

Über Reibung tropfbarer Flüssigkeiten.

Von H. Helmholtz und G. v. Piotrowski.

(Mit 2 Tafeln.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 12. April 1860.)

In den meisten Fällen von Bewegung tropfbarer Flüssigkeiten, welche bei physiologischen Untersuchungen oder technischen Aufgaben vorkommen, hat die Reibung der Flüssigkeitstheilen unter einander und an den Wänden des Gefäßes einen so bedeutenden Einfluss auf die Form der Bewegung, dass wenn man in den theoretischen Untersuchungen solcher Fälle die Reibung vernachlässigen wollte, sich die allergrößten Differenzen zwischen Theorie und Experiment ergeben würden. Nun sind die Bewegungsgleichungen für eine Flüssigkeit, die der Reibung unterworfen ist, allerdings schon vor längerer Zeit aufgestellt worden von Poisson¹⁾, von Navier²⁾ und Stokes³⁾, und zwar sind alle drei Mathematiker, indem sie von ganz verschiedenen zu Grunde gelegten Hypothesen ausgingen, zu denselben Bewegungsgleichungen für tropfbare Flüssigkeiten gelangt, während für gasförmige allerdings eine Differenz zwischen Navier und den beiden andern besteht. Indessen ist bisher nur eine einzige Form des Experimentes gefunden worden, für welche die vollständige Theorie aus jenen Bewegungsgleichungen hergeleitet werden kann, es ist das die Bewegung einer Flüssigkeit in sehr engen und sehr langen Röhren. Über diese hat bekanntlich Poiseuille⁴⁾ genaue und eingehende Untersuchungen gemacht, deren Resultate mit der mathematischen Theorie in guter Übereinstimmung sind. Dabei hat sich

¹⁾ Journal de l'école Polytechnique. Cahier XX.

²⁾ Mémoires de l'Institut de France T. VI.

³⁾ Cambridge Philosophical Transactions T. VIII, p. 287.

⁴⁾ Mémoires des Savants étrangers IX, 433.

aber gleichzeitig gezeigt, dass wenn man von sehr engen Röhren zu weiteren übergehen will, die Länge der Röhren in viel grösserem Verhältnisse zunehmen muss, als ihr Durchmesser, wenn dieselbe einfache Theorie gültig bleiben soll. Auch ergeben die erwähnten hydrodynamischen Gleichungen, dass wenn man Länge und Durchmesser der Röhre auf das n fache vergrössert, die Geschwindigkeiten auf $\frac{1}{n}$ verringert werden müssen, der Druck auf $\frac{1}{n^2}$, wenn die Bewegung der früheren ähnlich bleiben soll. Es wird also die Länge der Röhre etwa wie n^3 wachsen müssen, wenn man gleiche Drucke anwenden will, ohne die Störungen der linearen Bewegung einen grösseren Einfluss auf das Resultat gewinnen zu lassen. Dadurch wird es unausführbar, ähnliche mit der Theorie vergleichbare Versuche an anderen als capillaren Röhren anzustellen. Dazu kommt noch, dass jede Ungleichförmigkeit an der Röhrenwand, namentlich jede Öffnung, die zur Einsetzung eines Druckmessers dient, bedeutende Störungen der Bewegung hervorbringt¹⁾, so dass man die unter solchen Bedingungen gewonnenen Ergebnisse zwar zur Ableitung praktischer Approximationsformeln, aber nicht zur Vergleichung mit der mathematischen Theorie gebrauchen kann.

Da es nun übrigens in dem verwirrenden Labyrinth von Erscheinungen, welche bei den Flüssigkeitsbewegungen vorkommen, von der grössten Wichtigkeit wäre, eine durchgreifende und strenge Theorie als Leitfaden zu haben, welche wenigstens erkennen liesse, welcher Theil der Erscheinungen erklärbar, welcher vor der Hand noch zu verwickelt sei, so beschlossen wir einen zweiten Fall von Flüssigkeitsbewegung zu untersuchen, dessen Theorie vollständig aus den hydrodynamischen Gleichungen für reibende Flüssigkeiten hergeleitet werden kann, namentlich um zu sehen, ob die daraus gewonnenen Werthe der Reibungsconstanten für das Wasser übereinstimmen mit denen, die aus Poiseuille's Versuchen berechnet werden können. Ein solcher Fall ist die Bewegung des Wassers in einer Hohlkugel, und zwar liessen wir das kugelförmige Gefäss drehende Schwingungen um einen seiner Durchmesser machen. Es konnte aus diesen Beobachtungen die Kraft experimentell bestimmt

¹⁾ S. Ludwig und Stefan, Sitzungsberichte der kais. Akademie zu Wien, Bd. XXXII, 1858, 29. April.

werden, welche die in dem Gefässe enthaltene Flüssigkeit auf die Wände des Gefässes ausübt, und konnte mit der aus der mathematischen Theorie der Flüssigkeitsbewegung hergeleiteten Kraft verglichen werden.

Leider zeigte der Erfolg, dass die gewöhnlich gemachte Annahme, welche durch Poiseuille's Versuche bestätigt zu sein schien, wonach die oberflächlichste Schicht der Flüssigkeit den Wänden des Gefässes fest anhaftet, für die wässerigen Flüssigkeiten in Metallgefässen mit polirter und vergoldeter Oberfläche, wie sie von uns, um die Unveränderlichkeit der Oberfläche zu sichern, angewendet waren, nicht zutrifft, während sie andererseits für Alkohol und Äther auch in solchen Metallgefässen nahezu zutrifft. Der Einfluss der Oberfläche wurde durch Versuche mit einem Glasgefässe, welches erst mit natürlicher, dann mit versilberter Oberfläche zu den Schwingungsversuchen diente, direct erwiesen. Dadurch entstand eine grössere Complication des Erfolges als vorher erwartet wurde, und es reichte die unter den obwaltenden Umständen erreichbare Genauigkeit der Messungen nicht aus, um die strenge Übereinstimmung der aus unserem Verfahren abgeleiteten Werthe der Reibungsconstanten mit denen von Poiseuille ganz festzustellen. Es liegt nämlich im Wesen der angewendeten Methode, dass sie genaue Bestimmungen des inneren Reibungscoefficienten der eingeschlossenen Flüssigkeiten hauptsächlich dann ergibt, wenn die oberflächliche Schicht der Flüssigkeit gar keine oder nur eine kleine Gleitung längs der Metallfläche ausführt. Sollen dagegen diese Bestimmungen im Falle grösserer Gleitung mit ähnlicher Genauigkeit ausgeführt werden, so ist eine sehr genaue Bestimmung der Schwingungsdauer bis mindestens zu den Hunderttheilen einer Secunde nöthig. Diese ist in dem vielfachen Erschütterungen und Temperaturwechseln ausgesetzten Locale, wo die Versuche angestellt werden mussten, nicht immer erreicht worden. Leider hat dieser Umstand gerade beim reinen Wasser, wo die Vergleichung mit den früheren Versuchen von Poiseuille möglich war, grossen Einfluss gehabt, so dass der Werth der Reibungsconstanten, der aus den Versuchen des letzteren Beobachters folgt, zu dem aus den vorliegenden Versuchen berechneten sich wie 4 : 5 verhält. Es erscheint immerhin schon als ein Resultat von einigem Interesse, dass sich mittelst der Theorie eine solche Übereinstimmung herstellt zwischen Zahlen, die von zwei so durchaus

verschiedenen Versuchsmethoden geliefert worden sind, und die übrigens der Natur der Sache nach jeden beliebigen Werth zwischen Null und Unendlich annehmen könnten.

1. Experimenteller Theil.

Von Dr. G. v. Piotrowski.

Auf Vorschlag des Herrn Prof. Helmholtz unternahm ich es, die Reibung der tropfbaren Flüssigkeiten an starren Gefässwänden zu studiren, und zwar durch Beobachtung der Schwingungen eines mit Flüssigkeit vollgefüllten Gefässes.

Vor Allem lag es mir daran zu ermitteln, ob die Annahme, dass die Reibung im Inneren der bewegten Flüssigkeiten und an einer starren Gefässwand der Geschwindigkeit dieser Bewegung direct proportional sei, eine gerechtfertigte wäre.

Dies zu ermitteln hing ich ein Fläschchen, wie solche zur Aufbewahrung von chemischen Reagentien üblich sind, bifilar an dünnen übersilberten Kupferdräthen auf, in der Weise, dass ich um den Hals des Fläschchens eine dicke Stahlnadel schlang, die Enden dieser Nadel nach aufwärts, dann nach einwärts und endlich nach abwärts bog, und so das Fläschchen mittelst der Enden der Nadel, die spitz zugeschliffen waren, auf einer Kupferplatte balanciren liess; in Einkerbungen dieser Kupferplatte und einer ähnlichen an der Zimmerdecke liefen die Dräthe.

Vorne am Fläschchen befestigte ich einen plan-parallelen Spiegel, an dem Boden des Fläschchens in der Richtung seines, dem magnetischen Meridiane parallelen Durchmessers einen kleinen Magnetstab, und umgab das Ganze mit einem Gehäuse von Pappe, das dem Spiegel gegenüber eine mit einem plan-parallelen Glase verschlossene Öffnung besass. Indem ich nun einen galvanischen Strom durch Drathspiralen, welche möglichst nahe an dem Magnete passend angebracht waren, leitete, konnte ich den Magnet und mit ihm das Fläschchen aus ihrer Ruhelage ablenken; unterbrach ich nun den Strom, so schwang das Fläschchen um seine verticale Hauptaxe. Die Weite dieser Schwingungen beobachtete ich mittelst Scale und Fernrohr.

Abgesehen von der Reibung der Flüssigkeit mussten die Weiten der Schwingungsbögen in geometrischer Progression abnehmen, d. h. die logarithmischen Decremente derselben constant sein ¹⁾; ist die Reibung der Flüssigkeit an der Gefässwand der Geschwindigkeit der Bewegung proportional, so darf durch sie die Abnahme der Schwingungsbögen in geometrischer Progression nicht gestört werden (s. theoretischen Theil). Den fraglichen Satz zu beantworten brauchte ich also blos die auf einander folgenden Elongationen des schwingenden Fläschchens zu beobachten, und aus den so gewonnenen Daten die logarithmischen Decremente zu berechnen. Diese erwiesen sich als constant.

Beifolgende Tabelle mag dies näher darthun. Die Scale war 1175 Millim. von der Umdrehungsaxe entfernt, der Spiegel 22 Millim. Die Scalentheile sind Millimeter; die Ruhelage vor dem Versuche war 500.00.

¹⁾ S. Gauss, Anleitung zur Bestimmung der Schwingungsdauer einer Magnetnadel, in den Resultaten aus den Beobachtungen des magnetischen Vereines im Jahre 1837.

A	B	C	D	E	F	G	H
25·0	497·25	913·50	456·75	434·92	2·6384094	0·0132925	0·0130397
954·0	497·65	883·30	441·65	421·81	2·6251169	0·0133210	
56·0	497·72	853·75	426·87	408·88	2·6115959	0·0130790	
924·6	498·80	826·20	413·10	396·75	2·5985169	0·0126503	
85·7	498·87	800·65	400·32	385·36	2·5858666	0·0128357	
899·2	499·20	775·60	387·80	374·12	2·5730109	0·0131564	
111·4	499·30	751·00	375·50	363·04	2·5599545	0·0131035	
874·8	499·30	727·20	363·60	352·25	2·5468510	0·0129519	
136·2	499·25	704·50	352·25	341·90	2·5338991	0·0128133	
852·0	500·22	682·85	341·42	331·96	2·5210858	0·0129737	
158·8	500·47	661·65	330·82	322·19	2·5081121	0·0131509	0·0130587
831·3	500·95	640·90	320·45	312·58	2·4949612	0·0130172	
180·5	500·97	621·05	310·52	303·35	2·4819440	0·0131390	
811·5	501·25	601·70	300·85	294·31	2·4688050	0·0131533	
200·4	501·20	583·00	291·50	285·53	2·4556517	0·0130152	
792·7	501·55	565·10	282·55	277·10	2·4426365	0·0129327	
219·0	501·55	547·90	273·95	268·97	2·4297038	0·0130134	
775·5	501·72	531·15	265·57	261·03	2·4166904	0·0129695	
236·2	501·70	515·00	257·50	253·35	2·4037209	0·0 30330	
759·2	501·85	499·30	249·65	245·86	2·3906879	0·0131631	
252·2	501·82	483·95	241·97	238·52	2·3775248	0·0128988	0·0130141
743·8	502·20	469·40	234·70	231·54	2·3646260	0·0128490	
267·3	502·32	455·35	227·67	224·79	2·3517770	0·0130815	
730·0	502·55	441·50	220·75	218·12	2·3386955	0·0129952	
281·8	502·50	428·20	214·10	211·69	2·3257003	0·0129942	
716·6	502·65	415·30	207·65	205·45	2·3127061	0·0130681	
295·0	502·62	402·75	201·37	199·36	2·2996380	0·0131366	
704·0	502·75	390·50	195·25	193·42	2·2865014	0·0131528	
307·5	502·67	378·65	189·32	187·65	2·2733486	0·0129671	
692·0	502·85	367·30	183·65	182·13	2·2603815	0·0129975	
319·2	502·85	356·30	178·15	176·76	2·2473840	0·0129933	0·0130450
681·0	503·02	345·65	172·82	171·55	2·2343907	0·0130808	
330·2	503·07	333·25	167·62	166·46	2·2213099	0·0132450	
670·7	503·22	325·05	162·52	161·46	2·2080649	0·0130513	
340·7	503·15	315·30	157·65	156·68	2·1950136	0·0126846	
660·8	503·35	306·10	153·05	152·17	2·1823290	0·0126252	
350·5	503·37	297·25	148·62	147·81	2·1697038	0·0129730	
652·0	503·40	288·40	144·20	143·46	2·1567308	0·0133412	
359·2	503·40	279·60	139·80	139·12	2·1433896	0·0127985	
643·2	503·70	271·40	135·70	135·08	2·1305911	0·0126573	
368·0	503·82	263·55	131·77	131·20	2·1179338	0·0133101	0·0131424
635·6	503·87	255·55	127·77	127·24	2·1046237	0·0130974	
376·1	503·75	247·90	123·95	123·46	2·0915263	0·0129245	
627·7	503·77	240·55	120·27	119·84	2·0786018	0·0133209	
383·5	503·77	233·25	116·62	116·22	2·0652809	0·0135883	
620·4	503·80	226·00	113·00	112·64	2·0516926	0·0132712	
390·8	503·62	219·15	109·57	109·25	2·0384214	0·0125014	
613·2	503·75	212·90	106·45	106·15	2·0259200	0·0128720	
397·3	503·87	206·65	103·32	103·05	2·0130480	0·0133956	
607·2	503·97	200·35	100·17	99·92	1·9996524		
403·8							

Die Columnne *A* enthält die unmittelbar abgelesenen Scalentheile, die Columnne *B* enthält die aus den Elongationen berechneten Ruhelagen; die Zahlen sind aus *A* berechnet nach der Formel $\frac{1}{4}(a + 2b + c)$, wenn *a*, *b*, *c* drei auf einander folgende Zahlen der Columnne *A* bedeuten. Die Zahlen der Columnne *C* sind aus *A* berechnet nach der Formel $\pm \frac{1}{2}(a - 2b + c)$, wenn *a*, *b*, *c* dieselbe Bedeutung wie vorhin haben; sie stellen die doppelten Tangenten der Schwingungsbögen dar. *D* enthält die einfachen Tangenten der Schwingungsbögen, *E* die Schwingungsbögen selbst, nach einer eigens zu diesem Zwecke berechneten Tabelle gefunden. *F* enthält die (gemeinen) Logarithmen von *E*, *G* die Unterschiede der auf einander folgenden Zahlen in *F*, also das logarithmische Decrement für die halbe Schwingung in gemeinen Logarithmen ausgedrückt. *H* endlich die Mittel aus je 10 auf einander folgenden logarithmischen Decrementen.

