Theorie der Pendelabweichung.

Von Prof. Karl Jelinek.

(Mit 1 Tafel.)

(Vorgelegt in der Sitzung vom 16. Mai 1861.)

VORWORT.

Seitdem Foucault die Axendrehung der Erde durch seinen Pendelversuch auf directe Weise bewiesen hat, unternahmen es viele Gelehrte die Theorie dieses so wichtigen und interessanten Phänomens theils auf elementarem Wege, theils durch höheren Calcül mathematisch darzustellen und zu begründen. Inwiefern diese Erklärungsversuche gelungen sind, lässt sich ohne einlässliche Auseinandersetzung des Gegenstandes nicht feststellen. Es genüge die Ansicht eines Gelehrten darüber zu vernehmen, dem man ein competentes Urtheil nicht absprechen kann. Herr J. A. Grunert, Herausgeber des „Archivs für Mathematik und Physik", sagt in der Einleitung zu seiner „elementaren Theorie des Pendelversuches von Foucault aus neuen Gesichtspunkten dargestellt" (Jahrg. 1856, XXVII. Theil, 2. Heft, S. 224) Folgendes: „Die Theorie des so ungemein wichtigen und in jeder Beziehung das grösste Interesse für sich in Anspruch nehmenden Foucault'schen Pendelversuches ist schon oft auf elementarem Wege darzustellen versucht worden, und ich habe es mir zu einer besonderen Pflicht gemacht, mehrere dieser elementaren Darstellungen in früheren Heften des Archivs den Lesern dieser Zeitschrift mitzutheilen, auch selbst einen Beitrag zu denselben zu liefern versucht. Ich gestehe aber offen, dass keine dieser Darstellungen mich vollkommen befriedigt hat, so sehr ich auch das Verdienstliche mancher derselben anzuerkennen bereit bin, und diese Anerkennung bei jeder Gelegenheit auch öffentlich auszusprechen mich bemüht habe". Was nun Herr Grunert von der Unvollkommenheit der elementaren Darstellungen des Foucault'schen Pendelversuches anführt, gilt auch zum Theil von denjenigen Beweisführungen, welche vermittelst der Differential- und Integralrechnung ausgeführt wurden. Desshalb fand ich mich veranlasst, die Theorie der Pendelabweichung zum Gegenstande meines Studiums zu machen, und gelangte, bevor ich noch Grunert's Abhandlung zu Gesichte bekommen hatte, auf einem eigenthümlichen Wege zu einem Resultat, welches sich genau auf jenes vom Herrn Grunert erzielte zurückführen lässt. Ausserdem empfiehlt sich das vorliegende Elaborat durch seine verhältnissmässige Kürze und leichtes Verständniss, indem dasselbe, mit der Grunert'schen Demonstration verglichen, kaum den vierten Theil dieser letzteren an Umfang erreicht, und blos elementare Kenntnisse der Mathematik voraussetzt. Hat nun die vom Herrn Grunert verfasste Abhandlung in Ansehung der Vorzüge, die derselben vor vielen anderen Bearbeitungen desselben Gegenstandes zukommen, den verdienten Beifall gefunden, so dürfte auch meine kleine Abhandlung nicht ungeeignet sein, der Öffentlichkeit übergeben zu werden.

Der Inhalt derselben lässt sich im Folgenden kurz angeben: Nachdem durch geometrische Betrachtung des Gegenstandes die allgemeine Formel eines Elementes der Pendelabweichung entwickelt und durch den Übergang zum Fall der Stetigkeit das Foucault'sche Gesetz dargestellt worden ist, werden über die von verschiedenen Gelehrten veröffentlichten Erklärungsweisen des Foucault'schen Gesetzes einige Bemerkungen angeführt, und in einer Beilage die vollkommene Übereinstimmung der vorliegenden Entwickelung mit der Grunert'schen Theorie nachgewiesen.

Darstellung und Beweis des Foucault'schen Gesetzes der Pendel-Abweichung.

Wenn ein an irgend einem Punkte der Erdoberfläche in geeigneter Weise aufgehängtes Pendel in Schwingungen versetzt wird, so muss die Schwingungsebene vermöge der Schwerkraft fortwährend sehr nahe durch den Mittelpunkt der Erde gehen, zugleich aber auch vermöge der Trägheit der Pendelmasse das Bestreben haben ihre Lage im Raume nicht zu verändern, somit sich selbst im Raume parallel zu bleiben. Wäre das Pendel am Pole in der Verlängerung der Erdaxe aufgehängt, so würde die Schwingungsebene, da sie an der Axendrehung der Erde keinen Antheil nähme, dem mit der Erde von Westen nach Osten sich bewegenden Beobachter in der entgegengesetzten Richtung von Osten nach Westen mit derselben Geschwindigkeit sich zu drehen scheinen, mit welcher die Erde um ihre Axe sich dreht. Anders verhält es sich an einem Orte, der zwischen einem Pole und dem Äquator liegt. Denn da die Verticale dieses Ortes um die Erdaxe einen Kegel beschreibt, so muss der in der Verticalen befindliche Aufhängepunkt um die Erdaxe einen Kreis beschreiben, und die Schwingungsebene kann daher ihrem Bestreben, sich selbst im Raume parallel zu bleiben, nur insoferne Folge leisten, als es die durch die Schwerkraft bedingte Nothwendigkeit, stets durch den Mittelpunkt der Erde zu gehen, gestattet. Wie sich nun unter diesen Verhältnissen die Lage der Schwingungsebene während der Umdrehung der Erde, mit Rücksicht auf die verschiedene geographische Breite der Beobachtungsorte, geometrisch ausdrücken lasse, soll im Nachstehenden zuerst für den Beginn der Schwingung im Meridian, und dann allgemein für jedes Azimuth, d. h. jede horizontale Richtung der Schwingungsebene dargethan werden.

