©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Zur Theorie der Spiegelung und Brechung des Lichtes.

Von Dr. **Victor v. Lang.**

Für einen Punkt (xyz) eines elastischen festen Körpers hat man bekanntlich nach der Lamé'schen Bezeichnungsweise folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dN_1}{dx} + \frac{dT_3}{dy} + \frac{dT_2}{dz} + X_0\,\delta &= 0 \\ \frac{dT_3}{dx} + \frac{dN_2}{dy} + \frac{dT_1}{dz} + Y_0\,\delta &= 0 \\ \frac{dT_2}{dx} + \frac{dT_1}{dy} + \frac{dN_3}{dz} + Z_0\,\delta &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} X &= m\,N_1 + n\,T_3 + p\,T_2 \\ Y &= m\,T_3 + n\,N_2 + p\,T_1 \\ Z &= m\,T_2 + n\,T_1 + p\,N_3 \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Lamé hat nun gezeigt, dass die Gleichungen (1) auch die Erscheinungen der Doppelbrechung geben, falls man für die elastischen Kräfte N und T folgende von ihm abgeleitete Werthe setzt:

$$\left.\begin{aligned} N_1 &= A\theta - 2\rho\left(\mathfrak{c}^2\frac{dv}{dy} + \mathfrak{b}^2\frac{dw}{dz}\right) & T_1 &= \rho\,\mathfrak{a}^2\left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}\right) \\ N_2 &= B\theta - 2\rho\left(\mathfrak{a}^2\frac{dw}{dz} + \mathfrak{c}^2\frac{du}{dx}\right) & T_2 &= \rho\,\mathfrak{b}^2\left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz}\right) \\ N_3 &= C\theta - 2\rho\left(\mathfrak{b}^2\frac{du}{dx} + \mathfrak{a}^2\frac{dv}{dy}\right) & T_3 &= \rho\,\mathfrak{c}^2\left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right) \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

wo ρ die Dichte, u, v, w die Projectionen des Ausschlages des Theilchens (xyz) auf die Coordinatenaxen, und

$$\theta = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}$$

ist; da aber keine longitudinalen Wellen bei der Doppelbrechung auftreten, so hat man $\theta = 0$. Für die äusseren Kräfte $X_0\,Y_0\,Z_0$ ist ausserdem noch dem d'Alembert'schen Principe zufolge der Reihe nach

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$-\frac{d^2 u}{dt^2} \quad -\frac{d^2 v}{dt^2} \quad -\frac{d^2 w}{dt^2}$$

zu setzen, wo t die Zeit bedeutet.

Man findet zufolge dieser Theorie, dass die Schwingungsebene des Lichtes mit der Polarisationsebene zusammenfällt.

Aber auch die Gleichungen (2) haben eine Bedeutung in der Theorie des Lichtes, man erhält nämlich aus denselben leicht die Bedingungsgleichungen, welche zuerst von Cauchy für die Grenzfläche zweier isotroper Medien aufgestellt wurden. In den Gleichungen (2) stellen XYZ die Componenten der elastischen Kraft dar, welche im Punkte xyz auf ein Flächenelement wirkt, dessen Normale zu den Coordinatenaxen Winkel mit den Cosinussen m, n, p macht. Nehmen wir nun an, dass die Begrenzungsebene eines Mediums dieselben Winkel mit den Axen bildet, so geben die Gleichungen (2) die Componenten der elastischen Kraft, welche in jeden Punkt auf diese Ebene wirkt. Ist aber diese Ebene zugleich Trennungsebene zweier Medien, so werden für dieselbe, wenn man sie dem zweiten Medium zuzählt, ähnliche Gleichungen

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} X^1 &= m\,N_1{}^1 + n\,T_3{}^1 + p\,T_2{}^1 \\ Y^1 &= m\,T_3{}^1 + n\,T_2{}^1 + p\,T_1{}^1 \\ Z^1 &= m\,T_2{}^1 + n\,T_1{}^1 + p\,T_3{}^1 \end{aligned} \right.$$

gelten, indem wir für das zweite Medium alle entsprechenden Buchstaben mit Strichen versehen.

Allgemein nimmt man nun an, dass beim Übergange eines Lichtstrahles aus einem Medium in ein anderes man für die Trennungsebene

$$(5) \qquad u = u^1 \qquad v = v^1 \qquad w = w^1$$

hat, d. h. dass die Fortpflanzung der Bewegung nicht sprungweise, sondern continuirlich geschieht.

Eben so natürlich erscheint die fernere Annahme, dass für die Trennungsebene

$$(6) \qquad X = X^1 \qquad Y = Y^1 \qquad Z = Z^1$$

d. h. zufolge der Gleichungen (2) und (4)

$$(7) \qquad \left.\begin{aligned} m\,N_1 + n\,T_3 + p\,T_2 &= m\,N_1{}^1 + n\,T_3{}^1 + p\,T_2{}^1 \\ m\,T_3 + n\,N_2 + p\,T_1 &= m\,T_3{}^1 + n\,N_2{}^1 + p\,T_1{}^1 \\ m\,T_2 + n\,T_1 + p\,N_3 &= m\,T_2{}^1 + n\,T_1{}^1 + p\,N_3{}^1 \end{aligned}\right\}$$

ist.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Nimmt man die yz-Ebene zur Trennungsebene, so hat man

$$m = 1 \qquad n = p = 0,$$

und die Bedingungsgleichungen (7) werden

$$N_1 = N_1^1 \qquad T_3 = T_3^1 \qquad T_2 = T_2^1 \tag{8}$$

welche für $x = 0$ und für jeden Werth von y und z gelten müssen.