Die Zahlen der Columnne *H* lassen keinen Zweifel über die Constanz des logarithmischen Decrementes; die geringen Schwankungen in der Columnne *G* erklären sich leicht daraus, dass nur noch die Zehntel-Millimeter berücksichtigt sind, und auch diese nicht direct abgelesen, sondern geschätzt wurden; diese Fehlerquelle muss sich um so mehr geltend machen, je kleiner die Schwingungsbögen werden.

Alle übrigen Versuchsreihen sind der angeführten ähnlich.

Nachdem ich mich so überzeugt habe, dass die Reibung, wenigstens des Wassers, an starren Gefässwänden, bei einer Bewegung beider gegen einander, der Geschwindigkeit dieser Bewegung wirklich direct proportional sei, suchte ich zu ermitteln, ob die Natur der Gefässwand auf die Grösse dieser Reibung von merklichem Einfluss ist, oder nicht.

Ein Fläschchen, für welches ich fand

Schwingungsdauer	logarithmisches Decrement
23·9333	0·0622182
23·9333	0·0628467
Mittel 23·9333	0·0625325

wenn ich den eben beschriebenen Versuchen ähnliche damit anstellte, versilberte ich inwendig nach der Liebig'schen Methode; der Silberüberzug, wiewohl er die Innenfläche des Fläschchens ganz gleichmässig bedeckte, war doch so dünn, dass ein Unterschied

zwischen der Wassermenge (143590 Milligramm) die das Fläschchen vor und nach dem Versuche fasste, mittelst einer Wage, die noch 5 Milligramme ausschlug, nicht zu entdecken war. Bei dem versilberten Fläschchen fand ich:

Schwingungsdauer	Logarithmisches Decrement
24·0088	0·0600305
24·0076	0·0599622
Mittel 24·0082	0·0599964

folglich wäre das Verhältniss der Reibung am Glase zur Reibung am Silber wie

$$1 : 0·95645.$$

d. h. die Reibungsconstante um 4·335% kleiner beim Silber, wenn wir die beobachteten Unterschiede nicht jenen unbekannten Einflüssen zuschreiben wollen, welche, wie wir im Verfolge sehen werden, sowohl die Schwingungsdauer als das logarithmische Decrement selbst bei ganz gleichen und unmittelbar auf einander folgenden Versuchen nicht ganz constant erscheinen lassen. Nun ging ich an die Aufgabe, die Constanten dieser Reibung für ein Gefäss von regelmässiger Begrenzung zu bestimmen.

Der Apparat, den ich zu diesem Behufe anwandte, war von Herrn Mechaniker Fessel in Cöln angefertigt.

Das Gefäss zur Aufnahme der Flüssigkeit war eine Hohlkugel (Fig I, *A* in der Seitenansicht, *B* im Durchschnitte) oder vielmehr zwei hohle Halbkugeln, die mittelst breiter Leisten (*a*), welche wieder in einander griffen, sehr genau an einander gelegt, und dann mittelst sechs Schrauben (*b*) an einander geschraubt werden konnten; die Schrauben so wie die Schraubengänge waren mit Zahlen bezeichnet, um die Genauigkeit des Verschlusses zu sichern.

Die eine, beim Versuche untere Halbkugel hatte am Scheitel eine Eingussöffnung, die mittelst eines genau eingepassten kegelförmigen Zapfens (*c*) verschliessbar war, die innere Fläche des Zapfens bildete einen integrirenden Bestandtheil der inneren hohlkugelförmigen Fläche.

Die andere Halbkugel trug an ihrem Scheitel eine Schraube (*d*), mittelst derer sie an den Rahmen des darüber befindlichen Spiegels angeschraubt werden konnte.

Die Innenfläche der Kugel war im Feuer vergoldet.

Der Spiegel (Fig. 2 stellt denselben sammt der später beschriebenen Stange mit den Laufgewichten dar) war in einem Rahmen von Messing (*a*) enthalten, und hing mit diesem blos oben durch eine Schraube (*b*) zusammen, so dass er um seine verticale Axe mit Reibung beweglich war.

Der Rahmen hatte unten eine Öffnung (*c*) zur Aufnahme der Schraube der Kugel, die daran mittelst einer Schraubenmutter (*d*) befestigt werden konnte, und oben zwei senkrechte Balken, durch einen Querbalken verbunden (*e*); zwischen diesen senkrechten Balken lief auf zwei Spitzen ein Cylinder (*f*) frei beweglich um seine horizontale Hauptaxe. Der Cylinder hatte in seiner Mitte eine Einkerbung zur Aufnahme des Aufhängungsdrathes. Der Durchmesser des Cylinders an der Einkerbung betrug 5.20 Millimeter.

Der Aufhängungsdrath, ein übersilberter Kupferdrath, war um diesen Cylinder geschlungen, und lief von da auf beiden Seiten des obersten kleinen Querbalkens, ohne jedoch diesen zu berühren, nach aufwärts.

Die Enden des Drathes liefen in Einschnitten keilförmiger Aufsätze (Fig. 3 *a*), (*A* Seitenansicht, *B* Durchschnitt), dann in einer Rinne schief nach oben und aussen, wo sie um einen Zapfen (*b*) geschlungen waren; durch Drehen dieser Zapfen konnte der Spiegel nach Belieben gesenkt oder gehoben werden. Die letzten Enden des Drathes waren endlich mittelst Schrauben festgeklemmt.

Die keilförmigen Aufsätze und die Zapfen sammt den Schrauben waren an einer Platte (*c*) befestigt, welche in beschränktem Maasse um eine verticale Axe, die gerade die Mitte zwischen den Dräthen hielt, an einer darüber befindlichen grösseren Platte (*d*) beweglich war. Um die Platte nach Belieben drehen zu können, war dieselbe mit zwei Armen versehen; an dem einen (*e*) war eine Schnur befestigt, durch deren Anziehung die Drehung erfolgte; die Weite dieser Bewegung konnte mittelst Schrauben (*f*) verändert werden. An dem anderen Arme (*g*) war eine federnde Drathspirale (*h*) angebracht, welche beim Nachlassen des Zuges an der Schnur die Platte in ihre frühere Lage wieder zurückbrachte.

Diese ganze Vorrichtung diente dazu, die aufgehängten festen Theile des Apparates in eine rotirende Bewegung um ihre verticale Hauptaxe zu versetzen, ohne der Beihilfe eines Magneten zu

bedürfen, wie dies bei den Vorversuchen der Fall war, und wodurch die Versuche nothwendig unrein werden müssen.

Die grössere Platte war an einem dicken Brette, und dieses wieder an der Decke des Zimmers befestigt. Die vorhin erwähnte Schnur lief über einer Rolle an der Zimmerdecke zu dem Platze, wo das Fernrohr stand.

Dass beim Versuche die Bewegung eine rein rotirende war, also kein Pendeln des Apparates den Versuch trübte, überzeugte ich mich durch Beobachtung des Zapfens, der die Eingussöffnung der Kugel verschloss; beobachtete ich nämlich diesen mittelst des Fernrohres, so schien er in Ruhe zu sein.

Schwieriger war es die Innenfläche der Kugel genau auf ihre Gestalt zu prüfen; ich begnügte mich da vorerst einen Stearinabguss zu machen, welcher mir zeigte, dass die Zusammensetzung aus zwei Halbkugeln die Gestalt nicht beeinträchtigte; dann legte ich eine planparallele Glasplatte, an deren untere Fläche ich einen schwarzen Punkt anbrachte, auf die Halbkugeln, verschob diese so lange, bis der Punkt die Pupille des Spiegelbildes meines beobachtenden Auges verdeckte (dabei musste der Punkt im Centrum der Kugel sich befinden), und sah zu, ob bei allen Bewegungen der Halbkugel sammt der Glasplatte die Pupille verdeckt blieb. So entdeckte ich eine sehr geringe und begrenzte Abweichung von der Kugelgestalt an der oberen Kugelschale; die übrigen Theile der Kugel schienen ganz genau gearbeitet; für die Genauigkeit der Kugelgestalt spricht endlich noch der Umstand, dass der Durchmesser der Kugel aus dem Wassergewichte, welches dieselbe fasst, berechnet 49.272 Millim. betragen müsste, und die directe Messung wirklich 49.3 Millim. ergibt.

Selbstverständlich waren Kugel und Spiegel beim Versuche in einem Kasten, ähnlich dem bei den Vorversuchen, eingeschlossen, um den störenden Einfluss der Luftströmungen zu vermindern.

Bevor ich mit Flüssigkeiten zu experimentiren beginnen konnte, musste ich das Drehungsmoment der bifilaren Aufhängung, das Torsionsmoment des Drathes, endlich das Trägheitsmoment der aufgehängten Theile kennen.

Diese Bestimmungen machte ich nach einer Methode die von Neumann herrührt¹⁾; sie besteht darin, dass man zwei Gewichte,

¹⁾ Ich verdanke sie einer mündlichen Mittheilung des Herrn Prof. Helmholtz.

für die man die Lage des Schwerpunktes kennt, nach und nach in verschiedenen Entfernungen von der Umdrehungsaxe anbringt, und die gesuchten Grössen aus den beobachteten Schwingungsdauern berechnet.

Statt der Kugel befestigte ich also an den Spiegel eine eiserne Stange, oder vielmehr ein Schraubengewinde von Eisen (Fig. 2 g), an diesem liefen vier cylindrische Gewichte von Messing (h), möglichst gleich gearbeitet, je zwei dieser Gewichte an einer Seite von der Umdrehungsaxe, und fest an einander geschraubt: der Spalt zwischen diesen Gewichten gab die Lage des Schwerpunktes der Belastung an; die Entfernung des Spaltes von der Umdrehungsaxe konnte leicht mittelst eines Zirkels gemessen werden.

Diesen Apparat versetzte ich nach der vorhin erwähnten Methode in Schwingungen, die Differentialgleichung dieser Bewegung ist:

$$M \frac{d^2 w}{dt^2} = - \left(aG + \frac{2b}{L} \right) w$$

wenn w den Ablenkungswinkel (von der Ruhelage), t die Zeit, a das Drehungsmoment der bifilaren Aufhängung, G das Gewicht der aufgehängten festen Theile, b das Torsionsmoment des Drathes für die Längeneinheit, L die Länge jedes der beiden Aufhängungsdräthe, oder vielmehr die Länge des Stückes des Aufhängungsdrathes zwischen dem Cylinder am Spiegelrahmen und dem keilförmigen Aufsatze, M das Trägheitsmoment der schwingenden festen Theile bedeutet.

Das vollständige Integral dieser Gleichung ist:

$$w = A \sin t \sqrt{\frac{aG + \frac{2b}{L}}{M}} + B \cos t \sqrt{\frac{aG + \frac{2b}{L}}{M}}$$

wo A und B die beiden willkürlichen Constanten sind.

Fangen wir die Zeit zu zählen an von dem Augenblicke, wo der Apparat die Ruhelage passirt, wo dann t und w zugleich verschwinden müssen, so wird die Constante $B=0$ und es ist,

$$w = A \sin t \sqrt{\frac{aG + \frac{2b}{L}}{M}}$$

Stellt uns T die ganze Schwingungsdauer vor, so ergibt sich daraus

$$(1) \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{M}{aG + \frac{2b}{L}}}$$

wo π in der gewöhnlichen Bedeutung gebraucht ist.

Nennen wir nun M das Trägheitsmoment, welches der Apparat hatte, wenn die Schwerpunkte beider (Doppel-) Gewichte in der Umdrehungsaxe lagen, und entfernen wir eines dieser Gewichte so weit, dass sein Schwerpunkt jetzt um R von der Umdrehungsaxe absteht, so wird jetzt $M + mR^2$ das Trägheitsmoment sein, wenn m die Masse dieses Gewichtes bezeichnet, und $M + 2mR^2$, wenn wir beide Gewichte (natürlich nach der entgegengesetzten Seite, um die Gleichgewichtslage nicht zu verändern) um R von der Umdrehungsaxe entfernen, und ebenso $M + 2mr^2$, wenn wir ein andermal die Schwerpunkte beider Doppelgewichte um r von der Umdrehungsaxe entfernt haben.

Die entsprechenden Schwingungsdauern T'' und T' werden dann sein

$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{M + 2mR^2}{aG + \frac{2b}{L}}}$$

$$T'' = 2\pi \sqrt{\frac{M + 2mr^2}{aG + \frac{2b}{L}}}$$

woraus sich ergibt:

$$aG + \frac{2b}{L} = 4\pi^2 \frac{2m(R^2 - r^2)}{T'^2 - T''^2}$$

Habe ich daher m , T'' , T' , R und r durch Versuche gefunden, so lässt sich daraus leicht die complicirte Grösse $aG + \frac{2b}{L}$ berechnen.

Bei den Versuchen, die ich anstellte, waren die einzelnen Gewichte:

1. 32520.5 Milligr.
2. 32520.0 „
3. 32514.8 „
4. 32510.0 „

Ich nahm die beiden ersten Gewichte zu dem einen, die beiden letzteren zu dem andern Doppelgewicht zusammen und werde unter

Anordnung *A* diejenige verstehen, wo das 1. und 4., unter Anordnung *B* diejenige, wo das 2. und 3. Gewicht von der Umdrehungsaxe entfernt waren.

Ferner hatte ich

$$2m = 13.25984^1).$$

Die Resultate der angestellten Versuche sind:

Nr. des Versuches	Anordnung der Gewichte	Entfernung der Schwerpunkte der Gewichte von der Umdrehungsaxe	Beobachtete Schwingungsdauer ²⁾
I.	<i>A.</i>	24.69	24.2700
II.	<i>A.</i>	55.21	40.7316
III.	<i>A.</i>	41.67	32.8896
IV.	<i>B.</i>	24.61	24.3018
V.	<i>B.</i>	56.67	41.7924
VI.	<i>B.</i>	39.10	31.4878

Daraus ergibt sich:

$$\begin{array}{ll}
 aG + \frac{2b}{L} = 1192.98 & \text{aus II. und I.} \\
 = 1189.38 & \text{„ II. „ III.} \\
 = 1197.20 & \text{„ III. „ I.} \\
 = 1179.99 & \text{„ V. „ IV.} \\
 = 1166.49 & \text{„ V. „ VI.} \\
 = 1203.40 & \text{„ VI. „ IV. } ^3).
 \end{array}$$

im Mittel ist also

$$aG + \frac{2b}{L} = 1188.57 \quad (2)$$

¹⁾ Die Gravitationsconstante zu 9808.96 angenommen.