Es sei (in der beiliegenden Figur) NS die Erdaxe, $ADEBKQ$ der Äquator, und $NOGFS$ der Meridian, in welchem das Pendel bei O zu schwingen beginnt; $NO'VHS$ und $NO''BPS$ seien die späteren Stellungen desselben Meridians, welchem nach und nach die Positionen des Horizontes $AFMB$, $DGHMIK$ und $ELMPQ$ entsprechen.

Während nun das Pendel in seinem Parallel von O nach O' versetzt wird, muss die Schwingungsebene vermöge der Trägheit der Pendelmasse so zurückbleiben, dass sie zwar stets (sehr nahe) durch den Mittelpunkt der Erde gehe, zugleich aber ihre Lage im Raume unverändert zu bewahren, d. h. sich selbst parallel zu bleiben strebe. Dieses Princip ist unzweifelhaft, und es frägt sich nur, wie sich die Lage der Schwingungsebene diesen Bedingungen gemäss näher bestimmen lasse. Dass von einem vollkommenen Parallelismus zwischen der Schwingungsebene und der ihre nächst vorhergehende Lage vorstellenden Ebene nicht die Rede sein könne, ist für sich klar, da beide Ebenen sehr nahe durch den Mittelpunkt der Erde gehen, folglich einander schneiden müssen. Es lässt sich jedoch zeigen, dass je zwei in einem unendlich kleinen Zeitintervall auf einander folgende Lagen der Schwingungsebene einen unendlich kleinen Winkel dergestalt einschliessen, dass wenigstens die Schwingungs**linie**, d. h. die Gerade, in welcher die Schwingungsebene den Horizont schneidet, derjenigen Ebene, welche die nächst vorhergehende Lage der ebenerwähnten Schwingungsebene vorstellt, vollkommen parallel, die Schwingungs**ebene** selbst aber ihrer nächst vorhergehenden Lage, wegen des von diesen zwei Ebenen eingeschlossenen unendlich kleinen Winkels, annäherungsweise parallel sei, folglich bei der Giltigkeit dieses Satzes für jedes Azimuth der Schwingungsebene diese letztere stets unendlich nahe sich selbst parallel bleibe. Zieht man nämlich in der Ebene des Meridians NOS, welche der grösseren Einfachheit wegen als erste Lage der Schwingungsebene angenommen wird, die Schwingungslinie Ot, so muss diese zur Geraden CF, in welcher die Schwingungsebene OCF den wahren Horizont AFB schneidet, und welche (aus einem später einzusehenden Grunde) die Schwingungsaxe heissen möge, parallel sein, indem diese beiden in der Schwingungsebene OCF liegenden Geraden zur Verticalen OC senkrecht stehen. Eben so muss die Schwingungslinie in ihrer folgenden Stellung $O't'$ zur Schwingungsaxe CG parallel sein, da beide zur Verticalen $O'C$ senkrechten Geraden in derselben Ebene $O'CG$ liegen. Ist nun die Schwingungsaxe bei ihrem Übergange von CF nach CG stets in der ursprünglichen Schwingungsebene OCF geblieben, — was vermöge der Trägheit der Pendelmasse wenigstens für einen Augenblick, somit für eine unendlich kleine Grösse des Winkels FCG stattfindet, — so ist die Schwingungslinie während ihrer Versetzung von Ot nach $O't'$, vermöge ihres Parallelismus mit der von CF nach CG übergehenden Schwingungsaxe, der ganzen Ebene FCG, d. h. der ursprünglichen Schwingungsebene OCF parallel geblieben; was auch aus dem bekannten Lehrsatze folgt, dass, wenn zwei Ebenen OCF und $O'CG$ einander schneiden, die in der letzteren Ebene liegende Gerade $O't'$, vermöge ihres Parallelismus zur Durchschnittslinie CG, auch zur ganzen Ebene OCF parallel sein müsse. Aus demselben Grunde muss auch die zur Schwingungsebene $O''CL$ gehörige Schwingungslinie $O''t''$ zur vorhergehenden Schwingungsebene $O'CG$, deren Azimuth durch den Winkel $GO'H$ gegeben ist, parallel sein, indem die Schwingungsaxe CG während ihrer Versetzung nach CL aus der Ebene $O'CG$ nicht herausgetreten ist. Der obige Satz von Parallelismus der Schwingungslinie mit der nächst vorhergehenden Schwingungsebene gilt also für jede Stellung der Schwingungsebene, die Pendelschwingung möge im Meridian oder unter irgend einem Azimuth beginnen. — Während nun die Durchschnittslinie der Schwingungsebene mit dem wahren Horizonte allmählich von CF nach CG im Meridian, und eben so von CG nach CL in der Ebene $O'CG$ heraufrückt, dreht sich die Schwingungsebene um diese Durchschnittslinie, indem sie von der Stellung OCF zur folgenden $O'CG$, und von dieser zur Stellung $O''CL$ übergeht; wesshalb diese Durchschnittslinie die Schwingungsaxe genannt werden kann. — Da demnach die Lage der Schwingungsebene durch das Beharren der Schwingungsaxe in der vorhergehenden Lage der Schwingungsebene bestimmt wird, und somit gewissermassen nach dieser letzteren sich richtet, so könnte jede Schwingungsebene als Richtungsebene der nächst folgenden Schwingungsebene angesehen werden. Dem gemäss wäre der Meridian OCF die Richtungsebene der Schwingungsebene $O'CG$, und diese wieder die Richtungsebene der folgenden Schwingungsebene $O''CL$ u. s. f., insoferne man (wie es in solchen Fällen mit Recht üblich und wohl auch nicht anders möglich ist) zum Zwecke der geometrischen Construction sich erlauben darf, die Aufeinanderfolge der Schwingungsebenen discontinuirlich darzustellen. Da jedoch der Winkel, unter welchem je zwei auf einander folgende Schwingungsebenen sich schneiden, unendlich klein angenommen werden muss, wenn die Schwingungsebene im Raume sich selbst parallel bleiben soll, so muss man sich vorstellen, dass die Punkte $O, O', O'' \ldots$ somit auch jene F, G, L unendlich nahe an einander rücken, so dass die Schwingungsebene in jeder ihrer stetig auf einander folgenden Positionen als Richtungsebene der nächst folgenden Position auftritt.

