ebenen *mef* und *nef*.

Weil $mn \parallel \mu\nu$, $mS = nS$ und $wm = wn$ ist, so ist auch $o\mu = o\nu$ und weil $\mu t \parallel \nu t$, $\sphericalangle\, \mu ot = \sphericalangle\, \nu ot$ und $o\mu = o\nu$ ist, so ist $ot = ot_1$; weil endlich $om = on$, $ot = ot_1$ und $\sphericalangle\, omt = \sphericalangle\, ont_1 = 90^0$ ist, so ist auch $\sphericalangle\, mto = \sphericalangle\, nto$. Die Gerade tt_1 ist daher gegen die beiden Ebenen *mef* und *nef* gleichgeneigt.

Die Gerade *ef* hat zwar in der vorliegenden Figur gegen die verticale Projections-Ebene eine specielle, gegen die Kugel $u'v'w$, $v''w''x''$ jedoch eine allgemeine Lage; es ist demnach der Beweis auch für andere Lagen der Geraden *ef*, insoferne sie den Kreis σSs schneidet und ihre horizontale Projection $e'f'$ Tangente an den Kreis $\sigma' S' s'$ ist, allgemein giltig.

Übrigens kann man sich von der Richtigkeit des eben Gesagten auch auf folgende Weise überzeugen:

Man findet nämlich für je zwei die Kugel berührende Ebenen $\sin\frac{K}{2} = \frac{R}{o\sigma}$; es ist sonach der Neigungswinkel K zweier durch eine Gerade ef gehenden die Kugel vom Halbmesser R berührenden Ebenen blos von der Entfernung $o\sigma$ der Geraden ef vom Mittelpunkte der Kugel abhängig. In dem vorliegenden Falle haben die sämmtlichen den Kreis σSs schneidenden Geraden, deren horizontalen Projectionen Tangenten an den Kreis σSs bilden, dieselbe Entfernung $o\sigma$ vom Mittelpunkte o der Kugel; es müssen daher auch alle Paare von Ebenen, welche durch solche Gerade berührend an die Kugel gelegt werden, den Winkel K mit einander einschliessen.

Zieht man mx und $my \perp tt_1$, so erhält man:

$$\begin{aligned} mx &= R\cos xmo = R\cos mtx = R\cos k \\ my &= R\cos yno \;= R\cos nty \;= R\cos k_1, \end{aligned}$$

somit

$$\cos k = \frac{mx}{R} \text{ und } \cos k_1 = \frac{my}{R}.$$

Weil aber für je zwei die Kugel tangirende durch eine Gerade ef von der genannten Eigenschaft gehende Ebenen $m'o' = n'o'$ d. i. $mx = my$ sein muss, so muss auch $\cos k = \cos k_1$ und weil der Winkel k so wie k_1 höchstens 90° werden kann, wenn nämlich $o\sigma = \infty$ wird, so muss auch $\sphericalangle k = \sphericalangle k_1$ sein. Die Ebenen mef und nef sind somit gegen die Gerade tt_1 gleich geneigt.

Von dem hier erwiesenen Satze werden wir in der Folge eine häufige Anwendung machen.

Gestalten des tessularen Systemes.

Die Construction der Gestalten des tessularen Systemes gründet sich, wie wir schon anfangs bemerkten, auf die Construction der bei denselben vorkommenden Ecken.

Den Mittelpunkt der Leitkugel, welche wir bei der Darstellung solcher Ecken benützen, versetzen wir stets in den Mittelpunkt des Axensystemes und nennen R ihren Halbmesser. Ferner nennen wir r den Halbmesser des Berührungskreises der Ebenen jener Ecke, aus welcher die betreffende Gestalt unmittelbar construirt wird, a die pyramidale oder nach Umständen hemipyramidale, b die rhomboedrische und c die prismatische Halbaxe; α den Neigungswinkel der pyramidalen gegen die rhomboedrischen, β den der rhomboedrischen gegen die prismatischen und γ den der pyramidalen gegen die prismatischen Axen.

Das Axensystem selbst behalten wir in derselben Lage gegen die beiden Projections-Ebenen, wie sie Mohs beim Zeichnen der Krystallgestalten vor der Hebung gewählt hat, obwohl das Verfahren, welches wir im Folgenden erörtern werden, für jede andere beliebige Lage des Axensystemes anwendbar ist und sich sogar dann vereinfacht, wenn man das Axensystem zur verticalen Projections-Ebene mit vier Axen parallel stellt. In einer solchen Lage würden aber die meisten rückwärtigen Kanten durch die vorderen gedeckt werden und es würde desshalb das Bild der Gestalt an Deutlichkeit bedeutend verlieren, und dies ist auch der Grund, dass wir hier von diesem Vortheile keinen Gebrauch machen.

Da die Construction der Gestalten mit constanten Abmessungen allgemein bekannt ist, so geben wir statt dieser auf Taf. II, Fig. 1 die Combination $H. O. D$, wobei die sämmtlichen Begrenzungsebenen die Centrodistanz R haben, und gehen sogleich zu der Construction der Gestalten mit veränderlichen Abmessungen über.

§. 9. Construction der hexaedrischen Trigonal - Ikositetraeder (Tetrakishexaeder).

Zur Bestimmung dieser Gestalten ist die Grösse einer Kante erforderlich.

Ist K_1 die Grösse einer Kante der pyramidalen Ecke gegeben, so bestimme man zuerst nach §. 5 aus dem Kantenwinkel K_1 eine vierflächige pyramidale Ecke $S'a'b'c'd'$, $S''a''b''c''d''$ Taf. II, Fig. 2, trage von o' und o'' aus auf den pyramidalen Axen das Stück $o'e' = o'f' = o'g' = o'h' = o''s'' = o''S''$ auf, ziehe durch die Punkte e', f', g', h' an die Horizontal-Contour der Leitkugel die Tangenten $e'a'$, $e'd'$, $f'a'$, $f'b'$, $g'b'$, $g'c'$, $h'c'$ und $h'd'$ und verbinde ihre Durchschnittspunkte a', b', c', d' durch die Geraden $a'b'$, $b'c'$, $c'd'$ und $d'a'$. Dann mache man das Stück $o''\alpha'' = o''\beta'' = a'p' = p'b'$, führe durch die Punkte α'' und β'' die zwei horizontalen Geraden $d''a''$ und $i''l''$, projicire die Punkte e', f' g', h' nach e'', f'', g'', h'' und die Kanten $a'k'$, $b'l'$,

$c'm'$, $d'i'$ nach $a''k''$, $b''l''$, $c''m''$, $d''i''$ und verbinde die Punkte a'', b'', c'' . . . k'', l'', m'' und s'' durch die Geraden $e''a''$, $e''d''$, $e''c''$, $e''k''$, $f''a''$, $f''b''$, $f''l''$, $f''k''$, $g''b''$, $g''c''$, $g''m''$, $g''l''$, $h''c''$, $h''d''$, $h''i''$, $h''m''$, $s''i''$, $s''k''$, $s''l''$ und $s''m''$.

In dem Falle, wo K_2 die Grösse der hexaedrischen Kante gegeben ist, ist die Auflösung für sich klar.

Dreht man die rhomboedrische Halbaxe um die Hauptaxe Ss in die zu der verticalen Projections-Ebene parallele Lage nach $o\varepsilon$, so ist $o''\varepsilon''$ ihre wahre Länge. Das Stück $o''\varphi'' = o'a' = o'b' = \ldots$ ist die wahre Länge der prismatischen Halbaxe.

Fällt man von dem Berührungspunkte z' der Tangente $f'a'$ auf die Geraden $o'a'$ und $o'f'$ die Perpendikel $z'x'$ und $z'y'$ und zieht den Halbmesser $o'z' = R$, so erhält man:

$$z'x' = o'z' \sin z'o'x' = R \sin u$$

oder

$$z'x' = o'z' \cos z'a'o' = R \cos \frac{K_2}{2};$$

mithin

$$\sin u = \cos \frac{K_2}{2}$$

und

$$\cos u = \sin \frac{K_2}{2};$$

ferner ist

$$z'y' = o'z' \sin z'o'y' = R \sin (45 - u) = R (\sin 45 \cos u - \cos 45 \sin u)$$

$$= \frac{R}{\sqrt{2}} \left[\sin \frac{K_2}{2} - \cos \frac{K_2}{2}\right];$$

es ist aber auch

$$z'y' = r = R \sqrt{2} \cos \frac{K_1}{2},$$

mithin

$$\cos \frac{K_1}{2} = \frac{1}{2} \left[\sin \frac{K_2}{2} - \cos \frac{K_2}{2}\right]$$

und

$$\cos \frac{K_2}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - 2 \cos^2 \frac{K_1}{2}} - \cos \frac{K_1}{2}.$$

Nun folgt aus der Proportion

$$o'f'' : o'z' = o'z' : o'y' \text{ d. i.}$$

$$a : R = R : \sqrt{R^2 - r^2}$$

$$a = \frac{R^2}{\sqrt{R^2 - r^2}} = \frac{R}{\sqrt{1 - 2\cos^2\frac{K_1}{2}}}$$

oder

$$a = \frac{o'z'}{\cos z'o'y'} = \frac{R}{\cos(45 - u)} = \frac{R\sqrt{2}}{\sin\frac{K_2}{2} + \cos\frac{K_2}{2}}$$

$$c = o'a' = \frac{o'z'}{\sin z'a'o'} = \frac{R}{\sin\frac{K_2}{2}}$$

oder

$$c = \frac{R\sqrt{2}}{\sqrt{1 - 2\cos^2\frac{K_1}{2}} + \sqrt{2}\cos\frac{K_1}{2}}$$

und

$$b = \frac{o''\varphi''}{\cos\varphi''o''\varepsilon''} = \frac{c}{\cos\beta} = \frac{c\,.\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{R\sqrt{3}}{\sqrt{2}\sin\frac{K_2}{2}}$$

oder

$$b = \frac{R\sqrt{3}}{\sqrt{1 - 2\cos^2\frac{K_1}{2}} + \sqrt{2}\cos\frac{K_1}{2}}$$

Sollte das hexaedrische Trigonal-Ikositetraeder in irgend einer andern, etwa in der Mohs'schen Projection dargestellt werden, so versteht sich wohl von selbst, dass man die hier gezeigte Construction nicht ganz durchzuführen brauchen wird, sondern dass es hinreicht, wenn man blos das Verhältniss der pyramidalen Axen zu den rhomboedrischen bestimmt. Dieses findet man aber schon aus der pyramidalen Ecke *Sabcd* sehr einfach, wenn man durch einen beliebigen Punkt o der pyramidalen Axe oS eine die Kante Sa schneidende Gerade oa so zieht, dass $\sphericalangle\, Soa = \alpha$, gleich ist dem Neigungswinkel der pyramidalen gegen die rhomboedrischen Axen. $\frac{oS}{oa} = \frac{a}{b}$ ist dann das gesuchte Verhältniss. Dann hat man noch mit Hilfe eines Proportional-Winkels die Verkürzung von oS und oa, wie sie sich aus der Mohs'schen Projection des Hexaeders ergibt, zu bestimmen, die verkürzten Axenwerthe auf den zugehörigen Axenlinien aufzutragen und die so erhaltenen Eckpunkte durch Gerade entsprechend mit einander zu verbinden.

Auf die nämliche Weise wird man auch alle übrigen Gestalten in dieser, so wie in jeder andern beliebigen Projection schnell darstellen können.

Sind nämlich A', B', C' der Reihe nach die Längen der pyramidalen, rhomboedrischen und prismatischen Halbaxen eines Hexaeders, wie sie sich unmittelbar aus der Mohs'schen Projection ergeben und A, B, C die ihnen zugehörigen wahren Längen; so müssen für jeden beliebigen Werth von a, b, c, welchen man in die Mohs'che Projection zu übertragen hat, die Proportionen bestehen:

$$a' : a = A' : A;\; b' : b = B' : B;\; c' : c = C' : C$$

und allgemein $l' : l = L' : L$, mithin

$$a' = \frac{aA'}{A};\; b' = \frac{b \cdot B'}{B},\; c' = \frac{cC'}{C} \text{ und } l' = \frac{lL'}{L}.$$

§. 10. Construction der oktaedrischen Trigonal-Ikositetraeder (Triakisoktaeder).

Die oktaedrischen Trigonal-Ikositetraeder sind durch die Grösse einer Kante vollkommen bestimmt.

Kennt man K_1 die Grösse einer Kante der rhomboedrischen Ecke, so bestimme man nach §. 2 aus dem Kantenwinkel K_1 eine dreiflächige rhomboedrische Ecke, aus welcher man den Werth b der rhomboedrischen Halbaxe findet. Diesen Werth trage man auf der zur verticalen Projections-Ebene parallel gestellten rhomboedrischen Axe $\varepsilon\varepsilon_1''$ Taf. II, Fig. 3 von o'' aus so auf, dass $o''\delta_1'' = o''\delta'' = b$ ist und ziehe durch die Punkte δ_1'' und δ'' die zwei horizontalen Geraden $\delta_1''d''$ und $\delta''l''$. Dann führe man durch den Punkt δ_1'' an die Vertical-Contour der Leitkugel die Tangente $\delta_1''\varphi''$, mache $o'a' = o'b' = o'c' = o'd' = \alpha''\delta''$; $o'n' = o'p' = o'q' = o'r' = o''\varphi''$ und nachdem man durch die Punkte n', p', q', r' die Geraden $e'f'$, $h'g'$, $\perp n'q'$ und $f'g'$, $h'e' \perp p'r'$ gezogen, auch $o''S'' = o''s'' = o'e' = o'f' = o'g' = o'h'$, projicire die Punkte $a', b', c', \ldots k', l', m'$ nach $a''b''c'' \ldots k'', l'', m''$ und verbinde die so erhaltenen Eckpunkte durch Gerade mit einander in der Weise, wie dies aus der vorliegenden Figur ersichtlich ist.

Kennt man K_2 die Grösse der oktaedrischen Kante, so ziehe man an die Vertical-Contour der Leitkugel die Tangente $\delta_1''\varphi''$ unter dem Winkel $\delta''\varphi''o'' = \frac{K_2}{2}$ gegen die Äquatorebene geneigt, wo dann $o''\delta''_1$ die wahre Länge der rhomboedrischen und $o''\varphi''$ jene der prismatischen Halbaxe erhalten wird. Macht man $o'n' = o''\varphi''$ und zieht die Gerade $n'f'' \perp o'n'$, so ist $o'f'$ die wahre Länge der pyramidalen Halbaxe. Die weitere Bestimmung bleibt wie in dem ersten Falle.

Zieht man durch den Berührungspunkt z'' der Tangente $\delta_1''\varphi''$ die Geraden $z''x'' \perp o''\varphi''$ und $z''y'' \perp o''\delta''$, so wie auch den Halbmesser $o''z'' = R$, so ergibt sich:

$$z''x'' = o''z'' \sin z''o''x'' = R \sin u$$

oder

$$z''x'' = o''z'' \cos z''\varphi''o'' = R \cos \frac{K_2}{2},$$

mithin

$$\sin u = \cos \frac{K_2}{2}, \text{ und } \cos u = \sin \frac{K_2}{2};$$

ferner

$$z''y'' = o''z'' \sin z''o''y'' = R \sin(\varphi''o''\delta'' - u) = R(\sin\beta\cos u - \cos\beta\sin u)$$

$$= \frac{R}{\sqrt{3}}\left[\sin\frac{K_2}{2} - \sqrt{2}\cos\frac{K_2}{2}\right];$$

es ist aber auch nach §. 2

$$z''y'' = r = \frac{2R\cos\frac{K_1}{2}}{\sqrt{3}},$$

folglich

$$\cos\frac{K_1}{2} = \frac{1}{2}\left[\sin\frac{K_2}{2} - \sqrt{2}\cos\frac{K_2}{2}\right]$$

und

$$\cos\frac{K_2}{2} = \frac{1}{3}\left[\sqrt{3 - 4\cos^2\frac{K_1}{2}} - 2\sqrt{2}\cos\frac{K_1}{2}\right].$$

Nun folgt aus der Proportion

$$o''\delta'' : o''z'' = o''z'' : o''y'', \text{ d. i.}$$

$$b : R = R : \sqrt{R^2 - r^2}$$

$$b = \frac{R^2}{\sqrt{R^2 - r^2}} = \frac{R\sqrt{3}}{\sqrt{3 - 4\cos^2\frac{K_1}{2}}}$$

oder

$$b = \frac{o''z''}{\cos(\varphi''o''\delta'' - u)} = \frac{R}{\cos\beta\cos u + \sin\beta\sin u}$$

$$= \frac{R\sqrt{3}}{\sqrt{2}\sin\frac{K_2}{2} + \cos\frac{K_2}{2}};$$

$$c = o''\varphi'' = \frac{o''z''}{\sin o''\varphi''z''} = \frac{R}{\sin\frac{K_2}{2}}$$

oder

$$c = \frac{3R}{\sqrt{2}\sqrt{3 - 4\cos^2\frac{K_1}{2} + 2\cos\frac{K_1}{2}}}$$

und endlich

$$a = o'f' = \frac{o'n'}{\sin 45} = c\sqrt{2} = \frac{R\sqrt{2}}{\sin\frac{K_2}{2}}$$

oder

$$a = \frac{3R}{\sqrt{3 - 4\cos^2\frac{K_1}{2} + \sqrt{2}\cos\frac{K_1}{2}}}$$

§. 11. Construction der zweikantigen Tetragonal-Ikositetraeder (Deltoidikositetraeder).

Die zweikantigen Tetragonal-Ikositetraeder sind durch die Grösse einer Kante vollkommen bestimmt.

Ist K_1 die Grösse einer Kante der pyramidalen Ecke gegeben, so bestimme man nach §. 5 aus dem Kantenwinkel K_1 eine vierflächige pyramidale Ecke $S'a'b'c'd'$, $S''a''b''c''d''$ Taf. II, Fig. 4 und ziehe durch S'' an die Vertical-Contour der Leitkugel die Tangente $S''\delta''$, bis sie die zur verticalen Projections-Ebene parallele rhomboedrische Axe $o''\varepsilon''$ im Punkte δ'' trifft, woraus man $o''S''$ die wahre Länge der pyramidalen und $o''\delta''$ jene der rhomboedrischen Halbaxe erhält. Dann verlängere man die Tangente $S''\delta''$ bis zum Durchschnitte t'' mit der Äquatorebene, mache $o't' = o''t_1''$, $o'm' = o'p' = o''S''$, errichte im Punkte t' die Gerade $u'v' \perp o't'$ und ziehe die Geraden $m'v'$ und $p'u'$, welche sich in dem Punkte n' schneiden, so ist $o'n'$ die wahre Länge der prismatischen Halbaxe c.

Ist hingegen K_2 die Grösse einer Kante der rhomboedrischen Ecke gegeben, so verzeichne man nach §. 2 aus dem Kantenwinkel K_2 eine dreiflächige rhomboedrische Ecke, aus welcher man den Werth $b = o''\delta''$ der rhomboedrischen Halbaxe bekommt. Diesen Werth trage man dann von o'' aus auf der Geraden $o''\varepsilon''$ auf und ziehe durch δ'' an die Vertical-Contour der Leitkugel die Tangente $S''\delta''$, welche die pyramidale Hauptaxe $S''s''$ im Punkte s'' trifft; so ist $o''S''$ die Länge der pyramidalen Halbaxe a. Den Werth c erhält man nun auf dieselbe Weise, wie in dem ersten Falle.

Führt man durch den Punkt n' die Geraden $n'b'$ und $n'a'$ beziehungsweise parallel zu $o'm'$ und $o'p'$ und verbindet die Punkte a', v', b', u' durch die Geraden $a'v'$ und $b'u'$, so wie deren Durchschnittspunkt f' mit n' durch die Gerade $f'n'$ und zieht endlich auch noch die Geraden $a'm'$ und $b'p'$; so stellt die Figur $f'a'm'n'p'b'S'$ die horizontale Projection des Oktanten $famnpbS$ des gesuchten Ikositetraeders vor. Die diesem Oktanten zugehörige verticale Projection $f''a''m''n''p''b''S''$ wird gefunden, wenn man $o''\varphi'' = o'b'$ macht, durch φ'' und d'' die zwei horizontalen Geraden $d''b''$ und $e''d''$ führt, die Punkte a', f', b', m', n', p' nach a'', f'', b'', m'', n'', p'' projicirt und die Geraden $a''f''$, $f''b''$, $a''m''$, $m''n''$, $n''p''$ und $p''b''$ zieht. Im zweiten Falle hat man überdies noch die Geraden $S''a''$ und $S''b''$ zu ziehen.

Mit Hilfe des so bestimmten Oktanten kann man nun das Ikositetraeder selbst fertig zeichnen.