²⁾ Die Schwingungsdauern sind alle nach Gauss' Methode, l. c. bestimmt, und selbstverständlich auf unendlich kleine Schwingungen reducirt. Zur Bestimmung selbst wandte ich ein genau gehendes Chronometer an, welches 0^m4 schlägt. Die Zahlen bedeuten Millimeter und Secunden.

³⁾ Vergleichbar sind nur die Versuche bei der nämlichen Anordnung. Worin die Schwankungen ihre Begründung finden, war ich nicht im Stande zu ermitteln; dass eine nicht allzugrosse Verschiedenheit des Abstandes der Schwerpunkte beider Gewichte die Schwingungsdauer nicht wesentlich ändert, davon überzeugte ich mich in der Art, dass ich nach dem Versuche absichtlich die Gewichte derart verschob, dass das eine der Umdrehungsaxe um 0.5 Millim. näher stand als das andere, ohne dass sich der Abstand der Gewichte von einander geändert hätte.

Die Constanten a und b bestimmte ich nun einzeln in der Weise, dass ich die Stange sammt den Gewichten ganz ebenso bei unifilarer Aufhängung schwingen liess.

Die Gleichung der Bewegung ist hier:

$$M \frac{d^2 w}{dt^2} = - \frac{b}{l} w,$$

wo l die Länge des Drathes bei unifilarer Aufhängung bedeutet.

Die Bedeutung der übrigen Buchstaben ist dieselbe wie früher.

Das vollständige Integral dieser Gleichung ist:

$$w = A \sin t \sqrt{\frac{b}{lM}} + B \cos t \sqrt{\frac{b}{lM}}$$

wo A und B die willkürlichen Constanten sind, und der zweite Theil wieder verschwindet, wenn wir die Zeit von dem Zeitpunkt zu zählen beginnen, wo der Apparat die Ruhelage passirt.

Es bleibt somit

$$w = A \sin t \sqrt{\frac{b}{lM}}$$

und wenn \mathfrak{T} die Schwingungsdauer bezeichnet, so ist,

$$(3) \quad \mathfrak{T} = 2\pi \sqrt{\frac{b}{lM}}$$

woraus wir für zwei verschiedene Entfernungen der Schwerpunkte der Gewichte von der Umdrehungsaxe, genau so wie vorhin, finden

$$b = 4\pi^2 \cdot 2ml \frac{R^2 - r^2}{\mathfrak{T}'^2 - \mathfrak{T}^2}$$

Die Bedeutung der Buchstaben ist an sich klar.

Bei den Versuchen war

$$l = 978.0 \text{ Millim.},$$

ferner:

Nr. des Versuches	Anordnung der Gewichte	Entfernung der Schwerpunkte der Gewichte von der Umdrehungsaxe	Beobachtete Schwingungsdauer
I.	B.	39.10	61.7626
II.	B.	24.69	46.9694

Daraus folgt :

$$b = 292572 \cdot 8.$$

Diesen Werth für B in die Gleichung 2) substituirt, finden wir

$$a = 0 \cdot 00316197$$

da

$$L = 2143 \cdot 2 \text{ Millim.}$$

$$G = 289549 \cdot 2 \text{ Milligr.}$$

waren.

Eine andere Methode A und B einzeln zu bestimmen, ist die Vergleichung des Versuches I bei unifilarer Aufhängung mit dem correspondirenden Versuch VI bei bifilarer Aufhängung, sowie mit dem Resultate der ganzen Versuchsreihe bei bifilarer Aufhängung; denn dividiren wir die Gleichung 1) durch die Gleichung 3) und substituiren für \mathfrak{T} und T die Werthe aus den genannten Versuchen, bei welchen beiden das Trägheitsmoment denselben Werth hat, so fällt M weg und es bleibt:

$$\frac{T}{\mathfrak{T}} = \sqrt{\frac{\frac{b}{l}}{aG + \frac{2b}{L}}}$$

woraus folgt:

$$b = \frac{T^2}{\mathfrak{T}^2} \cdot l \left(aG + \frac{2b}{L} \right)$$

wobei wir den Werth der Grösse $aG + \frac{2b}{L}$ schon kennen.

In Zahlen ergibt sich

$$b = 302132 \cdot 2$$

und somit

$$a = 0 \cdot 00313126.$$

Als Mittel aus beiden Bestimmungen ergibt sich:

$$a = 0 \cdot 00314662$$

$$b = 297352 \cdot 5$$

Diese Zahlen werde ich den künftigen Rechnungen zu Grunde legen.

Nachdem ich so das Torsionsmoment der Dräthe, und das Drehungsmoment der bifilaren Aufhängung bestimmt hatte, suchte ich den Werth des Trägheitsmomentes meiner Kugel zu finden. Zu diesem Zwecke vertauschte ich nun die Stange gegen meine Kugel, und bestimmte die Schwingungsdauer, so wie das logarithmische Decrement, welches wir in der Folge werden kennen müssen, der leer schwingenden Kugel.

Hier gilt noch immer die Formel 1)

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{M}{aG + \frac{2b}{L}}}$$

woraus sich ergibt

$$M = \frac{\left(aG + \frac{2b}{L}\right) T^2}{4\pi^2}$$

G hatte jetzt den Werth 355629·7 Milligr.; L hatte seinen vorigen Werth.

Die Versuche ergaben:

Schwingungsdauer	Logarithmisches Decrement ¹⁾
24·5438	0·0067540
24·5338	0·0063318
24·5550	0·0065974
24·4010	0·0059844
Mittel: 24·5089	0·0064669

Darnach ergibt sich:

$$M = 21248·9.$$

Ich will jetzt die Versuche folgen lassen, die ich mit einer Reihe verschiedenartiger Flüssigkeiten angestellt habe. In dem theoretischen Theile ist entwickelt, wie man aus der Abnahme der Schwingungen und aus der Änderung der Schwingungsdauer die Kraft P berechnen könne, welche von der reibenden Flüssigkeit auf die Wand des Gefässes ausgeübt wird. Die Kraft P ist dort gesetzt

¹⁾ Für die ganze Schwingungsdauer in natürlichen Logarithmen ausgedrückt.

$$P = -Ke^{-\beta t} \cos [\sigma R + \gamma t + 2\varepsilon + \delta_1]$$

und die Winkelgeschwindigkeit der schwingenden Kugel

$$\Psi = Be^{-\beta t} \cos [\sigma R + \gamma t + \varepsilon + \delta + \eta],$$

so dass der Bruch $\frac{\kappa}{B}$, welchen wir im folgenden mit \mathfrak{R} bezeichnen wollen, das Verhältniss des Maximum der Reibungskraft zum Maximum der Drehungsgeschwindigkeit angibt, und der Winkel $\varepsilon + \delta_1 - \delta - \eta$, den wir mit \mathfrak{S} bezeichnen wollen, den Phasenunterschied misst zwischen der Geschwindigkeit und der Kraft.

Diese beiden Grössen können aus den Beobachtungen unmittelbar abgeleitet werden ohne Beziehung auf irgend eine Theorie der Wasserreibung, und sie finden sich im Folgenden bei den einzelnen Versuchsreihen berechnet. Die Kraft \mathfrak{R} wird im Allgemeinen um so grösser, je grösser die innere Reibung ist, wird aber durch stattfindende Gleitung an der Oberfläche vermindert. Der Winkel \mathfrak{S} beträgt bei den am schwächsten reibenden und nicht gleitenden Flüssigkeiten 45° , und wächst bis 90° bei den stark reibenden. Er wird ebenfalls kleiner, wenn Gleitung stattfindet. Werthe unter 45° können nur im Falle der Gleitung vorkommen, während keine erhebliche Gleitung da sein kann, wenn dieser Winkel nahe an 90° beträgt¹⁾.

Es ist ausserdem die Grösse $\mathfrak{R} \cos \mathfrak{S}$ angegeben, weil diese der am genauesten zu messende Theil der Kraft \mathfrak{R} ist.

Versuche stellte ich an vorerst mit gewöhnlichem Brunnenwasser, welches jedoch nur ganz geringe Spuren fester Substanzen gelöst enthielt. Die Resultate dieser Versuche waren:

Zahl des Versuches	Schwingungsdauer	Logarithmisches Decrement	Temperatur in $^\circ\text{C}$.
I.	23·0594	0·0545336	25·4
II.	23·0600	0·0546540	25·5
III.	23·0304	0·0540690	25·9
IV.	23·0424	0·0540170	24·0
V.	23·0442	0·0531424	25·6
VI.	23·0432	0·0540620	23·6
VII.	23·0156	0·0532326	25·0
VIII.	23·0334	0·0532672	24·4
IX.	23·0342	0·0540896	23·0
X.	23·0334	0·0538632	22·4
Mittel:	23·0392	0·0538921	24·48

¹⁾ Ich verfertigte mir Kügelchen aus Kork und Siegellack von nahezu dem specifischen Gewichte des Wassers, und liess sie suspendirt in einem schwingenden mit Wasser

Aus diesen Daten berechnen sich nach den im theoretischen Theile angegebenen Regeln:

$$\Re \cos \vartheta = 88.190 \quad \Re = 99.860 \quad \vartheta = 27^\circ 58' 37''.$$

Eine zweite Versuchsreihe stellte ich mit ausgekochtem Wasser an, welches ich nach dem Auskochen vor Luftzutritt möglichst geschützt hatte. Die Resultate waren:

Zahl des Versuches	Schwingungsdauer	Logarithmisches Decrement	Temperatur in $^{\circ}$ C.
I.	22.9601	0.0528214	22.0
II.	22.9698	0.0533316	21.8
III.	22.9788	0.0537380	21.8
IV.	22.9708	0.0551898	21.6
V.	22.9818	0.0548926	22.0
VI.	22.9772	0.0555034	21.1
VII.	22.9818	0.0557462	21.7
VIII.	22.9756	0.0561178	21.8
Mittel	22.9745	0.0546676	21.72

Jetzt ergibt sich

$$\Re \cos \vartheta = 89.9064 \quad \Re = 90.7087 \quad \vartheta = 7^\circ 38' 26''^1).$$

Was die Schwankungen der Zahlenwerthe bei den einzelnen Versuchen anlangt, so sind dieselben unmöglich den Temperaturunterschieden zuzuschreiben. Die Temperaturangaben beziehen sich zwar nicht auf die Flüssigkeit selbst; denn ein Thermometer innerhalb der Kugel anzubringen war weder thunlich, noch wäre dies zweckentsprechend gewesen, da sich ja die Versuche auf ein Gefäss von regelmässiger Form beziehen sollten; ich musste mich daher begnügen, die Temperatur zu messen, die innerhalb des Kastens, in dem die Kugel eingeschlossen war, herrschte. Es konnte daher

gefüllten Gefässe; die Korkkügelchen machten nur kleine Excursionen im Sinne der Bewegung des Gefässes; hatte ich dabei vor der Bewegung mehrere Kügelchen in einer Geraden, die durch die Schwingungsaxe ging, so bildeten sie auch während des Schwingens fortwährend eine Gerade, zum Beweise, dass der Phasenunterschied in den tieferen Theilen nicht merklich variire.

¹⁾ Nur die Versuche mit ungekochtem Wasser, mit Äther, Alkohol und Schwefelkohlenstoff sind genau nach den im zweiten Theile entwickelten Regeln berechnet; doch sind die Resultate der übrigen Versuche nur äusserst wenig von diesen verschiedenen, die wir durch die angeführte Berechnungsweise erhalten hatten.

die Temperatur des Wassers eine etwas verschiedene von der angegebenen sein; aber es konnte die Temperatur des Wassers nicht steigen, während die der Umgebung sank, wie dies bei den Versuchen IX und X mit lufthaltigem Wasser z. B. der Fall hätte sein müssen; diese Versuche liegen $\frac{1}{2}$ Stunde etwa auseinander, während welcher Zeit die Temperatur der Umgebungen $0^{\circ}6$ C. abnahm — (eine Temperaturerhöhung wie sie die Reibung hervorbringen kann, hatte sich während dieser halben Stunde wohl ausgleichen müssen) — denn Erhöhung der Temperatur bringt Abnahme des logarithmischen Decrementes mit sich — davon überzeugten mich meine Vorversuche.

Ich goss ein Fläschchen, wie ich diese bei den Versuchen gebrauchte, voll mit siedendem Wasser, und machte in unmittelbarer Aufeinanderfolge (innerhalb $\frac{3}{4}$ Stunden) drei Bestimmungen des logarithmischen Decrementes; ich fand dasselbe

0·0548379

0·0581863

0·0617284

Nach Beendigung des Versuches hatte das Wasser noch $45^{\circ}6$ C.; bei $12^{\circ}1$ C. war das logarithmische Decrement bei demselben Fläschchen 0·0690776.

Die beobachteten Schwankungen glaube ich dem räthselhaften Einflusse der meteorologischen Verhältnisse, deren schon Gauss ¹⁾ erwähnt, zuschreiben zu müssen.

Ferner untersuchte ich den Einfluss, den ein grösserer oder geringerer Gehalt des Wassers an gelösten festen Theilen ausübt; ich stellte mir eine gesättigte Kochsalzlösung dar, und nahm sie zu meinen Versuchen:

I. Die gesättigte Kochsalzlösung.

Specificsches Gewicht: 1·19223 ²⁾.

Das Resultat war:

Schwingungsdauer	Logarithmisches Decrement	Temperatur
22·9464	0·0776568	24·2
22·9644	0·0733292	24·6
22·9576	0·0766932	24·7
Mittel: 22·9561	0·0758931	

¹⁾ L. c. p. 70.

²⁾ Die Bestimmungen des specifischen Gewichtes sind nicht genau gemacht; die Zahlen, welche ich für dasselbe anführe, sind die Quotienten aus dem Gewichte des Wassers

Darnach ergibt sich:

$$\mathfrak{R} \cos \mathfrak{Z} = 129.285 \quad \mathfrak{R} = 184.89 \quad \mathfrak{Z} = 45^{\circ} 38' 0''.$$

II. Drei Theile gesättigter Kochsalzlösung und ein Theil Wasser.

Specifisches Gewicht: 1.13147.

Das Resultat war:

Schwingungsdauer	Logarithmisches Decrement	Temperatur
22.9610	0.0686318	24.7
22.9832	0.0629336	24.6
22.9524	0.0644306	24.6
Mittel: 22.9655	0.0653320	

Darnach ergibt sich:

$$\mathfrak{R} \cos \mathfrak{Z} = 113.934 \quad \mathfrak{R} = 150.61 \quad \mathfrak{Z} = 40^{\circ} 50' 33''.$$

III. Einen Theil gesättigter Kochsalzlösung und einen Theil Wasser.

Specifisches Gewicht: 1.09701.

Das Resultat war:

Schwingungsdauer	Logarithmisches Decrement	Temperatur
23.0154	0.0626692	23.0
23.0004	0.0631618	23.2
22.9978	0.0641414	23.4
Mittel: 23.0045	0.0633241	

Darnach ergibt sich:

$$\mathfrak{R} \cos \mathfrak{Z} = 105.769 \quad \mathfrak{R} = 138.93 \quad \mathfrak{Z} = 40^{\circ} 25' 12''.$$

IV. Einen Theil gesättigter Kochsalzlösung und drei Theile Wasser.

Specifisches Gewicht: 1.05129.