Die Trägheit der Pendelmasse, vermöge welcher die Schwingungsebene, so viel es die von der Schwerkraft herrührende Nöthigung: stets (sehr nahe) durch den Mittelpunkt der Erde zu gehen gestattet, sich selbst im Raume parallel zu bleiben strebt, äussert sich demnach durch den vollkommenen Parallelismus der Schwingungslinie der irgend eine Stellung einnehmenden Schwingungsebene mit derjenigen Ebene, welche die **nächst** vorhergehende Lage der Schwingungsebene vorstellt.

Nach diesem Gesetze ist ein allgemeiner Ausdruck für ein Element der Pendelabweichung aufzustellen, sodann auf den Fall der Continuität überzugehen, und durch Summirung der unendlich kleinen Elemente der Betrag der Pendelabweichung für einen gegebenen Ort und die gegebene Zeit zu bestimmen.

Um nun zuerst den einfachsten Fall in's Auge zu fassen, so beginne das Pendel im Meridian NOS zu schwingen. Da bei der Fortbewegung des Pendels in seinem Parallel von O nach O' die Schwingungslinie $O't'$, dem obigen Grundsatze gemäss, während des dem Stundenwinkel ONO' entsprechenden Zeittheilchens dem Meridian OCF parallel bleibt, folglich die Schwingungsaxe während des Aufsteigens von CF nach CG in der Ebene des Meridians verharret, — wobei der Bogen $OF = O'G = 90°$, als der Winkelabstand der Verticalen vom Horizonte, eine beständige Grösse ist, — so erhält die Schwingungsebene am Ende des erwähnten Zeittheilchens die Lage $O'CG$, und ist daher um den Betrag des Winkels $GO'H$, dessen Mass der horizontale Winkel GCH ist, von dem unterdessen die Stellung $NO'VHS$ einnehmenden Meridian abgewichen. Es handelt sich nun um die Auffindung einer Formel, welche das Gesetz der Abhängigkeit dieser Pendelabweichung $GO'H$, welche mit α bezeichnet werden möge, von der Schwingungszeit und der geographischen Breite des Beobachtungsortes ausdrückt. — Zu diesem Ende hat man das bei H rechtwinkelige sphärische Dreieck GHN, in welchem die Seite GH das Mass der gesuchten Pendelabweichung $GO'H = \alpha$ vorstellt. Der Winkel $GNH = \rho$ ist der Stundenwinkel, welcher 15° in einer Stunde Sternzeit enthält; und die Seite HN ist aus dem Abstande HO' der Verticalen vom Horizonte und dem Complemente $O'N$ der geographischen Breite φ zusammengesetzt. Folglich ist

$$HN = 90 + (90 - \varphi) = 180 - \varphi.$$

Für diesen Fall hat man die Relation: $\tang \alpha = \tang \rho \sin \varphi$; aus welcher für einen unendlich kleinen Werth von ρ sofort $\alpha = \rho \sin \varphi$ sich ergibt.

