Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum

Über die directe Construction der schiefaxigen Krystallgestalten aus den Kantenwinkeln.

Von **Rudolf Niemtschik,**

Assistenten der darstellenden Geometrie am k. k. polytechnischen Institute in Wien.

(Mit 1 Tafel.)

In der Abhandlung „Über die directe Constructions-Methode der verticalaxigen Krystallgestalten aus den Kantenwinkeln" (Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften, Bd. XXXVIII, Nr. 24, S. 231) wurde bereits bemerkt, dass die schiefaxigen Krystallgestalten auf ähnliche Weise, wie die verticalaxigen aus den Kantenwinkeln bestimmt werden können, indem man nämlich zuerst mittelst einer Kugel eine Ecke der betreffenden Gestalt und dann vermittelst der Ecke die Krystallform selbst construirt. Die dort erwähnten Modificationen, welche bei der Construction der schiefaxigen Krystallformen eintreten, werden durch den Umstand herbeigeführt, dass man den schiefaxigen Gestalten (mit Ausnahme einiger Prismen) keine berührende Kugel einschreiben kann, was bei allen verticalaxigen Gestalten möglich ist.

Diese Modificationen werden nun hier näher erörtert. Da jedoch alle schiefaxigen Krystallgestalten auf die nämliche Weise wie das Hemiorthotyp und das Anorthotyp aus den Kantenwinkeln gezeichnet werden können, so erübrigt hier blos die Construction der beiden genannten Gestalten vollständig durchzuführen.

§. 1. Construction des Hemiorthotypes (deltoidische Pyramide).

Zur Bestimmung eines Hemiorthotypes ist die Grösse dreier Kanten erforderlich.

Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum

Es seien zu diesem Behufe K_1, K_2, K_3 die drei Winkel der Kanten aS, bS, cS des Hemiorthotypes $Sabcd\sigma$ Taf. I, Fig. 7, gegeben. Ferner sei der Winkel der Kante bS gleich dem der Kante dS, mithin $aSc\sigma$ die Symmetrie-Ebene der Gestalt.

Aus diesen Stücken kann nun, wie die folgende Betrachtung lehrt, die Ecke $Sabcd$ und mittelst dieser dann das Hemiorthotyp selbst leicht construirt werden.

Legt man durch die eine von den beiden gleichen Axenkanten Sb oder Sd eine Ebene, welche den Neigungswinkel K_2 der zwei Ebenen, durch deren Kante sie geht, halbirt und bringt die Halbirungsebene zum Durchschnitte mit der Ebene $aSc\sigma$; so erhält man die Gerade oS, deren Punkte von den vier Ebenen aSb, bSc, cSd und dSa gleiche Abstände haben.

Jeder Punkt der Halbirungsebene des Neigungswinkels zweier Ebenen steht nämlich von den beiden den Neigungswinkel bildenden Ebenen gleich weit ab. Nun liegt die Gerade oS in der Halbirungsebene des Winkels K_2 und zugleich in der Ebene $aSc\sigma$, welche die Kantenwinkel K_1 und K_3 halbirt, folglich muss ein jeder Punkt der Geraden oS von allen vier die genannten Winkel einschliessenden Ebenen aSb, bSc, cSd und dSa gleiche Abstände haben.

Die Gerade oS fällt jedoch mit der schiefen Axe $S\sigma$ nicht zusammen.

Fällt man von einem beliebigen Punkte o der Geraden oS auf eine von den Ebenen aSb, bSc, cSd und dSa, etwa auf die Ebene aSb das Perpendikel om, welches die Ebene aSb im Punkte m trifft, und beschreibt von o aus mit dem Halbmesser $om = R$ eine Kugel, so wird diese die Ebene aSb im Punkte m, aber auch zugleich die drei Ebenen bSc, cSd und dSa berühren.

Die Berührungspunkte der Kugel mit den Ebenen bSc, cSd und dSa seien der Reihe nach mit n, p, q bezeichnet.

Wegen der gleichen Neigung der Ebenen aSb und aSd, so wie jener der Ebenen bSc und cSd gegen die Ebene $aSc\sigma$ haben die Punkte m und q, so wie die Punkte n und p, folglich auch die Geraden mn und pq gegen die Ebene $aSc\sigma$ eine symmetrische Lage; es muss desshalb $mq \parallel np$ sein.

Nun findet man:

Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum

$$mq = 2R \cos \frac{K_1}{2}$$

$$mn = pq = 2R \cos \frac{K_2}{2}$$

$$np = 2R \cos \frac{K_3}{2}.$$

Die Gerade oS geht durch den Mittelpunkt w des dem Trapeze $mnpq$ umschriebenen Kreises und steht $\perp$ auf dessen Ebene.