Das Resultat war:

Schwingungsdauer	Logarithmisches Decrement	Temperatur
23.0102	0.0565488	23.4
23.0007	0.0565411	23.5
23.0104	0.0586678	23.6
Mittel: 23.0071	0.0572526	

Darnach ergibt sich:

$$\mathfrak{R} \cos \mathfrak{Z} = 94.541 \quad \mathfrak{R} = 112.35 \quad \mathfrak{Z} = 32^{\circ} 42' 8''.$$

in das Gewicht der anderen untersuchten Flüssigkeiten, welche die Kugel füllte. Die Füllung geschah fast immer bei derselben Temperatur, doch war die Waage, derer ich mich bediente wegen des grossen Gewichtes der Kugel, keine chemische.

Wir sehen also mit zunehmendem Salzgehalte die Schwingungsdauer sich vermindern, das logarithmische Decrement wachsen; Folgen davon sind Wachsen der Grösse $\mathfrak{R} \cos \mathfrak{S}$, ebenso Wachsen des Phasenunterschiedes, sowie von \mathfrak{R} ; alles Erscheinungen, die a priori zu vermuthen waren.

Die angewandten Salzlösungen waren mit Luft in Berührung gelassen; die Resultate sind daher mit jenen, welche die Versuche mit nicht ausgekochtem Wasser ergaben, vergleichbar.

Ausser den Salzlösungen untersuchte ich noch sehr leicht bewegliche Flüssigkeiten und zwar reinen und wasserfreien

Schwefelkohlenstoff.

Specifisches Gewicht: 1·26270.

Schwingungsdauer	Logarithmisches Decrement	Temperatur
22·6896	0·0409276	21·8
22·6510	0·0413798	21·9
Mittel: 22·6703	0·0411537	

Darnach ergibt sich:

$$\mathfrak{R} \cos \mathfrak{S} = 65·747 \quad \mathfrak{R} = 80·242 \quad \mathfrak{S} = 34^\circ 58' 43''$$

reinen wasserfreien

Äther.

Specifisches Gewicht: 0·715372.

Das Resultat war:

Schwingungsdauer	Logarithmisches Decrement	Temperatur
23·4500	0·0293014	21·5
23·4430	0·0304052	21·7
Mittel: 23·4465	0·0298533	

Darnach ergibt sich:

$$\mathfrak{R} \cos \mathfrak{S} = 42·696 \quad \mathfrak{R} = 60·284 \quad \mathfrak{S} = 44^\circ 54' 26''$$

und wenn nicht wasserfreien, so doch jedenfalls sehr concentrirten

Alkohol.

Specifisches Gewicht: 0·830919.

Das Resultat war:

Schwingungsdauer	Logarithmisches Decrement	Temperatur
23·4392	0·0580254	24·2
23·4480	0·0571042	23·9
Mittel: 23·4436	0·0575648	

Darnach ergibt sich:

$$\Re \cos \vartheta = 93.968 \quad \Re = 156.39 \quad \vartheta = 53^{\circ} 4' 4''.$$

Die Erhöhung der Schwingungsdauer, und beim Schwefelkohlenstoff die Erniedrigung des logarithmischen Decrementes, sowie des Reibungscoefficienten, lassen sich leicht begreifen.

Ferner untersuchte ich sehr schwer bewegliche Flüssigkeiten, und zwar

Glycerin.

Specifisches Gewicht: 1.21069.

Das Resultat war:

Schwingungsdauer	Logarithmisches Decrement	Temperatur
23.4698	0.0366622	24.8
23.4446	0.0308634	24.8
Mittel: 23.4572	0.0337628	

Darnach ergibt sich:

$$\Re \cos \vartheta = 49.9533 \quad \Re = 339.17 \quad \vartheta = 81^{\circ} 31' 49''.$$

Olivnöl.

Specifisches Gewicht: 0.907258.

Das Resultat war:

Schwingungsdauer	Logarithmisches Decrement	Temperatur
23.9052	0.0224438	23.1

Darnach ergibt sich:

$$\Re \cos \vartheta = 27.6316 \quad \Re = 313.58 \quad \vartheta = 84^{\circ} 56' 41''$$

und einen überaus zähflüssigen

Zuckersyrup.

Specifisches Gewicht: 1.38193.

Schwingungsdauer	Logarithmisches Decrement	Temperatur
23.4604	0.0076410	23.7

Darnach ergibt sich:

$$\Re \cos \vartheta = 2.62798 \quad \Re = 102.17 \quad \vartheta = 88^{\circ} 31' 34''.$$

Die Resultate, welche uns die dickflüssigen Substanzen liefern, sind sehr leicht zu begreifen; sie bewegen sich fast ganz mit dem Gefässe; daher ist der Reibungscoefficient und das logarithmische Decrement klein; denn wenn auch die Reibung an derselben Fläche grösser sein muss, als bei den leichtflüssigen Substanzen, so ist die Fläche, an der sich die Flüssigkeit reibt, nur eine sehr kleine.

Überdies untersuchte ich den Einfluss, den feste in einer Flüssigkeit suspendirte Theilchen auf die Reibung üben; zu diesem Zwecke verdünnte ich Hühnereiweiss mit Wasser, filtrirte die Flüssigkeit und setzte Kalilösung hinzu. Ich fand für diese

Eiweisslösung.

Specifisches Gewicht: 1·01624.

Schwingungsdauer	Logarithmisches Decrement	Temperatur
23·2182	0·0737284	23·0
23·1486	0·0736828	21·0
Mittel: 23·1834	0·0737056	

Woraus sich ergibt:

$$\Re \cos \vartheta = 123·891 \quad \Re = 137·51 \quad \vartheta = 44^\circ 18' 17''.$$

Hierauf emulgirte ich Öl in dieser Eiweisslösung, und fand nun für die so erhaltene

Emulsion.

Specifisches Gewicht (dieselbe als Ganzes betrachtet): 1·00504.

Schwingungsdauer	Logarithmisches Decrement	Temperatur
23·3050	0·0806436	21·5
23·3094	0·0769712	21·6
23·3036	0·0784528	21·8
Mittel: 23·3060	0·0786892	

Darnach ist:

$$\Re \cos \vartheta = 132·270 \quad \Re = 216·03 \quad \vartheta = 52^\circ 14' 48''.$$

Wir sehen also, dass durch die suspendirten festen Theilchen (Öltröpfchen mit Haptogenmembranen), die Reibung vergrössert wurde.

Endlich untersuchte ich noch einige für den Physiologen wichtige Substanzen. Ich will mich begnügen diese Untersuchungen einfach anzuführen.

Blutserum (vom Rind).

Specifisches Gewicht: 1·02600.

Schwingungsdauer	Logarithmisches Decrement	Temperatur
23·1418	0·0670804	23·5
23·1356	0·0713880	23·6
23·1450	0·0690776	23·5
Mittel: 23·1475	0·0691820	

$$\Re \cos \vartheta = 115·802 \quad \Re = 159·83 \quad \vartheta = 43^\circ 34' 18''.$$

Defibrinirtes Blut vom Rind.

Specifisches Gewicht: 1·05289.

Schwingungsdauer	Logarithmisches Decrement	Temperatur
23·2880	0·1017808	24·0
23·2332	0·0922444	24·0
Mittel: 23·2606	0·0970126	

$$\Re \cos \vartheta = 166·031 \quad \Re = 248·86 \quad \vartheta = 48^\circ 9' 10''.$$

Milch.

Specifisches Gewicht: 1·02656.

Schwingungsdauer	Logarithmisches Decrement	Temperatur
23·1742	0·0709886	24·0
23·1458	0·0649400	24·0
Mittel: 23·1600	0·0679643	

$$\Re \cos \vartheta = 113·499 \quad \Re = 162·35 \quad \vartheta = 45^\circ 38' 48''.$$

Die gefundenen Constanten sind nur für mein kugelförmiges Gefäß, für Wandungen von Gold und mittlere Sommertemperatur gültig.

$$\frac{dP}{dz} = -g, \quad \frac{dP}{dy} = \frac{dP}{dx} = 0.$$

Die Gleichungen 1 erhalten nun folgende vereinfachte Form:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{1}{h} \frac{dp}{dx} &= \frac{du}{dt} - k^2 \left[\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} \right] \dots\dots\dots \\ -\frac{1}{h} \frac{dp}{dy} &= \frac{dv}{dt} - k^2 \left[\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2v}{dz^2} \right] \dots\dots\dots \\ -g - \frac{1}{h} \frac{dp}{dz} &= \frac{dw}{dt} - k^2 \left[\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{d^2w}{dy^2} + \frac{d^2w}{dz^2} \right] \dots\dots\dots \end{aligned} \right\} 1_b$$

Es sei ρ die Entfernung vom Anfangspunkt der Coordinaten, also

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

und ψ eine Function von ρ und t , welche der Differentialgleichung genügt

$$\frac{1}{k^2} \frac{d\psi}{dt} = \frac{d^2\psi}{d\rho^2} + \frac{4}{\rho} \frac{d\psi}{d\rho} \dots\dots\dots 2$$

Dann lässt sich zeigen, dass nach Elimination von p aus den Gleichungen 1_b, die hieraus resultirenden Gleichungen und 1_a erfüllt werden durch folgende particuläre Integralgleichungen:

$$u = -y\psi, \quad v = x\psi, \quad w = 0 \dots\dots\dots 2_a$$

Die Form der Bewegung, welche diesen Integralgleichungen entspricht, ist so zu beschreiben, wie sich aus den Gleichungen 2_a leicht ergibt, dass die Wassermasse in concentrische Kugelschalen zerfällt, deren jede gleichsam wie eine feste Kugelschale drehende Bewegungen um die Z -Axe ausführt; ψ ist die Winkelgeschwindigkeit dieser Bewegung.

Aus 2_a folgt, dass

$$\frac{du}{dx} = -\frac{yx}{\rho} \frac{d\psi}{d\rho}$$

$$\frac{dv}{dy} = \frac{yx}{\rho} \frac{d\psi}{d\rho}$$

$$\frac{dw}{dz} = 0$$

Daraus ergibt sich, dass die Gleichung 1_a durch die Annahmen 2_a erfüllt ist.

Aus den Gleichungen 1_b eliminiren wir p , indem wir die erste nach y , die zweite nach x differentiiren, und die zweite von der ersten abziehen. Das gibt

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dy} \left[\frac{du}{dt} - k^2 \left(\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{d^2 u}{dz^2} \right) \right] - \\ \frac{d}{dx} \left[\frac{dv}{dt} - k^2 \left(\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2} + \frac{d^2 v}{dz^2} \right) \right] = 0 \quad . \quad . \quad . \end{aligned} \right\} 2_b$$

und ebenso eliminiren wir p aus der ersten und dritten der Gleichungen 1_b , wobei wir aber gleich bemerken wollen, dass w in 2_a gleich Null gesetzt ist, also erhalten wir

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dz} \left[\frac{du}{dt} - k^2 \left(\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{d^2 u}{dz^2} \right) \right] = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \frac{d}{dz} \left[\frac{dv}{dt} - k^2 \left(\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2} + \frac{d^2 v}{dz^2} \right) \right] = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \end{aligned} \right\} 2_c$$

Setzt man nun die Werthe von u und v aus 2_a in 2_b , so erhält man zunächst, wenn man zur Abkürzung setzt

$$\frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy} = \zeta = 2\psi + \frac{x^2 + y^2}{\rho} \frac{d\psi}{d\rho}$$

$$\frac{d\zeta}{dt} - k^2 \left(\frac{d^2 \zeta}{dx^2} + \frac{d^2 \zeta}{dy^2} + \frac{d^2 \zeta}{dz^2} \right) = 0$$

oder

$$\begin{aligned} 2 \left[\frac{d\psi}{dt} - k^2 \left(\frac{d^2 \psi}{d\rho^2} + \frac{4}{\rho} \frac{d\psi}{d\rho} \right) \right] + \\ \frac{x^2 + y^2}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left[\frac{d\psi}{dt} - k^2 \left(\frac{d^2 \psi}{d\rho^2} + \frac{4}{\rho} \frac{d\psi}{d\rho} \right) \right] = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \end{aligned} \left\} 2_c$$

Die Gleichungen 2_c geben aber beide gemeinsam die Gleichung

$$\frac{d}{dz} \left[\frac{d\psi}{dt} - k^2 \left(\frac{d^2 \psi}{d\rho^2} + \frac{4}{\rho} \frac{d\psi}{d\rho} \right) \right] = 0,$$

oder weil die hier zu differentiirende Function unmittelbar nur von ρ abhängt und $\frac{d\psi}{dz} = \frac{z}{\rho} \frac{d\psi}{d\rho}$ ist, folgt, indem man den Factor $\frac{z}{\rho}$ weglässt:

$$\frac{d}{d\rho} \left[\frac{d\psi}{dt} - k^2 \left(\frac{d^2\psi}{d\rho^2} + \frac{4}{\rho} \frac{d\psi}{d\rho} \right) \right] = 0 \quad \} 2f$$

Mit Berücksichtigung von 2_f aber verwandelt sich die Gleichung 2_e in der Gleichung 2, nämlich

$$\frac{d\psi}{dt} - k^2 \left(\frac{d^2\psi}{d\rho^2} + \frac{4}{\rho} \frac{d\psi}{d\rho} \right) = 0 \quad \} 2$$

und wenn diese erfüllt ist, ist wie man sieht, auch 2_f erfüllt, so dass also in der That die Gleichung 2 und 2_a sich als Integralgleichungen der Gleichungen 1_a und 1_b erweisen.