Da nun aber die Wirkung der Trägheit, vermöge welcher die Schwingungsebene den beweglichen Horizont in der ihre nächstvorhergehende Lage vorstellenden Ebene schneidet, nur in einem äusserst kleinen Zeittheilchen sich äussert, so ist die Giltigkeit der Formel $\alpha = \rho \sin \varphi$ blos für das erste dem Bogen OO' des Parallels entsprechende Theilchen der Schwingungszeit bewiesen, indem für die folgende Stellung des Pendels in O'' nicht mehr die Ebene OCF, sondern jene $O'CG$ als die nächst vorhergehende Lage der Schwingungsebene anzusehen ist, folglich der bewegliche Horizont in seiner gegenwärtigen Stellung *ELMPQ* von der Schwingungsebene $O''CL$ nicht mehr im Meridian *OCF*, sondern in der nächst vorhergehenden Lage $O'CG$ derselben Schwingungsebene, und zwar in der Geraden *CL* geschnitten wird. In diesem Falle aber liegt das Mass der Pendelabweichung $PO''L$, nämlich der Bogen *LP*, in dem sphärischen Dreiecke *LPR*, in welchem nicht mehr (wie im Dreiecke *GNH*) der Stundenwinkel selbst, sondern eine Function desselben, nämlich der Winkel *LRP* vorkommt. Es lässt sich daher auf die Pendelabweichung $\alpha = LO''P$ nicht mehr jene Formel anwenden, welche für die Abweichung $\alpha = GO'H$ aus dem Dreieck *GNH* abgeleitet wurde.

Da demnach selbst in dem hier betrachteten Falle, dass das Pendel im Meridian zu schwingen beginnt, mit Ausnahme des ersten Zeittheilchens für alle folgenden Theilchen der Schwingungszeit der Fall eintritt, dass die Schwingungsebene vom Meridian bereits abgewichen ist, und daher in einem andern Höhenkreise unter einem stets zunehmenden Azimuth schwingt, so handelt es sich um die Entwickelung der allgemeinen Formel eines Elementes der Pendelabweichung für jede horizontale Richtung der Schwingungsebene.

Es sei nun $GO'R$ die vom Meridian $NO'H$ um das Azimuth $HO'G$, welches ω heissen soll (so dass der Winkel $GO'H$, bisher α genannt, von nun an mit ω bezeichnet wird), abweichende ursprüngliche Richtung der Schwingungsebene; so wird dieses Azimuth durch die Versetzung des Pendels von O' nach O'' von dem Horizont *DGHIK* auf den Horizont *ELMPQ*, also von *GH* nach *MP* übertragen, so dass $GH = MP$ ist; die Schwingungsebene aber wird während der Versetzung des Pendels von O' nach O'' vermöge der Trägheit der Pendelmasse in ihrer nächst vorhergehenden Stellung $O'CG$ insoferne zurückbleiben, als sie den Horizont in dessen neuer Stellung *ELMPQ* (wie bereits bemerkt wurde) in der Geraden *CL* schneidet, welche den drei Ebenen $ECP, O'CG$, und $O''CL$ gemeinschaftlich angehört. Die Schwingungsebene wird demnach um den Winkel $LO''P = LO''M + MO''P = \alpha + \omega$ vom Meridian $NO''PS$ abweichen, und es soll nun bestimmt werden, wie gross die Abweichung $LO''M = \alpha$ sei, um welche die ursprünglich vorhandene Abweichung $MO''P = \omega$ vermehrt wurde.

Zu dieser Bestimmung dient das bei P rechtwinkelige sphärische Dreieck LPR, in welchem die Seite LP als das Mass der Pendelabweichung $LO''P = \alpha + \omega$ erscheint, während die Kathete PR mit dem anliegenden Winkel LRP aus dem Dreiecke NRO' sich bestimmen lässt. Denn es ist, wenn der Bogen NR mit μ, und der Winkel NRO' mit ψ bezeichnet wird, wegen $NO'R = GO'H = MO''P = \omega$, und $NO' = 90 - \varphi$, sofort

$$\cot\mu \sin(90-\varphi) = \cos(90-\varphi)\cos\rho + \sin\rho\cot\omega,$$

d. h.

$$\cot\mu\cos\varphi = \sin\varphi\cos\rho + \sin\rho\cot\omega,$$

also

$$\cot\mu = \frac{\sin\varphi\cos\rho + \sin\rho\cot\omega}{\cos\varphi}, \text{ oder wegen } \tang\mu = \frac{1}{\cot\mu},$$

$$\tang\mu = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi\cos\rho + \sin\rho\cot\omega} \qquad (1)$$

Eben so ist

$$\cot(90-\varphi)\sin\mu = \cos\mu\cos\rho + \sin\rho\cot\psi;$$

also

$$\tang\psi = \frac{\sin\rho}{\tan\varphi\sin\mu - \cos\mu\cos\rho} \qquad (2)$$

Man hat also, nachdem der Bogen μ und der Winkel ψ durch bekannte Grössen ausgedrückt sind, die Seite

$$PR = PO'' + O''R = PO'' + O''N - NR = 90 + (90-\varphi) - \mu = 180 - (\mu+\varphi),$$

und den Winkel $LRP = 180 - \psi$.

