ownload from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentru

Die Blattbögen und ihre Berechnung.

Von Dr. Julius Wiesner.

(Vorgetragen in der Sitzung am 25. April 1861.)

(Mit 1 Tafel.)

Die bis jetzt angestellten Untersuchungen über den Bogenwerth der Blattbasen [1]) spiralig angeordneter Blätter führten zu dem Resultate, dass bei jenen Stellungsverhältnissen, welche der Reihe $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{8}, \frac{5}{13} \ldots$ angehören, der genannte Werth — den man Kürze halber als „Blattbogen" bezeichnen kann — der einfachen Wirteldivergenz gleich ist, multiplicirt mit einem Gliede aus der Reihe 1, 2, 3, 5, 8 . . . . . . dessen Grösse aber die Blätterzahl im Cyklus nicht übersteigen darf.

Die Aufgabe, welche sich sogleich an die bis jetzt gewonnenen Resultate anschliesst, betrifft die Untersuchung der Blattbögen jener spiralig angeordeten Aggregationen, deren Divergenzen sich nach anderen entweder bereits in der Natur beobachteten oder doch wenigstens in der Natur möglichen Reihen ordnen, um die Bedeutung der Blattbögen, ihre Grösse und Anordnung in ihrer Allgemeinheit auffassen zu können.

Ausser der Lösung der eben genannten Aufgabe hat die vorliegende Abhandlung noch den Zweck, die Art anzugeben, wie man auf Grundlage beobachteter Zahlenverhältnisse die Blattbögen berechnen könne, indem der Weg der Construction sich wohl dazu eignet, ein klares Bild von der Gesetzmässigkeit der Blattbögen in Grösse und Anordnung zu geben, aber der Umständlichkeit des in der Eingangs citirten Abhandlung angegebenen Constructionsverfahrens wegen sich das Bedürfniss einer Berechnung der Blattbögen herausstellt.

---

[1]) Wiesner, Untersuchungen über den Bogenwerth der Blattbasen. Sitzb. d. mathem.-naturw. Cl. XLII. Bd., p. 417.

ownload from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentru

Bevor ich an meine eigentliche Aufgabe gehe, muss ich mir erlauben, einige später zu gebrauchende Ausdrücke zu erklären.

Unter secundären Spiralen verstehe ich mit den französischen Autoren jene mehrfachen parallelen Spiralen, welche nur einen Theil der Blätter eines Cyklus umfassen, und an gedrängt stehenden Blättern mehr in die Augen springen, als die Grundspirale. Die Zahlen, in welchen die secundären Spiralen vorhanden sind, werden auch im Nachfolgenden als secundäre Zahlen bezeichnet. Die secundäre Divergenz bedeutet hier wie bei L. und A. Bravais den Winkel, den zwei in einer secundären Spirale sich zunächststehende Blätter einschliessen.

Die secundäre Divergenz wird im Folgenden als Product der einfachen Wirteldivergenz — unter welcher ich wie immer den reciproken Werth der Blätter im Cyklus verstehe — mit den Zahlen $y_1, y_2, y_3, \ldots\ldots y_{r-1}, y_r$ angesehen werden, wobei die letztgenannten Factoren bestimmten Zählern der Stellungsreihe entsprechen. Bei $\frac{8}{21}$ z. B. ist $y_1=5$; $y_2=3$ etc. Diese Factoren, sowie die Grösse y_o, die mit der einfachen Wirteldivergenz multiplicirt, die Hauptdivergenz gibt (bei $\frac{8}{21}$ z. B. ist $y_o=8$), nenne ich hier der Bequemlichkeit des Ausdruckes wegen Divergenzfactoren.

Endlich verstehe ich unter dem Ausdrucke Divergenz kurzweg oder unter dem Ausdrucke Hauptdivergenz die Divergenz der Grundspirale.

I. Untersuchung der Haupt- und Nebenreihen der Blattstellung.

Für die Zwecke der nachfolgenden Untersuchungen erscheint es nothwendig, eine nähere Betrachtung der bereits beobachteten oder doch wenigstens möglichen Stellungsreihen anzustellen, weil von den durch das Stellungsverhältniss bedingten Grössen (von der Grundspirale und ihrer Divergenz, von den secundären Spiralen und den secundären Divergenzen, ebenso von der Richtung all' der genannten Spiralen) Anordnung und Grösse der Blattbögen abhängen, das Stellungsverhältniss aber selbst, wie seine Functionen mit den Stellungsreihen im innigsten Zusammenhange stehen.

Unter Hauptreihen der Blattstellung verstehe ich hier alle diejenigen unendlichen Reihen, deren Glieder successive Reductionen

ownload from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentru

des folgenden unendlichen Kettenbruches sind, bei welchem z eine ganze Zahl bedeutet.

$$\cfrac{1}{z+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots\ldots}}}}$$

Für $z=2$ [1]) erhält man die Reihe $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{8}, \frac{5}{13}, \frac{8}{21} \ldots$ (1)

„ $z=3$ „ „ „ „ $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{3}{11}, \frac{5}{18}, \frac{8}{29} \ldots$ (2)

„ $z=4$ „ „ „ „ $\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{9}, \frac{3}{14}, \frac{5}{23}, \frac{8}{37} \ldots$ (3)

„ $z=5$ „ „ „ „ $\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{2}{11}, \frac{3}{17}, \frac{5}{28}, \frac{8}{45} \ldots$ (4)

Die Stellungsverhältnisse der Reihe (1) beherrschen eine weit überwiegende Anzahl von Pflanzen; die Reihen (2), (3) und (4) sind wohl nur in seltenen Fällen, aber mit Sicherheit nachgewiesen worden; die anderen noch möglichen durch Substitution von $z=6$, $z=7$, etc. entstehenden Reihen wurden so gut wie gar nicht bis jetzt beobachtet und besitzen einstweilen nur theoretisches Interesse.

Die Zähler aller Hauptreihen sind Glieder der recurrenten Reihe 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 . . . . (I), die Nenner sind hingegen Glieder der Reihe (I), oder gehören folgenden Reihen an:

1, 3, 4, 7, 11, 18, 29 . . . . . . (II)
1, 4, 5, 9, 14, 23, 37 . . . . . . (III)
1, 5, 6, 11, 17, 28, 45 . . . . . . (IV)

Man ist im Stande, alle den Hauptreihen angehörigen Stellungsverhältnisse allgemein durch m und n auszudrücken, wobei $n>m$ ist, und beide Grössen zwei sich zunächst stehende Glieder der Reihe (I) vorstellen.

Das allgemeine Glied der Reihe (1) ist dann $\frac{m}{m+n}$, das der Reihe (2) $\frac{m}{2m+n}$ jenes der (3) $\frac{m}{3m+n}$; für die Reihe (4) bekömmt man hingegen den allgemeinen Ausdruck $\frac{m}{4m+n}$ etc.

[1]) Für $z=1$ bekömmt man bekanntlich die Reihe $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13} \ldots$ deren Glieder aber die Brüche der Reihe (1) zu 1 ergänzen, mithin auf den Kreis bezogen, gleichen Divergenzwinkeln entsprechen.

ownload from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentru

Wenn aber auch diese allgemeinen Glieder in einfacher Weise die Stellungsreihen kennzeichnen, so erscheint es doch für unsere Zwecke willkommener, für irgend ein Stellungsverhältniss einer der Hauptreihen den allgemeinen Ausdruck $\frac{y_1+y_2}{m+n}$ zu benützen, wobei die Divergenzfactoren y_1 und y_2 stets der Reihe (I) angehören, m und n hingegen Glieder der Reihen (I), (II), (III) etc. vorstellen. Es ist aber selbstverständlich, dass dem Ausdrucke y_1+y_2 schon ein ganz bestimmter Werth von $m+n$ in jeder Stellungsreihe entspricht.

Am einfachsten gestaltet sich das Verhältniss bei Gliedern der Reihe (I) wo $y_1+y_2=m$ ist, und der Ausdruck $\frac{y_1+y_2}{m+n}$ für die Divergenz in $\frac{m}{m+n}$ übergeht.

Die Kriterien der Stellungsverhältnisse, welche den Hauptreihen angehören, sind folgende:

1. Die secundären Zahlen sind Glieder der Nennerreihe, mithin Zahlen aus den Reihen (I), (II), (III) etc.

2. Die Hauptdivergenz und die secundären Divergenzen sind stets der einfachen Wirteldivergenz gleich, multiplicirt mit Gliedern der Zählerreihe; da die Zähler der Hauptreihen unter allen Umständen blos der Reihe (I) angehören, so kann man auch sagen, dass die Divergenzfactoren für Stellungsverhältnisse der Hauptreihen stets Glieder der Reihe (I) sind.