Setzen wir $\psi = \varphi e^{at}$, wobei wir unter φ eine Function von ρ allein verstehen, die von t unabhängig ist, so liefert die Gleichung 2 für φ folgende Differentialgleichung:

$$a \varphi - k^2 \left(\frac{d^2\varphi}{d\rho^2} + \frac{4}{\rho} \frac{d\varphi}{d\rho} \right) = 0 \quad \} 3$$

Die Gleichung 3 können wir durch zwei Reihen, die nach ganzen Potenzen von ρ fortschreiten, nach den gewöhnlichen Regeln integrieren

$$3_a \left\{ \varphi = A_0 \left\{ 1 + \frac{a\rho^2}{k^2} \cdot \frac{1}{2.5} + \left(\frac{a\rho^2}{k^2} \right)^2 \frac{1}{2.4.5.7} + \left(\frac{a\rho^2}{k^2} \right)^3 \frac{1}{2.4.6.5.7.9} \text{ etc.} \right. \right. \\ + \frac{B_0}{\rho^3} \left\{ 1 + \frac{a\rho^2}{k^2} \cdot \frac{1}{(-1).2} + \left(\frac{a\rho^2}{k^2} \right)^2 \frac{1}{(-1)(+1).2.4} + \right. \\ \left. \left. + \left(\frac{a\rho^2}{k^2} \right)^3 \frac{1}{(-1).1.3.2.4.6} \text{ etc.} \right\} \right\}$$

Diese Reihen sind bequem, wenn φ für kleine Werthe der Grösse $\frac{a\rho^2}{k^2}$ berechnet werden soll, für grössere Werthe derselben ist es vortheilhafter φ in folgender geschlossener Form auszudrücken. Man setze nämlich

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\frac{e^{n\rho}}{\rho} \right) \\ \text{oder} \quad \varphi &= \left(\frac{n}{\rho^2} - \frac{1}{\rho^3} \right) e^{n\rho} \end{aligned} \right\} 3_b$$

so ist

$$\frac{d\varphi}{d\rho} = \left(\frac{n^2}{\rho^2} - \frac{3n}{\rho^3} + \frac{3}{\rho^4} \right) e^{n\rho}$$

$$\frac{d^2\varphi}{d\rho^2} = \left(\frac{n^3}{\rho^2} - \frac{5n^2}{\rho^3} + \frac{12n}{\rho^4} - \frac{12}{\rho^5} \right) e^{n\rho}$$

also

$$a \varphi - k^2 \frac{d^2\varphi}{d\rho^2} - \frac{4k^2}{\rho} \frac{d\varphi}{d\rho} = \left[\frac{an - k^2 n^3}{\rho^2} - \frac{a - k^2 n^2}{\rho^3} \right] e^{n\rho}$$

Setzen wir also in dem Ausdruck 3_b

$$n = + \frac{1}{k} \sqrt{a}$$

so ist die Differentialgleichung 3 durch 3_b erfüllt, und sie wird auch erfüllt durch einen Ausdruck von der Form

$$\varphi = A \left(\frac{\sqrt{a}}{k\rho^2} - \frac{1}{\rho^3} \right) e^{\frac{\sqrt{a}}{k}\rho} + B \left(\frac{\sqrt{a}}{k\rho^2} + \frac{1}{\rho^3} \right) e^{-\frac{\sqrt{a}}{k}\rho} \quad 3_c$$

In unserem Falle der schwingenden Hohlkugel darf die Bewegung für $\rho = 0$ nicht discontinuirlich werden. Dadurch bestimmt sich das Verhältniss der Constanten A und B zu einander in den beiden Ausdrücken für φ in 3_a und 3_c . In 3_a wird nämlich die mit B_o multiplicirte Reihe für $\rho = 0$ unendlich, also muss $B_o = 0$ sein, und der Ausdruck reducirt sich dann auf die erste Reihe. In 3_c müssen wir $B = +A$ setzen, wie man sieht, wenn man nach Potenzen von ρ zu entwickeln anfängt, und wir haben also schliesslich für unseren Zweck folgende beiden einander gleichen Ausdrücke für φ

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{2n^3 A}{3} \left\{ 1 + \frac{n^2 \rho^2}{2 \cdot 3} + \frac{n^4 \rho^4}{2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 7} + \frac{n^6 \rho^6}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 9} \text{ etc.} \right\} = \left\{ 3_d \right. \\ &= A \frac{n}{\rho^2} \left(e^{n\rho} + e^{-n\rho} \right) - \frac{A}{\rho^3} \left(e^{n\rho} - e^{-n\rho} \right) \end{aligned}$$

worin

$$n = + \frac{1}{k} \sqrt{a}$$

Der letztere Ausdruck führt unmittelbar zu folgendem Ausdrucke für ψ

$$\psi = \varphi e^{\alpha t} = A \frac{n}{\rho^2} \left(e^{n\rho + \alpha t} + e^{-n\rho + \alpha t} \right) - \frac{A}{\rho^3} \left(e^{n\rho + \alpha t} - e^{-n\rho + \alpha t} \right) \quad \left. \vphantom{\frac{n}{\rho^2}} \right\} 4$$

In den Fällen unserer Beobachtung ist nun ψ von der Form

$$\psi = \varphi e^{-\beta t} \cos \gamma t,$$

wir müssen also der Grösse α in den bisherigen Ausdrücken den complexen Werth

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= -\beta + i\gamma \\ i &= \sqrt{-1} \end{aligned} \right\} 4_a$$

beilegen, oder wenn wir setzen

$$\left. \begin{aligned} m &= \sqrt{\beta^2 + \gamma^2} \\ -\frac{\gamma}{\beta} &= \tan 2\varepsilon \end{aligned} \right\} 4_b$$

so ist

$$\alpha = m \cos 2\varepsilon + im \sin 2\varepsilon = m e^{2\varepsilon i}$$

wobei zu bemerken ist, dass der Winkel 2ε , weil seine Tangente negativ ist, grösser als ein Rechter sein muss. Der Winkel ε liegt also zwischen 45° und 90° .

Daraus folgt weiter

$$n = \frac{1}{k} \sqrt{m} = \frac{\sqrt{m}}{k} e^{\varepsilon i} = \frac{\sqrt{m}}{k} (\cos \varepsilon + i \sin \varepsilon).$$

Setzen wir

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \frac{\sqrt{m}}{k} \sin \varepsilon \\ \tau &= \frac{\sqrt{m}}{k} \cos \varepsilon \end{aligned} \right\} 4_c$$

also

$$n = \tau + \sigma i$$

und führen die in 4_a , 4_b , 4_c angezeigten Substitutionen in den Werth von ψ ein, so wird

$$\psi = \frac{AVm}{k\rho^2} e^{-\beta t} \left[e^{\tau\rho + \iota(\sigma\rho + \gamma\tau + \varepsilon)} + e^{-\tau\rho + \iota(\gamma\tau - \sigma\rho + \varepsilon)} \right] \\ - \frac{A}{\rho^3} e^{-\beta t} \left[e^{\tau\rho + \iota(\gamma\tau + \rho\tau)} - e^{-\tau\rho + \iota(\gamma\tau - \sigma\rho)} \right]$$

ψ ist eine complexe Grösse, ihr reeller, wie ihr imaginärer Theil für sich genommen, müssen der Differentialgleichung 2 genügen. Wir brauchen für unseren Zweck nur einen von beiden hier anzuwenden, und wollen den reellen nehmen. So wird endlich

$$\psi = \frac{AVm}{k\rho^2} \left[e^{\tau\rho - \beta t} \cos(\sigma\rho + \gamma t + \varepsilon) + e^{-\tau\rho - \beta t} \cos(\sigma\rho - \gamma t - \varepsilon) \right] \\ - \frac{A}{\rho^3} \left[e^{\tau\rho - \beta t} \cos(\sigma\rho + \gamma t) - e^{-\tau\rho - \beta t} \cos(\sigma\rho - \gamma t) \right] \} 4d$$

Da ψ die Winkelgeschwindigkeit der schwingenden Wassertheilchen bezeichnet, so wird ihre Tangentialgeschwindigkeit $\psi\rho \sin \omega$ sein, unter ω den Winkel zwischen ρ und der Rotationsaxe verstanden. Die Glieder, welche $\cos(\sigma\rho + \gamma t)$ enthalten, entsprechen einem Zuge von Wellen, welche von der Peripherie der Kugel gegen ihren Mittelpunkt laufen, und zwar mit schnell abnehmender Intensität, weil sie mit $e^{\tau\rho}$ multiplicirt sind. Übrigens führen dabei die Wassertheilchen Schwingungen aus, die gegen ihre Fortpflanzungsrichtung transversal sind, wie die Lichtschwingungen. Die Glieder, welche $\cos(\sigma\rho - \gamma t)$ enthalten, entsprechen dagegen Wellen, welche vom Mittelpunkte gegen die Peripherie laufen, auch mit abnehmender Intensität, weil sie mit $e^{-\tau\rho}$ multiplicirt sind. Im Mittelpunkte selbst, werden zwar diese Glieder scheinbar unendlich gross, weil sie mit negativen Potenzen von ρ multiplicirt sind, in Wahrheit aber heben sich die unendlich werdenden Glieder hier gegenseitig auf, wie man sieht, wenn man sich die andere Form von φ in \S_a , wo es nach ganzen Potenzen von ρ entwickelt ist, in derselben Weise zurecht macht:

$$\psi = \frac{2mV_m}{3k^3} A e^{-\beta t} \left\{ \cos(3\varepsilon + \gamma t) + \frac{m\rho^2}{k^2} \cdot \frac{\cos(5\varepsilon + \gamma t)}{2 \cdot 5} \right. \\ \left. + \frac{m^2\rho^4}{k^4} \cdot \frac{\cos(7\varepsilon + \gamma t)}{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7} + \text{etc.} \right\} 4e$$

Da wir vorausgesetzt haben, dass keine Kräfte ausser der Schwere auf das Innere der Wassermasse wirken, und in ihrem Innern alle Werthe der Geschwindigkeit endlich und continuirlich ausfallen, so können die Kräfte, welche sie in Bewegung setzen, nur auf die äusserste Schicht wirken. Diese ist bei unseren Versuchen in der That mit dem Gefäss in Berührung, und wird von diesem durch Reibung bewegt. Wir können uns also die ganze Bewegung so vorstellen, dass von dieser Oberfläche aus Rotationswellen nach innen laufen, aber mit schnell abnehmender Intensität, und im Mittelpunkte reflectirt wieder zurückkehren. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit dieser Wellen ist gleich $\frac{\gamma}{\sigma} = 2\sqrt{m \cos \varepsilon}$, oder wenn wir die Schwingungen der Oberfläche constante Amplitude behalten lassen, also $\beta = 0$ setzen, und $T = \frac{2\pi}{\gamma} = \frac{2\pi}{m}$ die Schwingungsdauer nennen

$$\frac{\gamma}{\sigma} = k \sqrt{2m} = 2k \sqrt{\frac{\pi}{T}}.$$

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist also von der Schwingungsdauer abhängig. Die Wellenlänge ist $2k \sqrt{\pi T}$, also nicht wie bei den Schall- und Lichtwellen der Schwingungsdauer selbst, sondern ihrer Quadratwurzel proportional. Während die Welle eine Wellenlänge durchläuft, wird ihre Amplitude von 1 auf $e^{-\pi}$, d. h. von 1 auf $\frac{1}{533}$ verkleinert. Beispielsweise beträgt sie in den Versuchen von Piotrowski mit Wasser etwa 16 Millimeter bei einer Schwingungsdauer von 23 Secunden. Daraus geht hervor, wie schnell sich die Bewegung in kleiner Entfernung von der Oberfläche bis zum Verschwinden schwächt. Je grösser dagegen der Reibungscoefficient ist, desto grösser ist die Wellenlänge, und auf desto grössere Strecken pflanzt sich daher auch die Bewegung in der Flüssigkeit merklich fort.

§. 2.

Bedingungen für die Oberfläche der Flüssigkeit.

Aus den theoretischen Betrachtungen der genannten Mathematiker folgt, dass die Componenten X , Y , Z der Kraft, mit welcher die bewegte Flüssigkeit auf eine oberflächliche Schicht wirkt, wenn

α, β, γ die Winkel sind, welche die nach der Flüssigkeit hin gerichtete Normale der Oberfläche mit den positiven Coordinataxten bildet, folgende Werthe für die Einheit der Fläche haben:

$$\left. \begin{aligned} X &= hk^2 \left[2 \frac{du}{dx} \cos \alpha + \left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} \right) \cos \beta + \left(\frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx} \right) \cos \gamma \right] \\ Y &= hk^2 \left[\left(\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dy} \right) \cos \alpha + 2 \frac{dv}{dy} \cos \beta + \left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} \right) \cos \gamma \right] \\ Z &= hk^2 \left[\left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz} \right) \cos \alpha + \left(\frac{dw}{dy} + \frac{dv}{dz} \right) \cos \beta + 2 \frac{dw}{dz} \cos \gamma \right] \end{aligned} \right\} \S$$

An der Kugeloberfläche ist

$$\cos \alpha = \frac{-x}{\rho}, \quad \cos \beta = \frac{-y}{\rho}, \quad \cos \gamma = \frac{-z}{\rho}$$

daraus ergibt sich, wenn man die Werthe von u, v, w aus 2_a hier einsetzt:

$$\left. \begin{aligned} X &= hk^2 y \frac{d\psi}{d\rho} \\ Y &= -hk^2 x \frac{d\psi}{d\rho} \\ Z &= 0 \end{aligned} \right\} \S a$$

Diese Kraft wirkt also in Richtung der Rotationsbewegung der Oberfläche mit der Intensität

$$\sqrt{X^2 + Y^2} = -hk^2 \frac{d\psi}{d\rho} \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Dieser Kraft, welche das bewegte Wasser auf seine äusserste Schicht ausübt, muss nun das Gleichgewicht gehalten werden durch die Kraft, welche die Gefässwand auf die äusserste Wasserschicht ausübt. Wenn wir die Componenten der Geschwindigkeit der Gefässwand mit U, V, W bezeichnen, so ist der theoretische Ausdruck für die Componenten der Kraft, welche von der Wand auf die äusserste Wasserschicht ausgeübt werden, und die mit $-X, -Y$ bezeichnet werden können, da sie den Kräften der Gleichungen § und §_a das Gleichgewicht halten müssen

$$\left. \begin{aligned} - X &= \frac{hk^2}{\lambda} (U-u) \\ - Y &= \frac{hk^2}{\lambda} (V-v) \\ - Z &= \frac{hk^2}{\lambda} (W-w) \end{aligned} \right\} 5_b$$

worin λ eine von der Natur der Flüssigkeit und des Gefässes abhängige Constante bezeichnet.

Setzen wir die Rotationsgeschwindigkeit des Gefässes in unserem Falle gleich Ψ , und demgemäss

$$U = -y \Psi, \quad V = x \Psi, \quad W = 0,$$

so wird

$$\begin{aligned} X &= hk^2 y \frac{d\psi}{d\rho} = \frac{hk^2}{\lambda} y (\Psi - \phi) \\ - Y &= hk^2 x \frac{d\psi}{d\rho} = \frac{hk^2}{\lambda} x (\Psi - \phi) \\ Z &= 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass sein muss

$$\lambda \frac{d\psi}{d\rho} = (\Psi - \phi) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \left. \right\} 5_d$$

als Grenzbedingung für die Oberfläche der Flüssigkeit. Diese Gleichung bezeichnet zugleich den Sinn der Constante λ . Sie ist eine Länge, welche angibt, in welcher Entfernung jenseits der Wand die Bewegung des Wassers der der Wand gleich sein würde, wenn $\frac{d\psi}{d\rho}$ constant bliebe, wie man sieht, wenn man schreibt:

$$\Psi = \phi + \lambda \frac{d\psi}{d\rho} \quad .$$

Eine zweite Grenzbedingung, die im Allgemeinen aufgestellt werden muss, dass die Bewegung der oberflächlichsten Flüssigkeitstheile sich der Bewegung der Oberfläche anpasse, ist in unserem Falle jedenfalls erfüllt, da alle Theilchen der Flüssigkeit wie der Wand concentrische Kreisbahnen beschreiben.