Fällt man von dem Berührungspunkte z'' der Tangente $S''\delta''$ auf die Geraden $o''S''$ und $o''\varepsilon''$ die Perpendikel $z''x''$ und $z''y''$ und zieht den Halbmesser $o''z'' = R$, so findet man:

$$z''x'' = o''z'' \sin x''o''z'' = R \sin u,$$

oder auch

$$z''x'' = r = R\sqrt{2}\cos\frac{K_1}{2};$$

mithin

$$\sin u = \sqrt{2}\cos\frac{K_1}{2}$$

und

$$\cos u = \sqrt{1 - 2\cos^2\frac{K_1}{2}};$$

ferner ist

$$z''y'' = o''z'' \sin z''o''y'' = R \sin (S''o''\delta'' - u) =$$

$$= R (\sin\alpha \cos u - \cos\alpha \sin u) = \frac{R\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \left[\sqrt{1-2\cos^2\frac{K_1}{2}} - \cos\frac{K_1}{2}\right];$$

es ist aber auch

$$z''y'' = r_1 = \frac{2R\cos\frac{K_2}{2}}{\sqrt{3}},$$

mithin

$$\cos\frac{K_2}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\sqrt{1-2\cos^2\frac{K_1}{2}} - \cos\frac{K_1}{2}\right]$$

und

$$\cos\frac{K_1}{2} = \frac{1}{3}\left[\sqrt{3-4\cos^2\frac{K_2}{2}} - \sqrt{2}\cos\frac{K_2}{2}\right].$$

Dann ist

$$a = \frac{R^2}{\sqrt{R^2-r^2}} = \frac{R}{\sqrt{1-2\cos^2\frac{K_1}{2}}}$$

oder

$$a = \frac{3R}{\sqrt{3-4\cos^2\frac{K_2}{2} + 2\sqrt{2}\cos\frac{K_2}{2}}},$$

$$b = \frac{R^2}{\sqrt{R^2-r_1{}^2}} = \frac{R\sqrt{3}}{\sqrt{3-4\cos^2\frac{K_2}{2}}}$$

oder

$$b = \frac{R\sqrt{3}}{\sqrt{1-2\cos^2\frac{K_1}{2} + 2\cos\frac{K_1}{2}}}.$$

Für die Bestimmung von c findet man aus den Dreiecken $o'p'n'$, $o'p'u'$ und $o't'u'$

$$o'n' : o'p' = \sin o'p'n' : \sin o'n'p'$$

d. i.

$$c : a = \sin w : \sin [180 - (45 + w)],$$

mithin

$$c = \frac{a \sin w}{\sin (45+w)} = \frac{a\sqrt{2}\sin w}{\cos w + \sin w}. \tag{1}$$

Nun ist

$$\cos v = \frac{o'p'}{u'p'} = \frac{a}{\sqrt{ou'^2+a^2}} = \frac{a}{\sqrt{2o't'^2+a^2}} \tag{2}$$

und

$$\sin w = \frac{o't'\sqrt{2}}{\sqrt{2o't'^2 + a^2}} \tag{3}$$

Aus der Ähnlichkeit der rechtwinkeligen Dreiecke $o''z''t_1''$ und $o''x''z''$ folgt:

$$o''t_1'' : o''z'' = o''z'' : z''x''$$

d. i.

$$o''t_1'' : R = R : r;$$

folglich

$$o't' = \frac{R^2}{r} = \frac{R}{\sqrt{2}\cos\frac{K_1}{2}}$$

oder auch

$$o't' = \frac{3R}{\sqrt{2}\sqrt{3 - 4\cos^2\frac{K_2}{2} - 2\cos\frac{K_2}{2}}}$$

Setzt man nun die Werthe von $o't'$ in die Gleichungen (2) und (3) und dann die reducirten Werthe von (2) und (3) in die Gleichung (1), so erhält man:

$$c = \frac{R\sqrt{2}}{\cos\frac{K_1}{2} + \sqrt{1 - 2\cos^2\frac{K_1}{2}}}$$

oder

$$c = \frac{3R}{\cos\frac{K_2}{2} + \sqrt{2}\sqrt{3 - 4\cos^2\frac{K_2}{2}}}.$$

Zu demselben Resultate kommt man schneller, wenn man die oben gefundenen Werthe für $\cos\frac{K_1}{2}$ und $\cos\frac{K_2}{2}$ in der allgemeinen Gleichung für prismatische Axen

$$c = \frac{R}{\sqrt{\;-\cos^2\frac{K_1}{2} - \cos^2\frac{K_2}{2}}}$$

setzt.

§. 12. Construction der Tetrakontaoktaeder (Hexakisoktaeder).

Zur Bestimmung der Tetrakontaoktaeder ist die Grösse zweier Kanten erforderlich. Bei diesen Gestalten kommen dreierlei Kanten vor; es werden daher drei verschiedene Fälle zu betrachten sein.

Ist für den ersten Fall K_1 die Grösse einer Kante, welche die pyramidalen Ecken mit den prismatischen und K_2 die Grösse einer Kante, welche die pyramidalen Ecken mit den rhomboedrischen verbindet, gegeben; so verzeichne man nach §. 6 aus den Kantenwinkeln K_1 und K_2 eine achtflächige pyramidale Ecke $S'a'b'c'd'e'f'g'h'$, $S''a''b''c''d''e''f''g''h''$ Taf. II, Fig. 5, deren Kanten Sb, Sd, Sf, Sh die rhomboedrischen Axen ob, od, of, oh in den Punkten b, d, f, h, und die Kanten Sa, Sc, Se, Sg die prismatischen Axen oa, oc, oe, og in den Punkten a, c, e, g schneiden. Dabei werden, wie sich von selbst versteht, die Punkte b, d, f, h und a, c, e, g in Horizontal-Ebenen liegen müssen.

Dreht man dann die rhomboedrische Axe ob, so wie die prismatische Axe oc in die zur verticalen Projections-Ebene parallele Lage nach $o\delta$ und beziehungsweise $o\varphi$; so ist $o''\delta''$ die wahre Länge der rhomboedrischen und $o''\varphi''$ die der prismatischen Halbaxe.

Macht man $o'm' = o'k' = o''S''$; $o'l' = o''\varphi''$, projicirt die Punkte k', l', m' nach k'', l'', m'' und zieht die Geraden $b'a'$, $b'c'$, $b'k'$, $b'l'$, $b'm'$, $a'k'$, $k'l'$, $k'm'$, $m'c'$; $b''a''$, $b''c''$, $b''k''$, $b''l''$, $b''m''$, $a''k''$, $k''l''$, $l''m''$ und $m''c''$; so hat man dadurch die beiden orthogonalen Projectionen des Oktanten $baklmcS$ bestimmt und kann mit Hilfe derselben das gesuchte Tetrakontaoktaeder selbst fertig zeichnen.

Ist für den zweiten Fall K_2 die Grösse einer Kante, welche die rhomboedrischen Ecken mit den pyramidalen und K_3 die Grösse einer Kante, welche die rhomboedrischen Ecken mit den prismatischen verbindet, gegeben; so bestimme man nach §. 3 aus den Kantenwinkeln K_2 und K_3 eine sechsflächige rhomboedrische Ecke $bSaklmc$ und ziehe durch den Mittelpunkt o in der Ebene der Kanten K_2 und K_3 zwei Gerade oS und ol, von denen die oS die Kante K_2 im Punkte S, die ol die Kante K_3 im Punkte l schneidet und wobei der Winkel Sob gleich ist dem Neigungswinkel α der pyramidalen gegen die rhomboedrischen Axen und der Winkel lob gleich β, dem der rhomboedrischen Axen gegen die prismatischen.

Die weitere Bestimmung ist aus dem ersten Falle bekannt.

Ist endlich für den dritten Fall K_1 und K_3 bei der früheren Bedeutung gegeben, so bestimme man nach §. 7 aus den Kantenwinkeln K_1 und K_3 eine prismatische Ecke $abShk$ und ziehe durch den Mittelpunkt o in der Ebene zweier Kanten K_1 die Gerade oS und in der Ebene zweier Kanten K_3 die Gerade ob, wobei der Winkel aoS gleich ist dem Neigungswinkel der prismatischen gegen die pyramidalen Axen und der Winkel aob gleich dem der prismatischen Axen gegen die rhomboedrischen. Erfolgt nun der Durchschnitt der Geraden oS mit der Kante K_1 im Punkte S und jener der Geraden ob mit der Kante K_3 im Punkte b, so ist oS die wahre Länge der pyramidalen und ob die wahre Länge der rhomboedrischen Halbaxe.

Die weitere Bestimmung bleibt wieder dieselbe, wie in dem ersten Falle.

Für den ersten Fall findet man:

$$a = \frac{R}{\sqrt{\sin^2 \frac{K_1}{2} - \left(\cos \frac{K_1}{2} + \sqrt{2} \cos \frac{K_2}{2}\right)^2}}.$$

In dem Dreiecke boS verhält sich

$$ob : oS = \sin bSo : \sin Sbo,$$

d. i.

$$b : a = \sin u : \sin (u + \alpha),$$

mithin ist

$$b = \frac{a \sin u}{\sin (u + \alpha)} = \frac{a \sin u}{\sin u \cos \alpha + \cos u \sin \alpha}.$$

Nun ist

$$\sin u = \frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{R \sin \frac{K_2}{2}}$$

und

$$\cos u = \frac{\sqrt{r^2 - R^2 \cos^2 \frac{K_2}{2}}}{R \sin \frac{K_2}{2}};$$

folglich

$$b = \frac{R \sqrt{3}}{\sqrt{\sin^2 \frac{K_1}{2} - \left(\cos \frac{K_1}{2} + \sqrt{2} \cos \frac{K_2}{2}\right)^2 + \sqrt{2} \cos \frac{K_2}{2} + 2 \cos \frac{K_1}{2}}}$$

In dem Dreiecke aoS verhält sich

$$oa : oS = \sin aSo : \sin Sao$$

d. i.

$$c : a = \sin v : \sin (v + \beta),$$

mithin

$$c = \frac{a \sin v}{\sin (v + \beta)} = \frac{a \sin v}{\sin v \cos \beta + \cos v \sin \beta}.$$

Es ist aber

$$\sin v = \frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{R \sin \frac{K_1}{2}}$$

und

$$\cos v = \frac{\sqrt{r^2 - R^2 \cos^2 \frac{K_1}{2}}}{R \sin \frac{K_1}{2}};$$

folglich

$$c = \frac{R\sqrt{2}}{\sqrt{\sin^2 \frac{K_1}{2} - \left(\cos \frac{K_1}{2} + \sqrt{2} \cos \frac{K_2}{2}\right)^2} + \cos \frac{K_1}{2} + \sqrt{2} \cos \frac{K}{2}}.$$

Auf dieselbe Weise findet man für den zweiten Fall

$$a = \frac{3R}{\sqrt{3 \sin^2 \frac{K_2}{2} - \left(\cos \frac{K_2}{2} + 2 \cos \frac{K_3}{2}\right)^2} + \sqrt{2}\left(\cos \frac{K_2}{2} + 2 \cos \frac{K_3}{2}\right)}$$

$$b = \frac{R\sqrt{3}}{\sqrt{3 \sin^2 \frac{K_2}{2} - \left(\cos \frac{K_2}{2} + 2 \cos \frac{K_3}{2}\right)^2}}$$

$$c = \frac{3R}{\sqrt{2}\sqrt{3 \sin^2 \frac{K_2}{2} - \left(\cos \frac{K_2}{2} + 2 \cos \frac{K_3}{2}\right)^2} + \cos \frac{K_3}{2} + 2 \cos \frac{K_2}{2}},$$

und endlich für den dritten Fall

$$a = \frac{R\sqrt{2}}{\sqrt{\sin^2 \frac{K_1}{2} - \cos^2 \frac{K_3}{2}} + \cos \frac{K_3}{2}}$$

$$b = \frac{R\sqrt{3}}{\sqrt{2}\sqrt{\sin^2 \frac{K_1}{2} - \cos^2 \frac{K_3}{2}} + \cos \frac{K_1}{2}}$$

$$c = \frac{R}{\sqrt{\sin^2 \frac{K_1}{2} - \cos^2 \frac{K_3}{2}}}$$

§. 13. Construction der hexaedrischen Pentagonal-Dodekaeder (Pentagondodekaeder).

Die hexaedrischen Pentagonal-Dodekaeder sind durch die Grösse einer Kante vollkommen bestimmt.

Ist K_1 die Grösse der hexaedrischen Kante bekannt, so führe man an die Horizontal-Contour der Leitkugel Taf. II, Fig. 6, die Tangenten $d'm'$, $d'k'$, $g'n'$, $g'i'$ unter den Winkeln $m'd'o' = k'd'o' = n'g'o' = i'g'o' = \frac{K_1}{2}$ gegen die hemipyramidale Axe $d'g'$ geneigt und nachdem man $o'u' = o'v' = o'd' = o'g'$ gemacht, durch u' und v' die Geraden $i'k'$ und $m'n'$ senkrecht auf $u'v'$, trage von S' aus auf der Geraden $u'v'$ das Stück $S'a' = S'b' = v'm' = v'n'$ auf und verbinde die rhomboedrischen Eckpunkte c', e', f', h' mit den Punkten a' und b' durch die Geraden $e'b'$, $b'f'$, $c'a'$ und $a'h'$.

Dann mache man $o''S'' = o'd'$, $o''\alpha'' = o'\gamma'$ und $o''\beta'' = o'b'$, ziehe durch die Punkte S'', α'', β'' die drei horizontalen Geraden $a''b''$, $c''\delta''$ und $d''g''$, projicire die Punkte a', b', c', ... l', m', n' nach a'', b'', c'', ... l'', m'', n'' und ziehe die Geraden $a''h''$, $a''c''$, $c''d''$, $d''e''$, $e''b''$, $b''f''$, $f''g''$, $g''h''$, $h''i''$, $i''k''$, $k''c''$, $d''l''$, $e''m''$, $m''n''$, $n''f''$ und $g''p''$. Dadurch bekommt man die beiden Projectionen des oberen Theiles des gesuchten Dodekaeders und kann mit Hilfe desselben den untern Theil selbst leicht bestimmen.

Ist K_2 die Grösse einer Kante der rhomboedrischen Ecke bekannt, so verzeichne man nach §. 2 aus dem Kantenwinkel K_2 eine dreiflächige rhomboedrische Ecke, aus welcher man den Werth $o''\delta''$ der rhomboedrischen Halbaxe findet. Den Werth $o''\delta''$ trage man von o'' aus auf der zur verticalen Projections-Ebene parallelen rhomboedrischen Axe $o''\delta''$ auf und ziehe durch den Punkt δ'' die horizontale Gerade $e''\delta''$, welche die rhomboedrischen Eckpunkte $c''e''f''h''$ enthält. Dann mache man $o'e' = o'f' = o'h' = o'c' = \alpha''\delta''$, ziehe durch die Punkte e', f', h', c' an die Horizontal-Contour der Leitkugel die Tangenten $e'd'$, $c'd'$, $f'g'$ und $g'h'$, welche sich in den Punkten d' und g' schneiden; so ist $o'd' = o'g'$ die wahre Länge der hemipyramidalen Axe. Das Weitere ist aus dem ersten Falle klar.

Fällt man von dem Berührungspunkte z'' der Tangente $g'n'$ auf die Gerade $o'g'$ das Perpendikel $z'x'$ und zieht den Halbmesser $o'z' = R$, so findet man:

$$z'x' = o'z' \sin z'o'x' = R \sin u$$

oder auch

$$z'x' = o'z' \cos z'g'o' = R \cos \frac{K_1}{2},$$

mithin

$$\sin u = \cos \frac{K_1}{2}$$

und

$$\cos u = \sin \frac{K_1}{2};$$

ferner ist

$$o'f' = \frac{o'z'}{\cos z'o'f'} = \frac{R}{\cos (45 - u)} = \frac{R\sqrt{2}}{\sin u + \cos u} = \frac{R\sqrt{2}}{\sin \frac{K_1}{2} + \cos \frac{K_1}{2}}.$$

Nun ist

$$b = o''\delta'' = \frac{o''t''}{\cos t''o''\delta''} = \frac{o'f'}{\cos \beta} = o'f' \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

folglich

$$b = \frac{R\sqrt{3}}{\sin \frac{K_1}{2} + \cos \frac{K_1}{2}};$$

nach §. 2 ist aber auch

$$b = \frac{R\sqrt{3}}{\sqrt{3 - 4\cos^2 \frac{K_2}{2}}}.$$

Aus den letzten zwei Gleichungen ergibt sich:

$$\cos \frac{K_2}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \sin \frac{K_1}{2} \cos \frac{K_1}{2}}$$

und

$$\cos \frac{K_1}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \sqrt{\left[\left(3 - 4\cos^2 \frac{K_2}{2}\right)\left(4\cos^2 \frac{K_2}{2} - 1\right)\right]}};$$

ferner ist

$$a = o'g' = \frac{o'z'}{\sin o'g'z'} = \frac{R}{\sin \frac{K_1}{2}}$$

oder

$$a = \frac{R\sqrt{2}}{\sqrt{1 + \sqrt{\left[\left(3 - 4\cos^2 \frac{K_2}{2}\right)\left(4\cos^2 \frac{K_2}{2} - 1\right)\right]}}}.$$

§. 14. Construction der zweikantigen Tetragonal-Dodekaeder (Deltoiddodekaeder).

Die zweikantigen Tetragonal-Dodekaeder können aus der Grösse einer Kante der stumpferen oder schärferen rhomboedrischen Ecke construirt werden.

In beiden Fällen ist das Constructions-Verfahren dasselbe. Man bestimmt nämlich, je nachdem die Grösse K_1 oder K_2 der stumpferen oder schärferen Kante gegeben ist, nach §. 2 aus dem Kantenwinkel K_1 oder K_2 eine dreiflächige rhomboedrische Ecke, aus welcher man den Werth $o''\gamma'' = b$ oder $o''\varepsilon'' = b_1$ der kürzeren oder längeren rhomboedrischen Halbaxe erhält. Diesen Werth trage man auf der einen von den beiden zur verticalen Projections-Ebene parallel gestellten rhomboedrischen Axen $o''\gamma''$ oder $o''\varepsilon''$ Taf. II, Fig. 7, etwa auf der $o''\varepsilon''$ von o' aus auf und führe durch den so erhaltenen Endpunkt δ'' an die Vertical-Contour der Leitkugel die Tangente $\delta''\gamma''$, welche die $o''\gamma''$ im Punkte γ'' trifft, so ist $o''\gamma''$ die wahre Länge der zweiten rhomboedrischen Halbaxe.

Macht man $o'n' = o''n''$ und errichtet im Punkte n' die Gerade $h'e' \perp o'n'$, welche die beiden hemipyramidalen Axen $o'h'$ und $o'e'$ in den Punkten h' und e' schneidet, so ist $o'h' = o'e' = a$ die wahre Länge der hemipyramidalen Halbaxe. Macht man endlich auch noch $o'f' = o'g' = o''S'' = o''s'' = a$; $o'd' = o'k' = o'c' = o'i' = \delta''\varphi''$, $o'a' = o'm' = o'b' = o'l' = \beta''\gamma''$, $o''\alpha'' = o''\beta''$ und $o''\psi'' = o''\varphi''$; zieht durch die Punkte φ'', α'', β'' und ψ'' die vier horizontalen Geraden $c''\delta''$, $a''b''$, $l''\gamma''$ und $i''k''$, projicirt die Punkte a', b', c' ... k', l', m' nach a'', b'', c'' ... k'', l'', m'' und verbindet diese Punkte durch Gerade in der Weise, wie dies aus vorliegender Figur ersichtlich ist, so erhält man die beiden orthogonalen Projectionen des gesuchten Dodekaeders.

Fällt man von dem Berührungspunkte z'' der Tangente $\delta''\gamma''$ auf die beiden rhomboedrischen Axen $o''\gamma''$ und $o'\varepsilon''$ die Perpendikel $z''x''$ und $z''y''$, so findet man:

$$z''x'' = o''z'' \sin x''o''z'' = R \sin u$$

oder nach §. 2

$$z''x'' = r = \frac{2R \cos \frac{K_1}{2}}{\sqrt{3}};$$

mithin ist

$$\sin u = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos \frac{K_1}{2}$$

und

$$\cos u = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{3 - 4 \cos^2 \frac{K_1}{2}}\,;$$

ferner ist

$$z''y'' = o''z'' \sin y''o''z'' = R \sin (\gamma o \delta - u) = R \sin (2\beta - u) =$$

$$= R (\sin 2\beta \cos u - \cos 2\beta \sin u) =$$

$$= \frac{2R}{3\sqrt{3}} \left[\sqrt{2} \sqrt{3 - 4 \cos^2 \frac{K_1}{2}} - \cos \frac{K_1}{2}\right];$$

es ist aber auch nach §. 2

$$z''y'' = r_1 = \frac{2R \cos \frac{K_2}{2}}{\sqrt{3}};$$

mithin ist

$$\cos \frac{K_2}{2} = \frac{1}{3} \left[\sqrt{2} \sqrt{3 - 4 \cos^2 \frac{K_1}{2}} - \cos \frac{K_1}{2}\right]$$

und

$$\cos \frac{K_1}{2} = \frac{1}{3} \left[\sqrt{2} \sqrt{3 - 4 \cos^2 \frac{K_2}{2}} - \cos \frac{K_2}{2}\right].$$

Dann ist

$$a = \frac{R}{\sqrt{\sin^2 \frac{K_1}{2} - \cos^2 \frac{K_2}{2}}} =$$

$$= \frac{3R}{\sqrt{2} \cos \frac{K_1}{2} + \sqrt{3 - 4 \cos^2 \frac{K_1}{2}}}$$

oder

$$a = \frac{3R}{\sqrt{2} \cos \frac{K_2}{2} + \sqrt{3 - 4 \cos^2 \frac{K_2}{2}}}$$

$$b = \frac{R^2}{\sqrt{R^2 - r^2}} = \frac{R\sqrt{3}}{\sqrt{3 - 4 \cos^2 \frac{K_1}{2}}}$$

oder

$$b = \frac{3R\sqrt{3}}{4\sqrt{2} \cos \frac{K_2}{2} + \sqrt{3 - 4 \cos^2 \frac{K_2}{2}}}$$

$$b_1 = \frac{R^2}{\sqrt{R^2 - r_1^2}} = \frac{R\sqrt{3}}{\sqrt{3 - 4\cos^2\frac{K_2}{2}}}$$

oder

$$b_1 = \frac{3R\sqrt{3}}{4\sqrt{2}\cos\frac{K_1}{2} + \sqrt{3 - 4\cos^2\frac{K_1}{2}}^2}.$$

§. 15. Construction der tetraedrischen Trigonal-Dodekaeder (Trigondodekaeder).

Die tetraedrischen Trigonal-Dodekaeder sind durch die Grösse einer Kante vollkommen bestimmt.

Ist K_1 die Grösse der tetraedrischen Kante gegeben, so führe man an die Vertical-Contour der Leitkugel Taf. II, Fig. 8, die Tangente $S''\delta''$ unter dem Winkel $\delta''S''o'' = \frac{K_1}{2}$ gegen die hemipyramidale Axe $S''s''$ geneigt, bis sie dieselbe im Punkte S'' und die zur verticalen Projections-Ebene parallel gestellte rhomboedrische Axe $o''\varepsilon''$ im Punkte δ'' trifft und ziehe durch S'' und δ'' die zwei horizontalen Geraden $c''\varepsilon''$ und $d''\delta''$ und nachdem man $o''s'' = o''S''$ und $o''\beta'' = o''\alpha''$ gemacht, durch s'' und β'' die zwei horizontalen Geraden $e''g''$ und $h''f''$. Dann mache man $o'a' = o'g' = o'c' = o'e' = S''\varepsilon''$ und $o'f', o'b', o'h', o'd' = \alpha''\delta''$, projicire die Punkte $a', b', c', d' \ldots f', g', h'$, nach $a'', b'', c'', \ldots f''\ g''\ h''$ und ziehe die Geraden $a'c', a'b', b'c' \ldots\ a''c'', a''b'', b''c'' \ldots$, wie dies aus der vorliegenden Figur ersichtlich ist.

Hier sind die Stücke $o''S''$, $o''\varepsilon''$ und $o''\delta''$ der Reihe nach die wahren Längen der hemipyramidalen, der längeren und kürzeren rhomboedrischen Halbaxen.