3. Wenn y_0 jener Factor ist, mit dem die einfache Wirteldivergenz multiplicirt, die Divergenz der Grundspirale gibt und y_1 $y_2 \ldots\ldots y_{r-1}$, y_r die Divergenzfactoren irgend eines der Hauptreihe angehörigen Stellungsverhältnisses bedeuten, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}
y_0 - y_1 &= + y_2 \\
y_1 - y_2 &= + y_2 \\
y_2 - y_2 &= + y_4 \\
&\ldots\ldots\ldots \\
y_{r-3} - y_{r-2} &= + y_{r-1} \\
y_{r-1} - y_{r-1} &= + y_r
\end{aligned}$$

Diese stets positiven Differenzen je zweier auf einander folgender Divergenzfactoren gehören blos den Hauptreihen an, und sind der Grund, wesswegen die an Zahl gerade auf einander folgenden secundären Spiralen stets in ihrer Richtung nach rechts und links abwechseln.

ownload from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentru

Ich könnte bei der Ableitung der Nebenreihen, zu welcher ich nun schreite, einfach auf die umfassenden Untersuchungen hinweisen, welche Al. Braun in seiner berühmten Abhandlung über die Ordnung der Schuppen am Tannenzapfen [1]) über diesen Gegenstand niedergelegt hat, ergreife aber hier die Gelegenheit, um nachzuweisen, dass es auch Stellungsverhältnisse der Nebenreihen gibt, welche wohl in der Divergenz vollkommen identisch mit Divergenzen der zugehörigen Hauptreihe sind, aber durch ein eigenthümliches Rückschreiten, eine geringere Zahl der Blätter und Spiralwindungen im Cyklus aufzuweisen haben, als dem höheren der beiden Ableitungsglieder eigen ist.

Ich erwähne hier nur, dass diese mit der Hauptreihe ihren Divergenzen nach identischen Stellungsverhältnisse der Nebenreihen über den Wechsel der Stellungsverhältnisse an einer und derselben Pflanzenaxe, besonders über das Rückschreiten der Stellungen (z. B. Auftreten von $\frac{2}{5}$ nach $\frac{5}{13}$) einiges Licht verbreiten; behalte mir aber die Besprechung dieses Gegenstandes, als ausserhalb der mir in dieser Abhandlung gesteckten Grenzen liegend, für eine passendere Gelegenheit vor.

Die Glieder der Hauptreihe entstehen bekanntlich durch Summirung der Zähler und Summirung der Nenner je zweier neben einander stehenden Brüche und Bildung des Quotienten aus diesen Summen. Wählt man nun zwei nicht auf einander folgende Glieder der Hauptreihen und bildet durch Addiren der Zähler und Nenner neue Brüche, so gelangt man zu Werthen, von welchen viele bereits in der Natur vor langem aufgefunden wurden, und Annäherungsverhältnisse zu Gliedern der Hauptreihe sind. Die neu erhaltenen Brüche gehören eigenthümlichen Stellungsreihen an, die man als Nebenreihen der Blattstellung bezeichnen kann. Die Stellungsverhältnisse dieser Reihen haben vieles mit den Gliedern der Hauptreihe, aus denen sie abgeleitet wurden, gemein.

a) Nebenreihen, welche aus der Hauptreihe (I) abgeleitet wurden.

$$1.\ \frac{1+2}{2+5} = \frac{3}{7};\ \frac{1+3}{3+8} = \frac{4}{11};\ \frac{2+5}{5+13} = \frac{7}{18}\ \text{etc.}$$

---

[1]) Nova acta physico-medica. acad. caes. Leop. Car. nat. cur. T. XV. pag. 279.

ownload from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentr

Die auf diese Weise construirte Reihe hat folgende Glieder:

$$\frac{3}{7}, \frac{4}{11}, \frac{7}{18}, \frac{11}{29}, \frac{18}{47} \ldots \ldots (\alpha)$$

Die einzelnen Brüche dieser Nebenreihe sind successive Reductionen des Kettenbruches

$$\cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots \ldots \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3}}}}}.$$

2. $\frac{0+2}{1+5} = \frac{2}{6}$; $\frac{1+3}{2+8} = \frac{4}{10}$; $\frac{1+5}{3+13} = \frac{6}{16}$ etc.

Es ergibt sich mithin die Nebenreihe:

$$\frac{2}{6}, \frac{4}{10}, \frac{6}{16}, \frac{10}{26}, \frac{16}{42} \ldots \ldots (\beta)$$

Die Glieder dieser Nebenreihe können aber auch auf die Form

$$\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{8}, \frac{5}{13}, \frac{8}{21} \ldots \ldots$$

gebracht werden, entsprechen mithin Divergenzen, welche mit jenen der Hauptreihe (1), aus denen sie abgeleitet wurden, identisch sind,

3. $\frac{0+3}{1+8} = \frac{3}{9}$; $\frac{1+5}{2+13} = \frac{6}{15}$; $\frac{1+8}{3+21} = \frac{9}{24}$ etc.

Dadurch erhält man die Nebenreihe:

$$\frac{3}{9}, \frac{6}{15}, \frac{9}{24}, \frac{15}{39}, \frac{24}{63} \ldots \ldots (\gamma)$$

deren Glieder sich wieder auf die Form von Brüchen der Hauptreihe (1) bringen lassen.

4. $\frac{1+3}{1+8} = \frac{4}{9}$; $\frac{0+5}{1+13} = \frac{5}{14}$; $\frac{1+8}{2+21} = \frac{9}{23}$ etc.

Die auf diese Weise abgeleitete Nebenreihe ist:

$$\frac{4}{9}, \frac{5}{14}, \frac{9}{23}, \frac{14}{37}, \frac{23}{60}, \frac{37}{97} \ldots \ldots (\delta)$$

Die der Reihe (δ) angehörigen Divergenzen sind von denen der Hauptreihe verschieden; die Glieder der ersteren sind Reductionen des Kettenbruches

$$\cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots \ldots \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4}}}}}$$

ownload from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentru

b) Nebenreihen, welche aus der Hauptreihe (2) abgeleitet werden.

Auf dieselbe Weise, wie die Reihen (α), (β), (γ) und (δ) aus (1) abgeleitet wurden, ist man auch im Stande, die Nebenreihen (α'), (β'), (γ') und (δ') aus (2) abzuleiten,

$$\frac{3}{10}, \frac{4}{15}, \frac{7}{25}, \frac{11}{40}, \frac{17}{65} \dots \dots (\alpha')$$

$$\frac{4}{14}, \frac{6}{22}, \frac{10}{36}, \frac{16}{58}, \frac{26}{94} \dots \dots (\beta')$$

$$\frac{6}{21}, \frac{9}{33}, \frac{15}{54}, \frac{24}{87}, \frac{39}{141} \dots \dots (\gamma')$$

$$\frac{4}{13}, \frac{5}{19}, \frac{9}{32}, \frac{14}{51}, \frac{23}{83} \dots \dots (\delta')$$

Die Divergenzen, welche aus der Reihe (α') und (δ') hervorgehen, sind von jenen der Hauptreihe (2) verschieden; die hingegen aus (β') und (γ') hervorgehenden sind mit den Divergenzen dieser Hauptreihe identisch, indem die Glieder der (β') und (γ') sich auf die Form $\frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{3}{11}, \frac{5}{18}, \frac{8}{29} \dots\dots$ bringen lassen.

Die der Nebenreihe (α') zugehörigen Brüche sind Reductionen des Kettenbruches

$$\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots\dots+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}}}}.$$

Die Glieder von (δ') lassen sich hingegen aus nachfolgenden Kettenbrüchen ableiten:

$$\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots\dots+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4}}}}}.$$

c) Nebenreihen, welche aus der Hauptreihe (3) abgeleitet werden.

Wendet man das für (1) und (2) benützte Ableitungsverfahren auch für (3) an, so erhält man:

ownload from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentr

$$\frac{3}{13},\ \frac{4}{19},\ \frac{7}{32},\ \frac{11}{51},\ \frac{18}{83}\ \ldots\ldots\ (\alpha'')$$

$$\frac{2}{10},\ \frac{4}{18},\ \frac{6}{28},\ \frac{10}{46},\ \frac{16}{74}\ \ldots\ldots\ (\beta'')$$

$$\frac{3}{12},\ \frac{3}{15},\ \frac{6}{27},\ \frac{9}{42},\ \frac{15}{69}\ \ldots\ldots\ (\gamma'')$$

$$\frac{4}{17},\ \frac{5}{24},\ \frac{9}{41},\ \frac{14}{65},\ \frac{23}{171}\ \ldots\ldots\ (\delta'')$$

Blos den Reihen (α'') und (δ'') entsprechen eigenthümliche von den aus der Hauptreihe (3) verschiedenen Divergenzen. Die Glieder von (α'') gehen aus

$$\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots\ldots+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}}}},$$

die Glieder von (δ'') aus

$$\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots\ldots+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4}}}}}$$

hervor, während die Reihen (β'') und (γ'') vollkommen identisch mit der Hauptreihe (3) sind.