Für isotrope Medien wird zufolge der Gleichungen (3)

$$\left.\begin{aligned} N_1 &= \lambda\theta + 2\mu \frac{du}{dx} \\ T_3 &= \mu\left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right) \\ T_2 &= \mu\left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz}\right) \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

und man findet in diesem Falle aus den Gleichungen (1) die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der longitudinalen Welle

$$\Omega = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \tag{10}$$

die der transversalen Welle aber

$$w = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \tag{11}$$

Setzt man nun die Werthe von N_1, T_3, T_2 aus den Gleichungen (9) in die Gleichungen (8), nimmt ferner die z-Axe senkrecht zur Einfallsebene, so dass die Differentialquotienten nach z verschwinden, so werden die früheren Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} (\lambda + 2\mu)\frac{du}{dx} + \lambda\frac{dv}{dy} &= (\lambda^1 + 2\mu^1)\frac{du^1}{dx} = \lambda^1\frac{dv^1}{dy} \\ \mu\left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right) &= \mu^1\left(\frac{du^1}{dy} + \frac{dv^1}{dx}\right) \\ \mu\frac{dw}{dx} &= \mu^1\frac{dw^1}{dx} \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Wir machen nun die fernere Annahme, dass

$$\left.\begin{aligned} \lambda + 2\mu &= \lambda^1 + 2\mu^1 \\ \mu &= \mu^1 \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

und dass daher auch

$$\lambda = \lambda^1 \tag{14}$$

ist.

Wie man aus den Gleichungen (10) und (11) ersieht, sind aber die Grössen $\lambda + 2\mu$ und μ proportional der Elasticität des entsprechenden Mediums, indem die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer

Bewegung selbst proportional der Quadratwurzel aus der Elasticität ist. Die Annahmen (13) besagen daher, dass wir die Elasticität des Äthers in beiden Medien als gleich voraussetzen.

Die Gleichungen (5), welche ebenfalls für $x = 0$ und jeden Werth von y und z gelten, geben daher leicht die Gleichungen

$$\frac{du}{dy} = \frac{du^1}{dy} \qquad \frac{dv}{dy} = \frac{dv^1}{dy}$$

Mit Rücksicht auf diese Gleichungen und die vorhergehenden Annahmen werden daher die Gleichungen (12)

$$(15) \qquad \frac{du}{dx} = \frac{du^1}{dx} \qquad \frac{dv}{dx} = \frac{dv^1}{dx} \qquad \frac{dw}{dx} = \frac{dw^1}{dx}$$

welche für $x = 0$ giltig sind. Dieses aber sind die von Cauchy aufgestellten Gleichungen.

Man wäre zu denselben Gleichungen (15) gelangt, hätte man gleich anfangs $\theta = 0$ gesetzt. Da aber in der Cauchy'schen Theorie der Reflexion die longitudinale Welle eine Rolle spielt, so durfte man dieselbe nicht von vorn herein eliminiren.

Die Cauchy'sche Theorie führt aber zu dem Resultate, dass die Schwingungen des Lichtes senkrecht zur Polarisationsebene geschehen, was im Widerspruche mit der vorher erwähnten Theorie der Doppelbrechung von Lamé steht. Es lassen sich aber für die Grössen N und T statt der Werthe aus den Gleichungen (3) andere finden, welche, wenn man sie in die Gleichungen (1) setzt, die Gesetze der Doppelbrechung ebenfalls erklären, die Schwingungsebene des Lichtes aber senkrecht zur Polarisationsebene geben. Diese Werthe sind:

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} N_1 = A\theta - 2\rho\left(\mathfrak{b}^2 \frac{dv}{dy} + \mathfrak{c}^2 \frac{dw}{dz}\right), \; T_1 = \rho\left(\mathfrak{b}^2 \frac{dv}{dz} + \mathfrak{c}^2 \frac{du}{dy}\right) \\ N_2 = B\theta - 2\rho\left(\mathfrak{c}^2 \frac{dw}{dz} + \mathfrak{a}^2 \frac{du}{dx}\right), \; T_2 = \rho\left(\mathfrak{c}^2 \frac{dw}{dx} + \mathfrak{a}^2 \frac{du}{dz}\right) \\ N_3 = C\theta - 2\rho\left(\mathfrak{a}^2 \frac{du}{dx} + \mathfrak{b}^2 \frac{dv}{dy}\right), \; T_3 = \rho\left(\mathfrak{a}^2 \frac{du}{dy} + \mathfrak{b}^2 \frac{dv}{dx}\right) \end{array} \right.$$

$$\theta = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}$$

Für isotrope Medien fallen die beiden Systeme der Gleichungen (3) und (15) zusammen.

Eine weitere Untersuchung über die Ableitung und Bedeutung der Gleichungen (15) behalte ich mir vor.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1861

Band/Volume: 44_2

Autor(en)/Author(s): Lang Viktor Edler von

Artikel/Article: Zur Theorie der Spiegelung und Brechung des Lichtes. 147-150