Ist hingegen K_2 die Grösse einer Kante der dreiflächigen rhomboedrischen Ecke gegeben, so verzeichne man nach §. 2 aus dem Kantenwinkel K_2 eine dreiflächige rhomboedrische Ecke, aus welcher man die kürzere rhomboedrische Halbaxe $o''\delta'' = b$ findet. Dieses Stück $o''\delta''$ trage man von o'' aus auf der Geraden $o''\varepsilon''$ auf, ziehe durch den Punkt δ'' an die Vertical-Contour der Leitkugel die Tangente $\delta''S''$ und durch deren Durchschnittspunkt S'' mit der hemipyramidalen Axe $S''s''$ die horizontale Gerade $S''\varepsilon''$ bis die $o''\varepsilon''$ im Punkte ε'' getroffen wird; so erhält man $o''S''$ den Werth der hemipyramidalen und $o''\varepsilon''$ den Werth der längeren rhomboedrischen Halbaxe.

Die weitere Bestimmung ist aus dem ersten Falle bekannt.

Fällt man von dem Berührungspunkte z'' der Tangente $S''\delta''$ auf die Axen $o''S''$ und $o''\varepsilon''$ die Perpendikel $z''x''$ und $z''y''$ und zieht den Halbmesser $o''z'' = R$, so findet man

$$z''x'' = o''z'' \sin z''o''x'' = R \sin u$$

oder auch

$$z''x'' = o''z'' \cos z''S''o'' = R \cos \frac{K_1}{2},$$

mithin

$$\sin u = \cos \frac{K_1}{2}$$

und

$$\cos u = \sin \frac{K_1}{2}.$$

ferner ist

$$z''y'' = o''z'' \sin z''o''y'' = R \sin (S''o''\varepsilon'' - u) =$$

$$= R (\sin \alpha \cos u - \cos \alpha \sin u)$$

$$= \frac{R}{\sqrt{3}} \left[\sqrt{2} \sin \frac{K_1}{2} - \cos \frac{K_1}{2}\right];$$

es ist aber auch

$$z''y'' = r_1 = \frac{2R \cos \frac{K_2}{2}}{\sqrt{3}}$$

folglich

$$\cos \frac{K_2}{2} = \frac{1}{2} \left[\sqrt{2} \sin \frac{K_1}{2} - \cos \frac{K_1}{2}\right]$$

und

$$\cos \frac{K_1}{2} = \frac{1}{3} \left[\sqrt{2} \sqrt{3 - 4 \cos^2 \frac{K_2}{2}} - 2 \cos \frac{K_2}{2}\right];$$

dann ist

$$a = o''S'' = \frac{o''z''}{\sin z''S''o''} = \frac{R}{\sin \frac{K_1}{2}}$$

oder

$$a = \frac{3R}{2\sqrt{2} \cos \frac{K_2}{2} + \sqrt{3 - 4 \cos^2 \frac{K_2}{2}}}.$$

$$b = o''\delta'' = \frac{R\sqrt{3}}{\sqrt{3 - 4 \cos^2 \frac{K_2}{2}}}$$

oder

$$b = \frac{R\sqrt{3}}{\sin\frac{K_1}{2} + \sqrt{2}\cos\frac{K_1}{2}}$$

und endlich

$$b_1 = o''\varepsilon'' = \frac{o''S''}{\cos\varepsilon''o''S''} = \frac{a}{\cos\alpha} = a\sqrt{3} = \frac{R\sqrt{3}}{\sin\frac{K_1}{2}}$$

oder

$$b_1 = \frac{3R\sqrt{3}}{2\sqrt{2}\cos\frac{K_2}{2} + \sqrt{3 - 4\cos^2\frac{K_2}{2}}}$$

§. 16. Construction der tetraedrischen Trigonal-Ikositetraeder (Hexakistetraeder).

Zur Bestimmung der tetraedrischen Trigonal-Ikositetraeder ist die Grösse zweier Kanten erforderlich.

Kennt man K_1 und K_2 die Grösse der schärferen und stumpferen Kante der hemipyramidalen Ecke, so verzeichne man nach §. 7 aus den Kantenwinkeln K_1 und K_2 eine vierflächige prismatische Ecke $S'a'b'c'd'$, $S''a''b''c''d''$ Taf. II, Fig. 9, deren schärferen Kanten Sa und Sc die rhomboedrischen Axen oa und oc in den Punkten a und c und deren stumpferen Kanten Sb und Sd die rhomboedrischen Axen ob und od in den Punkten b und d schneiden. Dabei befinden sich die Punkte a, c und b, d in den horizontalen Geraden ac und bd.

Bringt man die zur verticalen Projections-Ebene parallel gestellte rhomboedrische Axe $o''\varepsilon''$ mit den beiden genannten Geraden zum Durchschnitte, so erhält man $o''\varepsilon''$ den Werth der längeren und $o''\delta''$ den Werth der kürzeren rhomboedrischen Halbaxe.

Macht man $o'a' = o'k' = o'c' = \alpha''\varepsilon''$, $o'f' = o'g' = o''S''$, $o'b' = \varphi''\delta''$ und $o''\beta'' = o''\alpha''$, führt durch den Punkt β'' die horizontale Gerade $\beta''k''$, projicirt die Punkte f', g', k', nach f'', g'', k'' und zieht die Geraden $b'a'$, $b'f'$, $b'k'$, $b'g'$, $b'c'$, $a'f'$, $f'k'$, $k'g'$, $g'c'$, $b''a''$, $b''f''$, $b''k''$, $b''g''$, $b''c''$, $a''f''$, $f''k''$, $k''g''$ und $g''c''$; so stellen die Figuren $S'a'f'k'g'c'b'$ und $S''a''f''k''g''c''b''$ die beiden orthogonalen Projectionen des Quadranten $Safkgcb$ des gesuchten Ikositetraeders vor.

Mit Hilfe dieses Quadranten kann man leicht das Ikositetraeder fertig zeichnen.

Kennt man K_1 die Grösse der schärferen Kante der hemipyramidalen und K_3 die Grösse der Verbindungskante der rhomboedrischen Ecken, so verzeichne man nach §. 3 aus den Kantenwinkeln K_1 und K_3 eine sechsflächige rhomboedrische Ecke *acSdemf* und ziehe durch den Mittelpunkt *o* zwei Gerade *oS* und *om*, von denen die *oS* die Kante K_1 im Punkte *S* und die *om* die Kante K_3 im Punkte *m* trifft und wobei $\sphericalangle\, aoS = \alpha$ und $moa = 2\beta$ ist. Dadurch erhält man *oa* den Werth der längeren, *om* den Werth der kürzeren rhomboedrischen und *oS* den Werth der hemipyramidalen Halbaxe.

Kennt man endlich K_2 und K_3 bei der früheren Bedeutung, so bestimme man sich die Werthe der Halbaxen auf dieselbe Weise wie in dem zweiten Falle. Die weitere Bestimmung bleibt hier, so wie in dem zweiten Falle dieselbe, wie in dem ersten Falle gezeigt wurde.

Für die Berechnung der Halbaxen findet man für den ersten Fall

$$a = \frac{R}{\sqrt{\sin^2\frac{K_1}{2} - \cos^2\frac{K_2}{2}}}$$

aus §. 7.

Aus dem Dreiecke *aoS* folgt die Proportion

$$oa : oS = \sin aSo : \sin Sao$$

d. i.

$$b : a = \sin u : \sin\,[180 - (u + \alpha)],$$

mithin

$$b = \frac{a \sin u}{\sin\,(u + a)} = \frac{a \sin u}{\sin u \cos \alpha + \cos u \sin \alpha}.$$

Nun ist

$$\sin\,u = \frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{R \sin\frac{K_1}{2}}$$

und

$$\cos\,u = \frac{\sqrt{r^2 - R^2 \cos^2\frac{K_1}{2}}}{R \sin\frac{K_1}{2}};$$

folglich

$$b = \frac{R\sqrt{3}}{\sqrt{\sin^2\frac{K_1}{2} - \cos^2\frac{K_2}{2}} + \sqrt{2}\cos\frac{K_2}{2}}$$

Auf dieselbe Weise findet man

$$b_1 = \frac{R\sqrt{3}}{\sqrt{\sin^2\frac{K_1}{2} - \cos^2\frac{K_2}{2}} + \sqrt{2}\cos\frac{K_2}{2}}.$$

Für den zweiten Fall hat man:

$$b = \frac{R\sqrt{3}}{\sqrt{3\sin^2\frac{K_1}{2} - \left(\cos\frac{K_1}{2} + 2\cos\frac{K_3}{2}\right)^2}}.$$

$$b_1 = \frac{3R\sqrt{3}}{\sqrt{3\sin^3\frac{K_1}{2} - \left(\cos\frac{K_1}{2} + 2\cos\frac{K_3}{2}\right)^2} + 2\sqrt{2}\left[\cos\frac{K_3}{2} + 2\cos\frac{K_1}{2}\right]}$$

und

$$a = \frac{3R}{\sqrt{3\sin^2\frac{K_1}{2} - \left(\cos\frac{K_1}{2} + 2\cos\frac{K_3}{2}\right)^2} + \sqrt{2}\left[\cos\frac{K_1}{2} + 2\cos\frac{K_3}{2}\right]}$$

Für den dritten Fall hat man endlich:

$$b_1 = \frac{R\sqrt{3}}{\sqrt{3\sin^2\frac{K_2}{2} - \left(\cos^2\frac{K_2}{2} + 2\cos\frac{K_3}{2}\right)^2}}.$$

$$b = \frac{3R\sqrt{3}}{\sqrt{3\sin^2\frac{K_2}{2} - \left(\cos\frac{K_2}{2} + 2\cos\frac{K_3}{2}\right)^2} + 2\sqrt{2}\left[\cos\frac{K_3}{2} + 2\cos\frac{K_2}{2}\right]}$$

und

$$a = \frac{3R}{\sqrt{3\sin^2\frac{K_2}{2} - \left(\cos\frac{K_2}{2} + 2\cos\frac{K_3}{2}\right)^2} + \sqrt{2}\left[\cos\frac{K_2}{2} + 2\cos\frac{K_3}{2}\right]}$$

§. 17. Construction der dreikantigen Tetragonal-Ikositetraeder (Dyakisdodekaeder).

Zur Bestimmung der dreikantigen Tetragonal-Ikositetraeder ist die Grösse zweier Kanten erforderlich.

Ist K_1 und K_2 die Grösse der schärferen und stumpferen Kante einer hemipyramidalen Ecke bekannt, so verzeichne man nach §. 7 aus den Kantenwinkeln K_1 und K_2 eine vierflächige prismatische Ecke $S'a'c'e'g'$, $S''a''c''e''g''$ Taf. II, Fig. 10, deren Ebene See die Äquatorebene nach der Geraden $u't'$ schneidet, mache $o'm' = o'p' = o''S''$, $o'v' = o't'$ und $o'w' = o'u'$ und ziehe die Geraden $p'w'$ und $m'v'$, die sich in dem Punkte x' treffen. Überdies trifft die Gerade $u't'$ die Gerade $p'w'$ im Punkte ρ' und die Gerade

$m'v'$ im Punkte ρ_1'. Dann führe man durch den Punkt n' die Gerade $n'\lambda' \perp o'p'$, mache $o'c' = o'\lambda'$, $o'e' = n'\lambda'$ und ziehe die Geraden $e'p'$, $c'm'$, $e'\rho'$ und $c'\rho_1'$, so wie durch den Durchschnittspunkt d' der beiden letzten Geraden auch die Gerade $d'n'$; so bildet der Punkt d' die horizontale Projection des rhomboedrischen Eckpunktes d und die Figur $d'S'c'm'n'p'e'$ dieselbe Projection des Oktanten $dScmnpe$ des gesuchten Ikositetraeders. Um die verticale Projection $d''S''c''m''n''p''e''$ des genannten Oktanten zu erhalten, mache man $o''\alpha'' = o'\lambda'$, $o''\beta'' = n'\lambda'$ und $o''\gamma'' = \varphi'd'$, führe durch die Punkte α'', β'' und γ'' die horizontalen Geraden $a''e''$, $g''c''$ und $h''d''$, projicire die Punkte c', d', e', m', n', p', nach c'', d'', e'', m'', n'', p'', und ziehe die Geraden $d''e''$, $d''n''$, $d''c''$, $c''m''$, $m''n''$, $n''p''$ und $p''e''$.

Mit Hilfe des so bestimmten Oktanten kann leicht das Ikositetraeder selbst fertig gezeichnet werden.

Kennt man hingegen K_3 die Grösse einer Kante der rhomboedrischen Ecke und eine von den Grössen K_1 oder K_2 bei der früheren Bedeutung, so erscheint für die Bestimmung des Ikositetraeders folgendes Verfahren als zweckmässig.

Man bestimme zunächst nach §. 2 aus dem Kantenwinkel K_3 eine dreiflächige rhomboedrische Ecke, aus welcher man b die Länge der rhomboedrischen Halbaxe und r den Halbmesser des Berührungskreises der drei die rhomboedrische Ecke bildenden Ebenen findet. Dann führe man an den Äquator der Leitkugel Taf. I, Fig. 10, die Tangente $\alpha'\beta'$ unter dem Winkel $\beta'\alpha'o' = \frac{K_1}{2}$ oder $\frac{K_2}{2}$ gegen die pyramidale Axe $o'\alpha'$ geneigt, lege durch ihren Berührungspunkt β' den zu der Ebene der zwei pyramidalen Axen $\alpha'o'$ und $o'n'$ parallelen Kreis $\beta'T'\gamma'$ und bringe ihn zum Durchschnitte mit dem Berührungskreise DTD_1, dessen Halbmesser gleich r ist und dessen Ebene auf der rhomboedrischen Axe $o\delta$ senkrecht steht. Dadurch erhält man zwei Punkte T und T_1, von denen jeder die Eigenschaft besitzt, dass die durch denselben an die Kugel berührend gelegte Ebene die rhomboedrische Axe $o\delta$ in der Entfernung $o\delta = \frac{R^2}{\sqrt{R^2 - r^2}}$ schneidet und zugleich mit der Ebene anm_1 des pyramidalen Hauptschnittes den Winkel $\frac{K_1}{2}$ oder $\frac{K_2}{2}$ einschliesst.

Diese Punkte sind sonach die Berührungspunkte von Ebenen des gesuchten Ikositetraeders.

Um die Punkte T, T_1 möglichst einfach und genau zu erhalten und das Zeichnen der Ellipse zu ersparen, bringe man die rhomboedrische Axe $o\delta$ durch Drehung um die Axe $o'n$ in die zur verticalen Projections-Ebene parallele Lage nach $o''\varepsilon''$, trage auf ihr von o'' aus das Stück $o''\delta_1'' = \sqrt{R^2 - r^2}$ auf und ziehe durch den Punkt δ_1'' die Gerade $m_1''\delta_1'' \perp o''\varepsilon''$, welche die Äquatorebene im Punkte m_1'' durchdringt und die Ebene des Berührungskreises mit Bezug auf die rhomboedrische Axe $o''\varepsilon''$ vorstellt. Dann drehe man die Gerade $m_1\delta_1$ in ihre ursprüngliche Lage nach $m\delta$ zurück und ziehe durch den Punkt m' die Gerade $p'q' \perp o'\delta'$ und durch den Punkt t'' die Gerade $t''n'' \perp o''\delta''$, so bilden die Durchschnitte T'' und T_1'' der Geraden $t''n''$ mit dem Verticalkreise $\beta\gamma$ die verticalen, die Punkte T' und T_1' die horizontalen Projectionen der gesuchten Berührungspunkte.

Nachdem man nun den Berührungspunkt z der Ebene cSe Taf. II, Fig. 10 auf die eben erwähnte Weise bestimmt hat, lege man denselben sammt dem zugehörigen Meridiane um die Gerade $o\nu$ als Drehungsaxe in die Äquatorebene um, wobei der Punkt z in den Durchschnitt z'_1 der durch den Punkt z' auf die $o'\nu'$ senkrecht geführten Geraden $z'z_1'$ mit dem Äquator zu liegen kommt und der Meridian mit dem Äquator selbst zusammenfällt. Dann führe man durch den Punkt z_1' an den Äquator die Tangente $z_1'\nu'$ und errichte im Durchschnittspunkte ν' derselben mit der $o'\nu'$ die Gerade $u't' \perp o'\nu'$; so ist diese Gerade der Durchschnitt der Ebene cSe mit der Äquatorebene.

Zieht man die Gerade $o'\sigma' \perp o'\nu'$ und verlängert sie, bis sie die Tangente $z_1'\nu'$ im Punkte σ' trifft, so ist $o'\sigma'$ die wahre Länge der hemipyramidalen Axe.

Die weitere Bestimmung ist nun aus dem ersten Falle bekannt.

Zieht man $z'\mu' \perp r'm'$, $z'\nu' \perp k'p'$ und die Geraden $z'o'$ und $z_1'o'$, so hat man:

$$z'\mu' = R \cos \frac{K_2}{2}$$

$$z'\nu' = R \cos \frac{K_1}{2}$$

$$z'o' = r = R \sqrt{\cos^2 \frac{K_1}{2} + \cos^2 \frac{K_2}{2}}$$

$$z_1'o' = R.$$

folglich

$$z'z_1' = \sqrt{R^2 - r^2} = R\sqrt{\sin^2\frac{K_1}{2} - \cos^2\frac{K_2}{2}}$$

Macht man $o'k' = z'z_1'$ und nachdem man $k'x' \perp o'p'$ gezogen, das Stück $k'x' = z'\mu'$, so ist x die horizontale Projection des Berührungspunktes x der Ebene *epn*.

Macht man $o''\nu'' = z'z_1'$, $o''k'' = z'\nu'$, führt durch die Punkte ν'' und k'' die zwei horizontalen Geraden $\nu''z''$ und $k''x''$ und projicirt die Punkte z' und x' nach z'' und x''; so sind die Punkte z'' und x'' die verticalen Projectionen der Berührungspunkte z und x der Ebenen *cSe* und *epn*.

Verbindet man den Punkt z mit dem Punkte x, so ist

$$zx = 2R\cos\frac{K_3}{2};$$

es ist aber auch

$$zx = \sqrt{z'x'^2 + z\delta^2} = \sqrt{x'\psi'^2 + \psi'z'^2 + z\delta^2}$$

$$\sqrt{(z'z_1' - z'\mu')^2 + (z'\nu' - z'\mu')^2 + (z'z_1' - z'\nu')^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\sqrt{R^2 - r^2} - R\cos\frac{K_2}{2}\right)^2 + \left(R\cos\frac{K_1}{2} - R\cos\frac{K_2}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{R^2 - r^2} - R\cos\frac{K_1}{2}\right)^2},$$

$$zx = R\sqrt{2}\sqrt{1 - \cos\frac{K_1}{2}\cos\frac{K_2}{2} - \left(\cos\frac{K_1}{2} + \cos\frac{K_2}{2}\right)\sqrt{\sin^2\frac{K_1}{2} - \cos^2\frac{K_2}{2}}}$$

mithin

$$\cos\frac{K_3}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 - \cos\frac{K_1}{2}\cos\frac{K_2}{2} - \left(\cos\frac{K_1}{2} + \cos\frac{K_2}{2}\right)\sqrt{\sin^2\frac{K_1}{2} - \cos^2\frac{K_2}{2}}}$$

und

$$\cos\frac{K_2}{2} = \frac{1}{2}\left[\sqrt{4\cos^2\frac{K_3}{2} - 3\cos^2\frac{K_1}{2} - 1 + 2\cos\frac{K_1}{2}\sqrt{3 - 4\cos^2\frac{K_3}{2}}} - \right.$$

$$\left. - \cos\frac{K_1}{2} + \sqrt{3 - 4\cos^2\frac{K_3}{2}}\right]$$

oder

$$\cos\frac{K_2}{2} = \frac{1}{2}\left[\sqrt{2\sin^2\frac{K_1}{2} - \left(\cos\frac{K_1}{2} - \sqrt{3 - 4\cos^2\frac{K_3}{2}}\right)^2} - \right.$$
$$\left. - \left(\cos\frac{K_1}{2} - \sqrt{3 - 4\cos^2\frac{K_3}{2}}\right)\right]$$

und

$$\cos\frac{K_1}{2} = \frac{1}{2}\left[\sqrt{2\sin^2\frac{K_2}{2} - \left(\cos\frac{K_2}{2} - \sqrt{3 - 4\cos^2\frac{K_3}{2}}\right)^2} - \right.$$
$$\left. - \left(\cos\frac{K_2}{2} - \sqrt{3 - 4\cos^2\frac{K_3}{2}}\right)\right].$$

Es ist daher für den ersten Fall

$$a = \frac{R}{\sqrt{\sin^2\frac{K_1}{2} - \cos^2\frac{K_2}{2}}}$$

$$b = \frac{R\sqrt{3}}{\cos\frac{K_1}{2} + \cos\frac{K_2}{2} + \sqrt{\sin^2\frac{K_1}{2} - \cos^2\frac{K_2}{2}}}$$

$$ot = \frac{R}{\cos\frac{K_1}{2}}$$

und

$$ou = \frac{R}{\cos\frac{F_2}{2}}.$$

Für den zweiten Fall ist

$$a = \frac{2R}{\cos\frac{K_1}{2} - \sqrt{3 - 4\cos^2\frac{K_3}{2}} + \sqrt{2\sin^2\frac{K_1}{2} - \left(\cos\frac{K_1}{2} - \sqrt{3 - 4\cos^2\frac{K_3}{2}}\right)^2}}$$

$$b = \frac{R\sqrt{3}}{\sqrt{3 - 4\cos^2\frac{K_3}{2}}}$$

$$ot = \frac{R}{\cos\frac{K_1}{2}}$$

$$ou = \frac{2R}{\sqrt{2\sin^2\frac{K_1}{2} - \left(\cos\frac{K_1}{2} - \sqrt{3-4\cos^2\frac{K_3}{2}}\right)^2 - \left(\cos\frac{K_1}{2} - \sqrt{3-4\cos^2\frac{K_3}{2}}\right)}}.$$

Für den dritten Fall ist endlich

$$a = \frac{2R}{\sqrt{2\sin^2\frac{K_2}{2} - \left(\cos\frac{K_2}{2} - \sqrt{3-4\cos^2\frac{K_3}{2}}\right)^2 + \cos\frac{K_2}{2} - \sqrt{3-4\cos^2\frac{K_3}{2}}}}$$

$$b = \frac{R\sqrt{3}}{\sqrt{3-4\cos^2\frac{K_3}{2}}}$$

$$ot = \frac{2R}{\sqrt{2\sin^2\frac{K_2}{2} - \left(\cos\frac{K_2}{2} - \sqrt{3-4\cos^2\frac{K_3}{2}}\right)^2 - \left(\cos\frac{K_2}{2} - \sqrt{3-4\cos^2\frac{K_3}{2}}\right)}}$$

und

$$ou = \frac{R}{\cos\frac{K_2}{2}}.$$

Um die Pentagonal-Ikositetraeder und die tetraedrischen Pentagonal-Dodekaeder aus den Kantenwinkeln zu construiren, wird man auf ähnliche Weise vorzugehen haben, wie bei der Construction der dreikantigen Tetragonal-Ikositetraeder in dem zweiten und dritten Falle gezeigt wurde.