Der Halbmesser des Kreises $mnpq$ heisse r.

Zieht man durch die Punkte m, n, p, q an den Kreis $mnpq$ die Tangenten $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta$, $\delta\alpha$, so schneiden sich dieselben in der Verlängerung in den Punkten α, β, γ, δ, welche zugleich den Kanten Sa, Sb, Sc, Sd der Ecke $Sabcd$ angehören.

Verbindet man den Punkt m geradlinig mit den Punkten S und w, so entstehen dadurch die zwei ähnlichen Dreiecke mSo und mSw, bei welchen sich verhält:

$$oS : om = om : ow,$$

d. i.

$$oS : R = R : \sqrt{R^2 - r^2};$$

daher ist:

$$oS = \frac{R^2}{\sqrt{R^2 - r^2}}.$$

Man wird demnach die Ecke $Sabcd$ aus den Kantenwinkeln K_1, K_2 und K_3 auf folgende Weise leicht darstellen können:

Man beschreibe von l aus Taf. I, Fig. 3, dem gemeinschaftlichen Scheitelpunkte der Winkel $flk = K_1$, $glk = K_2$ und $hlk = K_3$ mit dem Halbmesser $lk = R$ den Halbkreis ehk, verlängere den Schenkel lk bis der Halbkreis in e getroffen wird, und ziehe die Sehnen ef, eg und eh, so ist:

$$ef = 2R \cos \frac{K_1}{2}$$

$$eg = 2R \cos \frac{K_2}{2}$$

$$eh = 2R \cos \frac{K_3}{2}.$$

Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum

Aus diesen Sehnen construire man das Kreisviereck $mnpq$, Taf. I, Fig. 1, wobei $mq = ef = 2R \cos \frac{K_1}{2}$, $mn = pq = eg = 2R \cos \frac{K_2}{2}$, $np = eh = 2R \cos \frac{K_3}{2}$ und $mq \parallel np$ ist, stelle jedoch das Viereck $mnpq$ wegen Vereinfachung der weiteren Construction horizontal und mit den zu einander parallelen Seiten mq und np senkrecht auf die verticale Projections-Ebene.

Durch die Eckpunkte m, n, p, q ziehe man an den dem Trapeze $mnpq$ umschriebenen Kreis die Tangenten $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta$, $\delta\alpha$, welche durch ihr Zusammentreffen die Kantenpunkte α, β, γ, δ geben.

Dann zeichne man über der im Mittelpunkte w des Kreises $mnpq$ auf dessen Ebene senkrechten Geraden oS als Hypotenuse ein Dreieck oSz, dessen Scheitel z des rechten Winkels in die Peripherie des Kreises $mnpq$ fällt und dessen eine Kathete $zo = R$ ist und verbinde den dieser Kathete gegenüber liegenden Eckpunkt S (des rechtwinkeligen Dreieckes Szo) mit den Punkten α, β, γ, δ durch die Geraden $S\alpha$, $S\beta$, $S\gamma$ und $S\delta$; so ist $S'a'b'c'd'$ die horizontale und $S''a''b''c''d''$ die verticale Projection der gesuchten Ecke $Sabcd$.

Um nun hieraus das Hemiorthotyp $Sabcd\sigma$ selbst zu bestimmen, ziehe man durch einen beliebigen Punkt σ'' der Geraden $S''\sigma''$ die $c''\sigma'' \parallel S''a'', a''\sigma'' \parallel S''c''$, so wie auch die Gerade $a''c''$. $S''a''b''c''d''\sigma''$ ist dann schon die verticale Projection des Hemiorthotypes. Seine horizontale Projection $S'a'b'c'd'\sigma'$ wird erhalten, indem man die Punkte a'', b'', c'', d'', σ'' nach a', b', c', d', σ' projicirt und die Geraden $a'b'$, $b'c'$, $c'd'$, $d'a'$, $\sigma'b'$ und $\sigma'd'$ zieht.

Bei dieser Lage des Hemiorthotypes gegen die beiden Projections-Ebenen erscheint der rhomboidische Hauptschnitt $Sa\sigma c$ in der verticalen Projections-Ebene in der wahren Grösse.

Fällt man von S'' auf die Gerade $a''c''$ das Perpendikel $S''x''$, so ist der Winkel $\sigma''S''x''$ die Grösse der Abweichung der schiefen Axe $S\sigma$.

Für den rhombischen Hauptschnitt $abcd$, welcher hier als Basis gewählt wurde, ist $b'd'$ die eine, $a''c''$ die andere Diagonale; für den rhombischen Hauptschnitt $Sb\sigma d$ ist $b'd'$ die eine und $S''\sigma''$ die zweite Diagonale.

Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum

In Fig. 2 sind die orthogonalen Projectionen des Hemiorthotypes $Sabcd\sigma$ dargestellt, wenn die Basis $abcd$ horizontal liegt und der rhomboidische Schnitt, wie in Fig. 1 zur verticalen Projections-Ebene parallel ist.

Das Bild $Sabcd\sigma$, Fig. 7, desselben Hemiorthotypes wurde erhalten, indem zuerst das Hemiorthotyp, Fig. 2, um die horizontale Gerade PQ um den Elevationswinkel α (Fig. 6) mit der Spitze S nach vorne gedreht und dann auf die durch PQ gehende Vertical-Ebene orthogonal projicirt wurde.

§. 2. Construction des Anorthotypes (skalenische Pyramide).

Zur Bestimmung eines Anorthotypes ist die Grösse von fünf Kanten erforderlich.

Sind K_1, K_2, K_3, K_4 und K_5 der Reihe nach die Winkel der Kanten Sa, Sb, Sc, Sd und ab des zu bestimmenden Anorthotypes $Sabcd\sigma$ Taf. I, Fig. 8 gegeben, so kann aus diesen Daten die Ecke $Sabcd$ auf folgende Weise sehr leicht construirt werden.

Da pl. $ab\sigma \parallel$ pl. cdS, so ist auch der Neigungswinkel der zwei Ebenen abS und cdS bekannt; er ist $= 180 - K_5$.

Man zeichne zuerst die zwei Ebenen abS und cdS, Taf. I, Fig. 4, so, dass beide auf der verticalen Projections-Ebene senkrecht stehen und zugleich mit der horizontalen Ebene $\mu\nu$ gleiche Winkel $\frac{K_5}{2}$ einschliessen.

Die horizontalen Tracen $a'b'$ und $\gamma'\delta'$ der Ebenen abS und cdS stehen dann senkrecht auf der Projections-Axe AX und der von den beiden Ebenen eingeschlossene Winkel $a''S''\delta'' = 180 - K_5$ erscheint in der verticalen Projections-Ebene in der wahren Grösse.

Die verticale Projection der Durchschnittslinie der beiden Ebenen abS und cdS bildet der Punkt S'', die horizontale Projection hingegen die Gerade $S'o''$, welche zu den beiden Tracen $a'b'$ und $\gamma'\delta'$ parallel ist. S'' ist zugleich die verticale Projection der Spitze S; als deren horizontale Projection wurde der Punkt S' gewählt.

Die zwei Ebenen bSc und adS können nun wieder am einfachsten mittelst einer die Ebenen aSb und dSc berührenden Kugel

Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum

$u'y'v'$, $u''t''v''$, deren Mittelpunkt in o', o'' angenommen wurde, bestimmt werden.

m', m'' und n', n'' sind die Projectionen der Berührungspunkte der Kugel mit den Ebenen aSb und cSd. Die Punkte m und n liegen in demselben Parallelkreise $m'n'$, $m''n''$.

Man ziehe an die Vertical-Contour der Kugel die zwei Tangenten $e''f''$ und $g''h''$ unter den Winkeln $a''e''f'' = K_2$ und $g''h''c'' = K_3$ gegen die Ebenen aSb und beziehungsweise cSd geneigt.

Durch Rotation der Tangente ef um die auf der Ebene abS senkrechte Drehungsaxe om entsteht eine die Kugel nach dem zu der Ebene aSb parallelen Kreise fpi umhüllende Kegelfläche.

Jeder Punkt des Kreises fpi besitzt die Eigenschaft, dass die durch ihn an die Kugel berührend gelegte Ebene mit der Ebene aSb den Winkel K_2 einschliesst.

Durch Rotation der Tangente gh um die auf der Ebene cdS senkrechte Drehungsaxe on entsteht ebenfalls eine die Kugel umhüllende Kegelfläche, welche jedoch mit der Kugel den zu der Ebene cdS parallelen Kreis gpk gemeinschaftlich hat.

Jeder Punkt des Kreises gpk besitzt wieder die Eigenschaft, dass die durch denselben an die Kugel berührend gelegte Ebene mit der Ebene cdS den Winkel K_3 bildet.

Es muss demnach die durch den gemeinschaftlichen Punkt p der beiden Kreise fpi und gpk an die Kugel berührend gelegte Ebene sowohl mit der Ebene aSb den Winkel K_2 als auch zugleich mit der Ebene cdS den Winkel K_3 einschliessen.