Für diesen Fall gilt die Relation:

$$\tang(\alpha+\omega) = \tang(180-\psi)\sin[180-(\mu+\varphi)],$$

d. h.

$$\tang(\alpha+\omega) = -\tang\psi\sin(\mu+\varphi).$$

Aus der Gleichung (2) folgt aber

$$-\tang\psi = \frac{\sin\rho}{\cos\mu\cos\rho - \sin\mu\tang\varphi}$$

und es ist

$$\sin(\mu+\varphi) = \sin\mu\cos\varphi + \sin\varphi\cos\mu;$$

also ist

$$\tang(\alpha+\omega) = \frac{\sin\rho(\sin\mu\cos\varphi + \sin\varphi\cos\mu)}{\cos\mu\cos\rho - \sin\mu\tang\varphi}.$$

Um nun $\sin\mu$ und $\cos\mu$ aus dieser Gleichung mit Hilfe jener (1) zu eliminiren, dividire man Zähler und Nenner des zweiten Theiles durch $\cos\mu$.

Man erhält

$$\operatorname{tang}(\alpha+\omega) = \frac{\sin\rho\,(\operatorname{tang}\mu\cos\varphi + \sin\varphi)}{\cos\rho - \operatorname{tang}\mu\operatorname{tang}\varphi}$$

Wird nun der Werth von $\operatorname{tang}\mu$ aus (1) eingeführt, so folgt

$$\operatorname{tang}(\alpha+\omega) = \frac{\sin\rho\left(\frac{\cos^2\varphi}{\sin\varphi\cos\rho + \sin\rho\cot\omega} + \sin\varphi\right)}{\cos\rho - \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi\cos\rho + \sin\rho\cot\omega}\tan\varphi}$$

$$\operatorname{tang}(\alpha+\omega) = \frac{\sin\rho\,(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\cos\rho + \sin\rho\sin\varphi\cot\omega)}{\sin\varphi\cos^2\rho + \sin\rho\cos\rho\cot\omega - \sin\varphi}$$

$$= \frac{\sin\rho\,(\cos\rho\sin^2\varphi + \cos^2\varphi + \sin\rho\sin\varphi\cot\omega)}{\sin\rho\cos\rho\cot\omega - \sin\varphi\,(1 - \cos^2\rho)}$$

$$= \frac{\sin\rho\,(\cos\rho\sin^2\varphi + \cos^2\varphi + \sin\rho\sin\varphi\cot\omega)}{\sin\rho\cos\rho\cot\omega - \sin^2\rho\sin\varphi}$$

und durch $\sin\rho$ abgekürzt,

$$\operatorname{tang}(\alpha+\omega) = \frac{\cos\rho\sin^2\varphi + \cos^2\varphi + \sin\rho\sin\varphi\cot\omega}{\cos\rho\cot\omega - \sin\rho\sin\varphi};$$

also vermöge einer bekannten Relation

$$\frac{\operatorname{tang}\alpha + \operatorname{tang}\omega}{1 - \operatorname{tang}\alpha\operatorname{tang}\omega} = \frac{\cos\rho\sin^2\varphi + \cos^2\varphi + \sin\rho\sin\varphi\cot\omega}{\cos\rho\cot\omega - \sin\rho\sin\varphi} \qquad (3)$$

Es wäre nun leicht diese Gleichung nach $\operatorname{tang}\alpha$ aufzulösen und zu reduciren, um den entwickelten Ausdruck eines Elementes α der Pendelabweichung für die gegebenen Grössen ρ, φ, ω, nämlich die Formel

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{\sin\rho\sin\varphi + \sin^2\rho/_2\cos^2\varphi\sin 2\omega}{\cos\rho + 2\sin^2\rho/_2\cos^2\varphi\sin^2\omega}$$

zu erhalten, welche für einen unendlich kleinen Werth von ρ unmittelbar die Form $\alpha = \rho\sin\varphi$ annimmt. Es ist jedoch nicht nöthig diese in der Beilage ausgeführte Operation vorzunehmen, da man sogleich von dem unentwickelten Ausdrucke (3) auf den Fall der Stetigkeit übergehen kann, indem man (aus dem auf S. 246 angegebenen Grunde) den Stundenwinkel ρ unendlich klein annimmt, und dem zufolge $\cos\rho = 1$, $\sin\rho = \operatorname{arc}\rho = \rho$, so wie auch $\operatorname{tang}\alpha = \alpha$ setzt.

Unter dieser Voraussetzung geht die obige Gleichung (3), wegen $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$, in die folgende $\frac{\alpha + \operatorname{tang}\omega}{1 - \alpha \operatorname{tang}\omega} = \frac{1 + \rho\sin\varphi\cot\omega}{\cot\omega - \rho\sin\varphi}$, und wenn Zähler und Nenner des zweiten Theiles durch $\cot\omega$ dividirt werden, in

$$\frac{\alpha + \operatorname{tang}\omega}{1 - \alpha\operatorname{tang}\omega} = \frac{\operatorname{tang}\omega + \rho\sin\varphi}{1 - \rho\sin\varphi\operatorname{tang}\omega}$$

über.