Man könnte nun noch weiter gehen, und einerseits noch andere Hauptreihen für die Ableitung benützen, andererseits könnte man die Ableitung der schon betrachteten Hauptreihen noch weiter fortsetzen; da aber in den zwölf näher untersuchten Reihen bereits das Gesetz der Nebenreihen ausgeprägt ist, so erscheint eine weitere Auseinandersetzung überflüssig.

Untersucht man die Kriterien der Nebenreihen und die Eigenschaften der ihnen entsprechenden Stellungsverhältnisse, so gelangt man zu folgenden Resultaten:

1. Die Nebenreihen sondern sich in zwei wesentlich von einander verschiedene Arten. *a)* In Nebenreihen der ersten Art, deren Gliedern gleiche Divergenzen wie der Hauptreihe eigen sind (oder bei den weiter entwickelbaren Reihen gleiche Divergenzen wie den

ownload from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentru

Gliedern schon entwickelter Nebenreihen entsprechen). *b)* In Nebenreihen der zweiten Art, deren Gliedern eigenthümliche Divergenzen eigen sind.

2. Die Stellungsverhältnisse der Nebenreihen zweiter Art unterscheiden sich von jenen der Hauptreihen dadurch, dass die secundären Zahlen der ersteren von den Zählern und Nennern der Nebenreihen ganz unabhängig sind, und dass die secundären Zahlen Nenner jener Hauptreihe sind, aus der die Nebenreihe abgeleitet wurde.

Bei $\frac{7}{18}$, einem Gliede der Reihe (α), welche eine von (1) abgeleitete Nebenreihe ist, kommen also nicht etwa 3, 4, 7, 11 secundäre Spiralen vor; die secundären Spiralen sind hier zu 2, 3, 5, 8 und 13 angeordnet.

3. Die Divergenzfactoren bei Stellungsverhältnissen der Nebenreihen sind eben so gut Zähler dieser Nebenreihen, wie die Divergenzfactoren bei Stellungsverhältnissen der Hauptreihen Zähler der letzteren sind. Für die Differenzen je zweier auf einander folgender Divergenzfactoren bei Stellungsverhältnissen der Nebenreihen zweiter Art ergibt sich folgendes Gesetz:

$$\begin{array}{lllll} y_0 & - y_1 & = & + & y_2 \\ y_1 & - y_2 & = & + & y_3 \\ y_2 & - y_3 & = & + & y_4 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{r-3} & - y_{r-2} & = & + & y_{r-1} \\ y_{r-2} & - y_{r-1} & = & - & y_r \end{array}$$

Die letzte Differenz ist negativ und bedingt, dass die in grösster Anzahl vorhandenen secundären Spiralen die secundäre Divergenz

$$-\frac{y_r}{m+n}$$

besitzen. Dieser negative Werth bedingt, dass bei den Stellungsverhältnissen der genannten Nebenreihen die zwei in grösster Anzahl vorhandenen secundären Spiralen nicht mehr gegenwendig sind, wie dies bei Stellungen der Hauptreihen der Fall ist; beide Systeme dieser in grösster Anzahl vorhandenen secundären Spiralen sind gleichwendig; entweder gehen beide nach rechts oder beide nach links.

So hat man z. B. bei $r\frac{7}{18}$:

ownload from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentr

Richtung und Anzahl der secund. Spir.	Zugehör. secund. Divergenz
l 2	$+\frac{4}{18}$
r 3	$+\frac{3}{18}$
l 5	$+\frac{1}{18}$
r 8	$+\frac{2}{18}$
r 13	$-\frac{1}{18}$

In diesem Falle sind die zu 8 und 13 vorkommenden secundären Spiralen, bedingt durch die Ungleichheit der Zeichen, welche ihre secundären Divergenzen besitzen, gleichwendig. (Vergleiche A. Braun, l. c. p. 298 und Bischof, Lehrbuch I. 216.)

Nachdem ich im Vorhergehenden die Typen der Haupt- und Nebenreihen der Blattstellung mittheilte, muss ich nothwendiger Weise noch einer besonderen Art von Reihen erwähnen, die man bis jetzt als Hauptreihen gelten liess. Ich führe hier nur als den Typus dieser Reihen folgende an:

$$\frac{2}{5},\ \frac{3}{7},\ \frac{5}{12},\ \frac{8}{19},\ \frac{13}{31},\ \frac{21}{50}\ \ldots\ldots \quad (\varepsilon)$$

Bei dieser wie bei allen analogen Reihen fängt die Nennerreihe nicht mehr mit der Zahl $+1$ an, schliesst mithin, als Hauptreihe aufgefasst, die Existenz einer dem allgemeinen Gesetze des Richtungswechsels genügenden Grundspirale aus, was mit der Erfahrung im Widerspruche steht.

Bei den Stellungsverhältnissen der letzterwähnten Reihen zeigt es sich wohl, dass die secundären Zahlen der Nennerreihe, und die Divergenzfactoren der Zählerreihe angehören, wie dies bei den Hauptreihen der Fall ist; eine Unregelmässigkeit in der Aufeinanderfolge der secundären Zahlen lässt aber die Stellungsverhältnisse dieser Reihen am einfachsten durch den Mangel irgend einer secundären Spirale oder durch die Convergenz zweier solcher Spiralen erklären, wie dies L. und A. Bravais (Mémoires sur la disposition géom. etc.) deutlich ausgesprochen haben.

Diese Ansicht, durch Schleiden (Grundzüge II. 176) wie durch Sendtner (Flora 1847, 226) lebhaft angegriffen, in vor-

ownload from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentru

liegender Abhandlung zu vertheidigen, liegt ausserhalb des hier betretenen Gebietes.

II. Über die Anordnung und Grösse der Blattbögen bei Stellungsverhältnissen der Hauptreihen.

a) Was die Hauptreihe (1) anbelangt, deren Werthe so ungemein häufig in der Natur vorkommen, so habe ich blos auf die bereits in den „Untersuchungen über den Bogenwerth der Blattbasen“ mitgetheilten Resultate hinzuweisen; in diesem Falle gestalten sich die Grössen der Blattbögen überaus einfach, indem bei (1) Zähler- und Nennerreihe identisch sind. Der Factor, mit dem die einfache Wirteldivergenz multiplicirt, den Blattbogen gibt (den wir der Kürze wegen stets mit x bezeichnen wollen), ist bei (1) immer ein Glied von (I), welches hier ebenso gut als Zähler wie als Nenner der (1) angesehen werden kann. Die eigentliche Bedeutung des Factors x in Bezug auf die Hauptreihen im Allgemeinen kann erst dann richtig aufgefasst werden, wenn andere Hauptreihen vorliegen, bei denen die Zählerreihen von den Nennerreihen verschieden sind, wie dies bei den Hauptreihen (2), (3), (4) der Fall ist. Die Zahlen der ungedeckten Blätter finden ebenfalls aus dem Grunde bei der Hauptreihe (1) nicht ihre allgemeine Würdigung, weil hier Zähler- und Nennerreihe identisch sind.

b) Nimmt man irgend ein Glied aus der Reihe $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{11}$, $\frac{5}{18}$, $\frac{8}{29}$, etc. und construirt, von der gerechtfertigten Annahme ausgehend, dass die Blattbögen eines und desselben Cyklus, also bei gleicher Divergenz, unter einander gleich sind, das zugehörige Stellungsverhältniss; so erhält man eine bestimmte Anzahl ungedeckter Blätter, welche für die Bestimmung der Grösse des Blattbogens von Wichtigkeit ist. Der Umstand, wie die ungedeckten Blätter angeordnet sind, ob ein Theil der Blattbasen sich gegenseitig berührt (tangirende Blätter), ein anderer Theil freigestellt ist (isolirte Blätter), ob blos tangirende, oder blos isolirte Blätter vorkommen, ist besonders in's Auge zu fassen.