Soll z. B. ein Pentagonal-Ikositetraeder construirt werden, wenn K_1 die Grösse einer Kante der pyramidalen und K_2 die Grösse einer Kante der rhomboedrischen Ecke bekannt ist, so wird man zuerst die Berührungskreise der Ebenen der beiden genannten Ecken bestimmen und deren Durchschnittspunkte suchen. Je nachdem man dann das rechte oder linke Pentagonal-Ikositetraeder darstellen will, wird man den einen oder den andern Durchschnittspunkt der beiden Berührungskreise für die Bestimmung der Begrenzungsebenen wählen.

Auch hier kann man das Zeichnen der Ellipse d. i. des sich auf die beiden Projections-Ebenen schief projicirenden Berührungskreises der Ebenen der rhomboedrischen Ecke ersparen, wenn man anstatt den Durchschnitt der beiden Berührungskreise im Raume zu suchen, jenen ihrer Ebenen bestimmt und dann erst den Durchschnitt der so erhaltenen Geraden mit dem Berührungskreise der Ebenen der pyramidalen Ecke sucht.

Gestalten des rhomboedrischen Systemes.

§. 18. Construction der Rhomboeder.

Ein Rhomboeder ist durch die Grösse der Axenkante oder Seitenkante vollkommen bestimmt.

Soll ein Rhomboeder construirt werden, wenn die Grösse K der Axenkante gegeben ist, so bestimme man zuerst nach §. 2 aus dem Kantenwinkel K eine dreiflächige rhomboedrische Ecke $S'a'b'c'$, $S''a''b''c''$ Taf. III, Fig. 1, trage von o' aus auf der verlängerten Axe $S''o''$ das Stück $o''s'' = o''S''$ auf und ziehe durch s'' die Geraden $s''f''$, $s''d''$, $s''e''$ beziehungsweise parallel zu den Geraden $S''a''$, $S''b''$, $S''c''$. Dann theile man die Axe $S''o''$ in drei gleiche Theile $S''g''$, $g''h''$, $h''s''$, lege durch die Theilungspunkte g'', h'' die zwei horizontalen Ebenen $a''b''c''$ und $d''e''f''$, von denen die erstere die Geraden $S''a''$, $S''b''$, $S''c''$ in den Punkten a'', b'', c'', die letztere die Geraden $s''f''$, $s''d''$, $s''e''$ in den Punkten f'', d'', e'' schneidet, projicire die Punkte a'', b'', c'', d'', e'', f'' nach a', b', c', d', e', f' und ziehe die Geraden $c'd'$, $d'a'$, $a'e'$, $e'b'$, $b'f'$, $f'c'$, $c''d''$, $d''a''$, $a''e''$, $e''b''$, $b''f''$, und $f''c''$.

Da bei einem jeden Rhomboeder der Winkel k der Seitenkante gleich ist $180 - K$, so kann man die Auflösung des zweiten Falles, wenn nämlich die Grösse k der Seitenkante gegeben ist, stets auf die Auflösung des ersten Falles zurückführen, wenn man anstatt k die Grösse $180 - K$ benützt.

Soll aber in einem speciellen Falle das Mittelstück eines Rhomboeders aus der Seitenkante k dargestellt werden, wenn z. B. die Spitze des zugehörigen Rhomboeders ausserhalb der Zeichenfläche zu liegen käme, so verfahre man auf folgende Weise:

Man ziehe an die Horizontal-Contour der Leitkugel zwei Tangenten $\alpha'\beta'$ und $\alpha'\gamma'$, welche den Winkel $\beta'\alpha'\gamma' = k$ mit einander einschliessen, beschreibe von o' aus mit dem Halbmesser $o'\alpha'$ den horizontalen Kreis $\alpha'\delta'\varepsilon'$, führe an denselben die sechs unter Winkeln von 120° sich schneidenden Tangenten $c'd'$, $d'a'$, $a'e'$, $e'b'$, $b'f'$ und $f'c'$, wobei $c'd' \perp o'\alpha'$ ist und verbinde die abwechselnden Durchschnittspunkte a', b', c', d', e', f' derselben durch die Geraden $a'b'$, $b'c'$, $c'a'$, $d'e'$ $e'f'$ und $f'd'$. Dadurch erhält man die horizontale Projection des gesuchten Mittelstückes $abcdef$.

Weil die Ebene cda durch die Gerade cd und durch die horizontale Gerade ca geht, so muss sie die Leitkugel in einem dem Verticalkreise $\gamma m \beta$ und dem Meridiane mv (dessen Ebene auf der Geraden ca senkrecht steht) zugleich angehörigen Punkte m berühren.

Will man nun die verticale Projection des Mittelstückes bestimmen, so bringe man die in der Meridianebene des Punktes m befindliche Tangente md durch Drehung um die Axe So in die zur verticalen Projections-Ebene parallele Lage nach $m_1\, d_1$, wobei der Punkt m nach m_1 und der Punkt d nach d_1 zu liegen kommt, ziehe durch den Punkt d_1'' die horizontale Gerade $d_1''e''$ und nachdem man das Stück $g''o'' = o''h''$ gemacht, durch den Punkt g'' die Gerade $c''b'' \parallel d''e''$, projicire die Punkte a', b', c', d', e', f' nach $a'', b'', c'', d'', e'', f''$ und verbinde die letzteren durch die Geraden $a''e''$, $e''b''$, $b''f''$, $f''c''$, cd'' und $d''a''$.

Die Richtigkeit dieses Verfahrens leuchtet aus §. 8 ein.

Bezeichnet r den Halbmesser des Berührungskreises dreier eine rhomboedrische Ecke bildenden Ebenen, a die Länge der halben rhomboedrischen Axe, b die Seite der horizontalen Projection des Sechseckes $aebfcd$ und ρ den Halbmesser des diesem Sechsecke eingeschriebenen Kreises, so findet man:

$$r = \frac{2R\cos\frac{K}{2}}{\sqrt{3}}$$

$$a = oS = \frac{R^2}{\sqrt{R^2 - r^2}} = \frac{R\sqrt{3}}{\sqrt{3 - 4\cos^2\frac{K}{2}}},$$

$$dh = Sh \text{ tg. } dSh = Sh \;.\; \frac{mw}{wS} = \frac{1}{r}\, Sh \sqrt{R^2 - r^2}$$

es ist aber auch

$$dh = sh \;.\; \text{tg. } dsh. = sh\, \frac{tw_1}{w_1 S} = sh\, \frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{\sqrt{r^2 - R^2\cos^2\frac{K}{2}}};$$

hieraus folgt die Proportion

$$sh : Sh = \sqrt{r^2 - R^2\cos^2\frac{K}{2}} : r$$

d. i.

$$sh : Sh = \frac{R}{\sqrt{3}}\cos\frac{K}{2} : \frac{2R}{\sqrt{3}}\cos\frac{K}{2} = 1 : 2$$

mithin

$$sh = \frac{Ss}{3} = \frac{2a}{3}.$$

und

$$b = dh = \frac{2R}{\sqrt{3}\cos\frac{K}{2}},$$

ferner ist

$$\rho = o\alpha = \sqrt{b^2 - \frac{b^2}{4}} = \frac{b}{2}\sqrt{3} = \frac{R}{\cos\frac{K}{2}};$$

es ist aber auch

$$\rho = \frac{o_1\beta}{\sin\frac{k}{2}} = \frac{R}{\sin\frac{k}{2}}.$$

mithin

$$\sin\frac{k}{2} = \cos\frac{K}{2}$$

und daher

$$k = 180 - K,$$

wie oben gesagt wurde.

§. 19. Construction der ungleichkantigen sechsseitigen Pyramiden (Skalenoeder).

Zur Bestimmung dieser Gestalten ist die Grösse der beiden Axenkanten oder die Grösse der Seitenkante und einer Axenkante erforderlich.

Ist K_1 die Grösse der schärferen und K_2 die Grösse der stumpferen Axenkante einer ungleichkantigen sechsseitigen Pyramide gegeben und man soll daraus dieselbe construiren: so bestimme man zuerst nach §. 3 aus den Kantenwinkeln K_1 und K_2 eine sechsflächige rhomboedrische Ecke $S'a'b'c'd'e'f'$, $S''a''b''c''d''e''f''$ Taf. III, Fig. 2 und trage von o'' aus auf der Geraden $s''S''$ das Stück $o''s'' = o''S''$ auf; dann ziehe man durch den Punkt s'' die zu den oberen Axenkanten $S''a''$, $S''b''$, $S''c''$, $S''d''$, $S''e''$, $S''f''$ beziehungsweise parallelen Geraden $s''d''$, $s''e''$, $s''f''$, $s''a''$, $s''b''$, $s''c''$, projicire die durch das Zusammentreffen je einer oberen mit einer unteren Axenkante sich ergebenden Durchschnittspunkte a'', b'', c'', d'', e'', f'' in die den betreffenden Kanten zugehörigen horizontalen Projectionen nach a', b', c', d', e', f' und ziehe die Geraden $a'b'$, $b'c'$, $c'd'$, $d'e'$, $e'f'$, $f'a'$; $a''b''$, $b''c''$, $c''d''$, $d''e''$ und $f''a''$.

Es versteht sich wohl von selbst, dass, da je drei obere und je drei untere Axenkanten gegen die rhomboedrische Axe dieselbe Neigung haben, die Durchschnittspunkte a'', c'', e'' und b'', d'', f'' in horizontalen Ebenen liegen und dass überdies die Stücke $o''x''$, $o''y''$ einander gleich sein müssen.

Ist im zweiten Falle k die Grösse der Seitenkante und K die Grösse einer Axenkante gegeben, so ziehe man an die Horizontal-Contour der Leitkugel die zwei den Winkel $\beta'\alpha'\gamma' = k$ mit einander einschliessenden Tangenten $\alpha'\beta'$ und $\alpha'\gamma'$, beschreibe von o' aus mit dem Halbmesser $o'\alpha'$ den Horizontalkreis $\alpha'\delta'\varepsilon'$, führe an denselben die sechs unter Winkeln von 120° sich schneidenden Tangenten $e'f'$, $f'a'$, $a'b'$, $b'c'$, $c'd'$, $d'e'$, wobei $e'f' \perp o'\alpha'$ steht und verbinde die einander gegenüberliegenden Eckpunkte des so erhaltenen Sechseckes $a'b'c'd'e'f'$ durch die Geraden $a'd'$, $b'e'$ und $c'f'$. Dann ziehe man an den Äquator der Leitkugel die Tangente $\varphi'\ \psi'$ unter dem Winkel $\varphi'\psi'o' = K$ gegen die Hauptschnittebene fSc geneigt und führe durch den Berührungspunkt φ derselben den zu der Hauptschnittebene fSc parallelen Kreis φmu, welcher bekanntlich den Berührungspunkt der Ebene eSf enthalten wird. Weil aber die Ebene eSf auch durch die Gerade ef geht, so muss ihr Berührungspunkt auch in dem Verticalkreise $\gamma m\beta$ liegen. Die Ebene eSf muss sonach die Leitkugel in dem den beiden Kreisen φmn und $\gamma m\beta$ gemeinschaftlichen Punkte m berühren.

Dreht man den Punkt m um die rhomboedrische Axe Ss in die Ebene des Hauptmeridianes der Leitkugel nach m_1, zieht durch m_1'' an die Vertical-Contour der Leitkugel die Tangente $m_1''S''$, bis sie die Axe $S''s''$ im Punkte S'' trifft und macht $o''s'' = o''S''$; so stellen die Punkte S'' und s'' die verticalen Projectionen der Spitzen der gesuchten Pyramide vor. Führt man endlich durch den Punkt m die horizontale Tangente gh, deren horizontale Projection $g'h'$ bekanntlich auf $m'o'$ senkrecht stehen muss, projicirt die Punkte g', h' nach g'', h'', die Eckpunkte e', f' in die Geraden $S''g''$, $S''h''$ nach e'', f'' und die Eckpunkte a', b', c', d' in die durch e'' und f'' horizontal gezogenen Geraden $e''c''$, $f''b''$ nach a'', b'', c'', d'' und zieht die Geraden $e''f''$, $f''a''$, $a''b''$, $b''c''$, $c''d''$, $d''e''$, $S''a''$, $S''b''$, $S''c''$, $S''d''$, $s''e''$, $s''f''$, $s''a''$, $s''b''$, $s''c''$, $s''d''$, so ist dadurch auch die verticale Projection der gesuchten Pyramide bestimmt.

Sollten die Spitzen S'' und s'' ausserhalb der Zeichenfläche fallen, so bestimme man zuerst die horizontale Projection der Pyramide, so wie den Berührungspunkt m der Ebene eSf und die Punkte g und h auf die eben gezeigte Weise. Dann ziehe man durch e' die Gerade $e'i' \parallel g'h'$, führe den Durchschnittspunkt t derselben mit der Geraden $S'm'$ in die Ebene des Hauptmeridianes nach t_1 und durch t''_1 die horizontale Gerade $e''c''$, mache $w'k' = w'v' = w'g'$; $w'l' = w'q' = w'h'$, projicire die Punkte a', c', e', k', l', v', q' nach a'', c'', e'', k'', l'', v'', q'' und nachdem man die Gerade $h''f''$ gezogen, den Punkt f'' nach f''', ferner die Punkte b', d' in die durch f'' gehende horizontale Gerade $f'''b''$ nach b'', d'' und ziehe die Geraden $a''k''$, $b''l''$, $c''v''$, $d''q''$, $g''e''$, so wie $a''s'' \parallel q''d''$, $b''s'' \parallel g''e''$, $c''s'' \parallel h''f'''$, $d''s'' \parallel k''a''$, $e''s'' \parallel l''b''$ und $f'''s'' \parallel v''c''$.

Bezeichnet r den Halbmesser des Berührungskreises der sechs eine rhomboedrische Ecke bildenden Ebenen, a die Länge der rhomboedrischen Halbaxe, b die Seite der horizontalen Projection des Sechseckes $a'b'c'd'e'f'$ und ρ den Halbmesser des diesem Sechsecke eingeschriebenen Kreises, so findet man:

$$r = \frac{2R}{\sqrt{3}} \sqrt{\cos^2 \frac{K_1}{2} + \cos^2 \frac{K_2}{2} + \cos \frac{K_1}{2} \cos \frac{K_2}{2}}$$

$$m'v' = R \cos \frac{K_1}{2} = o'm' \sin m'o'h' = r \sin x.$$

daher

$$\sin x = \frac{R}{r} \cos \frac{K_1}{2}$$

und

$$\cos x = \frac{1}{r} \sqrt{r^2 - R^2 \cos^2 \frac{K_1}{2}}\,.$$

Nun ist

$$o'\lambda' = o'm' \sin \lambda'm'o' = r \sin (60 + x) = r (\sin 60 \cos x + \cos 60 \sin x)$$

$$o'\lambda' = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{r^2 - R^2 \cos^2 \frac{K_1}{2}} + \frac{R}{2} \cos \frac{K_1}{2}$$

und wenn man statt r den obigen Werth setzt und den Ausdruck reducirt

$$o'\lambda' = R \sqrt{\frac{1}{4} \cos^2 \frac{K_1}{2} + \cos^2 \frac{K_2}{2} + \cos \frac{K_1}{2} \cos \frac{K_2}{2}} + \frac{R}{2} \cos \frac{K_1}{2}$$

$$= R \left[\cos \frac{K_1}{2} + \cos \frac{K_2}{2}\right];$$

es ist aber auch

$$o'\lambda' = o'\beta' \sin o'\beta'\lambda' = R \sin \frac{k}{2},$$

daher

$$\sin \frac{k}{2} = \cos \frac{K_1}{2} + \cos \frac{K_2}{2},$$

$$\cos \frac{K_1}{2} = \sin \frac{k}{2} - \cos \frac{K_2}{2}$$

und

$$\cos \frac{K_2}{2} = \sin \frac{k}{2} - \cos \frac{K_1}{2}.$$

$$a = oS = \frac{R^2}{\sqrt{R^2 - r^2}} = \frac{R\sqrt{3}}{\sqrt{3 \sin^2 \frac{K_1}{2} - \left(\cos \frac{K_1}{2} + 2 \cos \frac{K_2}{2}\right)}}$$

oder

$$a = \frac{R\sqrt{3}}{\sqrt{3 \cos^2 \frac{k}{2} - \left(\sin \frac{k}{2} - 2 \cos \frac{K_1}{2}\right)^2}}$$

oder

$$a = \frac{R\sqrt{3}}{\sqrt{3 \cos^2 \frac{k}{2} - \left(\sin \frac{k}{2} - \cos \frac{K_2}{2}\right)^2}}.$$

Aus der Proportion

$$o'\alpha' : o'\beta' = o'\beta' : o'\lambda'$$

d. i.

$$\rho : R = R : o'\lambda'$$

folgt

$$\rho = \frac{R^2}{o'\lambda'} = \frac{R}{\cos \frac{K_1}{2} + \cos \frac{K_2}{2}} = \frac{R}{\sin \frac{k}{2}}$$

$$b = \frac{2\rho}{\sqrt{3}} = \frac{2R}{\sqrt{3}\left(\cos \frac{K_1}{2} + \cos \frac{K_2}{2}\right)} = \frac{2R}{\sqrt{3} \sin \frac{k}{2}} \qquad (2)$$

Da die Gerade ef nach §. 8 auf der Ebene der zwei im Punkte λ sich schneidenden Geraden $o\alpha$ und mn senkrecht steht und die horizontalen Projectionen $e'f''$, $m'n'$ der Geraden ef und mn zu einander parallel sind, so ergänzen sich die Winkel u und v, welche die Geraden ef und mn mit der horizontalen Projections-Ebene einschliessen, gegenseitig zu 90°.

Nun ist

$$m'\lambda' = \sqrt{\overline{o'm'^2} - \overline{o'\lambda'^2}} = \sqrt{r^2 - \overline{o'\lambda'^2}}$$

$$= \frac{R}{\sqrt{3}}\left(\cos\frac{K_1}{2} - \cos\frac{K_2}{2}\right).$$

es ist aber auch

$$m'\lambda' = \sqrt{R^2 - r^2}\,.\,\mathrm{cotg}\, u = \sqrt{R^2 - r^2}\,.\,\mathrm{tg}\, v.$$

mithin

$$\mathrm{tg}\, v = \frac{R\left(\cos\frac{K_1}{2} - \cos\frac{K_2}{2}\right)}{\sqrt{3}\,\sqrt{R^2 - r^2}}.$$

$$ox = oy = ff_1 = f'\alpha'.tg\, v = \frac{b}{2}\cdot\frac{R\left(\cos\frac{K_1}{2} - \cos\frac{K_2}{2}\right)}{\sqrt{3}\,\sqrt{R^2 - r^2}}$$

und wenn statt b sein Werth aus 2) gesetzt wird

$$ox = oy = \frac{R^2\,.\left(\cos\frac{K_1}{2} - \cos\frac{K_2}{2}\right)}{3\,.\sqrt{R^2 - r^2}\left(\cos\frac{K_1}{2} + \cos\frac{K_2}{2}\right)}$$

und weil $\frac{R^2}{\sqrt{R^2 - r^2}} = a$ ist, auch

$$ox = oy = \frac{a}{3}\cdot\frac{\cos\frac{K_1}{2} - \cos\frac{K_2}{2}}{\cos\frac{K_1}{2} + \cos\frac{K_2}{2}}$$

oder

$$= \frac{a}{3}\cdot\frac{\sin\frac{k}{2} - 2\cos\frac{K_2}{2}}{\sin\frac{k}{2}} = \frac{a}{3}\cdot\frac{2\cos\frac{K_1}{2} - \sin\frac{k}{2}}{\sin\frac{k}{2}}.$$

§. 20. Construction der gleichkantigen sechsseitigen Pyramiden (hexagonalen Pyramiden).

Die gleichkantigen sechsseitigen Pyramiden sind durch die Grösse der Axenkante oder der Seitenkante vollkommen bestimmt.

Kennt man die Grösse K der Axenkante, so bestimme man nach §. 4 aus dem Kantenwinkel K eine sechsflächige rhomboedrische Ecke $S'a'b'c'd'e'f'$, $S''a''b''c''d''e''f''$ Taf. III, Fig. 3, mache das Stück $o''s'' = o''S''$, bringe die Geraden $S''a''$, $S''b''$, $S''c''$, $S''d''$, $S''e''$, $S''f''$ mit der Äquatorebene der Leitkugel zum Durchschnitt, projicire die so erhaltenen Punkte a'', b'', c'', d'', e'', f'' nach a', b', c', d', e', f' und ziehe die Geraden $a'b'$, $b'c'$, $c'd'$, $d'e'$, $e'f'$, $f'a'$, $a''b''$, $b''c''$, $c''d''$, $d''e''$, $e''f''$, $f''a''$, $s''a''$, $s''b''$, $s''c''$, $s''d''$, $s''e''$ und $s''f''$.

Die Auflösung im zweiten Falle ist für sich klar.

Nennt man r den Halbmesser des Berührungskreises der sechs eine rhomboedrische Ecke bildenden Ebenen, a die Länge der halben rhomboedrischen Axe, b die Seite der horizontalen Projection des Sechseckes, ρ den Halbmesser des dem Sechsecke eingeschriebenen Kreises und k die Grösse der Basiskante, so findet man:

$$r = 2R \cos \frac{K}{2}$$

$$\rho = o\alpha = \frac{oS \cdot r}{wS} = \frac{R^2}{r} = \frac{R}{2 \cos \frac{K}{2}};$$

ferner

$$b = \frac{2\rho}{\sqrt{3}} = \frac{R}{\sqrt{3} \cos \frac{K}{2}}$$

$$\sin \frac{k}{2} = \frac{r}{R} = 2 \cos \frac{K}{2}.$$

$$a = \frac{R^2}{\sqrt{R^2 - r^2}} = \frac{R}{\sqrt{1 - 4 \cos^2 \frac{K}{2}}}$$

$$= \frac{R}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{k}{2}}} = \frac{R}{\cos \frac{k}{2}}.$$

§. 21. Construction der rhomboedrischen Trapezoeder (trigonalen Trapezoeder).

Zur Bestimmung eines rhomboedrischen Trapezoeders ist die Grösse der Axenkante und einer Seitenkante oder die Grösse beider Seitenkanten erforderlich.