Ohne diese Gleichung nach α aufzulösen, erkennt man schon durch blosse Vergleichung der Theile derselben, dass der zweite Theil in den ersten übergeht, wenn α anstatt $\rho\sin\varphi$ gesetzt wird; dass also $\alpha = \rho\sin\varphi$ sei.

Da nun gemäss dieser letzten Gleichung das Element α der Pendelabweichung vom Azimuth ω der Schwingungsebene unabhängig ist, somit alle Elemente unter derselben Polhöhe φ einander gleich sind, so stellt sich die ganze Pendelabweichung als die Summe aller während einer bestimmten Zeit stattfindenden Elemente dar. Bezeichnet man diese mit a, und die Summe der entsprechenden unter einander gleichen Elemente des jener Zeit zugehörigen Stundenwinkels mit r, so hat man die Gleichung

$$a = r\sin\varphi,$$

welche die Foucault'sche Formel ist, als den Ausdruck des Gesetzes der Pendelabweichung.

Noch mehr hierüber zu sagen erscheint nicht nöthig, nachdem dieser Gegenstand bereits von vielen Gelehrten ausführlich besprochen und erörtert worden ist; jedoch dürfte es zur Beurtheilung des Werthes der vorliegenden Abhandlung dienlich sein, die in derselben dargelegte Theorie des Foucault'schen Pendelversuches mit den in verschiedenen Zeitschriften veröffentlichten Erklärungsweisen zu vergleichen.

Vor Allem ist die auf Seite 248 angeführte Bemerkung gegenwärtig zu halten, dass selbst in dem besonderen Falle, wo das Pendel in der Ebene des Meridians zu schwingen beginnt, in der Ableitung des analytischen Ausdruckes eines Elementes der Pendelabweichung auf das, anfangs zwar noch nicht vorhandene, während der Zeit jedoch des Pendelversuches eintretende und stetig zunehmende Azimuth der Schwingungsebene Rücksicht genommen werden müsse, indem wegen der stetigen Axendrehung der

Erde und der dadurch bewirkten stetigen Zunahme der scheinbaren Abweichung der Schwingungsebene von dem Meridian, diese (Abweichung) schon nach dem ersten unendlich kleinen Zeittheilchen stattfindet, folglich auch — da in geometrischer Construction des auf ein Element der Pendelabweichung sich beziehenden sphärischen Dreieckes die Schwingungsebene nicht mit der ihre ursprüngliche Position vorstellenden Ebene (dem Meridian nämlich), sondern mit der ihre nächst vorhergehende (vom Meridian bereits abweichende) Lage vorstellenden Verticalebene zu verbinden ist, — bei der von diesem Dreieck ausgehenden Ableitung einer nicht blos auf den ersten Augenblick, sondern auf eine angebbare Zeit sich beziehenden Formel, das während dieser Zeit stetig sich ändernde Azimuth der auf einander folgenden Positionen der Schwingungsebene nothwendiger Weise in Rechnung gezogen werden muss.

Es sind daher jene Erklärungsversuche der Pendelabweichung nicht als genügend anzusehen, welche von dem besonderen Falle der anfänglichen Schwingung im Meridian ausgehend, die blos für den ersten Augenblick giltige Deduction, in welcher allerdings auf das Azimuth der Schwingungsebene keine Rücksicht genommen zu werden braucht, auf alle übrigen Zeittheilchen eines Pendelversuches ausdehnen.

Aber auch jene Demonstrationen, welche ganz allgemein eine beliebige anfängliche Richtung der Schwingungsebene voraussetzend das Azimuth derselben in Rechnung ziehen, sind nicht ohne Ausnahme annehmbar. Insbesondere ist jener Demonstrationsversuch zu erwähnen, welcher in „Foucault's Versuch von Dr. Garthe“ (Köln 1852) S. 52, so wie im „Foucault'schen Pendelversuch von Prof. Delabar“ (St. Gallen 1855), S. 20, als ein solcher empfohlen wird, der an mathematischer Präcision nichts zu wünschen übrig lasse; in welchem aber anstatt des Differentials einer Function des Stundenwinkels das Differential des Stundenwinkels selbst in den Calcül eingeführt, und vorausgesetzt wird, dass sämmtliche drei Seiten eines sphärischen Dreieckes constant bleiben, nachdem die Winkel desselben eine Änderung erlitten haben.