Es ist wohl kaum nothwendig, zu erwähnen, dass selbst bei gedrängt stehenden Blättern erst dann von einer punktweisen Berührung der Blattbasen im mathematischen Sinne die Rede sein kann,

ownload from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentru

wenn man sich die Blattbasen aller ungedeckten Blätter in einer einzigen Ebene liegend denkt.

Bei dem Stellungsverhältnisse $\frac{3}{11}$ erhielt man:

Für $x=1$ (d. i. bei der Grösse des Blattbogens $\frac{1}{11}$) 11 sich gegenseitig mit ihren Basen berührende ungedeckte Blätter.

Für $x=2$ (d.i. bei der Grösse des Blattbogens $\frac{2}{11}$) ein Paar sich berührender, und 2 isolirt stehende Blätter.

Für $x=3$ bekömmt man eine Gruppe von 3 sich berührenden Blättern.

Für $x=4$ bis $x=11$ erhält man ein isolirtes Blatt.

Bei $\frac{5}{18}$ bekömmt man, wenn man mit t die Zahl der tangirenden, mit i die Zahl der isolirten Blätter, endlich mit $t+i$ die Summe aller ungedeckten Blätter bezeichnet:

	t	i	$t+i$
für $x = 1$	(18×1)[1]	0	18
„ $x = 2$	(2×3)	1	7
„ $x = 3$	(2×1)	2	4
„ $x = 4$	0	3	3
„ $x = 5$	(3×1)	0	3
„ $x = 6$ bis „ $x = 18$	0	1	1

Bei $\frac{8}{29}$ (siehe die Tafel, Fig. 1—5) erhalten wir:

	t	i	$t+i$
für $x = 1$	(29×1)	0	29
„ $x = 2$	(2×4)	3	11
„ $x = 3$	(2×3)	1	7
„ $x = 4$	0	4	4
„ $x = 5$	(2×1)	2	4
„ $x = 6$, „ $x = 7$	0	3	3
„ $x = 8$	(3×1)	0	3
„ $x = 9$ bis „ $x = 28$	0	1	1

[1]) Der erste Factor des in der Klammer eingeschlossenen Productes zeigt an, zu wie vielen die Blätter gruppirt sind, der zweite Factor hingegen, wie viele solcher Gruppen vorhanden sind. So bedeutet z. B. (2×3), dass drei Paare ungedeckte Blätter vorkommen.

ownload from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentru

c) Da die unter *b* gegebenen drei Fälle das Gesetz für Zahl und Anordnung der ungedeckten Blätter in Bezug auf Stellungsverhältnisse der Reihe (2) enthalten, so schreiten wir gleich zur Betrachtung dieser Grössen für Stellungsverhältnisse der Reihe (3).

Nimmt man z. B. aus dieser Hauptreihe das Glied $\frac{3}{14}$, so erhält man:

	t	i	$t+i$
für $x = 1$	(14×1)	0	14
„ $x = 2$	(2×1)	3	5
„ $x = 3$	(4×1)	0	4
„ $x = 4$ bis „ $x = 14$	0	1	1

Wählt man den Fall $\frac{5}{23}$, so gelangt man zu folgenden Resultaten:

	t	i	$t+i$
für $x = 1$	(23×1)	0	23
„ $x = 2$	(2×4)	1	9
„ $x = 3$	(2×1)	3	5
„ $x = 4$	0	4	4
„ $x = 5$	(4×1)	0	4
„ $x = 6$ bis „ $x = 23$	0	1	1

Nimmt man schliesslich noch $\frac{13}{60}$, so bekömmt man:

	t	i	$t+i$
für $x = 1$	(60×1)	0	60
„ $x = 2$	(2×9)	5	23
„ $x = 3$	(2×5)	4	14
„ $x = 4$	0	9	9
„ $x = 5$	(2×4)	1	9
„ $x = 6$ „ $x = 7$	0	5	5
„ $x = 8$	(2×1)	3	5
„ $x = 9$ „ $x = 12$	0	4	4
„ $x = 13$	(4×1)	0	4
„ $x = 14$ bis „ $x = 60$	0	1	1

d) Um dann noch für die Hauptreihe (4) die für die Bestimmung der Blattbögen so wichtigen Zahlenverhältnisse der ungedeckten

ownload from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentru

Blätter kennen zu lernen, wählen wir blos ein einziges Glied von (4) heraus, z. B. $\frac{8}{45}$, das als Repräsentant für alle Stellungsverhältnisse dieser Reihe dienen möge.

	t	i	$t+i$
für $x = 1$	(45×1)	0	45
„ $x = 2$	(2×6)	5	17
„ $x = 3$	(2×5)	1	11
„ $x = 4$	0	6	6
„ $x = 5$	(2×1)	4	6
„ $x = 6$ } „ $x = 7$ }	0	5	5
„ $x = 8$	(5×1)	0	5
„ $x = 9$ bis } „ $x = 45$ }	0	1	1

Fasst man die in den eben angeführten Fällen erhaltenen Resultate zusammen, so ergeben sich folgende Sätze, die in ihrem ganzen Umfange für alle nur denkbaren Stellungsverhältnisse der Hauptreihen gelten:

1. Wenn die Blattbögen eines Cyklus unter einander gleich sind, so ist die Zahl der ungedeckten Blätter unter allen Umständen, selbst wenn x eine gebrochene Zahl vorstellt, ein Glied aus der Nennerreihe, mithin eine secundäre Zahl des bezüglichen Stellungsverhältnisses, die Gesammtzahl der Blätter im Cyklus nicht ausgenommen [1].

2. Es ist besonders bemerkenswerth, dass, wenn $\frac{y_1+y_2}{m+n}$ die Divergenz, und $m+n$, n, m, $n-m$, ... die secundären Zahlen bedeuten, mit Ausnahme der Zahl n jeder dieser Werthe der Anzahl ungedeckter Blätter gleich kommen kann.

3. Alle Fälle, in welchen x die Grösse eines Divergenzfactors besitzt, also ein Glied der Zählerreihe ist, oder was dasselbe ist, alle Fälle, in welchen der Blattbogen die Grösse der Hauptdivergenz oder einer secundären Divergenz besitzt, sind von allen übrigen scharf geschieden. Ist nämlich x ein Divergenzfactor, so kommen, wenn die Zahl der ungedeckten Blätter überhaupt grösser als 1 ist, tangirende Blätter vor, ist x kein Divergenzfactor, so zeigen sich blos isolirte Blätter.

---

[1] Die Gesammtzahl der Blätter im Cyklus kann ebenfalls als secundäre Zahl aufgefasst werden, soferne man die Verticale als eine Spirale von der Divergenz 0 oder der Windungshöhe ∞ annimmt.

ownload from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentru

Im ersten Falle ergeben sich folgende interessante Verhältnisse:

a) Für $x=1$ tangiren alle projicirt gedachten Blätter des Cyklus und summiren sich zu einem Vollkreise.

b) Für $x \gtrless \begin{matrix}1 \\ y_1+y_2\end{matrix}$, wenn aber der Blattbogen dennoch die Grösse einer secundären Divergenz besitzt, kommen die tangirenden Blätter paarweise vor.

c) Wenn $x=y_1+y_2$ ist, der Blattbogen mithin geradezu die Grösse der Hauptdivergenz besitzt, so kömmt eine Gruppe von so vielen ungedeckten tangirenden Blättern vor, als der erste Nenner der Hauptreihe Einheiten besitzt. (So kommen z. B. bei allen Stellungsverhältnissen der Reihe (3), bei $\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{9}, \frac{3}{14}, \frac{5}{23}$ etc., wenn die Blattbögen dieser Stellungsverhältnisse ebenfalls die Werthe $\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{9}, \frac{3}{14}, \frac{5}{23}$ etc. besitzen, stets vier, zu einer Gruppe vereinigte, ungedeckte, tangirende Blätter vor.)