Um das Trapezoeder in dem ersten Falle, wenn K die Grösse der Axenkante und k_1 die Grösse einer Seitenkante gegeben ist, zu construiren, bestimme man zuerst nach §. 2 aus dem Kantenwinkel K eine dreiflächige rhomboedrische Ecke $Sf'b'd'$, $S''f''b''d''$ Taf. III, Fig. 7, stelle jedoch dieselbe wegen Vereinfachung der weiteren Operation mit einer Begrenzungsebene, etwa mit der fSd senkrecht zur verticalen Projections-Ebene, trage von o' aus auf der verlängerten $S''o''$ das Stück $o''s'' = o''S''$ auf und ziehe an die Vertical-Contour der Leitkugel die durch den Punkt s'' gehende Tangente $s''k''$, so wie die gegen die Ebene fSd unter dem Winkel $liS = k_1$ geneigte Tangente li. Dann führe man durch den Berührungspunkt k'' der Tangente $s''k''$ den Horizontalkreis kpq und durch den Berührungspunkt l'' der Tangente $l''i''$ den zu der Ebene fSd parallelen Kreis lpt und lege durch den den beiden Kreisen kpq und lpt gemeinschaftlichen Punkt p eine die Leitkugel tangirende Ebene $asef$; so wird diese, da sie gegen die Axe Ss dieselbe Neigung hat wie die oberen Begrenzungsebenen fSb, bSd und dSf und zugleich mit der Ebene dSf den Winkel k_1 einschliesst, eine Begrenzungsebene des gesuchten Trapezoeders sein.

Verbindet man den Punkt p' mit o' und verlängert die Gerade $p'o'$ über o' hinaus, so erhält man die horizontale Projection $s'c'$ der unteren Axenkante sc; dieselben Projectionen der anderen zwei unteren Axenkanten se und sa bekommt man, wenn man die Geraden $s'e'$ und $s'a'$ so zieht, dass $\sphericalangle\, c's'e' = \sphericalangle\, e's'a' = 120^0$ ist.

Da die sämmtlichen Begrenzungsebenen des Trapezoeders gegen die rhomboedrische Axe, und wenn diese vertical steht, auch gegen die horizontale Projections Ebene eine gleiche Neigung haben, so muss die horizontale Projection einer jeden Seitenkante den Winkel, welchen die Horizontal-Tracen je zweier eine Seitenkante bildenden Ebenen mit einander einschliessen, nach jener Richtung hin halbiren, nach welcher die beiden Ebenen gegen die horizontale Projections-Ebene gleichgeneigt sind.

Soll daher die horizontale Projection der Seitenkante ef, welche durch den Durchschnitt der Ebenen dSf und esa entsteht, gefunden werden, so hat man blos $s'u' \perp o'p'$ zu ziehen, die Horizontaltrace $u'v'$ der Ebene dSf zu bestimmen, und den Winkel $s'u'v'$ durch die Gerade $e'f'$ zu halbiren, weil die Ebenen dSf und esa nach der Richtung gegen $e'f'$ hin eine gleiche Neigung gegen die horizontale Projections-Ebene haben.

Hat man genau gezeichnet, so muss $o'e' = o'f'$ sein.

Macht man endlich $o'a' = o'b' = o'c' = o'd' = o'e' = o'f'$, projicirt die Punkte e', f' nach e'', f'' und die Punkte a', b', c', d' in die durch e'' und f'' horizontal gezogenen Geraden $e''a''$ und $f''b''$ nach a'', b'', c'', d'' und zieht die Geraden $f'a'$, $a'b'$, $b'c'$, $c'd'$, $d'e'$, $f''a''$, $a''b''$, $b''c''$, $c''d''$, $d''e''$ und $e''f''$; so sind dadurch die beiden orthogonalen Projectionen des gesuchten Trapezoeders bestimmt.

Es versteht sich wieder von selbst, dass $o''g'' = o''h''$ sein müsse.

In der vorliegenden Figur schneiden sich die beiden Kreise kpq und lpt in den Punkten p und p_1; es müssen daher auch zwei Ebenen möglich sein, welche mit der Axe Ss den Winkel osk, mit der Ebene dSf den Winkel $Sil = k_1$ einschliessen, was auch ganz einleuchtend ist, weil durch einen ausserhalb der Kugel befindlichen Punkt s im Allgemeinen zwei die Kugel berührende Ebenen gelegt werden können, welche zugleich mit einer Ebene dSf einen bestimmten Winkel k_1 bilden.

Je nachdem man für die untere Ecke des Trapezoeders entweder die Berührungsebene des Punktes p oder jene des Punktes p_1 wählt, wird man dann das rechte oder das linke Trapezoeder erhalten.

In dem Falle, wenn der Winkel $\frac{k}{2} = 90 - osk$ ist, kann durch den Punkt s nur eine Ebene berührend an die Kugel gelegt werden und diese gehört dann einer gleichkantigen dreiseitigen Pyramide an; in dem Falle aber, wenn der Winkel $k_1 = 180 - K$ ist, erhält man zwar zwei verschiedene Ebenen, diese gehören jedoch einer und derselben Gestalt, nämlich einem Rhomboeder an.

Ist zur Bestimmung eines rhomboedrischen Trapezoeders die Grösse der beiden Seitenkanten k_1 und k_2 gegeben, so ziehe man an die Horizontal-Contour der Leitkugel die Tangenten $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, $\delta\varepsilon$, $\delta\varphi$, so, dass $\sphericalangle\, \alpha o \delta = 60^0$, $\sphericalangle\, \beta\alpha\gamma = k_1$, $\sphericalangle\, \varphi\delta\varepsilon = k_2$ wird, beschreibe mit den Halbmessern $o\alpha = \rho$ und $o\delta = \rho_1$ die zwei Horizontalkreise $\alpha\psi k$ und $\delta\lambda\sigma$, führe an jeden von ihnen drei unter Winkeln von 60^0 sich schneidende Tangenten $e'f'$, $a'b'$, $c'd'$; $e'd'$, $f'a'$ und $b'c'$, wobei jedoch $e'f' \perp o'\alpha'$ und $e'd' \perp o'\delta'$ steht und verbinde die Durchschnittspunkte e', f', a', b', c', d' mit dem Mittelpunkte o' durch die Geraden $e'o'$, $f'o'$, $a'o'$, $b'o'$, $c'o'$ und $d'o'$. Dann lege man durch die Berührungspunkte β, γ und φ, ε die zwei Verticalkreise $\beta m\gamma$ und $\varphi m\varepsilon$, deren Durchschnittspunkt m den Berührungspunkt der Ebene dfS vorstellt, ziehe durch dessen verticale Projection m'' an die Vertical-Contour der Leitkugel die Tangente $S''m''$, bis sie die Axe $S''s''$ in S'' trifft und nachdem man die Punkte d', f', e' nach d'', f'', e'' projicirt, durch e'' und f'' die zwei horizontalen Geraden $e''a''$ und $f''b''$, in welchen die verticalen Projectionen a'', c'' und b'' der Punkte a, c und b liegen, mache $o''s'' = o''S''$ und verbinde die Punkte e'', f'', a'', b'', c'', d'' mit einander und mit den Punkten S'' und s''

durch die Geraden $e''f''$, $f''a''$, $a''b''$, $b''c''$, $c''d''$, $d''e''$, $S''a''$, $S''b''$, $S''c''$, $S''d''$, $S''e''$, $S''f''$, $s''a''$, $s''b''$, $s''c''$, $s''d''$, $s''e''$ und $s''f''$.

Bedeutet wieder r den Halbmesser des Berührungskreises dreier eine rhomboedrische Ecke bildenden Ebenen, a die halbe rhomboedrische Axe und ρ und ρ_1 die Halbmesser der Berührungskreise der horizontalen Projectionen der Seitenkanten k_1 und k_2, so findet man:

$$r = \frac{2 R \cos \frac{K}{2}}{\sqrt{3}}$$

$$o'\nu' = o'm' \cos m'o'\nu' = r \cos x;$$

es ist aber auch

$$o'\nu' = o'\beta' \sin o'\beta'\nu' = R \sin \frac{k_1}{2},$$

mithin

$$\cos x = \frac{R}{r} \sin \frac{k_1}{2}, \quad \text{und} \quad \sin x = \frac{1}{r} \sqrt{r^2 - R^2 \sin^2 \frac{k_1}{2}};$$

ferner ist

$$o'\mu' = o'm' \cos m'o'\mu' = r \cos (60 - x)$$

und auch

$$o'\mu' = o'\varphi' \sin o'\varphi'\mu' = R \sin \frac{k_2}{2},$$

daher

$$R \sin \frac{k_2}{2} = r (\cos 60 \cos x + \sin 60 \sin x)$$

$$= \frac{R}{2} \sin \frac{k_1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{r^2 - R^2 \sin^2 \frac{k_1}{2}}$$

und wenn man statt r seinen Werth setzt und reducirt

$$\sin \frac{k_2}{2} = \frac{1}{2} \left[\sin \frac{k_1}{2} + \sqrt{4 \cos^2 \frac{K}{2} - 3 \sin^2 \frac{k_1}{2}} \right]$$

hieraus ergibt sich

$$\sin \frac{k_1}{2} = \frac{1}{2} \left[\sin \frac{k_2}{2} + \sqrt{4 \cos^2 \frac{K}{2} - 3 \sin^2 \frac{k_2}{2}} \right]$$

und

$$\cos\frac{K}{2} = \sqrt{\sin^2\frac{k_1}{2} + \sin^2\frac{k_2}{2} - \sin\frac{k_1}{2}\sin\frac{k_2}{2}}\,.$$

Dann ist

$$a = \frac{R^2}{\sqrt{R^2 - r^2}} = \frac{R\sqrt{3}}{\sqrt{3 - 4\cos^2\frac{K}{2}}}$$

oder

$$= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3\cos^2\frac{k_1}{2} - \left(\sin\frac{k_1}{2} - 2\sin\frac{k_2}{2}\right)^2}}$$

$$\rho = \frac{o_1\beta}{\sin\beta a o} = \frac{R}{\sin\frac{k_1}{2}} = \frac{2R}{\sin\frac{k_2}{2}\quad\sqrt{4\cos^2\frac{K}{2} - 3\sin^2\frac{k_2}{2}}}\,;$$

$$\rho_1 = \frac{o\varphi}{\sin\varphi\delta o} = \frac{R}{\sin\frac{k_2}{2}} = \frac{2R}{\sin\frac{k_1}{2} + \sqrt{4\cos^2\frac{K}{2} - 3\sin^2\frac{k_1}{2}}}\,.$$

Aus demselben Grunde, wie im vorigen Paragraphe, ergänzen sich auch hier die Winkel u und v, welche die Geraden mp und ef mit der horizontalen Projections-Ebene einschliessen, gegenseitig zu 90°.

Nun ist aber

$$m'\nu' = \sqrt{o'm'^2 - o'\nu'^2} = \sqrt{r^2 - R^2\sin^2\frac{k_1}{2}}$$

$$= \frac{R}{\sqrt{3}}\sqrt{4\cos^2\frac{K}{2} - 3\sin^2\frac{k_1}{2}}\,,$$

ferner auch

$$m'\nu' = \operatorname{cotg} u\sqrt{R^2 - r^2} = \operatorname{tg} v\sqrt{R^2 - r^2},$$

mithin

$$\operatorname{tg} v = \frac{R\sqrt{4\cos^2\frac{K}{2} - 3\sin^2\frac{k_1}{2}}}{\sqrt{3}\sqrt{R^2 - r^2}}$$

oder

$$\operatorname{tg} v = \frac{R\left(2\sin\frac{k_2}{2} - \sin\frac{k_1}{2}\right)}{\sqrt{3}\sqrt{R^2 - r^2}}\,.$$

Aus dem Kreisviereck $\alpha' o' \delta' e'$ findet man:

$$\rho = o\alpha = o'e' \cos \quad \alpha' o' e' = o'e' \cos w$$
$$\rho_1 = o\delta = o'e' \cos \quad \delta' o' e' = o'e' \cos (60 - w)$$

und

$$\rho \cos (60 - w) = \rho_1 \cos w$$
$$\rho (\cos 60 \cos w + \sin 60 \sin w) = \rho_1 \cos w$$
$$\left(\rho_1 - \frac{\rho}{2}\right) \cos w = \rho \frac{\sqrt{3}}{2} \sin w,$$

daher

$$\operatorname{tg} w = \frac{2\rho_1 - \rho}{\rho\sqrt{3}};$$

es ist aber

$$e'\alpha' = o'\alpha' \operatorname{tg} w = \frac{2\rho_1 - \rho}{\sqrt{3}}$$

und

$$og = oh = e'\alpha' \operatorname{tg} v = \frac{2\rho_1 - \rho}{\sqrt{3}} \cdot \frac{R\sqrt{4\cos^2\frac{K}{2} - 3\sin^2\frac{k_1}{2}}}{\sqrt{3}\sqrt{R^2 - r^2}}$$

$$= \frac{R}{3\sqrt{R^2 - r^2}}\left[\frac{4R}{\sin\frac{k_1}{2} + \sqrt{4\cos^2\frac{K}{2} - 3\sin^2\frac{k_1}{2}}} - \right.$$
$$\left. - \frac{R}{\sin\frac{k_1}{2}}\right]\sqrt{4\cos^2\frac{K}{2} - 3\sin^2\frac{k_1}{2}}$$

$$= \frac{a}{3}\left[\frac{3\sin\frac{k_1}{2} - \sqrt{4\cos^2\frac{K}{2} - 3\sin^2\frac{k_1}{2}}}{\sin\frac{k_1}{2}\left(\sin\frac{k_1}{2} + \sqrt{4\cos^2\frac{K}{2} - 3\sin^2\frac{k_1}{2}}\right)}\right]\sqrt{4\cos^2\frac{K}{2} - 3\sin^2\frac{k_1}{2}}$$

oder

$$og = \frac{a}{3}\left[\frac{3\sin\frac{k_2}{2} - \sqrt{4\cos^2\frac{K}{2} - 3\sin^2\frac{k_2}{2}}}{\sin\frac{k_2}{2}\left(\sin\frac{k_2}{2} + \sqrt{4\cos^2\frac{K}{2} - 3\sin^2\frac{k_2}{2}}\right)}\right]\sqrt{4\cos^2\frac{K}{2} - 3\sin^2\frac{k_2}{2}}$$

oder

$$og = \frac{a}{3}\,\frac{\left(2\sin\frac{k_1}{2} - \sin\frac{k_2}{2}\right)\left(2\sin\frac{k_2}{2} - \sin\frac{k_1}{2}\right)}{\sin\frac{k_1}{2}\sin\frac{k_2}{2}}.$$

Setzt man hier $k_1 = k_2$, so wie in den vorletzten zwei Gleichungen $K = 180 - k_1$, oder beziehungsweise $K = 180 - k_2$, so erhält man $og = \frac{a}{3}$, wie beim Rhomboeder.

§. 22. Construction der dreikantigen dreiseitigen (trigonalen) Pyramiden.

Diese Gestalten sind durch die Grösse der Axenkante oder Seitenkante vollkommen bestimmt.

Um eine solche Pyramide aus der Grösse K der Axenkante zu construiren, bestimme man nach §. 2 aus dem Kantenwinkel K eine dreiflächige rhomboedrische Ecke $S'a'b'c'', S''a''b''c''$ Taf. III, Fig. 8, mache $o''S'' = o''s''$ und ziehe die Geraden $s''a''$, $s''b''$, $s''c''$, $a'b'$, $b'c'$ und $c'a'$.

Nennt man r den Halbmesser des Berührungskreises der drei eine rhomboedrische Ecke bildenden Ebenen, ρ den Halbmesser des dem Dreiecke $a'b'c'$ eingeschriebenen Kreises und a die halbe rhomboedrische Axe, so erhält man:

$$r = \frac{2R\cos\frac{K}{2}}{\sqrt{3}}$$

$$\rho = o\alpha = \frac{o\gamma^2}{om} = \frac{R^2}{r} = \frac{R\sqrt{3}}{2\cos\frac{K}{2}};$$

es ist aber auch

$$\rho = \frac{o\gamma}{\sin o\alpha\gamma} = \frac{R}{\sin\frac{k}{2}}.$$

mithin

$$\sin\frac{k}{2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\cos\frac{K}{2} \text{ und } \cos\frac{K}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{k}{2}.$$

Dann ist

$$a = \frac{R^2}{\sqrt{R^2 - r^2}} = \frac{R\sqrt{3}}{\sqrt{3 - 4\cos^2\frac{K}{2}}}$$

oder

$$a = \frac{R}{\cos\frac{k}{2}}$$

und

$$oa = ob = oc = \frac{c\alpha}{\cos a o \alpha} = \frac{\rho}{\cos 60} = 2\rho = \frac{R\sqrt{3}}{\cos\frac{K}{2}} = \frac{2R}{\sin\frac{k}{2}}$$

Gestalten des pyramidalen Systemes.

§. 23. Construction der gleichkantigen vierseitigen (tetragonalen) Pyramiden.

Die gleichkantigen vierseitigen Pyramiden sind durch die Grösse der Axenkante oder der Seitenkante vollkommen bestimmt.

Soll eine solche Pyramide construirt werden, wenn K die Grösse der Axenkante gegeben ist, so bestimme man nach §. 5 aus dem Kantenwinkel K eine vierflächige pyramidale Ecke $S'a'b'c'd'$, $S''a''b''c''d''$ Taf. III, Fig. 4, trage von o' aus auf der verlängerten $S''o''$ das Stück $o''s'' = o''S''$ auf und ziehe die Geraden $a'b'$ $b'c'$, $c'd'$ $d'a'$, $b''c''$, $o''d''$, $d''a''$ und $s''a''$, $s''b''$, $s''c''$, $s''d''$.

Ist k die Grösse der Seitenkante gegeben, so ist die Auflösung für sich klar.

Nennt man wieder r den Halbmesser des Berührungskreises der vier eine pyramidale Ecke bildenden Ebenen, a die halbe pyramidale Axe und ρ den Halbmesser des dem Vierecke $a'b'c'd'$ eingeschriebenen Kreises, so bekommt man:

$$r = R\sqrt{2}\cos\frac{K}{2},$$

$$\rho = o\alpha = \frac{o\gamma^2}{om} = \frac{R^2}{r} = \frac{R}{\sqrt{2}\cos\frac{K}{2}};$$

es ist aber auch

$$\rho = o\alpha = \frac{o\gamma}{\sin o\alpha\gamma} = \frac{R}{\sin\frac{k}{2}}$$

mithin

$$\sin\frac{k}{2} = \sqrt{2}\cos\frac{K}{2} \text{ und } \cos\frac{K}{2} = \frac{\sin\frac{k}{2}}{\sqrt{2}}.$$

Dann ist

$$a = \frac{R^2}{\sqrt{R^2 - r^2}} = \frac{R}{\sqrt{1 - 2\cos^2\frac{K}{2}}}$$

oder

$$a = \frac{R}{\cos\frac{k}{2}}$$

und

$$oa = ob = oc = od = \rho\sqrt{2} = \frac{R}{\cos\frac{K}{2}}$$

oder

$$= \frac{R\sqrt{2}}{\sin\frac{k}{2}}.$$

§. 24. Construction der ungleichkantigen achtseitigen (ditetragonalen) Pyramiden.

Zur Bestimmung der ungleichkantigen achtseitigen Pyramiden ist die Grösse zweier Axenkanten oder die Grösse der Seitenkante und einer Axenkante erforderlich.

Soll eine solche Pyramide construirt werden, wenn die Grösse der beiden Axenkanten K_1 und K_2 gegeben ist, so verzeichne man nach §. 6 aus den Kantenwinkeln K_1 und K_2 eine achtflächige pyramidale Ecke $S'a'b'c'd'e'f'g'h'$, $S''a''b''c''d''e''f''$ Taf. III, Fig. 5, mache $o''s'' = o''S''$ und ziehe die Geraden $a'b'$, $b'c'$, $c'd'$, $d'e'$, $e'f'$, $f'g'$, $g'h'$, $h'a'$, $a''b''$, $b''c''$, $c''d''$, $d''e''$, $e''f''$, $f''g''$, $g''h''$, $h''a''$, $s''a''$, $s''b''$, $s''c''$, $s''d''$, $s''e''$, $s''f''$, $s''g''$ und $s''h''$.

Ist hingegen die Grösse k der Seitenkante und die Grösse K_1 einer Axenkante gegeben, so ziehe man zuerst durch den Fusspunkt o' der pyramidalen Axe Ss die vier unter Winkeln von 45° und beziehungsweise 90° sich schneidenden Geraden $a'e'$, $b'f'$, $c'g'$, $d'h'$ als die horizontalen Projectionen der Axenkanten der zu bestimmenden Pyramide und an die Vertical-Contour der Leitkugel die Tangente

$i''m''S''$ unter dem Winkel $S''i''o'' = \frac{k}{2}$ gegen die Äquatorebene geneigt, bis sie die $S''s''$ in S'' trifft, mache $o''s'' = o''S''$ und beschreibe von o' aus mit den Halbmessern $oi = \rho$ und $wm = r$ die zwei Horizontalkreise $\alpha\delta\varepsilon$ und mnp, von denen der erstere den Berührungskreis der Seitenkanten, der letztere aber den Berührungskreis der acht eine pyramidale Ecke bildenden Ebenen vorstellt. Dann ziehe man an den Äquator die Tangente $\varphi\psi$ so, dass der Winkel $\varphi\psi o$, welchen sie mit der Hauptschnittebene hSd bildet, gleich $\frac{K_1}{2}$ wird und führe durch ihren Berührungspunkt φ den zu der Ebene hSd parallelen Kreis φmq, welcher bekanntlich auch den Berührungspunkt der Ebene ghS enthalten muss. Es ist demnach der den beiden Kreisen mnp und φmq gemeinschaftliche Punkt m der Berührungspunkt der Ebene hSd.