Ginge nun die Berührungsebene des Punktes p auch durch den Punkt S, so würde sie die gesuchte Ebene bSc selbst sein. Da jedoch der Punkt p nicht in dem Parallelkreise mn der Punkte m und n liegt, so kann auch die Berührungsebene des Punktes p nicht durch den Punkt S gehen. Man muss daher, um die Ebene bSc selbst zu erhalten, durch den Punkt S eine zu der Berührungsebene des Punktes p parallele Ebene legen.

Weil die Berührungsebene des Punktes p auf dem Halbmesser op der Kugel senkrecht steht, so muss auch die zu ihr parallele Ebene bSc auf dem genannten Halbmesser und daher deren Trace $b'\gamma'$ auf der horizontalen Projection $o'p'$ des Halbmessers op ebenfalls senkrecht stehen.

Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum

Zieht man durch den dem Hauptmeridiane und dem Parallelkreise des Punktes p gemeinschaftlichen Punkt p_1 an die Vertical-Contour der Kugel die Tangente $p_1'' l''$ bis die $o''S''$ in l'' geschnitten wird, durch l'' und p'' die Gerade $l''p''$ und zu dieser parallel durch S'' die $S''q''$; so bildet die $S''q''$ die verticale und $S'q'$ die horizontale Projection einer Geraden der Ebene bSc.

Die Gerade Sq durchdringt die Ebene $\mu\nu$ im Punkte q, mithin stellt die durch den Punkt q' auf die Gerade $o'p'$ senkrecht geführte Gerade $b'\gamma'$ den Durchschnitt der Ebene bSc mit der Ebene $\mu\nu$ vor. $b'S'$, $b''S''$ und $\gamma'S'$, $\gamma''S''$ sind die beiden orthogonalan Projectionen der Kanten bS und γS.

Auf die nämliche Weise erhält man die Trace $\alpha'\delta'$ der Ebene aSd und die Kanten aS und dS.

Dadurch ist die Ecke $Sabcd$ construirt und kann hieraus das Anorthotyp selbst auf folgende Weise einfach dargestellt werden.

Nimmt man ab als die eine Seite der Basis des Anorthotypes an, so hat man zunächst in der Ebene $\gamma S\delta$ eine Gerade dc zu bestimmen, welche gleich und parallel mit ab ist.

Man ziehe $a'z' \parallel b'\gamma'$, $d'z' \parallel S'\gamma'$, und $d'c' \parallel \gamma'\delta'$, so ist $c'd'$ die horizontale, $c''d''$ die verticale Projection der Geraden dc. Die Geraden $a'd'$, $a''d''$ und $b'c'$, $b''c''$ sind die Projectionen der zwei anderen Basis-Kanten ad und bc.

Endlich ziehe man $a'\sigma' \parallel c'S'$, $b'\sigma' \parallel d'S'$, $c'\sigma' \parallel a'S'$, $d'\sigma' \parallel b'S'$, $d''S'' \parallel S''b''$ und $a''\sigma'' \parallel d''S''$, so sind $S'a'b'c'd'\sigma'$ und $S''a''b''c''d''\sigma''$ die beiden orthogonalen Projectionen des gesuchten Anorthotypes.

Fig. 5 stellt die orthogonalen Projectionen des Anorthotypes vor, wenn die Basis $abcd$ eine horizontale Lage hat und die zwei parallelen Basiskanten ab und cd auf der verticalen Projections-Ebene senkrecht stehen.

Die Gerade PQ liegt in der Ebene der Basis $abcd$ und wurde als Drehungsaxe benützt, um Fig. 8 zu erhalten. Der Elevationswinkel ist wieder α (Fig. 6). Nach der Drehung wurde das Anorthotyp auf die durch PQ gehende Verticalebene orthogonal projicirt und dann erst das so erhaltene Bild auf die Zeichenfläche (Fig. 8) übertragen.

Das Weitere ist aus den beigeschlossenen Figuren für sich klar.

Um irgend eine Combinationsfläche fixiren zu können, muss entweder ihre Neigung gegen zwei bereits bekannte Flächen oder die Richtung einer Combinationskante und die Neigung gegen eine

Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum

bekannte Fläche gegeben sein. In beiden Fällen kann die Combinationsfläche mittelst einer Kugel und der die Kugel umhüllenden Kegelflächen, deren Erzeugenden die gegebenen Neigungswinkel mit den bekannten Flächen einschliessen, sehr leicht construirt werden. Der Vorgang ist ähnlich dem hier im §. 2 gezeigten oder dem im §. 32 der Abhandlung: „Über die directe Constructions-Methode der verticalaxigen Krystallgestalten aus den Kantenwinkeln" angegebenen. (Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wissenschaften, Bd. XXXVIII, S. 324.)