III. Über die Anordnung und Grösse der Blattbögen bei Stellungsverhältnissen der Nebenreihen.

Es ist selbstverständlich, dass bei der Untersuchung der Blattbögen im vorliegenden Falle blos die Nebenreihen der zweiten Art betrachtet werden, die sich nicht als den Divergenzen nach identisch mit der entsprechenden Hauptreihe erweisen. Für die Nebenreihen der ersten Art gelten alle bereits für die Hauptreihe ausgesprochenen Sätze. Unsere Aufgabe kann sich mithin blos auf die Betrachtung der Reihen (α), (δ), (α'), (δ') etc. erstrecken.

a) Wählt man ein Glied der Nebenreihe (α), z. B. $\frac{4}{11}$ und construirt die successiven Blattbögen dieses Stellungsverhältnisses, so erhält man:

	t	i	$t+i$
für $x = 1$	(11×1)	0	11
„ $x = 2$	0	3	3
„ $x = 3$	(2×1)	1	3
„ $x = 4$	(2×1)	0	2
„ $x = 5$ bis „ $x = 11$	0	1	1

ownload from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentr

Wählt man aus derselben Reihe $\frac{11}{29}$, so bekömmt man:

	t	i	$t+i$
für $x = 1$	(29×1)	0	29
„ $x = 2$	0	8	8
„ $x = 3$	(2×3)	2	8
„ $x = 4$	(2×2)	1	5
„ $x = 5$ „ $x = 6$	0	3	3
„ $x = 7$	(2×1)	1	3
„ $x = 8$ bis „ $x = 10$	0	2	2
„ $x = 11$	(2×1)	0	2
„ $x = 12$ bis „ $x = 29$	0	1	1

b) Wählt man den Fall $\frac{9}{23}$ aus (δ), so ergibt sich:

	t	i	$t+i$
für $x = 1$	(23×1)	0	23
„ $x = 2$	0	5	5
„ $x = 3$	0	5	5
„ $x = 4$	(2×2)	1	5
„ $x = 5$	(2×1)	1	3
„ $x = 6$ bis „ $x = 8$	0	2	2
„ $x = 9$	(2×1)	0	2
„ $x = 10$ bis „ $x = 23$	0	1	1

Nimmt man sodann $\frac{14}{37}$, ebenfalls der Reihe (δ) angehörend zur Untersuchung, so erhält man:

	t	i	$t+i$
für $x = 1$	(37×1)	0	37
„ $x = 2$ „ $x = 3$	0	8	8
„ $x = 4$	(2×3)	2	8
„ $x = 5$	(2×2)	1	5
„ $x = 6$ bis „ $x = 8$	0	3	3
„ $x = 9$	(2×1)	1	3
„ $x = 10$ bis „ $x = 13$	0	2	2
„ $x = 14$	(2×1)	0	2
„ $x = 15$ bis „ $x = 37$	0	1	1

ownload from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentru

c) Übergehen wir nun zur Untersuchung der Stellungsverhältnisse jener Nebenreihen, welche aus der Hauptreihe (2) abgeleitet wurden, so ergibt sich für das der Reihe (α') angehörende Stellungsverhältniss $\frac{7}{25}$:

	t	i	$t+i$
für $x = 1$	(25×1)	0	25
„ $x = 2$	0	7	7
„ $x = 3$	(2×3)	1	7
„ $x = 4$	(2×1)	2	4
„ $x = 5$ „ $x = 6$	0	3	3
„ $x = 7$	(3×1)	0	3
„ $x = 8$ bis „ $x = 25$	0	1	1

Nimmt man nun aus der Reihe (α') noch $\frac{11}{40}$, so bekömmt man:

	t	i	$t+i$
für $x = 1$	(40×1)	0	40
„ $x = 2$	0	11	11
„ $x = 3$	(2×4)	3	11
„ $x = 4$	(2×3)	1	7
„ $x = 5$ bis „ $x = 6$	0	4	4
„ $x = 7$	(2×1)	2	4
„ $x = 8$ bis „ $x = 10$	0	3	3
„ $x = 11$	(3×1)	0	3
„ $x = 12$ bis „ $x = 40$	0	1	1

d) Für $\frac{14}{51}$, das der Reihe (δ') angehört, erhält man:

	t	i	$t+i$
für $x = 1$	(51×1)	0	51
„ $x = 2$ „ $x = 3$	0	11	11
„ $x = 4$	(2×4)	3	11
„ $x = 5$	(2×3)	1	7
„ $x = 6$ bis „ $x = 8$	0	4	4
„ $x = 9$	(2×1)	2	4
„ $x = 10$ bis „ $x = 13$	0	3	3
„ $x = 14$	(3×1)	0	3
„ $x = 15$ bis „ $x = 51$	0	1	1

ownload from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentru

Das Gesetz für Anordnung und Zahl der ungedeckten Blätter, gegenüber den Blattbögen bei Stellungsverhältnissen der Nebenreihen, ist in den vorhergehenden Fällen so deutlich ausgeprägt, dass eine weitere Aufführung von Beispielen nur als Wiederholung zu betrachten wäre.

Fasst man die in obigen Fällen gewonnenen Resultate zusammen, so ergeben sich für die Stellungsverhältnisse der Nebenreihen folgende Sätze:

1. Bei vorausgesetzter Gleichheit der Blattbögen eines Cyklus unter einander kommen unter allen Umständen, selbst wenn x eine gebrochene Zahl ist, entweder so viele ungedeckte Blätter vor, als verticale Reihen im Cyklus vorhanden sind (für $x=1$); oder die Zahl der ungedeckten Blätter ist so gross, als ein Nenner der entsprechenden Hauptreihe (für $x>1$).

Dieser Satz lautet, allgemeiner ausgedrückt: Die Anzahl der ungedeckten Blätter gleicht einer secundären Zahl, soferne auch die verticalen Reihen als Spiralen (von der Windungshöhe ∞) aufgefasst werden.

2. Alle jene Fälle, in denen x ein Zähler der Nebenreihe, also ein Divergenzfactor ist, sind von allen übrigen Fällen scharf unterschieden, indem in den erstgenannten Fällen tangirende Blätter vorkommen, wenn die Zahl der ungedeckten Blätter überhaupt grösser als 1 ist; in den letztgenannten Fällen zeigen sich blos isolirte Blätter.

Ist x ein Divergenzfactor, besitzt also der Blattbogen die Grösse der Haupt- oder einer secundären Divergenz, so ergeben sich folgende interessante Verhältnisse:

a) Ist $x=1$, so summiren sich alle ungedeckten Blätter zu einem Vollkreise.

b) Ist $\begin{matrix} x>1 \\ <y_1+y_2 \end{matrix}$, der Blattbogen aber dennoch einer zwischen den genannten Grenzen eingeschlossenen secundären Divergenz gleich, so kommen die tangirenden Blätter **paarweise** vor.

c) Ist endlich $x=y_1+y_2$, hat also der Blattbogen geradezu die Grösse der Hauptdivergenz, so kommen so viele tangirende Blätter vor, als der erste Nenner der Hauptreihe Einheiten besitzt und zwar sind diese ungedeckten Blätter in eine Gruppe vereinigt.

ownload from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentru

So ist z. B. bei $\frac{11}{40}$ aus (α'), wenn der Blattbogen ebenfalls die Grösse $\frac{11}{40}$ besitzt, die Zahl der ungedeckten Blätter gleich 3, weil der erste Nenner der Hauptreihe $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{7}$ . . . . . , aus der (α') abgeleitet wurde, gleich 3 ist.

Betrachten wir nun im Anschlusse an die Untersuchungen der Nebenreihen, noch die Anordnung und Grösse der Blattbögen bei Stellungsverhältnissen der Reihe (ε).

$\frac{13}{31}$, der Reihe (ε) angehörend, ergibt

	t	i	$t+i$
für $x = 1$	(31×1)	0	31
„ $x = 2$	(2×5)	2	12
„ $x = 3$	(2×2)	3	7
„ $x = 4$	0	5	5
„ $x = 5$	(3×1)	2	5
„ $x = 6$ bis „ $x = 12$	0	2	2
„ $x = 13$	(2×1)	0	2
„ $x = 14$ bis „ $x = 31$	0	1	1

Aus dieser Zusammenstellung ist ersichtlich, dass auch bei der Reihe (ε) die ungedeckten Blätter Glieder der Nennerreihe sind, mithin die Grösse einer secundären Zahl im weitesten Sinne der Bedeutung besitzen. Auch hier sind die Fälle, in welchen x den Werth eines Divergenzfactors darstellt, im Allgemeinen von den übrigen gesondert.

Folgende Unregelmässigkeiten in der Zahl und Anordnung der ungedeckten Blätter springen in die Augen, welche sowohl bei Haupt- als Nebenreihen niemals angetroffen werden können.

a) Während bei $x = 5$ die ungedeckten Blätter in Paaren anzutreffen sein sollten, sind sie hier in einer Gruppe zu dreien angeordnet.

b) Bei $x = 8$ zeigen sich in unserem Falle keine tangirenden Blätter mehr, trotzdem 8 als Divergenzfactor dieselben bedingen sollte.

ownload from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentr

Diese Unregelmässigkeiten zeigen sich bei allen Stellungsverhältnissen, welche der Reihe (ε) und den analog construirten Reihen angehören, und stehen einzig und allein mitten unter allen Stellungsverhältnissen, von denen der Haupt- und Nebenreihen scharf getrennt. Untersucht man, zur genaueren Würdigung des unter b Angegebenen die secundären Spiralen bei $\frac{13}{31}$, so findet man, dass die zu 7 angeordneten sich nicht mehr als Summe der beiden nächst vorhergehenden, die zu 3 und 5 vorhanden sind, darstellen[1]). Bedingt durch die secundären Zahlen 3 und 5, sollte die nächst höhere secundäre Zahl nicht 7, sondern 8 sein, wesswegen man Grund hat, anzunehmen, dass hier eine der zu 8 angeordneten secundären Spiralen fehle.