Verbindet man m' mit o' durch die Gerade $m'o'$ und führt durch ihren Durchschnittspunkt α' mit dem Kreise $\alpha'\delta'\varepsilon'$ die Tangente $g'h'$, so bildet diese die horizontale Projection der Seitenkante gh. Macht man endlich $o'a' = o'c' = o'e' = o'g'$, $o'b' = o'd' = o'f' = o'h'$, projicirt die Punkte $a', b', c', d', e', f', g', h'$ in die Äquatorebene nach $a'', b'', c'', d'', e'', f'', g'', h''$ und zieht die Geraden $h'a'$, $a'b'$, $b'c'$, $c'd'$, $d'e'$, $e'f'$, $f'g'$, $h'a'$, $a''b''$, $b''c''$, $c''d''$, $d''e''$, $e''f''$, $f''g''$, $g''h''$, $S''a''$, $S''b''$, $S''c''$, $S''d''$, $S''e''$, $S''f''$, $S''g''$, $S''h''$, $s''a''$, $s''b''$, $s''c''$, $s''d''$, $s''e''$, $s''f''$, $s''g''$ und $s''h''$, so sind dadurch die beiden orthogonalen Projectionen der gesuchten ungleichkantigen achtseitigen Pyramide bestimmt. Hier findet man:

$$r = R\sqrt{2}\sqrt{\cos^2\frac{K_1}{2} + \cos^2\frac{K_2}{2} + \sqrt{2}\cos\frac{K_1}{2}\cos\frac{K_2}{2}}$$

oder

$$r = R\sin\frac{k}{2}$$

mithin

$$\sin\frac{k}{2} = \sqrt{2}\sqrt{\cos^2\frac{K_1}{2} + \cos^2\frac{K_2}{2} + \sqrt{2}\cos\frac{K_1}{2}\cos\frac{K_2}{2}};$$

dann ist

$$\cos\frac{K_1}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\sqrt{\sin^2\frac{k}{2} - \cos^2\frac{K_2}{2}} - \cos\frac{K_2}{2}\right]$$

und

$$\cos\frac{K_2}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\sqrt{\sin^2\frac{k}{2} - \cos^2\frac{K_1}{2}} - \cos\frac{K_1}{2}\right];$$

ferner ist

$$a = So = \frac{R^2}{\sqrt{R^2 - r^2}} = \frac{R}{\sqrt{1 - 2\left(\cos^2\frac{K_1}{2} + \cos^2\frac{K_2}{2} + \sqrt{2}\cos\frac{K_1}{2}\cos\frac{K_2}{2}\right)}} =$$

$$= \frac{R}{\sqrt{\sin^2\frac{K_1}{2} - \left(\cos\frac{K_1}{2} + \sqrt{2}\cos\frac{K_2}{2}\right)^2}} \text{ oder } = \frac{R}{\cos\frac{k}{2}}$$

$$\rho = oa = \frac{R}{\sin\frac{k}{2}} \text{ oder } = \frac{R}{\sqrt{2}\sqrt{\cos^2\frac{K_1}{2} + \cos^2\frac{K_2}{2} + \sqrt{2}\cos\frac{K_1}{2}\cos\frac{K}{2}}}.$$

$$o'\mu' = \sqrt{o'm'^2 - m'\mu'^2} = \sqrt{r^2 - R^2\cos^2\frac{K_2}{2}}.$$

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $o'm'\mu'$ und $o'g'a'$ folgt:

$$o'g' : o'a' = o'm' : o'\mu'$$

d. i.

$$og : \rho = r : o'\mu',$$

hieraus

$$og = \frac{\rho \cdot r}{o'\mu'} = \frac{R^2}{\sqrt{r^2 - R^2\cos^2\frac{K_2}{2}}} = \frac{R}{\sqrt{2}\cos\frac{K_1}{2} + \cos\frac{K_2}{2}}$$

oder

$$og = \frac{R}{\sqrt{\sin^2\frac{k}{2} - \cos^2\frac{K_2}{2}}} \text{ oder } = \frac{R\sqrt{2}}{\cos\frac{K_1}{2} + \sqrt{\sin^2\frac{k}{2} - \cos^2\frac{K_1}{2}}}$$

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $o'm'\nu'$ und $o'h'a'$ folgt:

$$o'h' : o'a' = o'm' : o'\nu'$$

d. i.

$$oh : \rho = r : o'\nu',$$

daher

$$oh = \frac{\rho \cdot r}{o'\nu'} = \frac{\rho \cdot r}{\sqrt{r^2 - R^2\cos^2\frac{K_1}{2}}} = \frac{R}{\cos\frac{K_1}{2} + \sqrt{2}\cos\frac{K_2}{2}}$$

oder

$$oh = \frac{R}{\sqrt{\sin^2\frac{k}{2} - \cos^2\frac{K_1}{2}}} \text{ oder endlich } = \frac{R\sqrt{2}}{\cos\frac{K_2}{2} + \sqrt{\sin^2\frac{k}{2} - \cos^2}}$$

§. 25. Construction der pyramidalen (tetragonalen) Sphenoide.

Die pyramidalen Sphenoide können aus der Grösse der Axenkante oder Seitenkante construirt werden.

Ist die Grösse K der Axenkante gegeben, so führe man an die Vertical-Contour der Leitkugel Taf. III, Fig. 9 die Tangente $S''m''$ so, dass $\sphericalangle m_1'' S''o'' = \frac{K}{2}$ wird, mache $o''s'' = o''S''$, ziehe durch die Punkte S'' und s'' die zwei horizontalen Geraden $b''d''$, $a''c''$ und durch den Fusspunkt s' der hemipyramidalen Axe Ss die zwei unter rechten Winkeln sich schneidenden Geraden $a'c'$, $b'd'$, trage auf denselben von o' aus das Stück $s''f'' = o'a' = o'b' = o'c' = o'd'$ auf und nachdem man die Punkte a', b', c', d' nach a'', b'', c'', d' projicirt, ziehe man auch noch die Geraden $a'b'$, $b'c'$, $c'd'$, $d'a'$, $a''b''$, $b''c''$, $c''d'$ und $d''a''$.

Ist hingegen die Grösse k der Seitenkante gegeben, so führe man an die Horizontal-Contour der Leitkugel die zwei den Winkel $\beta\alpha\gamma = k$ bildenden Tangenten $\alpha'\beta'$ und $\alpha'\gamma'$, beschreibe von o' aus mit dem Halbmesser $o'\alpha' = \rho$ den Horizontalkreis $\alpha'\delta'\varepsilon'$ und ziehe an denselben die vier unter rechten Winkeln sich schneidenden Tangenten $a'b'$, $b'c'$, $c'd'$, $d'a'$, wobei $a'd' \perp o'\alpha'$ steht, so wie in dem so erhaltenen Quadrate $a'b'c'd'$ die beiden Diagonalen $a'c'$, $b'd'$. Dann drehe man den Berührungspunkt m der Ebene abd, welcher bekanntlich im Durchschnitte des durch die Berührungspunkte β und γ der Tangenten $\alpha\beta$ und $\alpha\gamma$ gehenden Verticalkreises βmg mit dem Meridian mp (dessen Ebene auf der Geraden bd senkrecht steht) liegt, um die hemipyramidale Axe Ss in die Ebene des Hauptmeridianes nach m_1. Endlich führe man durch m_1'' an die Vertical-Contour der Leitkugel die Tangente $m_1''S''$, mache $o''s'' = o''S''$, ziehe durch S'' und s'' die zwei horizontalen Geraden $b''d''$, $a''c''$, projicire die Punkte a', b', c', d' nach a'', b'', c'', d'' und verbinde die letzteren durch die Geraden $a''b''$, $b''c''$, $c''d''$ und $d''a''$.

Bezeichnet r den Halbmesser des horizontalen Berührungskreises der zwei oberen oder unteren Begrenzungsebenen, a die halbe Länge der hemipyramidalen Axe und b die halbe Länge der horizontalen Axenkante, so findet man:

$$r = R \cos \frac{K}{2} ,$$

$$a = \frac{R^2}{\sqrt{R^2 - r^2}} = \frac{R}{\sqrt{1 - \cos^2\frac{K}{2}}} = \frac{R}{\sin\frac{K}{2}}.$$

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $f''s''S''$ und $m_1''w''S''$ folgt

$$f''s'' : s''S'' = m_1''w'' : w''S'',$$

d. i.

$$b : 2a = r : \frac{r^2}{\sqrt{R^2 - r^2}},$$

daher

$$b = \frac{2a \cdot \sqrt{R^2 - r^2}}{r} = \frac{2R}{\cos\frac{k}{2}}.$$

$$\rho = o'\alpha' = o'a' \cdot \sin 45 = \frac{b.}{\sqrt{2}} = \frac{R\sqrt{2}}{\cos K}.$$

es ist aber auch

$$\rho = o'\alpha' = \frac{o\beta}{\sin\frac{k}{2}}.$$

folglich

$$\sin\frac{k}{2} = \frac{\cos\frac{K}{2}}{\sqrt{2}}.$$

§. 26. Construction der pyramidalen (tetragonalen) Trapezoeder.

Zur Bestimmung eines pyramidalen Trapezoeders ist die Grösse der Axenkante und einer Seitenkante oder die Grösse der beiden Seitenkanten erforderlich.

Um ein solches Trapezoeder zu construiren, wenn die Grösse K der Axenkante und die Grösse k der Seitenkante gegeben ist, verzeichne man zuerst nach §. 5 aus dem Kantenwinkel K eine vierflächige pyramidale Ecke $Sa'b'c'd'$, $S''a''b''c''d''$ Taf. III, Fig. 10, stelle jedoch dieselbe mit einer Begrenzungsebene, etwa mit der hSf senkrecht zu der verticalen Projections-Ebene, mache $o''s'' = o''S''$ und ziehe an die Vertical-Contour der Leitkugel die durch den Punkt s'' gehende Tangente $s''k''$, so wie die gegen die Ebene hSf unter dem Winkel $l''i''S'' = k$ geneigte Tangente $i''l''$. Dann führe man durch den Berührungspunkt k der Tangente sk den Horizontalkreis kpq und durch den Berührungspunkt l der Tangente il den zu der Ebene hSf parallelen Kreis lpt und lege durch den den beiden Kreisen kpq und lpt gemeinschaftlichen Punkt p eine die Leitkugel tangirende Ebene asg, welche, da sie mit der pyramidalen Axe Ss denselben Winkel, wie die Ebenen hSf, hSb, hSd und dSf und zugleich mit der Ebene hSf den Winkel k bildet, eine Begrenzungsebene des gesuchten Trapezoeders sein muss. Verbindet man den Punkt p' mit o' durch die Gerade $p'o'$ und zieht durch o' die zwei Geraden $g'c'$ und $a'e'$ gegen die Gerade $p'o'$ unter den Winkeln $g'o'p' = p'o'a' = 45^0$ geneigt, so stellen die Geraden $g'c'$ und $a'e'$ die horizontalen Projectionen der unteren Axenkanten vor.

Errichtet man $s'u' \perp o'p'$ und halbirt den Winkel $s'u'v'$ durch die Gerade $g'h'$, so bildet diese die horizontale Projection der Seitenkante gh, denn die Ebenen hSf und asg sind gegen die pyramidale Axe Ss und weil diese vertical steht, auch gegen die horizontale Projections-Ebene und zwar nach der Richtung gegen die $a'h'$ gleichgeneigt, folglich muss die horizontale Projection $g'h'$ ihrer Durchschnittslinie gh den Winkel, welchen die Horizontaltracen $s'u'$ und $u'v'$ der beiden Ebenen mit einander einschliessen, nach der Richtung gegen $g'h'$ hin halbiren. Überdies muss auch $o'h' = o'g'$ sein.

Die horizontalen Projectionen der sieben anderen Seitenkanten findet man, wenn man $o'a' = o'b' = o'c' = o'd'$, $= o'e' = o'f' = o'g' = o'h'$ macht und die Geraden $h'a'$, $a'b'$, $b'c'$, $c'd'$, $d'e'$, $e'f'$ und $f'g'$ zieht.

Projicirt man die Punkte b', c', d', f', g', h' nach b'', c'', d'', f'', g'', h'' und nachdem man durch g'' die horizontale Gerade $g''e''$ gezogen, die Punkte a', e' nach a'', e'' und zieht die Geraden $h''a''$, $a''b''$, $b''c''$, $c''d''$, $d''e''$, $e''f''$, $f''g''$ und $g''h''$, so ist dadurch auch die verticale Projection des gesuchten Trapezoeders bestimmt.

Im Allgemeinen werden die beiden Kreise kpq und lpt zwei Punkte mit einander gemeinschaftlich haben und man erhält dann, je nachdem man für die untere Trapezoederecke entweder die Berührungsebene des Punktes p oder jene des Punktes t wählt, das rechte oder das linke Trapezoeder.

In den Fällen, in welchen $\frac{k}{2} = 90 - mSo$ ist, werden die beiden genannten Kreise nur einen Punkt gemeinschaftlich haben und es gehört dann die Berührungsebene dieses Punktes einer gleichkantigen vierseitigen Pyramide an.

Kennt man die Grösse k_1 und k_2 der Seitenkanten, so ziehe man an die Horizontal-Contour der Leitkugel die vier Tangenten $\alpha'\beta'$, $\alpha'\gamma'$, $\delta'\varepsilon'$, $\delta'\varphi'$, wobei $\sphericalangle\,\alpha'o'\delta' = 45^0$, $\sphericalangle\,\beta'\alpha'\gamma' = k_1$ und $\varepsilon'\delta'\varphi' = k_2$ ist, beschreibe von o' aus mit den Halbmessern $o'\alpha' = \rho$ und $o'\delta' = \rho_1$ die zwei Horizontalkreise $\alpha'\psi'k'$ und $\delta'\lambda'\sigma'$, führe an jeden von ihnen die vier unter rechten Winkeln sich schneidenden Tangenten $g'h'$, $a'b'$, $c'd'$, $e'f'$ und $f'g'$, $h'a'$, $b'c'$, $d'e'$ doch so, dass $g'h' \perp o'\alpha'$, $f'g' \perp o'\delta'$ ist und verbinde die so erhaltenen Durchschnittspunkte a', b', c', d', e', f', g', h' durch die Geraden $a'b'$, $b'c'$, $c'd'$, $d'e'$, $e'f'$, $f'g'$, $g'h'$ und $h'a'$. Dann lege man durch die Berührungspunkte β', γ' und ε', φ' die zwei Verticalkreise $\beta m\gamma$ und $\varepsilon m\varphi$, deren Durchschnittspunkt m den Berührungspunkt der Ebene hSf bildet, führe durch die verticale Projection m'' des Berührungspunktes m an die Vertical-Contour der Leitkugel die Tangente $m''S''$, bis sie die Axe $S''s''$ im Punkte S'' schneidet, mache $o''s'' = o''S''$, projicire die Punkte h', f', g' nach h'', f'', g'' und nachdem man durch h'' und g'' die zwei horizontalen Geraden $h''d''$ und $g''c''$ gezogen, die Punkte a', b', c', d', e' nach a'', b'', c'', d'', e'' und ziehe die Geraden $S''a''$, $S''b''$, $S''c''$, $S''d''$, $S''e''$, $S''f''$, $S''g''$, $S''h''$, $s''a''$, $s''b''$, $s''c''$, $s''d''$, $s''e''$, $s''f''$, $s''g''$, $s''h''$, $a''b''$, $b''c''$, $c''d''$, $d''e''$, $e''f''$, $f''g''$, $g''h''$ und $h''a''$.

Es versteht sich von selbst, dass, wenn man genau gezeichnet habe, $o''x'' = o''y''$ sein müsse.

Bezeichnet r den Halbmesser des Berührungskreises der vier eine pyramidale Ecke bildenden Ebenen und a die Länge der halben pyramidalen Axe, so findet man

$$r = R\sqrt{2}\cos\frac{K}{2}.$$

$$o'\nu' = o'm'\cos m'o'\nu' = r\cos x,$$

es ist aber auch

$$o'\nu' = o'\beta' \,.\, \sin o'\beta'\nu' = R\sin\frac{k_1}{2}$$

mithin

$$\cos x = \frac{R}{r}\sin\frac{k_1}{2}$$

und

$$\sin x = \frac{1}{r}\sqrt{r^2 - R^2\sin^2\frac{k_1}{2}}$$

ferner ist

$$o'\mu' = o'm' \,.\, \cos \,.\, m'o'\mu' = r \cos(45 - x),$$

aber auch

$$o'\mu' = o'\varphi' \sin o'\varphi'\mu' = R \sin \frac{k_2}{2},$$

daher

$$R \sin \frac{k_2}{2} = r[\cos 45 \cos x + \sin 45 \sin x]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[R \sin \frac{k_1}{2} + \sqrt{r^2 - R^2 \sin^2 \frac{k_1}{2}}\right],$$

$$\sin \frac{k_2}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\sin \frac{k_1}{2} + \sqrt{2 \cos^2 \frac{K}{2} - \sin^2 \frac{k_1}{2}}\right],$$

daraus

$$\sin \frac{k_1}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\sin \frac{k_2}{2} + \sqrt{2 \cos^2 \frac{K}{2} - \sin^2 \frac{k_2}{2}}\right]$$

und

$$\cos \frac{K}{2} = \sqrt{\sin^2 \frac{k_1}{2} + \sin^2 \frac{k_2}{2} - \sqrt{2} \sin \frac{k_1}{2} \sin \frac{k_2}{2}}.$$

Dann ist:

$$a = \frac{R^2}{\sqrt{R^2 - r^2}} = \frac{R}{\sqrt{1 - 2\cos^2 \frac{K}{2}}} = \frac{R}{\sqrt{\cos(180 - K)}}$$

oder

$$a = \frac{R}{\sqrt{\cos^2 \frac{k_1}{2} - \left(\sin \frac{k_1}{2} - \sqrt{2} \sin \frac{k_2}{2}\right)^2}},$$

$$\rho = o'\alpha' = \frac{o\beta}{\sin \beta\alpha o} = \frac{R}{\sin \frac{k_1}{2}} = \frac{R\sqrt{2}}{\sin \frac{k_2}{2} + \sqrt{2\cos^2 \frac{K}{2} - \sin^2 \frac{k_2}{2}}}$$

$$\rho_1 = o'\delta' = \frac{o\varphi}{\sin \varphi\delta o} = \frac{R}{\sin \frac{k_2}{2}} = \frac{R\sqrt{2}}{\sin \frac{k_1}{2} + \sqrt{2\cos^2 \frac{K}{2} - \sin^2 \frac{k_1}{2}}}$$

Die Winkel u und v, welche die Geraden mp und gh mit der horizontalen Projections-Ebene bilden, ergänzen sich gegenseitig auch hier zu 90°.

Nun ist aber

$$m'\nu' = \sqrt{o'm'^2 - o'\nu'^2} = \sqrt{r^2 - R^2 \sin^2 \frac{k_1}{2}}$$

$$= R \sqrt{2 \cos^2 \frac{K}{2} - \sin^2 \frac{k_1}{2}}$$

ferner auch

$$m'\nu' = \operatorname{cotg} u \sqrt{R^2 - r^2} = \operatorname{tg} v \sqrt{R^2 - r^2}$$

mithin

$$tg\, v = \frac{R \sqrt{2 \cos^2 \frac{K}{2} - \sin^2 \frac{k_1}{2}}}{\sqrt{R^2 - r^2}}$$

Aus dem Kreisviereck $\alpha'\ o'\ \delta'\ g'$ findet man

$$\rho = o'\alpha' = o'g' \cos \alpha' o' g' = o'g' \cos w$$
$$\rho_1 = o'\delta' = o'g' \cos \delta' o' g' = o'g' \cos (45 - w)$$

folglich

$$\rho \cos (45 - w) = \rho_1 \cos w$$

$$\rho (\cos 45 \cos w + \sin 45 \sin w) = \rho_1 \cos w$$

$$\rho \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos w + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin w\right) = \rho_1 \cos w$$

$$\left(\rho_1 - \frac{\rho}{\sqrt{2}}\right) \cos w = \frac{\rho}{\sqrt{2}} \sin w$$

daraus

$$\operatorname{tg} w = \frac{\rho_1 \sqrt{2} - \rho}{\rho}$$

$$g'\alpha' = o'\alpha' \operatorname{tg} w = \rho_1 \sqrt{2} - \rho$$

und

$$ox = oy = g'\alpha' \operatorname{tg} v = (\rho_1 \sqrt{2} - \rho) \frac{R \sqrt{2 \cos^2 \frac{K}{2} - \sin^2 \frac{k_1}{2}}}{\sqrt{R^2 - r^2}} =$$

$$= \frac{R^2}{\sqrt{R^2 - r^2}} \left[\frac{\sin \frac{k_1}{2} - \sqrt{2 \cos^2 \frac{K}{2} - \sin^2 \frac{k_1}{2}}}{\sin \frac{h_1}{2} \left(\sin \frac{k_1}{2} + \sqrt{2 \cos^2 \frac{K}{2} - \sin^2 \frac{k_1}{2}}\right)}\right] \sqrt{2 \cos^2 \frac{K}{2} - \sin^2 \frac{k_1}{2}}$$

$$= a.\frac{\sin\frac{k_1}{2} - \sqrt{2\cos^2\frac{K}{2} - \sin^2\frac{k_1}{2}}}{\sin\frac{k_1}{2}\left(\sin\frac{k_1}{2} + \sqrt{2\cos^2\frac{K}{2} - \sin^2\frac{k_1}{2}}\right)}\sqrt{2\cos^2\frac{K}{2} - \sin^2\frac{k_1}{2}}$$

oder

$$= a.\frac{\sin\frac{k_2}{2} - \sqrt{2\cos^2\frac{K}{2} - \sin^2\frac{k_2}{2}}}{\sin\frac{k_2}{2}\left(\sin\frac{k_2}{2} + \sqrt{2\cos^2\frac{K}{2} - \sin^2\frac{k_2}{2}}\right)}\sqrt{2\cos^2\frac{K}{2} - \sin^2\frac{k_2}{2}}$$

oder

$$= a.\frac{\left(\sqrt{2}\sin\frac{k_1}{2} - \sin\frac{k_2}{2}\right)\left(\sqrt{2}\sin\frac{k_2}{2} - \sin\frac{k_1}{2}\right)}{\sin\frac{k_1}{2}\sin\frac{k_2}{2}}$$

§. 27. Construction der Disphene (tetragonalen Skalenoëder).

Zur Bestimmung der Disphene ist die Grösse der beiden Axenkanten oder die Grösse der Seitenkante und einer Axenkante erforderlich. Ist K_1 die Grösse der schärferen und K_2 die Grösse der stumpferen Axenkante bekannt, so construire man nach §. 7 aus den Kantenwinkeln K_1 und K_2 eine prismatische Ecke $S'a'b'c'd'$ $S''a''b''c''d''$ Taf. III, Fig. 11, mache das Stück $o''s'' = o''S''$, ziehe durch s'' in der Ebene aSc die Geraden sa und sc unter den Winkeln $asS = csS = bSs = dSs$ und in der Ebene bSd die Geraden sb und sd unter den Winkeln $bsS = dsS = asS = csS$ und verbinde die durch das Zusammentreffen der oberen mit den unteren Axenkanten sich ergebenden Durchschnittspunkte a', b', c', d', a'', b'', c'', d'', durch die Geraden $a'b'$, $b'c'$, $c'd'$, $d'a'$, $a''b''$, $b''c''$, $c''d''$ und $d''a''$.