Um die Gleichung \S_d zu erfüllen, berechnen wir den Werth von $\frac{d\psi}{d\rho}$, welcher ist

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{d\rho} = & \frac{Am}{k^2\rho^2} e^{-\beta t} \left[e^{\tau\rho} \cos(\sigma\rho + \gamma t + 2\varepsilon) - e^{-\tau\rho} \cos(\sigma\rho - \gamma t - 2\varepsilon) \right] \\ & - \frac{3A\mathcal{V}_m}{k\rho^3} e^{-\beta t} \left[e^{\tau\rho} \cos(\sigma\rho + \gamma t + \varepsilon) + e^{-\tau\rho} \cos(\sigma\rho - \gamma t - \varepsilon) \right] \\ & + \frac{3A}{\rho^4} e^{-\beta t} \left[e^{\tau\rho} \cos(\sigma\rho + \gamma t) - e^{-\tau\rho} \cos(\sigma\rho - \gamma t) \right] \cdot \cdot \cdot \} 6 \end{aligned}$$

oder zur Berechnung für kleine Werthe von $\sigma\rho$

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{d\rho} = & \frac{2m^2}{15k^4} A e^{-\beta t} \left\{ \frac{\mathcal{V}_{m\rho}}{k} \cos(5\varepsilon + \gamma t) + \left(\frac{\mathcal{V}_{m\rho}}{k} \right)^3 \frac{\cos(7\varepsilon + \gamma t)}{2 \cdot 7} + \right. \\ & \left. + \left(\frac{\mathcal{V}_{m\rho}}{k} \right)^5 \frac{\cos(9\varepsilon + \gamma t)}{2 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 9} \text{ etc. } \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \right\} 6_a \end{aligned}$$

Der Kürze wegen wollen wir uns den Werth von ψ für die Oberfläche der Flüssigkeit aus 4d genommen, geschrieben denken

$$\psi = C e^{-\beta t} \cos(\sigma R + \gamma t + \varepsilon + \delta) \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \} 6_c$$

und den von $\frac{d\psi}{d\rho}$ in 6 und 6a

$$\frac{d\psi}{d\rho} = C_1 e^{-\beta t} \cos(\sigma R + \gamma t + 2\varepsilon + \delta_1) \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \} 6_f$$

wo C , C_1 , δ und δ_1 Functionen von R sind, welches der Werth von ρ an der Oberfläche der Kugel sei.

Die Grenzbedingung \S_a erfordert also, dass die Rotationsgeschwindigkeit des Gefässes folgende sei:

$$\psi = C e^{-\beta t} \cos(\sigma R + \gamma t + \varepsilon + \delta) + \lambda C_1 e^{-\beta t} \cos(\sigma R + \gamma t + 2\varepsilon + \delta_1)$$

oder

$$\begin{aligned} e^{\beta t} \psi = & \left[C + \lambda C_1 \cos(\varepsilon + \delta_1 - \delta) \right] \cos(\sigma R + \gamma t + \varepsilon + \delta) - \\ & - \lambda C_1 \sin(\varepsilon + \delta_1 - \delta) \sin(\sigma R + \gamma t + \varepsilon + \delta_1) \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \} 6_b \end{aligned}$$

oder wenn wir setzen der Kürze wegen

$$\left. \begin{aligned} B^2 &= C^2 + 2\lambda CC_1 \cos(\varepsilon + \delta_1 - \delta) + \lambda^2 C_1^2 \\ \text{tang } \eta &= \frac{\lambda C_1 \sin(\varepsilon + \delta_1 - \delta)}{C + \lambda C_1 \cos(\varepsilon + \delta_1 - \delta)} \end{aligned} \right\} 6_c$$

woraus folgt

$$B = \frac{C \sin(\varepsilon + \delta_1 - \delta)}{\sin(\varepsilon + \delta_1 - \delta - \eta)},$$

so wird

$$\psi = B e^{-\beta t} (\sigma R + \gamma t + \varepsilon + \delta + \eta) \left. \vphantom{\frac{1}{\beta}} \right\} 6_d$$

Hat also die Bewegung des Gefässes den letzteren Werth, so ist die Bewegung des Wassers in demselben durch die Gleichungen 2_a und 4_d vollständig gegeben, und es sind alle Bedingungen der Aufgabe, so weit sie die Bewegung des Wassers betreffen, erfüllt.

§. 3.

Bewegung des Gefässes.

Wir müssen uns schliesslich überzeugen, ob die in der Gleichung 6_d vorgeschriebene Bewegung des Gefässes den Bedingungen von Piotrowski's Versuchen genügt.

Die Kräfte, welche auf das Gefäss wirken, sind erstens die durch seine Aufhängung bedingten richtenden Kräfte. Wenn wir den Ablenkungswinkel des Gefässes von der Gleichgewichtslage mit Ω bezeichnen, sei das Moment dieser Kräfte $-f^2 \Omega$, wo also nach den oben von Piotrowski angewendeten Bezeichnungen

$$f^2 = a(G + g) + \frac{2b}{L},$$

ausserdem wirkt die Kraft der Reibung, und zwar des Wassers, deren Drehungsmoment wir P nennen wollen, und die der Luft, welche P^1 sei.

Ist also M das Trägheitsmoment des Gefässes mit dem daran befestigten Spiegel und der mitschwingenden Luft zusammengekommen, so ist

$$\frac{M d^2 \Omega}{dt^2} = -f^2 \Omega + P + P^1 \dots \dots \left. \vphantom{\frac{1}{M}} \right\} 7.$$

Bestimmen wir jetzt das Drehungsmoment P der Wasserreibung.

Die Kräfte, welche vom Wasser auf das Gefäss wirken, sind gleich den oben gefundenen Werthen der Kräfte, welche die bewegte Wassermasse auf ihre äusserste Schicht ausübt (Gleichung 5_c). Es ist also, wenn do das Element der Oberfläche bezeichnet

$$P = - \int (Xy - Yx) do = - hk^2 \int (x^2 + y^2) \frac{d\phi}{d\rho} do .$$

Wenn wir ω den Winkel nennen, den ρ mit der z -Axe bildet, ist

$$x^2 + y^2 = R^2 \sin^2 \omega \quad , \quad do = 2\pi R^2 \sin \omega d\omega$$

$$\begin{aligned} P &= - 2\pi hk^2 R^4 \frac{d\phi}{d\rho} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \omega d\omega \\ &= - \frac{8}{3} \pi hk^2 R^4 \frac{d\phi}{d\rho} \} \tau_a \end{aligned}$$

oder wenn gesetzt wird

$$\frac{8}{3} \pi hk^2 R^4 C_1 = K$$

$$P = - Ke^{-\beta t} \cos(\sigma R + \gamma t + 2\varepsilon + \delta_1) \} \tau_b$$

Was den Widerstand der Luft betrifft, so zerfällt er in zwei Theile. Der eine Theil, welcher von Bewegung der Luft herrührt, so weit sie auch ohne Reibung der Oberfläche des schwingenden Apparats eintreten würde, ist unabhängig von der Schwingungsdauer, und hat, wie Bessel gezeigt hat, nur denselben Einfluss, welchen eine Vermehrung des Trägheitsmomentes haben würde. Da übrigens in unseren Versuchen das Trägheitsmoment durch die Schwingungsdauer bestimmt ist, so enthält es schon das der mitschwingenden Luft in sich. Dann aber wirkt die Luft durch ihre Reibung an der äusseren Fläche des Apparats in derselben Weise, wie das Wasser an der inneren Fläche, und bringt dadurch einen zweiten Theil des Widerstandes hervor, der, wie Stokes für schwingende Pendel gezeigt hat, von der Schwingungsdauer abhängig ist, und ebenso in

Form einer periodischen Kraft erscheint, wie die Wasserreibung, so dass wir setzen können

$$P^1 = K_1 e^{-\beta t} \cos(\sigma R + \gamma t + 2\varepsilon + \delta_{II}) \dots \} \tau_c$$

Die Grösse Ω endlich in der Gleichung 7 ist dadurch gegeben, dass

$$\frac{d\Omega}{dt} = \Psi = B e^{-\beta t} \cos(\sigma R + \gamma t + \varepsilon + \delta + \eta)$$

ist, daraus folgt

$$\Omega = \frac{1}{m} B e^{-\beta t} \cos(\sigma R + \gamma t - \varepsilon + \delta + \eta) \dots \} \tau_d$$

und

$$\frac{d^2\Omega}{dt^2} = m B e^{-\beta t} \cos(\sigma R + \gamma t + 3\varepsilon + \delta + \eta) \dots \} \tau_e$$

Wenn man nun aus τ_b , τ_c , τ_d und τ_e die Werthe in 7 einträgt, und gleichzeitig die einzelnen Glieder zerlegt in solche, welche mit $\cos(\sigma\rho + \gamma t - \varepsilon + \delta + \eta)$ multiplicirt sind, und solche, welche mit dem Sinus desselben Winkels multiplicirt sind, so hat man einzeln die mit dem Cosinus multiplicirten Glieder gleich Null zu setzen, und ebenso die mit dem Sinus multiplicirten, und erhält folgende zwei Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} MmB \cos 4\varepsilon + f^2 \frac{1}{m} B &= -K \cos(3\varepsilon + \delta_1 - \eta - \delta) - \\ &\quad - K_1 \cos(3\varepsilon + \delta_{II} - \delta) \\ MmB \sin 4\varepsilon &= -K \sin(3\varepsilon + \delta_1 - \eta - \delta) - \\ &\quad - K_1 \sin(3\varepsilon + \delta_{II} - \delta) \end{aligned} \right\} 8$$

Durch diese beiden Gleichungen werden schliesslich die Werthe von m und ε , oder die davon abhängigen von β und γ (Gleichungen 4_b) bestimmt. Von letzteren hängt die Grösse der Schwingungsabnahme und Schwingungsdauer ab. Übrigens ist zu bemerken, dass die Gleichungen 8, wenn sie nach m und ε aufgelöst werden sollen, ausserordentlich verwickelt sind, da das Verhältniss $\frac{K_1}{B}$ und $\frac{K_{II}}{B}$, ebenso die Winkel δ , δ_1 , δ_{II} und η wieder von ε und m und zwar meist durch transcendente Gleichungen abhängen.

Damit ist denn vollständig erwiesen, dass das in den Gleichungen 2_a und 4_a hingestellte particuläre Integral der hydrodynamischen Gleichungen 1 und 1_a bei passender Bestimmung der constanten Grössen allen Bedingungen unserer Aufgabe genügt.

§. 4.

Berechnung der Versuche.

Bei den Versuchen ist uns ausser dem Drehungsmomente f^2 das logarithmische Decrement des Schwingungsbogens Δ und die Schwingungsdauer T gegeben. Wenn Ω_0 und Ω_1 zwei auf einander folgende Maxima der Ablenkung nach derselben Seite hin sind, so ist

$$\Omega_1 = \Omega_0 e^{-\beta T}$$

und wenn man auf beiden Seiten die natürlichen Logarithmen nimmt

$$\Delta = \log . \text{ nat . } \Omega_0 - \log . \text{ nat . } \Omega_1 = \beta T$$

also

$$\beta = \frac{\Delta}{T} \} 9$$

Da in dem Ausdrücke für Ω unter dem Cosinuszeichen t mit γ multiplicirt ist, so ist

$$\gamma = \frac{2\pi}{T} \} 9_a$$

Dadurch ist weiter gegeben mittelst der Gleichungen 4_b

$$m = \sqrt{\beta^2 + \gamma^2}$$

$$\text{tang } 2 \varepsilon = - \frac{\beta}{\gamma}$$

Es ist 2ε ein Winkel zwischen 90° und 180° , weil seine Tangente negativ ist.

Aus diesen müssen nun mittelst der Gleichungen 8 die Reibungsconstanten k und λ berechnet werden. Da die hierin vorkommende Grösse M , selbst nur aus Schwingungsversuchen mit Luftreibung genommen ist, können wir zu ihrer Elimination noch zwei ähnliche

Gleichungen hinzunehmen, die sich auf die Versuche mit der leeren Kugel beziehen.

Diese Rechnung ist nun ziemlich complicirt wegen der transcendenten Gleichungen, welche den Werth von ψ und $\frac{d\psi}{d\rho}$ ausdrücken.

Man bringe zunächst die Gleichungen 8, indem man die unter 6c angegebenen Werthe von B berücksichtigt, und $K_i = K_{ii} B \sqrt{m}$ setzt, in folgende Form

$$\left. \begin{aligned} -\frac{K}{C} \frac{\cos(3\varepsilon + \delta_1 - \gamma - \delta) \sin(\varepsilon + \delta_1 - \gamma - \delta)}{\sin(\varepsilon + \delta_1 - \delta)} &= Mm \cos 4\varepsilon + \frac{1}{m} f^2 + \\ &+ K_{ii} \sqrt{m} (\cos 3\varepsilon + \delta_{ii} - \delta) \\ -\frac{K}{C} \frac{\sin(3\varepsilon + \delta_1 - \gamma - \delta) \sin(\varepsilon + \delta_1 - \gamma - \delta)}{\sin(\varepsilon + \delta_1 - \delta)} &= Mm \sin 4\varepsilon + \\ &+ K_{ii} \sqrt{m} \sin(3\varepsilon + \delta_{ii} - \delta) \end{aligned} \right\} 9_b$$

Auf der rechten Seite sind nun noch näher die von der Luftreibung herrührenden mit K_{ii} multiplicirten Ausdrücke zu bestimmen. In solchen Räumen, gegen deren Dimensionen die Wellenlänge der vorhandenen Luftschwingungen sehr gross ist, unterscheiden sich die Bewegungen der Luft nicht von denen einer incompressiblen Flüssigkeit. Die Luftreibung wird also im Innern der Kugel auf die schwingende Kugel einen ganz ähnlichen Einfluss haben, wie die Bewegung der eingeschlossenen Flüssigkeiten. Da übrigens ihr Einfluss sehr klein ist, und nur eine Correction für die Werthe der Wasserreibung bildet, so wird es genügen, wenn wir das grösste Glied ihres Einflusses allein berücksichtigen, indem wir $\frac{1}{\sigma \rho}$, welches für die beweglichen Flüssigkeiten eine kleine Grösse ist, auch für die Luftreibung als eine solche annehmen. Dann reducirt sich in den Versuchen mit leerer Kugel der Werth von ϕ an der innern Oberfläche auf

$$\left. \begin{aligned} \phi &= \frac{A \sqrt{m}}{k R^2} e^{-\beta t + \tau R} \cos(\sigma R + \gamma t + \varepsilon) \\ \frac{d\phi}{d\rho} &= \frac{A m}{k^2 R^2} e^{-\beta t + \tau R} \cos(\sigma R + \gamma t + 2\varepsilon) \end{aligned} \right\} 9_c$$

Da wir nun weiter für diesen Fall gesetzt haben

$$\begin{aligned} \phi &= C e^{-\beta t} \cos(\sigma R + \gamma t + \varepsilon + \delta) \\ \frac{d\phi}{d\rho} &= C_1 e^{-\beta t} \cos(\sigma R + \gamma t + 2\varepsilon + \delta_1) \end{aligned}$$

so wird in diesem Falle $\delta = \delta_1 = 0$ und

$$C_1 = \frac{\sqrt{m}}{k} C.$$

Für die Luftreibung ist nun weiter die Constante λ der Oberflächenreibung nach den Untersuchungen von Stokes über den Luftwiderstand bei Pendelschwingungen gleich Null zu setzen. Wenn diese gleich Null ist, wird auch $\eta = 0$ und $B = C$ und man erhält aus \mathcal{T}_a

$$K_1 = \frac{8}{3} \pi h k \sqrt{m} R^3 B.$$

Es findet sich also für diese Reibung das Verhältniss $\frac{K_1}{B}$ der Grösse \sqrt{m} proportional, und nicht proportional m , wie es sein würde, wenn man, wie gewöhnlich bisher geschehen ist, die Reibung einfach der Winkelgeschwindigkeit proportional setzen würde. Die Constante K_1 , welche wir gleich $\frac{K_1}{B \sqrt{m}}$ gesetzt haben, wird also unabhängig von der Schwingungsdauer. Dieselbe Annahme wird nun für die Luftreibung im Allgemeinen zu machen sein, denn sie bestätigt sich sowohl, wenn man aus den Gleichungen \mathcal{J}_b sich das zweite Integral für die Reibung an der äusseren Fläche der Kugel herleitet, als auch in den von Stokes ausgeführten Untersuchungen über die Luftreibung an Pendeln, so bald wie in unserem Falle die Dimensionen des schwingenden Körpers und seines Gehäuses gross gegen die Wellenlänge der bei der Reibung entstehenden transversalen Wellen sind. Der von der Reibung der Luft unabhängige Theil des Luftwiderstandes erscheint, wie schon bemerkt wurde, nur als eine Vergrösserung des Trägheitsmomentes.