Um die Schärfe des Resultates namentlich bei vielflächigen Combinationen zu steigern, ist es zweckmässig, wenn man die Figuren zuerst in grösserem Massstabe construirt und dann mittelst Proportionalwinkels auf die gegebene Grösse bringt.

Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum

Fig. 1.

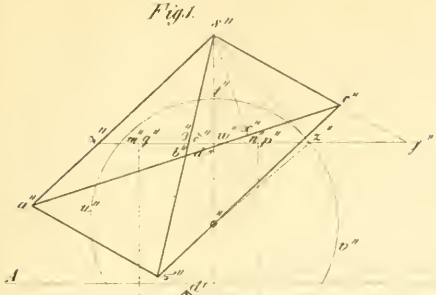


Fig. 2.

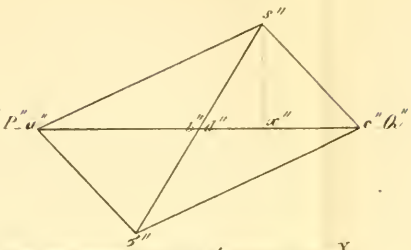
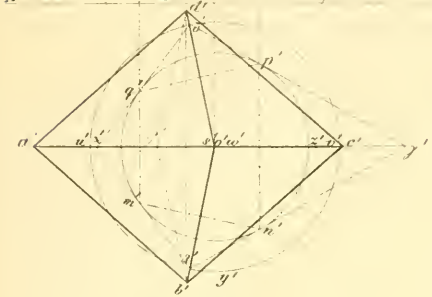


Fig. 3.



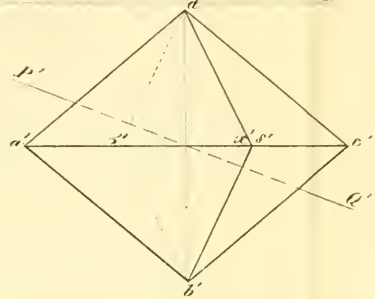


Fig. 6.

Fig. 4.

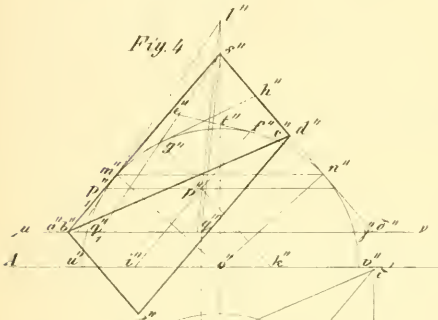


Fig. 5.

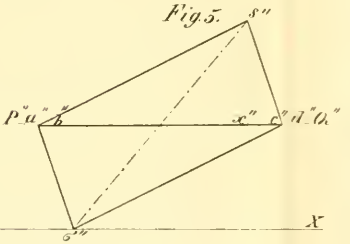
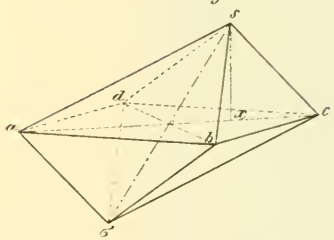
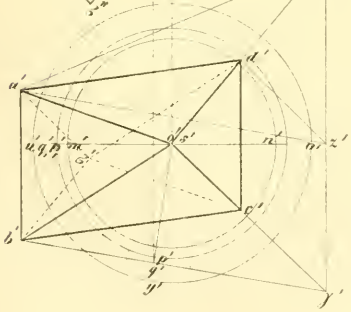


Fig. 7.





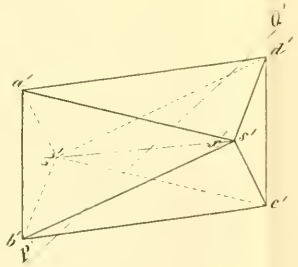
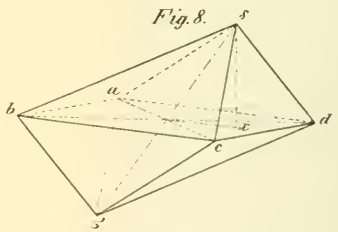


Fig. 8.



Niemtschik gez. Aus d. k.k. Hof- u. Staatsdruckerei

Sitzungsb. d. k. Akad. d. W. math. naturw. Cl. XLI Bd. N°. 17. 1860.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1860

Band/Volume: 41

Autor(en)/Author(s): Niemtschik Rudolf

Artikel/Article: Über die directe Construction dr schiefaxigen Krystallgestalten aus den Kantenwinkeln. 535-542