Es versteht sich von selbst, dass $a''c'' \parallel d''b'' \parallel AX$, $o'a' = o'b = o'c' = o'd'$ und $o''g'' = o''h''$ sein müsse.

Ist die Grösse k der Seitenkante und die Grösse K einer Axenkante bekannt, so führe man an die Horizontal-Contour der Leitkugel die Tangenten $\alpha'\beta'$ und $\alpha'\gamma'$, welche den Winkel $\beta'\alpha'\gamma' = k$ mit einander einschliessen, beschreibe von o' aus mit dem Halbmesser $o\alpha = \rho$ den Horizontalkreis $\alpha'\varphi'\psi'$, ziehe an denselben die vier unter rechten Winkeln sich schneidenden Tangenten $a'b'$, $b'c'$, $c'd'$, $d'a'$, wobei $a'b' \perp o'\alpha'$ steht und in dem so erhaltenen Quadrate $a'b'$ $c'd'$ die Diagonalen $a'c'$, $b'd'$. Dann führe man an die Horizontal-Contour der Leitkugel auch noch die Tangente $\delta\varepsilon$ unter dem Winkel $\delta\varepsilon o = \frac{K}{2}$ gegen die Hauptschnittebene bSd geneigt und bestimme den Durchschnittspunkt m des durch die Punkte β, γ gehenden Verticalkreises $\beta m \gamma$ mit dem durch den Punkt δ parallel zu der Hauptschnittebene bSd gelegten Kreise δmn. Der Punkt m ist, wie aus dem Vorhergehenden einleuchtet, der Berührungspunkt der Ebene aSb. Dreht man denselben um die Axe sS in die Ebene des Hauptmeridianes nach m_1, zieht durch m''_1 die Tangente $m''_1\ S''$ und macht $o''s'' = o''S''$, so stellen die Punkte s'' und S'' die verticalen Projectionen der beiden Spitzen des gesuchten Disphenes vor.

Um nun die verticale Projection desselben vollends zu bestimmen, führe man durch den Punkt m die horizontale Tangente ef, deren horizontale Projection $e'f' \perp o'm'$ steht und die Geraden $S'a'$ und $S'b'$ in den Punkten f' und e' schneidet, projicire die Punkte e', f' nach e'', f'' und nachdem man die Geraden $S''f''$, $S''e''$ gezogen, in ihnen die Punkte a'', b'' aufgesucht und durch a'' und b'' die Geraden $a''c'' \parallel b''d'' \parallel AX$ geführt, die Punkte c', d' nach c'', d'' und verbinde die Punkte a'', b'', c'', d'' mit einander und mit den Punkten S'' und s'' durch die Geraden $a''b''$, $b''c''$, $c''d''$, $d''a''$, $S''a''$, $S''b''$, $S''c''$, $S''d''$, $s''a''$, $s''b''$, $s''c''$ und $s''d''$.

Nennt man r den Halbmesser des Berührungskreises der vier eine hemipyramidale Ecke bildenden Ebenen und a die halbe Länge der hemipyramidalen Axe, so findet man

$$r = R\sqrt{\cos^2\frac{K_1}{2} + \cos^2\frac{K_2}{2}}$$

$$w'\lambda' = w'm' \cos m'w'\lambda' = r \cos w$$

$$w'\lambda' = w'\beta' \sin w'\beta'\lambda' = R \sin \frac{k}{2}$$

$$\cos w = \frac{R}{r} \sin \frac{k}{2}$$

$$\sin w = \frac{1}{r}\sqrt{r^2 - R^2 \sin^2\frac{k}{2}}$$

$$m'\nu' = w'm' \sin m'w'\nu' = r \sin(45 - w),$$

es ist aber auch

$$m'\nu' = R \cos \frac{K_1}{2},$$

mithin

$$R \cos \frac{K_1}{2} = r\,(\sin 45 \cos w - \cos 45 \sin w)$$

$$= \frac{R}{\sqrt{2}} \left(\sin \frac{k}{2} - \sqrt{\cos^2 \frac{K_1}{2} + \cos^2 \frac{K_2}{2} - \sin^2 \frac{k}{2}}\right]$$

$$\left(\sin \frac{k}{2} - \sqrt{2} \cos \frac{K_1}{2}\right)^2 = \cos^2 \frac{K_1}{2} + \cos^2 \frac{K_2}{2} - \sin^2 \frac{k}{2}$$

$$\sin^2 \frac{k}{2} + 2\cos^2 \frac{K_1}{2} - 2\sqrt{2} \sin \frac{k_1}{2} \cos \frac{K_1}{2} = \cos^2 \frac{K_1}{2} + \cos^2 \frac{K_2}{2} - \sin^2 \frac{k}{2}$$

$$\cos^2 \frac{K_2}{2} = \left(\sqrt{2} \sin \frac{k}{2} - \cos \frac{K_1}{2}\right)^2$$

hieraus

$$\cos \frac{K_2}{2} = \sqrt{2} \sin \frac{k}{2} - \cos \frac{K_1}{2}$$

$$\cos \frac{K_1}{2} = \sqrt{2} \sin \frac{k}{2} - \cos \frac{K_2}{2}$$

und

$$\sin \frac{k}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\cos \frac{K_1}{2} + \cos \frac{K_2}{2}\right].$$

$$a = \frac{R^2}{\sqrt{R^2 - r^2}} = \frac{R}{\sqrt{\sin^2 \frac{K_1}{2} - \cos^2 \frac{K_2}{2}}} \text{ oder} = \frac{R}{\sqrt{\sin^2 \frac{K_1}{2} - \left(\sqrt{2} \sin \frac{k}{2} - \cos \frac{K_1}{2}\right)^2}}$$

$$\text{oder} = \frac{R}{\sqrt{\sin^2 \frac{K_2}{2} - \left(\sqrt{2} \sin \frac{k}{2} - \cos \frac{K_2}{2}\right)^2}}$$

$$\rho = o\alpha = \frac{o_1\beta}{\sin \frac{k}{2}} = \frac{R}{\sin \frac{k}{2}} = \frac{R\sqrt{2}}{\cos \frac{K_1}{2} + \cos \frac{K_2}{2}}$$

$$o'b' = \rho\sqrt{2} = \frac{R\sqrt{2}}{\sin \frac{k}{2}} = \frac{2R}{\cos \frac{K_1}{2} + \cos \frac{K_2}{2}}$$

Aus der Ähnlichkeit der rechtwinkeligen Dreiecke $m\lambda m_2$ und $b\alpha b_1$ folgt:

$$bb_1 : b_1\alpha = m_2\lambda : m_2 m$$

d. i.

$$oh : \rho = \sqrt{om^2 - w\lambda^2} : ow,$$

folglich

$$og = oh = \frac{\rho\sqrt{r^2 - R^2 \sin^2 \frac{k}{2}}}{ow} = \frac{R^2\sqrt{2}\sqrt{\cos^2 \frac{K_1}{2} + \cos^2 \frac{K_2}{2} - \sin^2 \frac{k}{2}}}{\left(\cos \frac{K_1}{2} + \cos \frac{K_2}{2}\right)\sqrt{R^2 - r^2}}$$

$$og = oh = a.\frac{\sqrt{2}\sqrt{\cos^2\frac{K_1}{2}+\cos^2\frac{K_2}{2}-\frac{1}{2}\cos^2\frac{K_1}{2}-\frac{1}{2}\cos^2\frac{K_2}{2}-\cos\frac{K_1}{2}\cos\frac{K_2}{2}}}{\cos\frac{K_1}{2}+\cos\frac{K_2}{2}}$$

$$= a.\frac{\cos\frac{K_1}{2}-\cos\frac{K_2}{2}}{\cos\frac{K_1}{2}+\cos\frac{K_2}{2}}$$

oder

$$= a.\frac{\sqrt{2}\sin\frac{k}{2}-2\cos\frac{K_2}{2}}{\sqrt{2}\sin\frac{k}{2}} = a.\left(1-\frac{\sqrt{2}\cos\frac{K_2}{2}}{\sin\frac{k}{2}}\right)$$

oder

$$= a.\frac{2\cos\frac{K_1}{2}-\sqrt{2}\sin\frac{k}{2}}{\sqrt{2}\sin\frac{k}{2}} = a.\left(\frac{\sqrt{2}\cos\frac{K_1}{2}}{\sin\frac{k}{2}}-1\right)$$

Gestalten des orthotypen Systemes.

§. 28. Construction der Orthotype (rhombischen Pyramiden).

Zur Bestimmung eines Orthotypes ist die Grösse der beiden Axenkanten oder die Grösse der Seitenkante und einer Axenkante erforderlich.

Ist K_1 die Grösse der schärferen und K_2 die Grösse der stumpferen Axenkante gegeben, so bestimme man nach §. 7 aus den Kantenwinkeln K_1 und K_2 eine rhombische Ecke $S'a'b'c'd'$, $S''a''b''c''d''$ Taf. III, Fig. 6, mache $o's'' = o''S''$ und ziehe die Geraden $a'b'$, $b'c'$, $c'd'$, $d'a'$, $a''b''$, $b''c''$, $c''d''$, $d''a''$, $s''a''$, $s''b''$, $s''c''$ und $s''d''$.

Ist hingegen k die Grösse der Seitenkante und K_1 die Grösse einer, etwa der schärferen Axenkante gegeben, so ziehe man an die Vertical-Contour der Leitkugel die Tangente $m_1''S''$ unter dem Winkel $\frac{K}{2}$ gegen die horizontale Projections-Ebene geneigt und durch den Fusspunkt s' der prismatischen Axe sS die zwei unter rechten Winkeln sich schneidenden Geraden $a'c'$, $b'd'$ als die horizontalen Projectionen der Axenkanten und beschreibe von o' aus mit den Halbmessern $wm_1 = r$ und $ol = \rho$ die zwei Horizontalkreise $m'n'p'$ und $\alpha'\varphi'\psi'$, von denen der erstere den Berührungskreis der Begrenzungsebenen, der letztere den Berührungskreis der Seitenkanten des gesuchten Orthotypes bildet. Dann führe man an die Horizontal-Contour der Leitkugel die Tangente $\varepsilon\delta$ unter dem Winkel $\delta\varepsilon o = \frac{K_1}{2}$ gegen die Hauptschnittebene aSc geneigt und durch den Berührungspunkt δ den zu der Ebene aSc parallelen Kreis $\delta'm'q'$.

Die beiden Kreise $m'n'p'$ und $\delta'm'q'$ schneiden sich in dem Punkte m und es ist daher m der Berührungspunkt der Ebene aSb.

Zieht man die Gerade $o'm'$ bis sie den Kreis $\alpha'\varphi'\psi'$ in α' schneidet, errichtet im Punkte α' die Gerade $a'b' \perp o'm'$, so ist die Gerade $a'b'$ die horizontale Projection der Seitenkante ab.

Macht man nun $o'c' = o'a'$, $o'd' = o'b'$ und $o''s'' = o''S''$, projicirt die Punkte a', b', c', d' nach a'', b'', c'', d'' und zieht die Geraden $b'c'$, $c'd'$, $d'a'$, $a''b''$, $b''c''$, $c''d''$, $d''a''$, $S''a''$, $S''b''$, $S''c''$, $S''d''$, $s''a''$, $s''b''$, $s''c''$ und $s''d''$, so erhält man die beiden orthogonalen Projectionen des gesuchten Orthotypes.

Nennt man a die halbe prismatische Axe, b die halbe längere und c die halbe kürzere Diagonale der Basis $a'b'c'd'$, so findet man:

$$r = R\sqrt{\cos^2\frac{K_1}{2} + \cos^2\frac{K_2}{2}},$$

es ist aber auch

$$r = o'm' = o'\beta' \sin o'\alpha'\beta' = R \sin\frac{k}{2}$$

folglich

$$\sin\frac{k}{2} = \sqrt{\cos^2\frac{K_1}{2} + \cos^2\frac{K_2}{2}},$$

hieraus

$$\cos\frac{K_1}{2} = \sqrt{\sin^2\frac{k}{2} - \cos^2\frac{K_2}{2}}$$

und

$$\cos\frac{K_2}{2} = \sqrt{\sin^2\frac{k_2}{2} - \cos^2\frac{K_1}{2}}$$

$$a = \frac{R^2}{\sqrt{R^2 - r^2}} = \frac{R}{\sqrt{\sin^2\frac{K_1}{2} - \cos^2\frac{K_2}{2}}} = \frac{R}{\cos\frac{k}{2}}$$

$$\rho = o\alpha = \frac{o\beta}{\sin\frac{k}{2}} = \frac{R}{\sin\frac{k}{2}} = \frac{R}{\sqrt{\cos^2\frac{K_1}{2} + \cos^2\frac{K_2}{2}}}.$$

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $a'\alpha'o'$ und $m'\mu'w'$ folgt:

$$o'a' : o'\alpha' = w'm' : m'\mu'$$

d. i.

$$b : \rho = r : R \cos \frac{K_2}{2} .$$

mithin

$$b = \frac{\rho \cdot r}{R \cos \frac{K_2}{2}} = \frac{R}{\cos \frac{K_2}{2}} = \frac{R}{\sqrt{\sin^2 \frac{k}{2} - \cos^2 \frac{K_1}{2}}} .$$

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $b'\alpha'o'$ und $m'\nu'w'$ folgt:

$$o'b' : o'\alpha' = w'm' : m'\nu'$$

d. i.

$$c : \rho = r : R \cos \frac{K_1}{2} ,$$

mithin

$$c = \frac{\rho \cdot r}{R \cos \frac{K_1}{2}} = \frac{R}{\cos \frac{K_1}{2}} \text{ oder } \frac{R}{\sqrt{\sin^2 \frac{k}{2} - \cos^2 \frac{K_2}{2}}}$$

§. 29. Construction der prismatischen (rhombischen) Sphenoide.

Die prismatischen Sphenoide sind durch die Grösse der Axenkante und einer Seitenkante oder durch die Grösse der beiden Seitenkanten vollkommen bestimmt.

Um ein solches Sphenoid aus der Grösse K der Axenkante und der Grösse k der Seitenkante zu construiren, führe man an die Vertical-Contour der Leitkugel die Tangente $S''m''$ Taf. III, Fig. 12 unter dem Winkel $m''S''o'' = \frac{K}{2}$ gegen die prismatische Axe $S''s''$ geneigt, mache $o''s'' = o''S''$, ziehe durch S'' und s'' die horizontalen Geraden $d''b''$ und $a''c''$ und beschreibe von o' aus mit dem Halbmesser $w''m_1''$ den Horizontalkreis $m'n'p'$, welcher den Berührungskreis der zwei oberen Begrenzungsebenen abd und bcd bildet. Dann führe man an die Horizontal-Contour der Leitkugel die zwei den Winkel $\beta'\alpha'\gamma' = k$ einschliessenden Tangenten $\alpha'\beta'$ und $\alpha'\gamma'$ und lege durch ihre Berührungspunkte α' und γ' den Verticalkreis $\beta'm'\gamma'$, welcher den Horizontalkreis $m'n'p'$ in den Punkten m' und q' schneidet.

Da die horizontale Projection des Berührungskreises der zwei unteren Begrenzungsebenen abc und acd mit dem Kreise $m'n'p'$ zusammenfällt, so wird der untere Kreis $m'n'p'$ von dem Kreis $\beta'm'\gamma'$ in Punkten geschnitten, deren horizontalen Projectionen auch die Punkte m' und q' bilden.

Nimmt man nun m als den Berührungspunkt einer oberen Begrenzungsebene an, so muss dann der Punkt q einer unteren Begrenzungsebene angehören, und es wird, wenn man $d'b' \perp o'm$, und $a'c' \perp o'q'$ zieht, die Gerade $d'b'$ die horizontale Projection der oberen und $a'c'$ dieselbe Projection der unteren Axenkante vorstellen.

Macht man endlich $o'\alpha' = o'\psi'$, errichtet in den Punkten α' und ψ' die Geraden $a'd'$ und $b'c' \perp \alpha'\psi'$, projicirt die Punkte a', b', c', d' nach a'', b'', c'', d'' und zieht die Geraden $a'b'$, $c'd'$, $a''b''$, $b''c''$, $c''d''$ und $d''a''$, so sind dadurch die beiden Projectionen des gesuchten Sphenoides bestimmt.

Sind die Grössen k_1 und k_2 der Seitenkanten gegeben, so führe man an die Horizontal-Contour der Leitkugel die vier Tangenten $\alpha'\beta'$, $\alpha'\gamma'$, $\delta'\varepsilon'$, $\delta'\varphi'$ so, dass $\sphericalangle\, \alpha'o'\delta' = 90°$, $\sphericalangle\, \beta'\alpha'\gamma' = k_1$ und $\sphericalangle\, \varepsilon'\delta'\varphi' = k_2$ ist, verlängere die Geraden $\alpha'o'$ und $\delta'o'$ über o' hinaus, mache $o'\psi' = o'\alpha'$, $o'\lambda' = o'\delta'$ und ziehe die Geraden $a'b'$, $d'c'$ senkrecht auf $\delta'\lambda'$ und $a'd'$, $b'c' \perp \alpha'\psi'$ und in dem Rechtecke $a'b'c'd'$ die Diagonalen $a'c'$ und $b'd'$. Dann drehe man den Durchschnittspunkt m der durch die Berührungspunkte β', γ'; ε', φ' der Tangenten $\alpha'\beta'$, $\alpha'\gamma$; $\delta'\varepsilon'$, $\delta'\varphi'$ gelegten Verticalkreise um die rhombische Axe Ss in die Ebene des Hauptmeridianes nach m_1, führe durch m_1'', an die Vertical-Contour der Leitkugel die Tangente $m''S''$, bis sie die $S''s''$ in S'' schneidet, mache $o''s'' = o''S''$, ziehe durch S'' und s'' die zwei horizontalen Geraden $d''b''$ und $a''c''$, projicire die Punkte a', b', c', d' nach a'', b'', c'', d'' und verbinde die letzteren durch die Geraden $a''b''$, $b''c''$, $c''d''$ und $d''a''$.

Bezeichnet r den Halbmesser des Berührungskreises a die halbe prismatische Axe, b die halbe horizontale Axenkante, so wie ρ und ρ_1 beziehungsweise die Längen $o'\alpha'$ und $o'\delta'$, so erhält man:

$$r = R \cos \frac{K}{2}.$$

es ist aber auch

$$r = o'm = \sqrt{o'\nu'^2 + o'\mu'^2} = \sqrt{R^2 \sin^2 \frac{k_1}{2} + R^2 \sin^2 \frac{k_2}{2}}$$

folglich

$$\cos \frac{K}{2} = \sqrt{\sin^2 \frac{k_1}{2} + \sin^2 \frac{k_2}{2}}$$

hieraus

$$\sin\frac{k_1}{2} = \sqrt{\cos^2\frac{K}{2} - \sin^2\frac{k_2}{2}}$$

und

$$\sin\frac{k_2}{2} = \sqrt{\cos^2\frac{K}{2} - \sin^2\frac{k_1}{2}}$$

$$a = \frac{R}{\sin\frac{K}{2}} = \frac{R}{\sqrt{\cos^2\frac{k_1}{2} - \sin^2\frac{k_2}{2}}}.$$

$$\rho = o'\alpha' = \frac{R}{\sin\frac{k_1}{2}} = \frac{R}{\sqrt{\cos^2\frac{K}{2} - \sin^2\frac{k_2}{2}}}$$

$$\rho_1 = o'\delta' = \frac{R}{\sin\frac{k_2}{2}} = \frac{R}{\sqrt{\cos^2\frac{K}{2} - \sin^2\frac{k_1}{2}}}:$$

$$b = \sqrt{\rho^2 + \rho_1^2} = R\sqrt{\operatorname{cosec.}^2\frac{k_1}{2} + \operatorname{cosec.}^2\frac{k_2}{2}}$$

oder

$$= \frac{R\cos\frac{K}{2}}{\sin\frac{k_1}{2}\sqrt{\cos^2\frac{K}{2} - \sin^2\frac{k_1}{2}}} \text{ oder } = \frac{R\cos\frac{K}{2}}{\sin\frac{k_2}{2}\sqrt{\cos^2\frac{K}{2} - \sin^2\frac{k_2}{2}}}$$

Die Construction der Prismen ist allgemein bekannt, jene der Diorthotype ähnlich der, wie bei den ungleichkantigen achtseitigen Pyramiden.

§. 30. Schematische Projection.

Bei vielen krystallographischen Arbeiten wird es hinreichen, wenn man blos die Berührungspunkte der Begrenzungsebenen einer Krystallgestalt an der Leitkugel verzeichnet hat.

Man erhält dadurch ein Bild von der Form des betreffenden Krystalles, welches einigen Überblick in den Zusammenhang der geometrischen Verhältnisse desselben gewährt und dabei die Einbildungskraft des Beobachters nicht in dem Grade in Anspruch nimmt, wie die Bilder, welche durch Anwendung gewisser graphischer Methoden erzeugt werden.

Wir geben auf Taf. I, Fig. 12 ein solches Bild oder eine schematische Projection des auf Taf II, Fig. 10 verzeichneten dreikantigen

Tetragonal-Ikositetraëders und auf Taf. I, Fig. 13 eine schematische Projection der Combination der drei auf Taf. III, Fig. 1, 2 und 7 abgebildeten Gestalten.

Obwohl man in den meisten Fällen schon mit den Berührungspunkten der oberen Begrenzungsebenen einer Gestalt ausreicht, haben wir auf Taf. I, Fig. 13 auch jene der unteren Begrezungsebenen kennbar gemacht und zum Unterschiede von den sichtbaren mit zwei Ringeln versehenen blos durch ein einfaches Ringel bezeichnet.

Die durch die in gleicher Höhe befindlichen Berührungspunkte gezogenen, mit dem Äquator concentrischen Kreise halten wir bei dieser Projection für wesentlich, weil man dadurch auf den ersten Blick auf die grössere oder geringere Neigung der durch ihre Berührungspunkte gegebenen Ebenen einen guten Schluss ziehen kann und auch dieselben bei der Berechnung Vortheile bieten.

Bei der schematischen Projection der tessularen Gestalten wäre noch wünschenswerth, wenn man ausser den auf Taf. I, Fig. 12 gezogenen Meridianen auch noch die vier durch die Berührungspunkte *H, O, D* gehenden, als Ellipsen sich projicirenden Kreise ziehen würde, wie dies aus der Fig. 10, Taf. I ersichtlich ist.

Verbindet man die Berührungspunkte mit dem unteren Pole der Leitkugel durch Gerade und bestimmt die Durchschnittspunkte dieser Geraden mit der Äquatorebene, so erhält man ein Bild, wie es die stereographische Projection von W. H. Miller[1]) liefert.