Was endlich jene Beweisführung betrifft, in welcher die Rotationsbewegung der Erde in zwei Componenten, eine verticale und eine horizontale zerlegt, und der relativen Drehung der Schwingungsebene jene Winkelgeschwindigkeit zugeschrieben wird, welche der verticalen Componente zukommt, nämlich die Winkelgeschwindigkeit der wirklichen Erdumdrehung multiplicirt mit dem Sinus der Polhöhe des Beobachtungsortes: so ist zwar diese Art von Demonstration nicht als ungenau zu beanstanden; da jedoch keine von beiden im Verhältnisse von Sinus und Cosinus der Polhöhe des Ortes zu einander stehenden Drehungscomponenten für sich allein wirksam ist, sondern beide zusammen gleichzeitig die wirklich stattfindende Umdrehung der Erde um ihre Axe bewirken, und es immerhin mit einiger Schwierigkeit verbunden ist, genügend klar zu beweisen, dass die Pendelabweichung — ohne allen Einfluss der horizontalen Rotationscomponente auf die relative Bewegung der Schwingungsebene — genau so erfolge, als wenn die Erde kraft der verticalen Componente allein, um die Verticale des Pendels sich drehte, während sich dieselbe Componente an der wirklichen Ausführung ihres Bestrebens: die Erde (mit der dem Sinus der Polhöhe des Ortes proportionirten Winkelgeschwindigkeit) um die Verticale des Pendels umzudrehen, eben durch das gleichzeitige Bestreben der horizontalen Componente: die Erde (mit der dem Cosinus der Polhöhe des Ortes proportionalen Winkelgeschwindigkeit) um die Horizontale des Pendels zu drehen, beständig verhindert wird, mithin die wirkliche Erdumdrehung weder um die Verticale noch um die Horizontale des Pendels, sondern um die wahre Erdaxe vor sich geht: so ist es angezeigt, die relative Bewegung der Schwingungsebene auf die Resultirende beider Componenten, d. i. auf die wirkliche Bewegung des Pendels in seinem Parallel zu beziehen, und die bei solcher Auffassung des Phänomens sich aufdringende Frage: ob es bei der Abhängigkeit der Pendelabweichung von der stets von Westen nach Osten gerichteten Erdumdrehung völlig gleichgiltig sei, unter welchem Azimuth die Pendelschwingung stattfinde, durch den bei dieser Demonstrationsmethode von selbst sich ergebenden Nachweis zu beantworten, dass die vom jeweiligen Azimuth der Schwingungsebene herrührende Modification der Pendelabweichung eine völlig verschwindende Grösse sei, folglich die relative Bewegung der Schwingungsebene mit gleichförmiger Geschwindigkeit vor sich gehe.

Indem ich nun die in diesem Sinne vom Herrn Grunert mit anerkennenswerther Schärfe und Eleganz durchgeführte Demonstration auf einem viel kürzeren Wege ausgeführt, und die Lösung des in

Rede stehenden interessanten Problems durch eine fassliche Darstellung und elementare Behandlung dem Verständnisse eines grösseren Leserkreises näher gebracht habe, hoffe ich zur Kenntniss der Theorie des Foucault'schen Pendelversuches einen Beitrag geliefert zu haben, den man einiger Aufmerksamkeit nicht unwerth erachten wird.

Beilage.

Da es für manchen Gelehrten von Interesse sein dürfte, von der Eingangs dieser Schrift erwähnten Übereinstimmung der in der vorliegenden Abhandlung dargelegten Theorie mit der Grunert'schen Demonstration sich zu überzeugen, und die Wege zu verfolgen, auf welchen beide Beweisführungen sich begegnen: so wird es nicht überflüssig sein, die vollkommene Übereinstimmung beider Theorien kurz nachzuweisen.

Herr Prof. J. A. Grunert ist (im „Archiv der Mathematik und Physik", Jahrg. 1856, XXVII. Theil, 2. Heft) auf dem Wege der analytischen Geometrie im Raume zu folgenden zwei Schlussformeln gekommen:

S. 241. F. (14) $$\frac{\sin(\Theta-\Theta_1)}{\sin(\omega-\omega_1)}=G''\left(\sin\tilde{\omega}-\tfrac{1}{2}\sin 2\Theta\cos^2\tilde{\omega}\tang[\omega-\omega_1]\right)$$

S. 243. F. (17) $$\frac{\cos(\Theta-\Theta_1)}{\cos(\omega-\omega_1)}=$$
$$=G''\left(1-\frac{\Omega\sin\Theta+\tfrac{1}{2}\sin 2\Theta\cos\tilde{\omega}\sin(\omega-\omega_1)}{\cos(\omega-\omega_1)}\cot\tilde{\omega}\right).$$

Übersetzt man die Grunert'schen Ausdrücke in die meinigen, so ist:

$$\left.\begin{array}{l}\Theta=180-\omega\\ \Theta_1=180-(\alpha+\omega)\end{array}\right\},\ \text{folglich}\ \left\{\begin{array}{l}\Theta-\Theta_1=\alpha\\ 2\Theta=360-2\omega\end{array}\right\},\ \text{somit}\ \left\{\begin{array}{l}\sin(\Theta-\Theta_1)=\sin\alpha\\ \sin 2\Theta=-\sin 2\omega.\end{array}\right.$$