Verallgemeinert man die für die Haupt- und Nebenreihen in Bezug auf Grösse und Anordnung der ungedeckten Blätter gewonnenen Resultate, so kömmt man zu dem Schlusse, dass, bei vorausgesetzter Gleichheit der Blattbögen, die Anzahl der ungedeckten Blätter ausnahmslos die Grösse einer secundären Zahl — die Summe der verticalen Reihen als secundäre Zahl nicht ausgeschlossen — besitzt; (I)

dass ferner die Tendenz der Blätter mit den Basen zu tangiren dadurch bedingt ist, dass der Blattbogen die Grösse der Hauptdivergenz oder die einer secundären Divergenz hat. (II)

Eine grosse Reihe von Beobachtungen spricht dafür, dass bei bestimmter Divergenz — Übergangsdivergenzen ausgeschlossen — der Satz (I) seine volle Geltung habe, mithin die Annahme von der Gleichheit der Blattbögen gerechtfertigt erscheint; nicht minder macht es eine grosse Zahl von Beobachtungen wahrscheinlich, dass die Tendenz der Blätter, mit ihren Basen zu tangiren (oder besser gesagt in der Projection zu tangiren), eine allgemeine sei. Aber erst dann, bis eine erschöpfende Menge von Beobachtungen vorliegt, bis Stellungsverhältnisse der Hauptreihen (2), (3) und (4)

---

[1]) Die Construction lehrt, dass bei $\frac{13}{31}$ secundäre Spiralen zu 3 vorkommen, trotzdem in der Reihe (ε) kein Nenner den Werth 3 annimmt; da sich aber die Reihe (ε) auch in folgender Weise: — $\frac{0}{1}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{7}$ etc. schreiben lässt, so ist die Zahl 3 als secundäre Zahl bei dem Stellungsverhältnisse $\frac{13}{31}$ gerechtfertigt.

ownload from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentru

und jene der Nebenreihen in grösserer Anzahl vorhanden sind, als dies im gegenwärtigen Augenblicke der Fall ist, ist man berechtigt, den Satz, dass der Blattbogen stets die Grösse der Haupt- oder einer secundären Divergenz besitzt, in seinem vollen Umfange gelten zu lassen.

Bis jetzt ist dieser Satz für die Reihe (1) so gut wie vollkommen erwiesen, und für die anderen Haupt- und Nebenreihen zum mindesten sehr wahrscheinlich.

IV. Berechnung der Blattbögen für Stellungsverhältnisse der Hauptreihen [1].

Wenn $\frac{y_1+y_2}{m+n}$ uns allgemein ein Stellungsverhältniss einer der Hauptreihen charakterisirt, y_1, y_2, m und n die oben angenommene Bedeutung haben, so kann man die Grösse des Blattbogens durch $\frac{x}{m+n}$ ausdrücken, wobei $\frac{1}{m+n}$ die bei bekannter Divergenz ebenfalls bekannte einfache Wirteldivergenz der Blätter im Cyklus bedeutet, und x den unbekannten Factor vorstellt, der aus der Zahl der ungedeckten Blätter, welche durch Beobachtung jederzeit ermittelt werden kann, zu finden ist.

Nimmt man $x=1$ an, und sucht die Zahl der ungedeckten Blätter für diese Grösse bei $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{8}$ etc., so ergibt sich für $\frac{y_1+y_2}{m+n}$ der allgemeine Werth $m+n$; setzt man nun $x=2$ und bestimmt die Zahl der ungedeckten Blätter wieder für $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{8}$ etc., so erhält man für $\frac{y_1+y_2}{m+n}$ allgemein den Ausdruck m als Zahl der ungedeckten Blätter. Setzt man nun dieses Verfahren fort, indem man für x successive Divergenzfactoren substituirt (nur diese geben mit der einfachen Wirteldivergenz multiplicirt Blattbögen von der Grösse einer Haupt- oder secundären Divergenz), so ist man im Stande, die Zahl der ungedeckten Blätter für $\frac{y_1+y_2}{m+n}$ allgemein durch m und n bei allen nur möglichen Werthen von x auszudrücken, wodurch man zu folgenden Ausdrücken gelangt.

---

[1] Hier wie bei der Berechnung der Blattbögen für Stellungsverhältnisse der Nebenreihe, werden blos jene Fälle in Betracht gezogen, wo der Blattbogen die Grösse der Haupt- oder einer secundären Divergenz besitzt. Diese Fälle, durch tangirende Blätter einzig und allein ausgezeichnet, lassen eine unzweifelhafte Bestimmung zu.

ownload from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentr

Werthe von x	Anzahl der ungedeckten Blätter bei $\frac{y_1+y_2}{m+n}$
$x = 1$	$n - (-m)$[1]
$x = 2$	$m - 0.n$
$x = 3$	$n - m$
$x = 5$	$2m - n$
$x = 8$	$2n - 3m$
$x = 13$	$5m - 3n$
$x = 21$	$5n - 8m$
. . . . . .	. . . . . .

Aus der gesetzmässigen Aufeinanderfolge der hier angegebenen Differenzen, welche die Zahlen der ungedeckten Blätter vorstellen, kann man aber in folgender Weise schliessen: Sind q und p zwei auf einander folgende Nenner der Reihe (1), etwa wie 5 und 8, 13 und 21 . . . . . m und n, so müssen

$$pm-qn \text{ und } pn-(p+q)m$$

zwei gerade auf einander folgende Differenzen sein, wie etwa

$$2m-n \text{ und } 2n-3m.$$

Diesen allgemeinen Ausdrücken für die ungedeckten Blätter müssen aber auch zwei Werthe von x entsprechen, die aus

$$pm-qn \text{ und } pn-(p+q)m$$

ebenso hervorgehen, wie $x=3$ aus $n-m$, und $x=5$ aus $2m-n$ hervorgeht. Der Differenz $pm-qn$ entspricht aber

$$x=2p+q;$$

der Differenz

$$pn-(p+q)m$$

hingegen

$$x=2(p+q)+p=3p+2q.$$

Sind aber diese Ausdrücke

$$2p+q \text{ und } 3p+2q$$

wirklich die den Differenzen

$$pm-qn \text{ und } pn-(p+q)m$$

entsprechenden Werthe von x; so müssen

$$2p+q \text{ und } 3p+2q$$

---

[1] Die Zahl der ungedeckten Blätter ist in nachfolgenden Ausdrücken stets als Differenz von m und n oder n und m ausgedrückt, wesshalb, der gleichmässigen Form der Ausdrücke wegen, statt $n + m$ der Ausdruck $n - (-m)$ gesetzt wurde.

ownload from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentru

zwei sich zunächst stehende Nenner aus der Reihe (1) sein, wie etwa 8 und 13 oder 13 und 21, wovon man sich leicht in nachfolgender Weise überzeugen kann. Nimmt man $q=8$ und somit $p=13$, so ist

$$2p+q=34 \text{ und } 3p+2q=55,$$

welche Zahlen aber wirklich Nachbarglieder der Reihe 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55 . . . . . sind.

Es lässt sich nun leicht zeigen, dass bei allen Hauptreihen wie bei der eben angegebenen (1), wenn allgemein

$$pm-qn$$

die Zahl der ungedeckten Blätter bedeutet, der zugehörige Werth von

$$x=2p+q$$

ist, dass ferner, wenn

$$pn-(p+q)m$$

die Zahl der ungedeckten Blätter ausdrückt, der entsprechende Werth von

$$x=3p+2q=2(p+q)+p$$

sein muss. Man kömmt somit für die Berechnung des Factors x aus der Zahl der ungedeckten Blätter bei Stellungsverhältnissen der Hauptreihen zu folgendem Satze:

Drückt man die Zahl der ungedeckten Blätter durch m und n aus, soferne $m+n$ die stets bekannte Zahl der Blätter im Cyklus vorstellt, so erhält man aus diesem Ausdrucke x, wenn man den absoluten Werth des Coëfficienten von m mit 2 multiplicirt und den Coëfficienten von n, absolut genommen, dazu addirt.