Verbindet man die Berührungspunkte mit dem Mittelpunkte *o* der Leitkugel durch gerade Linien und bestimmt die Durchschnittspunkte dieser Geraden mit einer die Leitkugel berührenden Ebene, so erhält man ein Bild, wie es sich in der gnomonischen Projection von Neumann ergibt.

Im Vorhergehenden haben wir gezeigt, wie man an der Leitkugel die Berührungspunkte der Begrenzungsebene von Krystallgestalten bestimmt. Nun wollen wir auch noch zeigen, wie man den Neigungswinkel zweier durch ihre Berührungspunkte gegebenen Ebenen, so wie endlich auch, wie man den Berührungspunkt einer Ebene leicht findet, wenn die Winkel gegeben sind, welche sie mit zwei durch ihre Berührungspunkte gegebenen Ebenen einschliesst.

---

1) Lehrbuch der Krystallographie von Professor W. H. Miller, übersetzt und erweitert durch Dr. J. Grailich. Wien, 1856.

Durch die Auflösung der letzten Aufgabe wird dem Constructeur das Mittel gegeben, beliebige Combinationen direct aus den Kantenwinkeln construiren zu können.

§. 31. Bestimmung des Neigungswinkels zweier durch ihre Berührungspunkte gegebenen Ebenen M und N.

Sind m und n Taf. I, Fig. 11 die Berührungspunkte der Ebenen M und N an der Leitkugel vom Halbmesser $ox = R$, so verbinde man einen von den beiden Berührungspunkten, etwa den Punkt m mit dem Mittelpunkte o der Leitkugel durch die Gerade mo und ziehe durch den Punkt n die Gerade $nv \parallel mo$, durch den Mittelpunkt o die Gerade $xy \perp om$, so wie die Geraden $m\mu \perp om$ und $n\nu \perp vn$.

Der Äquator schneide die Gerade om im Punkte μ_1, die Gerade vn im Punkte ν_1 und die Gerade $m\mu$ im Punkte μ.

Die Gerade vn treffe mit der Geraden xy im Punkte w zusammen, der von w aus mit dem Halbmesser $w\nu_1$ beschriebene Kreis $u\nu\nu_1$ schneide die Gerade $n\nu$ im Punkte ν und die durch den Punkt ν parallel zu der Geraden $o\mu$ gezogene Gerade $v\nu$ treffe die Gerade vn im Punkte v, so stellt dann die Gerade ov den Schnitt der Ebene mno mit der Äquatorebene vor. Denn legt man durch die beiden zu einander parallelen Geraden om und vn zwei verticale Ebenen $om\mu_1$ und $vn\nu_1$, so werden sie die Leitkugel nach Kreisen schneiden, deren Mittelpunkte o und w in der auf den beiden Ebenen senkrechten Geraden xy liegen und deren Halbmesser die Geraden $o\mu_1$ und $w\nu_1$ bilden. Die Durchschnitte der beiden Ebenen $om\mu_1$ und $vn\nu_1$ mit der Ebene mno werden aber zu einander parallel sein müssen, weil die Ebenen $om\mu_1$ und $vn\nu_1$ auch zu einander parallel sind. Legt man nun die Ebene $om\mu_1$ um die Gerade $o\mu$, und die Ebene $vn\nu_1$ um die Gerade $v\nu_1$ als Drehungsaxe in die Äquatorebene um, so werden dann offenbar die beiden Kreise in der wahren Grösse erscheinen müssen. Der Kreis $om\mu_1$ wird mit dem Äquator zusammenfallen und der Punkt m, weil er zugleich in der auf der Drehungsaxe $o\mu$ senkrechten Geraden $m\mu$ sich befinden muss, in den Durchschnittspunkt μ des Äquators mit der Geraden $m\mu$ zu liegen kommen.

Der Kreis $wn\nu_1$ wird nach $u\nu\nu_1$ und der Punkt n wieder in den Durchschnittspunkt ν des Kreises $u\nu\nu_1$ mit der auf der Drehungsaxe vn senkrechten Geraden $n\nu$ zu liegen kommen müssen.

Zieht man die Gerade $o\mu$ und zu ihr parallel die Gerade $v\nu$, so bilden diese beiden Geraden die umgelegten Durchschnitte der Ebenen $om\mu_1$ und $vn\nu_1$ mit der Ebene mno. Weil aber der Punkt v sowohl der Ebene mno als auch zugleich der Äquatorebene angehört, so muss die Gerade ov der Durchschnitt der Ebene mno mit der Äquatorebene sein.

Nun sind die Geraden om und on, durch welche die Ebene mno geht, Halbmesser der Leitkugel und stehen sonach beziehungsweise senkrecht auf den Ebenen M und N; es muss daher auch die Ebene mno auf der Durchschnittslinie der beiden Ebenen M und N senkrecht stehen und desshalb den gesuchten Neigungswinkel K enthalten. Der von den beiden Halbmessern om und on eingeschlossene Winkel mon ist daher gleich $180 - K$.

Legt man endlich die beiden Punkte m und n um die Drehungsaxe PQ in die Äquatorebene um, wobei der Punkt m nach M und der Punkt n nach N zu liegen kommt und zieht die Geraden oM und oN, so ist $\sphericalangle MoN = 180 - K$, und wenn man die Gerade $ab \perp oM$ und $cd \perp oN$ führt, oder die Gerade oN über o hinaus verlängert $\sphericalangle akc = \sphericalangle MoL = K$.

§. 32. Bestimmung des Berührungspunktes einer Ebene, wenn die Neigungswinkel K_1 und K_2 gegeben sind, welche sie mit den durch die Berührungspunkte m und n Taf. I, Fig. 11 gegebenen Ebenen M und N bildet.

Rotirt man die zwei Ebenen A und B im Raume so, dass beide die Kugel stets tangiren und dass dabei die Ebene A die Neigung K_1 gegen die Ebene M und die Ebene B die Neigung K_2 gegen die Ebene N beibehält, so entstehen dadurch zwei Kegelflächen, welche die Leitkugel nach Kreisen berühren, deren Ebenen beziehungsweise zu den Ebenen M und N parallel sein werden. Die den beiden Kreisen gemeinschaftlichen Punkte werden, wie aus dem Vorhergehenden einleuchtet, die Eigenschaft besitzen, dass die durch sie an die Leitkugel berührend gelegten Ebenen mit der Ebene M den Winkel K_1 und mit der Ebene N den Winkel K_2 einschliessen; sie werden daher die gesuchten Berührungspunkte selbst sein.

Um aber den Durchschnitt der beiden hier als Ellipsen sich projicirenden Kreise zu bestimmen, ohne die Ellipsen selbst zu zeichnen, lege man die beiden auf den Ebenen M und N senkrechten Halbmesser om und on um die Gerade PQ als Drehungsaxe in die Äquatorebene um, wo dann die Punkte m und n nach M und N zu liegen kommen und die Ebenen M und N als die Geraden ab und cd, folglich auch die zu ihnen parallelen Ebenen der beiden Kreise als Geraden erscheinen werden.

Zieht man an den Äquator die Tangenten $\alpha\beta$ und $\gamma\delta$ so, dass $\sphericalangle \alpha\beta b = K_1$ und $\sphericalangle \gamma\delta d = K_2$ ist, so stellen die beiden Tangenten zwei Erzeugende der früher erwähnten Kegelflächen vor; es bilden daher die durch die Berührungspunkte α und γ der Tangenten $\alpha\beta$ und $\gamma\delta$ zu den Geraden ab und cd beziehungsweise parallelen Geraden $\alpha\varepsilon$ und $\gamma\varphi$ die Ebenen der beiden Berührungskreise und die als der Punkt σ sich projicirende Gerade ef ihre Durchschnittslinie, welche demnach auf der umgelegten Ebene mno senkrecht stehen muss.

Dreht man die Gerade ef, welche bekanntlich die beiden Berührungspunkte r und r_1 enthält, in ihre ursprüngliche Lage zurück, so wird sich jeder einzelne Punkt derselben in der auf der Drehungsaxe PQ senkrechten Ebene rr_1l bewegen und es werden daher die gesuchten Berührungspunkte nach dem Zurückdrehen in der Ebene rr_1l liegen müssen. Die gesuchten Berührungspunkte müssen aber auch zugleich an der Leitkugel sich befinden und daher im Durchschnitte derselben mit der Geraden ef liegen.

Legt man nun die Ebene rr_1l um die Gerade tl in die Äquatorebene um, so wird der Schnitt der Ebene rr_1l mit der Ebene mno nach th, der Schnitt rr_1l der Ebene rr_1l mit der Leitkugel aber nach $\rho\rho_1l$ und der Punkt σ nach σ_1 zu liegen kommen. Errichtet man dann im Punkte σ_1 die Gerade $ef \perp th$ und führt die Durchschnitts punkte ρ und ρ_1 derselben mit dem umgelegten Kreise $\rho\rho_1l$ in die Ebene rr_1l nach r und r_1; so sind r und r_1 die Berührungspunkte von Ebenen, welche mit der Ebene M den Winkel K_1 und zugleich mit der Ebene N den Winkel K_2 einschliessen. Um die Richtung der Geraden th zu erhalten, ziehe man $mp \perp PQ$, trage auf der zu PQ parallelen Geraden $m\mu_2$ das Stück $m\mu = m\mu_2$ auf, verbinde den Punkt p mit dem Punkt μ_2 und ziehe $th \parallel p\mu_2$.

Das bereits fertige Elaborat über die „directe Constructions-Methode der schiefaxigen Krystallgestalten aus den Kantenwinkeln" hoffe ich in Bälde zusammengestellt zu haben, um es der hochverehrten mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften vorlegen zu können.

Schliesslich fühle ich mich verpflichtet, meinen Lehrern, den hochverehrten Herren Professoren Johann Hönig und dem nun leider viel zu früh dahingeschiedenen Dr. Franz Leydolt für das mir bei vielen Gelegenheiten geschenkte Vertrauen meinen verbindlichsten Dank auszusprechen. Beide Herren waren seit Beginn meiner Studienzeit fortwährend meine kräftigste Stütze.

Möge dieses mein erstes Product, welches ich der Öffentlichkeit übergebe, ein schwacher Beweis sein, dass ich Ihre Lehren wohl verstanden.

Un altro cenno sulla dentatura del Pachyodon Catulli

esposto dal Dr. **Raffaele Molin,**

jadrense,

Professore p. o. di mineralogia e zoologia presso l'i. r. Università di Padova.

(Vorgelegt in der Sitzung vom 6. October 1859.)

(Mit 1 Tafel.)

Scorsero appena alcuni mesi, che io esponeva le mie considerazioni su alcuni denti molari, i quali unitamente ad un pezzo di mascella furono estratti dall' arenaria grigia di Libàno. Io determinava allora quei denti per denti di *Pachyodon* e stabiliva precisamente la nuova specie *Pachyodon Catulli.* In quella circostanza io m' ingegnai in modo speciale di determinare il carattere differenziale generico che distinguer doveva l' uno dall' altro i tre generi *Zeuglodon*, *Squalodon* e *Pachyodon*, i quali compongono l' interessante famiglia dei Zeuglodonti, quella famiglia delle generazioni estinte che forma il passaggio dalla famiglia delle foche a quella dei delfini. Io credetti necessario di sciogliere questo problema scientifico in quanto che, non avendo potuto i naturalisti investigare fino ad ora altro che alcuni denti sì del genere *Squalodon* che del genere *Pachyodon*, come ne conviene l' illustre Bronn, la diagnosi caratteristica fondata sulla differenza delle corone dei denti di questi due generi era molto incerta. Dai confronti istituiti in quella circostanza ho potuto arrivare all' importante conclusione che il carattere differenziale generico per i tre generi *Zeuglodon*, *Squalodon*, e *Pachyodon*, non deve ricercarsi nella forma della corona, ma sibbene in quella

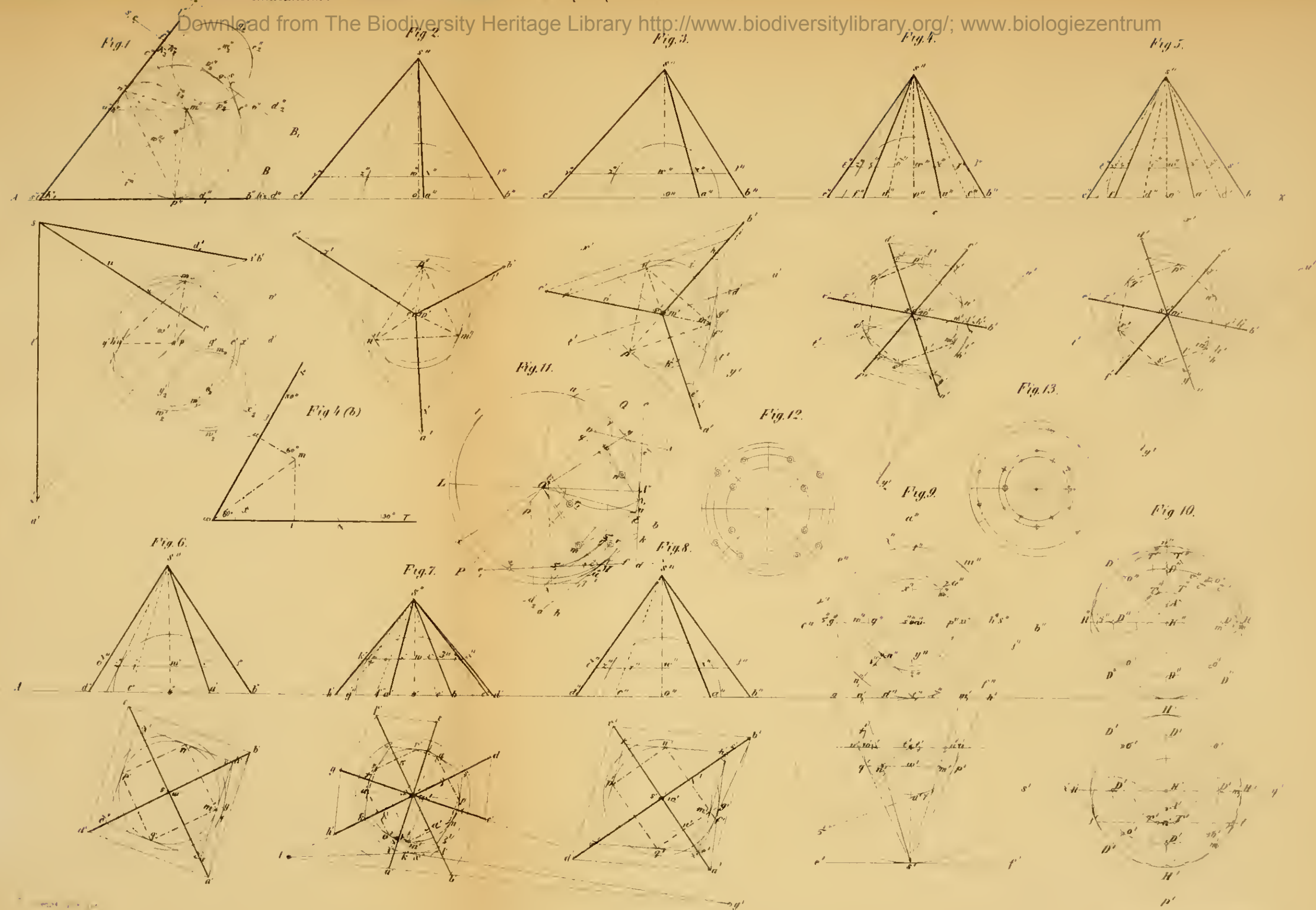
Fig. 1
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 4 (b)
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.

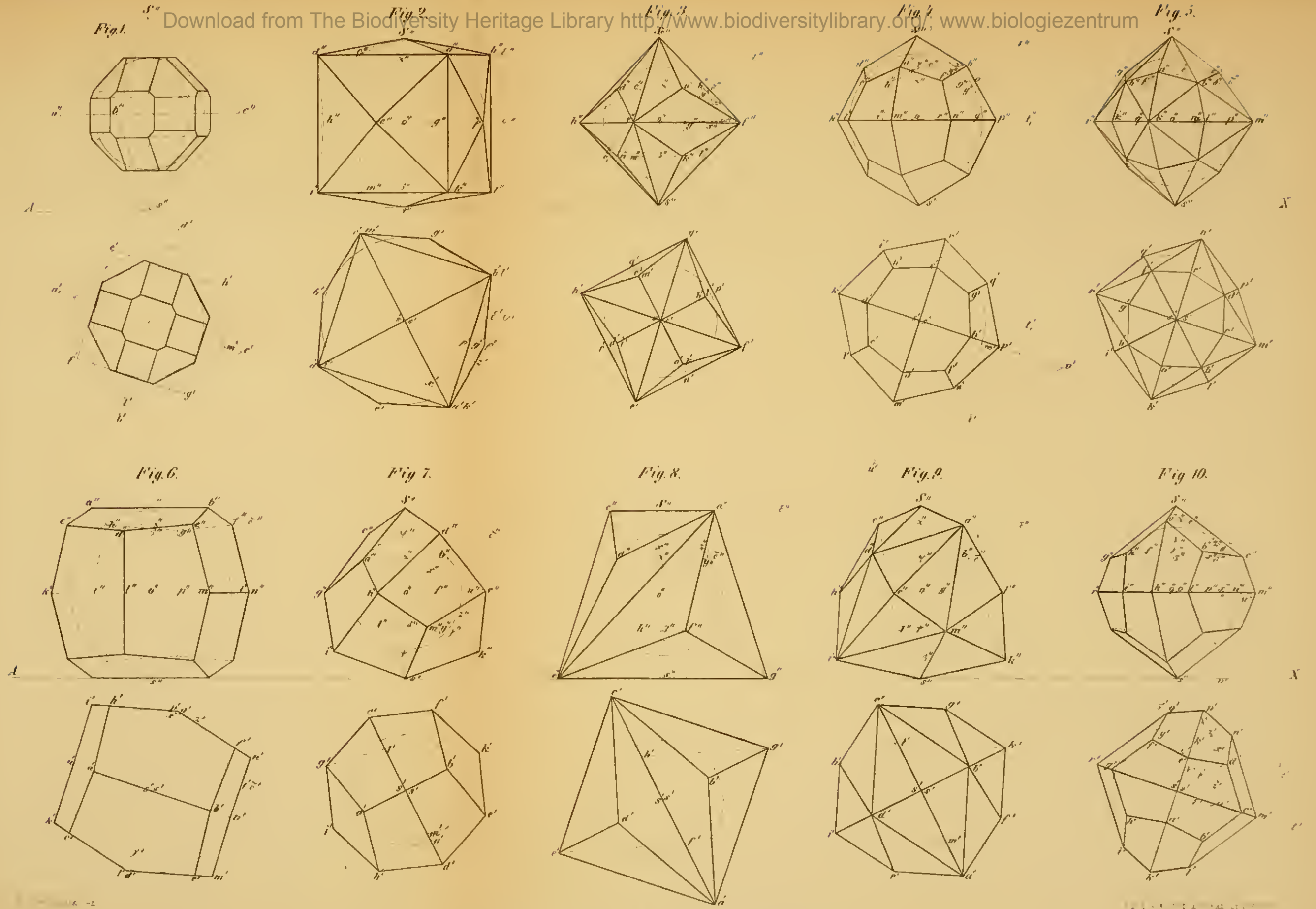
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.

Fig. 1.

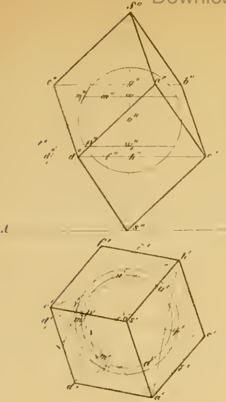

Fig. 2.

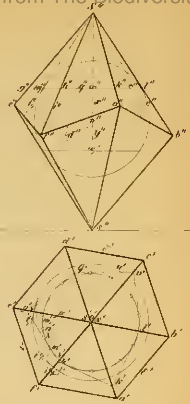

Fig. 3.

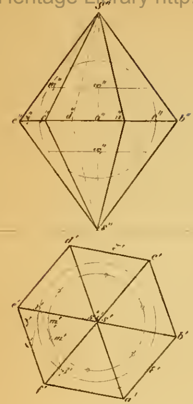

Fig. 4.

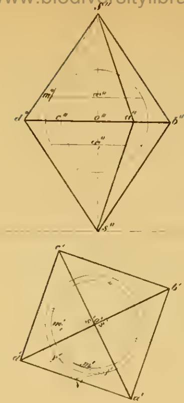

Fig. 5.

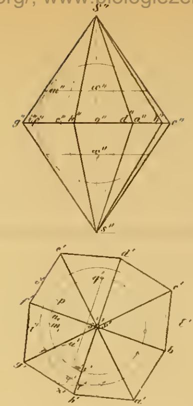

Fig. 6.

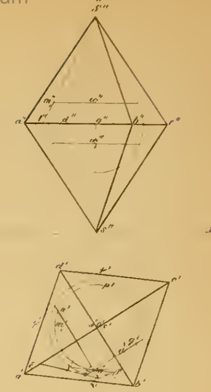

Fig. 7.

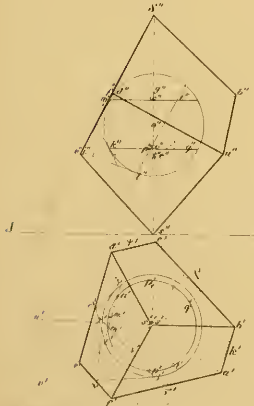

Fig. 8.

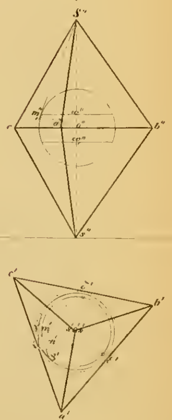

Fig. 9.

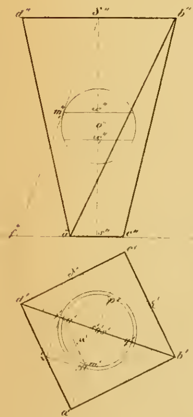

Fig. 10.

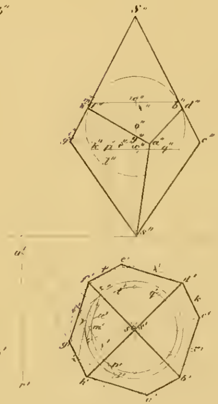

Fig. 11.

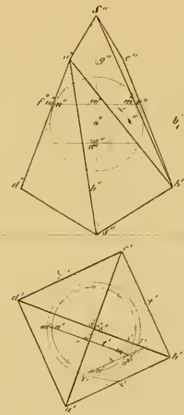

Fig. 12.