Die Constante K_1 müssen wir aus den Schwingungsversuchen an der leeren Kugel bestimmen. Es werden für diese Versuche die Gleichungen 8, indem wir den Winkel δ_1 , der dem $\delta_1 - \eta$ bei der Wasserreibung entspricht, gleich Null setzen:

$$\begin{aligned} M m_0^3 \cos(4\varepsilon_0) + f_0^2 &= - K_1 m_0 \sqrt{m_0} \cos(3\varepsilon_0) \\ M m_0 \sin 4\varepsilon_0 &= - K_1 \sqrt{m_0} \sin(3\varepsilon_0). \end{aligned}$$

Es sind hier die Grössen, deren Werth bei den Schwingungen der gefüllten Kugel ein anderer ist, durch den Index o unterschieden. Aus diesen Gleichungen ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} M m_0^2 \sin \varepsilon_0 &= f_0^2 \sin (3\varepsilon_0) \\ K_{,,} m_0 \sqrt{m_0} \sin \varepsilon_0 &= f_0^2 \sin (4\varepsilon_0) \end{aligned} \right\} 9_d$$

Aus diesen beiden Gleichungen sind die Grössen M und $K_{,,}$ zu finden, und ist in 9_b ebenfalls der Winkel $d_{,,}$ zu vernachlässigen.

Bezeichnen wir nun der Abkürzung wegen die bekannten auf der rechten Seite der Gleichungen 9_b stehenden Grössen durch besondere Buchstaben, setzen also

$$\begin{aligned} F_i &= \frac{3}{8\pi h R^4} \left\{ M m \cos 4\varepsilon + \frac{1}{m} f^2 + K_{,,} \sqrt{m} \cos 3\varepsilon \right\} \\ F_{,,} &= \frac{3}{8\pi h R^4} \left\{ M m \sin 4\varepsilon + K_{,,} \sqrt{m} \sin 3\varepsilon \right\} \end{aligned}$$

so ist:

$$\begin{aligned} -k^2 \frac{C_1}{C} \frac{\cos (3\varepsilon + \delta_1 - \eta - \delta) \sin (\varepsilon + \delta_1 - \eta - \delta)}{\sin (\varepsilon + \delta_1 - \delta)} &= F_i \\ -k^2 \frac{C_1}{C} \frac{\sin (3\varepsilon + \delta_1 - \eta - \delta) \sin (\varepsilon + \delta_1 - \eta - \delta)}{\sin (\varepsilon + \delta_1 - \delta)} &= F_{,,} \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} -k^2 \frac{C_1}{C} \frac{\cos (3\varepsilon + \delta_1 - \eta - \delta) \sin (\varepsilon + \delta_1 - \eta - \delta)}{\sin (\varepsilon + \delta_1 - \delta)} \\ -k^2 \frac{C_1}{C} \frac{\sin (3\varepsilon + \delta_1 - \eta - \delta) \sin (\varepsilon + \delta_1 - \eta - \delta)}{\sin (\varepsilon + \delta_1 - \delta)} \end{aligned}} \right\} 9_e$$

Hierbei ist zu bemerken, dass der Werth von $F_{,,}$ aus den Versuchen mit ziemlicher Genauigkeit zu finden ist, da er hauptsächlich von m und ε , d. h. den ganzen Werthen der Schwingungsdauer und des logarithmischen Decrements abhängt, und beide sehr genau bestimmt werden konnten.

In dem Ausdrücke, welcher $F_{,,}$ gleich gesetzt ist in 9_e , hat der Winkel η einen verhältnissmässig geringen Einfluss, weil 2ε nahezu gleich einem Rechten ist, und daher nahehin

$$\sin (3\varepsilon + \delta_1 - \eta - \delta) \sin (\varepsilon + \delta_1 - \eta - \delta) = \frac{1}{2} \sin 2(\varepsilon + \delta_1 - \eta - \delta).$$

Wenn nun aber die Winkel δ_1 δ und η klein sind, wie es bei beweglichen Flüssigkeiten mit den beiden ersten wenigstens der Fall ist, so ist der doppelte Winkel rechts nahehin gleich einem Rechten, und der Sinus eines solchen Winkels ist immer wenig von 1 unterschieden.

Somit verschwindet der Einfluss des Winkels η fast ganz aus dieser Gleichung, und man hat Gelegenheit aus ihr die innere Reibungsconstante ziemlich genau zu finden, selbst wenn der Werth η ungenau gefunden worden wäre, vorausgesetzt nur, dass η klein bleibe.

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tang} \hat{\sigma} &= \frac{\frac{k_1}{\sqrt{m}} \sin \varepsilon}{1 - \frac{k_1}{\sqrt{m}} \cos \varepsilon} \\ \operatorname{tang} (\varepsilon + \delta_1 - \delta) &= \frac{\operatorname{tang} \varepsilon - \delta}{1 - \frac{3 \sin \delta \sin \varepsilon}{\cos (\varepsilon - \delta) \sin^2 (\varepsilon + \delta)}} \\ k_n &= J \frac{\sin \varepsilon \cdot \sin^2 (\varepsilon + \delta_1 - \delta)}{\sqrt{m} \sin (\varepsilon - \delta) \sin (\varepsilon + \delta)} \end{aligned} \right\} 10a$$

Diese Formeln sind berechnet aus den Gleichungen 4_d, 6 und 10 mit Berücksichtigung der in 6_e und 6_f eingeführten Bezeichnungen. Doch sind in 4_d und 6 die mit $e^{-\tau R}$ multiplicirten Glieder weggelassen, da diese bei den beweglicheren Flüssigkeiten an der Peripherie der Kugel verschwindend klein werden. Hat man endlich einen Werth von k gefunden, der beim Durchrechnen der Gleichungen 10_a kein davon verschiedenes k_{μ} mehr liefert, so erhält man λ , den Gleitungscoefficienten, aus 6_e.

$$\lambda = \frac{k^2 \sin \eta}{J \sin (\varepsilon + \delta_1 - \delta - \gamma) \sin (\varepsilon + \delta_1 - \delta)} \cdot \dots \cdot \left\} 10_b$$

Der Winkel η wird aus dem in 9_f bei der Berechnung von J gefundenen Winkel $(3\varepsilon + \delta' - \eta - \delta)$ hergeleitet.

Bei den beweglicheren Flüssigkeiten kommt man mit zwei- bis dreimaliger Durchrechnung der Gleichungen 10_a zum Ziele. Je grösser aber der Reibungscoefficient k ist, desto weitläufiger wird die Rechnung. Für sehr steife Flüssigkeiten würde man auch nicht mehr die mit $e^{-\tau\rho}$ multiplicirten Glieder im Werthe von ψ und $\frac{d\psi}{d\rho}$ vernachlässigen dürfen. Dann würde es vortheilhafter sein, die nach Potenzen von ρ entwickelten Ausdrücke beider Grössen zu benutzen.

§. 5.

Vergleichung mit älteren Versuchen.

Es ist von vielen Seiten die Ansicht aufgestellt worden, dass die äusserste Schicht der Flüssigkeit, welche zunächst die Gefässwand berührt, dieser fest und unbeweglich anhafte, d. h. dass unser Gleitungscoëfficient λ gleich Null zu setzen sei. Dass die Flüssigkeiten mit ziemlicher Kraft an benetzten festen Körpern haften, und von ihnen angezogen werden, lehren die Capillarercheinungen, und die

Schwierigkeit, mit der sich die dünne benetzende Schicht von dem Körper trennt, dem sie anhaftet. Aber bei den Bewegungen innerhalb eines Gefässes ist der Fall doch in so fern ein anderer, als die Wand fortdauernd gleichmässig mit Flüssigkeit benetzt bleibt, und durch die Bewegung die Flüssigkeit vom festen Körper nicht überhaupt getrennt wird, sondern stets neue Flüssigkeitstheile an die Stelle derer treten, welche sich von einem Flächenelemente der Wand trennen. Die Anziehungskraft der Wand auf die berührenden Flüssigkeitsschichten kann diese nicht verhindern längs der Wand hinzuzulieessen, eben so wenig, als die Anziehungskraft der Erde das Wasser hindert ihrer Oberfläche parallel zu flieessen. Um das Haften der Wandschicht zu erklären, müsste man entweder annehmen, dass Flüssigkeitsatome sich oberflächlich zwischen die des festen Körpers einfügen, wie dies etwa bei Wänden aus aufquellenden thierischen Membranen der Fall sein könnte, oder dass die Reibung zwischen dem Wasser und den Wandtheilen unendlich gross sei, verglichen mit der im Innern der Flüssigkeit.

Schon ältere Versuche scheinen dafür zu sprechen, dass sowohl Fälle vorkommen, in denen λ gleich Null ist, als solche, wo es von Null verschieden ist. Unter den von Piotrowski ausgeführten Versuchen spricht direct dafür der mit der innen versilberten Glasflasche, welcher zeigte, dass nach der Versilberung der Einfluss der Reibung auf die Schwingungen geringer war als vorher, wonach λ für die Berührung von Wasser mit Silber einen grösseren Werth haben muss, als für die Berührung von Wasser mit Glas.

Dafür dass λ bei der Berührung von Wasser mit glatten und gereinigten Glasflächen gleich Null sei, sprechen namentlich die Versuche von Poiseuille an gläsernen Capillarröhren. Wenn die Röhren lang genug sind, dass in dem grössten Theile derselben das Wasser sich nur der Axe der Röhre parallel fortbewegt, welche selbst der x -Axe parallel sein mag, können wir $v = w = 0$ setzen. Dann folgt aus der Gleichung 1_a, dass $\frac{du}{dx} = 0$, d. h. dass u nach x constant, und nur von y und z abhängig sei.

Wir nehmen ferner an, dass die Geschwindigkeit des Stromes der Zeit nach constant sei, also auch $\frac{du}{dt} = 0$.

Ferner wenn auf die Flüssigkeit im Innern der Röhre keine äusseren Kräfte wirken, also $P = 0$, folgt aus den zwei letzten der

Gleichungen 1, dass $\frac{dp}{dy} = \frac{dp}{dz} = 0$, also p nur von x abhängig sei, nicht aber von y oder z . Darnach reducirt sich die erste Gleichung auf

$$-\frac{1}{h} \frac{dp}{dx} = -k^2 \left[\frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{d^2 u}{dz^2} \right] \dots \dots \dots \} (11)$$

Ist die Röhre ein Cylinder von kreisförmigem Querschnitt, dessen Axe mit der der x zusammenfällt, so wird die Bewegung rings um die Axe symmetrisch sein müssen, und wir können daher, wenn wir $z^2 + y^2 = r^2$ setzen, u als eine Function von r allein betrachten, während p von r unabhängig ist. Es müssen also die Ausdrücke beider Seiten in Gleichung 11 sowohl von x als von r unabhängig sein, und wenn wir mit b eine Constante bezeichnen, können wir setzen:

$$\frac{1}{h} \frac{dp}{dx} = -bk^2 \dots \dots \dots \} 11_a$$

so wird Gleichung (11)

$$-b = \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr}$$

oder

$$-br = r \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{du}{dr} = \frac{d}{dr} \left[r \frac{du}{dr} \right]$$

$$-\frac{1}{2} br^2 + c = r \frac{du}{dr}$$

$$-\frac{1}{2} br + \frac{c}{r} = \frac{du}{dr}$$

$$-\frac{1}{4} br^2 + c \log r + C = u.$$

In dieser Integralgleichung muss c offenbar gleich Null sein, weil sonst u für $r=0$ unendlich gross wird. Es wird also

$$u = C - \frac{1}{4} br^2 \dots \dots \dots \} 11_b$$

Die Grenzbedingung für die oberflächlichste Wasserschicht wird nun, da die Geschwindigkeit U der Wand selbst gleich Null zu setzen ist, nach den Gleichungen 5 und 5b an der Oberfläche

$$X = -hk^2 \frac{du}{dr} = h \frac{k^2}{\lambda} u$$

$$Y = Z = 0,$$

also

$$\lambda \frac{du}{dr} = -u$$

$$\frac{1}{2} \lambda b R = C - \frac{1}{4} b R^2$$

wenn wir den Radius der Röhre mit R bezeichnen, und nun den hier gefundenen Werth von C in 11_b substituiren

$$u = \frac{b}{4} [R^2 + 2\lambda R - r^2] \dots \dots \dots \} 11_c$$

Wenn wir die Wassermasse Q bestimmen, welche in einer Secunde durch den Querschnitt der Röhre läuft, so ist

$$Q = 2\pi h \int_0^R u r dr = \frac{\pi b h}{8} [R^4 + 4\lambda R^3] \dots \dots \dots \} 11_d$$

Aus der Gleichung 11_a folgt weiter, wenn wir sie integriren und die Länge der Röhre mit L , den Druck am Anfang mit p_0 , den am Ende mit p_1 , bezeichnen, dass

$$\frac{1}{h} (p_0 - p_1) = b k^2 L.$$

Indem wir hieraus den Werth von b nehmen und in 11_d substituiren, folgt:

$$Q = \frac{\pi (p_0 - p_1)}{8 k^2 L} [R^4 + 4\lambda R^3] \dots \dots \dots \} 12$$

Poiseuille ¹⁾ gibt folgende Formel für Q , in der wir die Intensität der Schwere $g = 9808$ Millim. und das specifische Gewicht des Wassers bei 10° mit h_0 bezeichnen:

$$Q = K \frac{(p_0 - p_1) \cdot R^4}{g h_0 L} \dots \dots \dots \} 12_a$$

¹⁾ Mémoires des savants étrangers. IX. p. 532.

worin der Coëfficient K als Function der Temperatur \mathfrak{T} , diese in Centesimalgraden ausgedrückt, folgenden Werth hat

$$K = 16 \cdot 135 \cdot 282 (1 + 0 \cdot 0336793 \mathfrak{T} + 0 \cdot 0002209936 \mathfrak{T}^2) \} 12_c$$

Der Druck P ist bei ihm durch eine Wassersäule von 10° , deren Länge in Millimetern gemessen ist, ausgedrückt, daher wir hier setzen mussten

$$h_0 g P = (p_0 - p_1).$$

Wenn wir die theoretische Formel 12 mit der empirischen 12_a vergleichen, ergibt sich, dass für Poiseuille's Versuche, in denen sich Wasser und Glas berührten, $\lambda = 0$ gesetzt werden muss. Dann ist

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{8k^2} &= \frac{K}{gh_0} \\ k^2 &= \frac{\pi gh_0}{8K} \cdot \cdot \cdot \cdot \} 12_c \end{aligned}$$

wonach die Constante k^2 in Einheiten, welche Quadratmillimeter dividirt durch Secunden sind, für jede Temperatur des destillirten Wassers folgendermassen in Ziffern ausgedrückt werden kann.

$$k^2 = \frac{1 \cdot 7790}{1 + 0 \cdot 0336793 \mathfrak{T} + 0 \cdot 0002209936 \mathfrak{T}^2} \cdot \cdot \cdot \cdot \} 12_d$$

Girard ¹⁾ hat mit etwas weiteren Röhren von Kupfer Versuche angestellt.