Ist z. B.

$$\frac{21}{55}=\frac{21}{21+34}$$

gegeben, und die Zahl der ungedeckten Blätter ebenfalls bekannt, z. B. gleich 8, so kann man durch 21 und 34 ausdrücken und erhält:

$$8=2\times 21-1\times 34.$$

woraus

$$x=2\times 2+1=5$$

resultirt.

Der Blattbogen beträgt unter den gemachten Voraussetzungen $\frac{5}{55}$

ownload from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentr

V. Berechnung der Blattbögen für Stellungsverhältnisse der Nebenreihen.

Die Zahlen der ungedeckten Blätter sind bei Stellungsverhältnissen der Nebenreihen, wie früher nachgewiesen wurde, Nenner jener Hauptreihen, aus denen die Nebenreihen abgeleitet wurden. Man wird mithin am einfachsten die Zahl der ungedeckten Blätter durch Nenner der entsprechenden Hauptreihe ausdrücken können.

Nehmen wir gleich ein Glied der Reihe (α) her, z. B. $\frac{7}{18}$, so ist es ein Leichtes, die Zahlen der ungedeckten Blätter 5 und 3, die bei den Blattbögen $\frac{3}{18}$ und $\frac{4}{18}$ vorkommen, durch das nächst niedere Stellungsverhältniss der Hauptreihe, nämlich durch $\frac{5}{13}=\frac{5}{5+8}$ auszudrücken.

Bezeichnen wir allgemein durch $\frac{y_1+y_2}{m+n}$ ein Stellungsverhältniss der Nebenreihe (α) und das nächst niedere der zugehörigen Hauptreihe mit $\frac{y_1'+y_2'}{m'+n'}$, so erhält man für die auf einander folgenden Werthe von x nachstehende Ausdrücke als Zahlen der ungedeckten Blätter:

	Zahlen der ungedeckten Blätter
für $x = 1$	$n - (-m)$ [1]
$x = 3$	$m' - 0\,n'$
$x = 4$	$n' - m'$
$x = 7$	$2\,m' - n'$
$x = 11$	$2\,n' - 3\,m'$
$x = 18$	$5\,m' - 3\,n'$
$x = 29$	$5\,n' - 8\,m'$

Bedeutet nun allgemein

$$pm'-qn'$$

die Zahl der ungedeckten Blätter, so ist der zugehörige allgemeine Werth von

$$x=3p+q;$$

---

[1]) Die Blätterzahl im Cyklus lässt sich natürlich nur durch Nenner der Nebenreihe ausdrücken, mithin durch m und n, nicht aber durch m' und n'. Hier finden wir ausnahmsweise $x=2\times(+1)+(-1)\times 1=1$, wobei -1 den Coëfficienten von m und $+1$ den Coëfficienten von n darstellt, ein Werth, der aus der später resultirenden, allgemeinen Formel nicht hervorgeht.

ownload from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentru

stellt sodann

$$pn'-(p+q)m'$$

die Zahl der ungedeckten Blätter vor, so resultirt für x der Werth

$$3(p+q)+p=4p+3q.$$

Auch hier zeigt sich darin eine Controle für die Richtigkeit der beiden ermittelten Werthe von x, dass

$$3p+q \text{ und } 4p+3q,$$

zwei sich zunächst stehende Nenner der Nebenreihe (α) sind, was, der Gesetzmässigkeit der auf einander folgenden Zahlen der ungedeckten Blätter zufolge, durch die beiden Ausdrücke

$$pm'-qn' \text{ und } pn'-(p+q)m'$$

bedingt wird.

Drückt man mithin für Stellungsverhältnisse der Nebenreihe (α) die Zahl der ungedeckten Blätter durch den Nenner $m'+n'$ des nächst kleineren Hauptreihengliedes aus, und multiplicirt man den absolut zunehmenden Coëfficienten von m' mit der Constanten 3, und addirt den ebenfalls absolut zu nehmenden Coëfficienten von n' dazu, so stellt die Summe den Werth von x vor.

Es unterläge nun keiner Schwierigkeit, die Werthe von x für alle denkbaren Nebenreihen, aus den Nennern der zugehörigen Hauptreihen abzuleiten und die Grösse des für jede Nebenreihe constanten Coëfficienten von m' zu ermitteln. Ist es aber schon an und für sich unbequem, den Factor x nicht gleich aus den Nennern der beobachteten Divergenz abzuleiten, so zeigt noch zudem eine eingehendere Betrachtung, dass für die Reihe (δ) und den analogen Reihen (δ'), (δ''), (δ'''), sowie für die andern noch möglichen Nebenreihen diese, bei den Hauptreihen so leicht durchführbare Berechnung von x, hier immer umständlicher wird.

Ich übergehe mithin diese für die Nebenreihen unbequeme Art der Berechnung und theile eine andere Berechnungsweise von x mit, die für Stellungsverhältnisse der Haupt- und Nebenreihen geltend, zum mindesten für die Auffindung von x aus Gliedern der Nebenreihen von nicht zu unterschätzender Bedeutung ist.

Nimmt man irgend ein Stellungsverhältniss, z. B. das der Reihe (α) angehörende $\frac{11}{29}$ an, denkt sich dasselbe zuerst am Cylinder construirt und dann in der Ebene ausgebreitet (siehe *d*, Taf. Fig. 6);

ownload from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentru

nimmt man ferner die durch die Insertion 0 gehende Horizontale 0·29 als Abscissenaxe an, so entsprechen den auf einander folgenden Insertionen, die Länge der Abscissenaxe = 29 gesetzt, gewisse Abscissen.

In unserem Beispiele, bei $\frac{11}{29}$

hat die	Insertion	0	die	Abscisse	0	
„	„	1	„	„	11	
„	„	2	„	„	22	
„	„	3	„	„	4	= 33 — 29 [1])
„	„	4	„	„	15	
„	„	5	„	„	26	
„	„	6	„	„	8	= 37 — 29

. . . .

Schreibt man nun die Abscissen von den im Cyklus geradezu ungedeckten Blätter an, ordnet dieselben nach dem numerischen Werthe, und bildet die erste Differenzreihe dieser Zahlen, so gibt die kleinste Differenz den Factor x.

Würden bei der Stellung $\frac{11}{29}$ durch Beobachtung 5 ungedeckte Blätter ermittelt worden sein, so erhielte man folgende Zahlen für die Abscissen der 5 ungedeckten Blätter:

0, 11, 22, 4, 15,

die, numerisch geordnet, in folgender Weise an einander zu reihen sind:

0, 4, 11, 15, 22.

Die erste Differenzreihe ergibt die Zahlen:

4, 7, 4, 7,

in welcher die Zahl 4, als die kleinste Differenz, gleich x ist.

Ist die Zahl der ungedeckten Blätter bei $\frac{11}{29}$ gleich 5, so ist der Blattbogen gleich $\frac{4}{29}$.

---

[1]) Man muss selbstverständlich von der Abscisse 33 die Zahl 29, also die der kreisförmigen Cylinderleitlinie gleiche Abscissenlänge abziehen, weil man im Punkte 29 den Kreisumfang durchschritten hat, mithin wieder im Punkte 0 angelangt ist, von wo aus die weitere Bemessung der Abscissenlängen beginnt.

ownload from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentru

Nachstehende Beispiele werden im Stande sein, die eben angegebene Methode klar zu machen.

1. Divergenz $= \frac{21}{55}$; Zahl der ungedeckten Blätter $= 8$.

Insertionen	0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7
Zugehörige Abscissen	0,	21,	42,	8,	29,	50,	16,	37
Numerisch geordnete Abscissen	0,	8,	16,	21,	29,	37,	42,	50
Erste Differenzreihe derselben		8,	8,	5,	8,	8,	5,	8

Die Zahl 5, als die kleinste Differenz, ist gleich x; mithin die Grösse des Blattbogens gleich $\frac{5}{55}$ [1]).

2. Divergenz $= \frac{14}{37}$ (der Nebenreihe $[\delta]$ angehörend): Zahl der ungedeckten Blätter $= 3$.

Insertionen	0,	1,	2,	(0) [2])
Zugehörige Abscissen	0,	14,	28,	(37)
Numerisch geordnete Abscissen	0,	14,	28,	37
Erste Differenzreihe derselben		14,	11,	9

Berechneter Blattbogen $= \frac{9}{37}$

Die Methode und ihre Anwendung ist aus den beiden angegebenen Beispielen vollkommen zu ersehen; es erübrigt nur noch zu erwähnen, dass in der numerischen Aufeinanderfolge der Abscissen schon das Gesetz der Anordnung der ungedeckten Blätter ausgeprägt ist, indem jene sich zunächst stehenden Abscissenwerthe, deren Differenz gleich x ist, tangirenden Blättern entsprechen, jene neben einander stehenden Abscissenwerthe hingegen, deren Differenz grösser als x ist, sich auf isolirte Blätter beziehen.

Folgende Beispiele werden zur Erläuterung des eben ausgesprochenen Satzes dienen.

1. Divergenz $= \frac{11}{40}$; Zahl der ungedeckten Blätter $= 11$.

---

1) Siehe Wiesner l. c. Taf. I, Fig. 6.

2) Ist die Zahl der ungedeckten Blätter so klein, dass man nach Bildung der Abscissen den Kreisumfang noch nicht überschritten hat, so muss man für die Insertion 0 noch die mit 0 gleichwerthige Abscisse bei der Differenzbildung berücksichtigen; desshalb ist in unserem Falle ausser der Abscisse 0, der Insertion 0, noch die mit 0 gleichwerthige Abscisse 37 angegeben.

ownload from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentru

Insertionen	0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,	(0)
Zugehörige Abscissen	0,	11,	22,	33,	4,	15,	26,	37,	8,	19,	30,	(40)
Blätter	0,	4,	8,	1,	5,	9,	2,	6,	10,	3,	7,	(0)
Numerisch geordnete Abscissen	0,	4,	$\overparen{8, 11}$,		15,	$\overparen{19, 22}$,		26,	$\overparen{30, 33}$,		$\overparen{37, (40)}$	
Erste Differenzreihe		4,	4,	3,	4,	4,	3,	4,	4,	3,	4,	3
				x			x			x		x

Die mit einem Bogen verbundenen Zahlen sind jene neben einander stehenden Abscissenwerthe, deren Differenz $= x = 3$ ist; die diesen Abscissen entsprechenden Blätter müssen sich mithin berühren.

Bei der Divergenz $\frac{11}{40}$, und dem Blattbogen $\frac{3}{40}$, sind die 11 ungedeckten Blätter in folgender Weise angeordnet:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Die Blätter } 0 \text{ und } 7 \\ \text{„ „ } 1 \text{ „ } 8 \\ \text{„ „ } 2 \text{ „ } 9 \\ \text{„ „ } 3 \text{ „ } 10 \end{array}\right\} \text{tangiren paarweise.}$$

Die Blätter 4, 5 und 6 sind isolirt dargestellt.

2. Divergenz $= \frac{11}{40}$; Zahl der ungedeckten Blätter $= 3$.

Blätter	0,	1,	2,	(0)
Abscissen	$\overparen{0, 11}$,		$\overparen{22}$,	40
Erste Differenzreihe		11,	11,	18

Bei der Divergenz $\frac{11}{40}$, und dem Blattbogen $\frac{11}{40}$ kommen drei ungedeckte tangirende Blätter 0, 1 und 2 vor, die zu einer Gruppe vereinigt sind.

ownload from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentru

ownload from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentru

Fig. 1.

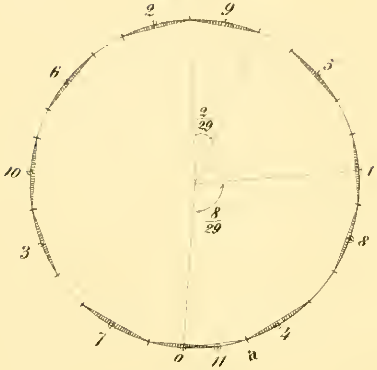


Fig. 2

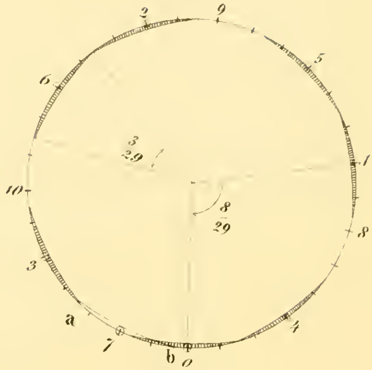


Fig. 3.

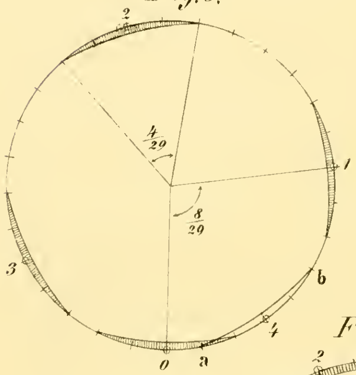


Fig. 4.

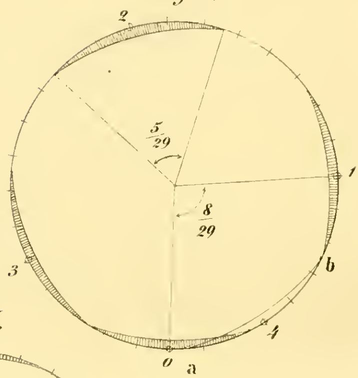
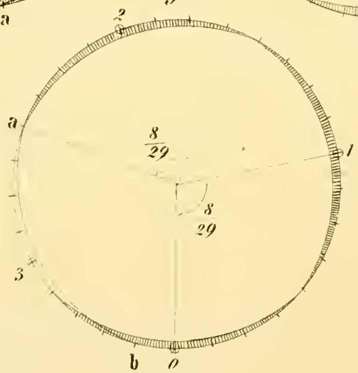
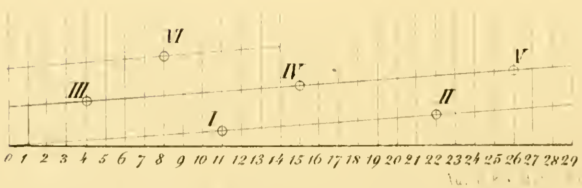


Fig. 5.





ownload from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentru

Erklärung der Figuren.

Fig. 1 bis Fig. 5. Horizontale Darstellungen der Blattbögen bei der $\frac{8}{29}$ Stellung. 0, 1, 2, 3 . . . . . . sind Insertionen der auf einander folgenden Blätter. Die schraffirten Bögen stellen die Basen der ungedeckten Blätter im Cyklus vor.

„ 1. Grösse des Blattbogens gleich $\frac{2}{29}$. 0, 1, 2 . . . . 10 sind Insertionen der ungedeckten Blätter. 11 ist die Insertion des in diesem Falle bereits gedeckten Blattes, dessen Blattbogen 0*a* im Schema nicht mehr schraffirt ist. Die 11 ungedeckten sind folgendermassen angeordnet: 0, 7; 1, 8; 2, 9; 3, 10; bilden die 4 Paare der tangirenden Blätter, 4, 5 und 6 stellen die 3 isolirten Blätter vor.

„ 2. Blattbogen $\frac{3}{29}$. 0, 1, 2 . . 6 sind die Insertionen der ungedeckten Blätter. 7 ist bereits gedeckt, *ab* ist der Blattbogen der Insertion 7 0, 4; 1, 5; 2, 6; tangiren paarweise, 3 steht isolirt.

„ 3. Blattbogen $\frac{4}{29}$. 0, 1, 2, 3 sind die Insertionen der 4 ungedeckten sämmtlich isolirten Blätter. Der Bogen des Blattes 4, nämlich *ab*, ist bereits gedeckt.

„ 4. Blattbogen $\frac{5}{29}$. 0 bis 3 stellen die Insertionen der ungedeckten Blätter vor, von denen 0 und 3 paarweise tangiren, 1 und 2 isolirt stehen. Der Insertion 4 entspricht der Blattbogen *ab*, der bereits gedeckt erscheint.

„ 5. Blattbogen $\frac{8}{29}$. 0, 1, 2 die drei ungedeckten, in einer Gruppe zu dreien tangirenden Blätter. Das Blatt 4 besitzt einen Blattbogen *ab*, der bereits gedeckt ist.

„ 6. Verticale Darstellung der $\frac{11}{29}$ Stellung, wobei der Insertionscylinder in eine Ebene ausgebreitet erscheint. 0, I, II, III . . . . die Insertionen der aufeinander folgenden Blätter. 0·29 stellt die Abscissenaxe vor. 0 ist der Ursprung der Coordinaten, zu gleicher Zeit die Abscisse von 0. 0·11=11 ist die Abscisse von I; 0·22=22 die Abscisse von II; 0·4=4 die Abscisse von III etc.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1861

Band/Volume: 43

Autor(en)/Author(s): Wiesner Julius Ritter

Artikel/Article: Die Blattbögen und ihre Berechnung. 467-495