Die weiteste Röhre, für die Poiseuille sein Gesetz bestätigt hat, war von 0·65 Millim. Durchmesser und 383·8 Millim. Länge. Die engste, welche Girard gebraucht hat, war von 1·83 Millim. Durchmesser und bis 1790 Millim. Länge. Die Ausflussgeschwindigkeit fand sich hier noch der Länge und dem Drucke proportional. Allerdings ist hier schon zu bezweifeln, ob Poiseuille's Gesetz an Glasröhren sich bis zu dieser Grenze streng erwiesen haben würde, aber gross würde die Abweichung immer noch nicht haben sein können, auch würde dieser Umstand die entgegengesetzte Abweichung haben herbeiführen müssen von der, die sich wirklich vorfindet.

¹⁾ Mémoires de l'Institut 1813—1815. p. 249.

Es findet sich nämlich in der Metallröhre die Geschwindigkeit merklich grösser, als sie nach Poiseuille's Formel in einer Glasröhre hätte sein sollen.

Unter den Versuchen von Girard mit Glasröhren findet sich einer, wo die Dimensionen denen des engeren Metallrohres ziemlich ähnlich sind. Das Glasrohr hatte einen Durchmesser von 0.767 Millim., eine Länge von 939 Millim. Bei dem Drucke einer Wassersäule von 182.4 Millim. und 0° Temperatur geschah die Entleerung von einem Viertel Litre in 1036 Secunden.

Nach Poiseuille's Formel wären unter den angegebenen Umständen 976 Secunden nöthig gewesen. Die Differenz zwischen Beobachtung und Rechnung kann leicht durch einen Fehler von $\frac{3}{100}$ Millim. in Messung des Durchmessers der Röhre, oder durch Ellipticität derselben entstanden sein, oder sie rührt daher, dass die Röhre schon zu weit war, um sich dem Gesetze der Capillarröhren streng zu fügen. Jedenfalls ist für die Glasröhre die Differenz noch eine kleine.

Dagegen brauchte $\frac{1}{4}$ Litre Wasser bei 0°5, und einem Wasserdruck von 100 Millim. nur 624.5 Secunden Zeit, um durch eine kupferne Röhre von 1.83 Millim. Durchmesser und 1790 Millim. Länge zu fließen, während Poiseuille's Formel hier mehr als das Vierfache der Zeit, nämlich 2949.3 Secunden fordern würde.

Für dieselbe kupferne Röhre fand Girard in einer Reihe von Versuchen das Product

$$\frac{gDH}{4Lu} = 2.8367,$$

(g die Intensität der Schwere, D der Durchmesser, H die Wasserdrukhöhe, L die Länge der Röhre, u die mittlere Geschwindigkeit, alles auf Millimeter reducirt). Wenn wir die Zahl 2.8367 mit e bezeichnen, wird in unseren Maassen ausgedrückt

$$e = \frac{\pi R_3(p_0 - p_2)}{2LQ}.$$

Dies mit Gleichung 7 verglichen, zeigt dass

$$\lambda = \frac{k^2}{e} - \frac{1}{4} R.$$

Wenn wir aus Poiseuille's Versuchen den Werth von k^2 entnehmen, erhalten wir für die kupferne Röhre $\lambda = 0.3984$ Millim.

Bei der weiteren kupfernen Röhre von Girard von 2.96 Millim. Durchmesser wird die Anwendung von Poiseuille's Formel schon sehr bedenklich; dieselbe Rechnung durchgeführt gibt hier einen viel kleineren Werth von λ , nämlich 0.111 Millim. Diese Abweichung könnte davon herrühren, dass die Gesetze des linearen Fliessens hier nicht mehr passen. Dabei bürgt aber auch nichts für die gleiche Beschaffenheit der inneren Oberfläche beider Röhren. Vermuthlich waren dieselben in ihrem Innern mit einer Oxydschicht bedeckt, da es nicht möglich sein möchte, das Innere so enger Röhren, welche häufig mit Wasser in Berührung kommen, metallisch polirt zu erhalten.

Aus Piotrowski's Versuchen mit ungekochtem Wasser habe ich die beiden Coëfficienten nach der angegebenen Methode berechnet und erhalten:

$$k = 1.1858$$

$$\lambda = 2.3534 \text{ Millim.},$$

während sich für die Temperatur von 24.5° , welche die mittlere der Versuche war, aus Poiseuille's Bestimmungen ergibt

$$k = 0.95206.$$

Das Verhältniss des zweiten zum ersten Werthe von k ist wie 0.80456:1, also nahe wie 4:5. Dass die Constante λ an der polirten Goldfläche beträchtlich grösser ist, als an den vielleicht oxydirten Kupferflächen in Girard's Versuchen, erscheint nicht als unwahrscheinlich. Auch benetzt in der That das Wasser die Goldfläche nur schwer und unvollkommen. Die Phasendifferenz zwischen der Bewegung des Gefässes und der anliegenden Flüssigkeitsschicht beträgt bei diesen Versuchen $25^\circ 15''$ oder 1.616 Secunden. Um übrigens deutlich zu machen, einen wie grossen Einfluss kleine Schwankungen der beobachteten Schwingungsdauer auf die gefundenen Werthe der Constanten in solchen Fällen haben, wo λ verhältnissmässig gross ist, habe ich vorausgesetzt, dass die Schwingungsdauer der leeren Kugel T_0 , deren Beobachtungswerthe unter den benutzten Elementen verhältnissmässig die grössten Schwankungen zeigen, unbekannt sei, bekannt aber ihr logarithmisches Decrement, und habe dann

den Werth von k aus Poiseuille's Versuchen entnommen, und damit die Formeln rückwärts durchgerechnet, indem ich λ und T_0 zu bestimmen suchte. Es fand sich $T_0 = 24.429$, während das Mittel der Beobachtungswerthe 24.509 beträgt, der kleinste unter den beobachteten Werthen aber 24.4010 noch unter dem berechneten Werthe liegt. Dabei wird die Phasendifferenz zwischen dem Gefässe und der äussersten Wasserschiebt $12^\circ 42'$ und $\lambda = 0.71545$.

Wenn dagegen η klein ist, hat seine Grösse und die Differenzen der Schwingungsdauer fast gar keinen Einfluss auf die Bestimmungen von k . Es ist schon vorher bemerkt, dass die in den Gleichungen 9^a vorkommende Constante F' hauptsächlich abhängt von den Differenzen der Schwingungsdauer, die andere F'' dagegen von den logarithmischen Decrementen. Nehmen wir F' als unbekannt an, und bestimmen die Grösse I , welche zur Berechnung von k dient, aus F'' so ist

$$I = \frac{k^2 C_1}{C \sin(\varepsilon + \delta_1 - \delta)} = \frac{2F''}{\cos[4\varepsilon + 2(\delta_1 - \eta - \delta)] - \cos 2\varepsilon}.$$

Nun ist in den Versuchen mit Wasser $[4\varepsilon + 2\delta_1 - 2\delta - 180^\circ] = 13^\circ 41'$ und der Cosinus dieses Winkels ist ungefähr gleich $\frac{34}{35}$. Dagegen ist $\cos 2\varepsilon$ eine sehr kleine Grösse etwa $\frac{1}{117}$ und kann hier vernachlässigt werden. Wenn nun 2η von 0 bis $13^\circ 41'$ wächst, so steigt der erste Cosinus von $\frac{34}{35}$ auf 1, und wenn 2η weiter wächst bis zur doppelten Grösse von $13^\circ 41'$, so sinkt der Cosinus wieder bis auf $\frac{34}{35}$. Erst von da ab verändert sich nun mit steigendem η der Cosinus beträchtlicher, also wird auch in der Berechnung der Werth von I , und der diesem nahe proportionale von k keine grösseren Veränderungen erleiden, so lange η unter der Grösse von $13^\circ 41'$ bleibt. Daraus geht hervor, dass die von Piotrowski ausgeführten Messungen für die leichter beweglichen Flüssigkeiten gute Werthe für k liefern werden, selbst wenn es nichtgelingen sollte, die Schwingungsdauer viel genauer festzustellen, als bisher geschehen ist, sobald man sie anwendet, wo die Flüssigkeiten an den Gefässen fester anhaften.

Unter den untersuchten Flüssigkeiten kommen zwei vor, für welche die Werthe von η und λ so klein sind, dass sie in die Beobachtungsfehler fallen, und wobei vielleicht ein vollständiges Haften der Flüssigkeit an der Metallfläche stattfindet. Diese sind Alkohol und Äther. Die berechneten Werthe sind:

	Alkohol	Äther	Schwefel- kohlenstoff
Innerer Reibungscoefficient k	1·3754	0·59213	0·53401
Oberflächlicher Gleitungscoefficient λ .	0·1096	0·1243	0·4430
Phasenunterschied zwischen Oberfläche der Flüssigkeit und dem Gefässe . .	1° 37'	4° 7'	13° 39' 10''
Temperatur	24°05	21°6	21°85

Dass der Alkohol, namentlich der nicht ganz wasserfreie, schwerer fließt als Wasser, also einen grösseren inneren Reibungscoefficienten haben muss, ergibt sich schon aus den Versuchen von Poiseuille. Der Äther und Schwefelkohlenstoff dagegen zeigen ihrer Leichtbeweglichkeit entsprechend einen viel kleineren Werth von k . Das Haften des Alkohols und Äthers an den Metallflächen zeigt sich entsprechend bei den gewöhnlichen Benetzungserscheinungen, sie verhalten sich darin anders als das Wasser, welches an der Goldfläche schwer haftet.

Bei den übrigen wässerigen Flüssigkeiten zeigt die Vergleichung der von Piotrowski berechneten Winkel ϑ , wenn man sie mit den Verhältnissen beim Wasser und Alkohol vergleicht, dass eine ziemlich bedeutende Gleitung stattfand. Ich habe es desshalb unterlassen, die ziemlich mühsame Rechnung für sie durchzuführen, weil den Resultaten doch keine grosse Genauigkeit beizulegen war.

So bestätigt sich durch die hier vorliegenden Versuche, dass die chemische Beschaffenheit der Wand auf die Bewegung der Flüssigkeiten nicht in allen Fällen einflusslos ist. Was den Zahlenwerth der Reibungsconstante betrifft, so widersprechen sie wenigstens nicht denen von Poiseuille, und es scheinen die Bedingungen gefunden zu sein, welche künftig erfüllt werden müssen, um auf dem eingeschlagenen Wege eine strenge Übereinstimmung der Theorie mit den Thatsachen nachweisen zu können.

Helmholtz u.G.v. Piotrowsky. Über Reibung tropfbarer Flüssigkeiten. Tafl.

Fig. 2.

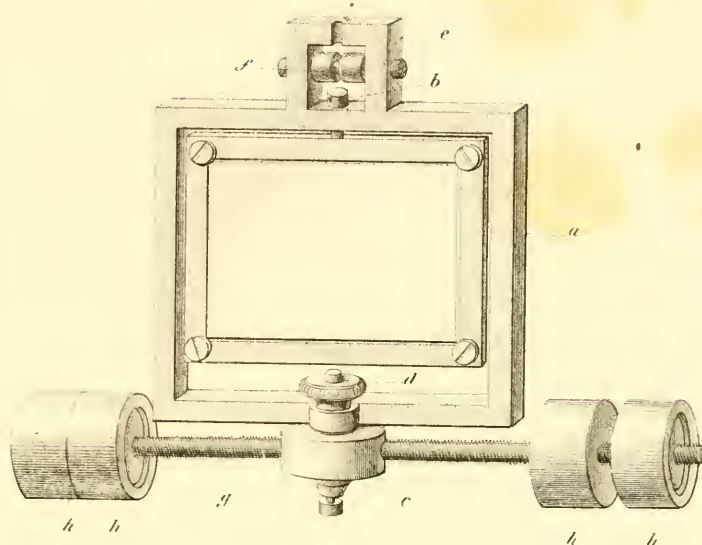


Fig. 1.

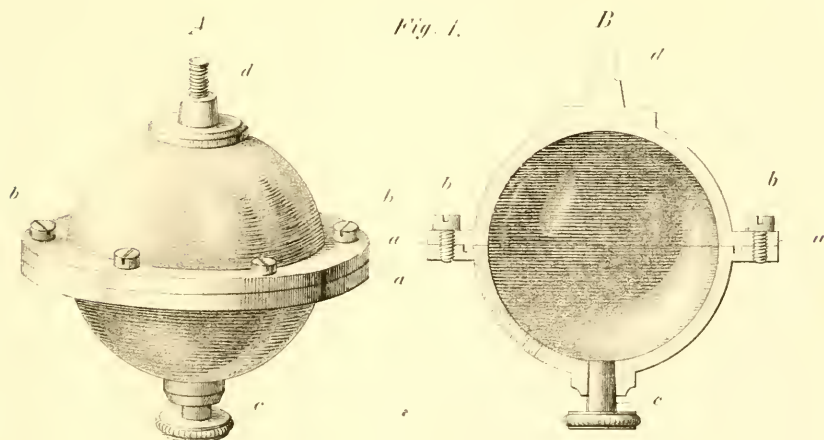
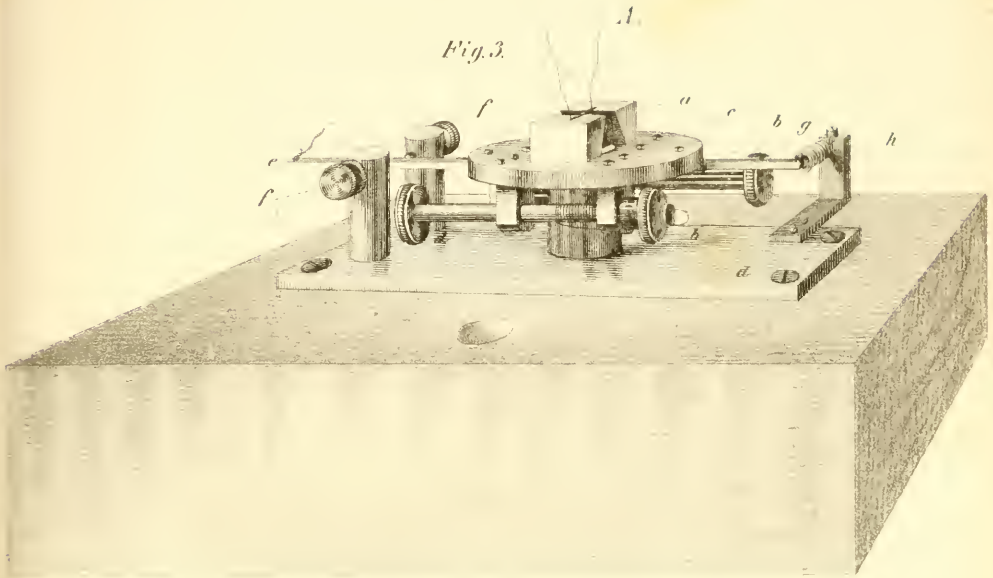


Fig. 3.



B.