Es ist nämlich nach Herrn Grunert's Definition (S. 233 und 240), wenn man die Sache an der hier beiliegenden Figur betrachtet, der Winkel $NO'G=\Theta$, und der Winkel $RO''L=\Theta_1$. Ferner haben die vom Herrn Grunert (S. 227 und 237) mit ω und ω_1 bezeichneten Winkel die Bedeutung, dass $\omega=90^0$, $\omega_1=90-\rho$ ist, wo ρ den Stundenwinkel bezeichnet. Denn nach seiner Erklärung

(S. 227) ist ω der Winkel, welchen die Projection des zum Beobachtungsorte gezogenen Erdhalbmessers mit dem positiven Theile der Axe der X des rechtwinkeligen im Erdmittelpunkte als Anfangspunkte befestigten Coordinatensystems in der Ebene der xy, welche mit dem Äquator identisch sein soll, bildet; und eben so soll ω_1 den Winkel bezeichnen, welchen die Projection des zur zweiten (am Ende des in's Auge gefassten Zeittheilchens stattfindenden) Position des Beobachtungsortes gezogenen Erdhalbmessers mit derselben fixen Axe der x in der Ebene der xy, d. h. im Äquator einschliesst. Es seien nun O', O'' die Positionen des Pendels am Anfange und am Ende des Zeittheilchens, während dessen die Erde durch ihre Axendrehung den Stundenwinkel $VCB=\rho$ beschreibt. Es sei ferner, wie Herr Grunert (S. 227) annimmt, die Erdaxe NS die Axe der z, sofort die Durchschnittslinie des Meridians $NO'H$ mit dem Äquator, nämlich die Gerade VCU, die Axe der y, und die Durchschnittslinie des der Pendelstellung CO' entsprechenden Horizontes $DGHJK$ mit demselben Äquator, d. h. die Gerade DK, die Axe der x; und zwar seien CK, CV, CN die positiven Theile der Axen der x, y, z. Da D der West-, E der Süd- und K der Ostpunkt des Horizontes $DGHJK$ ist, so ist $DCH=HCK=90^\circ$, folglich auch $DCV=VCK=90^\circ$. Nun ist aber die Gerade CV die Projection des zum Beobachtungsorte O' gezogenen Erdhalbmessers CO', und CK der positive Theil der Axe der x: also ist gemäss Herrn Grunert's Definition der Äquatorssector VCK der von ihm mit ω bezeichnete Winkel, somit $\omega=90^\circ$. Bezüglich der zweiten Position O'' des Pendels ist die Gerade CB die Projection des zu O'' gezogenen Erdhalbmessers CO''; also nach Herrn Grunert's Erklärung (S. 237) $\omega_1=BCK=VCK-VCB=90-\rho$. Demnach ist

$$\left.\begin{array}{l}\omega=90\\ \omega_1=90-\rho\end{array}\right\}\text{ also }\left\{\begin{array}{l}\omega+\omega_1=180-\rho\\ \omega-\omega_1=\rho\end{array}\right\},$$

folglich

$$\sin\tfrac{1}{2}(\omega+\omega_1)=\sin\tfrac{1}{2}(180-\rho)=\sin(90-\rho/_2)=\cos\rho/_2,$$
$$\cos\tfrac{1}{2}(\omega+\omega_1)=\cos\tfrac{1}{2}(180-\rho)=\cos(90-\rho/_2)=\sin\rho/_2,$$
$$\cos\tfrac{1}{2}(\omega-\omega_1)=\cos\rho/_2,\ \sin(\omega-\omega_1)=\sin\rho,\ \cos(\omega-\omega_1)=\cos\rho.$$

Ferner ist (S. 227) $\tilde{\omega}$ die geographische Breite φ des Beobachtungsortes, und (S. 239) G'' ein gewisser unbestimmter Factor. Endlich ist (S. 239):

Form (8). $$\Omega = 2\sin{}^1\!/_2\,(\omega-\omega_1)\left\{\begin{array}{l}\cos\alpha\cos\tfrac{1}{2}(\omega+\omega_1)\sin\tilde{\omega}\\ +\cos\beta\sin\tfrac{1}{2}(\omega+\omega_1)\sin\tilde{\omega}\\ -\cos\gamma\cos\tfrac{1}{2}(\omega-\omega_1)\cos\tilde{\omega}\end{array}\right\}\cos\tilde{\omega},$$

wo α, β, γ die Winkel bezeichnen, welche die Schwingungslinie, d. h. die Durchschnittslinie der Schwingungsebene mit dem Horizonte, mit den positiven Theilen der Axen der x, y und z bildet. Da nun die Gerade CG die Schwingungslinie bei der ersten Position des Horizontes vorstellt (gemäss Definition S. 233), so erhält man die Winkel α, β, γ, wenn man die Linie CG mit den Geraden CK, CV, CN, durch dazwischengelegte Ebenen verbindet. Es ist demnach $GCK=\alpha$, $GCV=\beta$, $GCN=\gamma$. Nun liegt der Winkel GCK in der Ebene des Horizontes $GHJK$, und es ist $GCK=GCH+HCK=\omega+90$, indem der Winkel GCH das Mass des Azimuthes $GO'H$ ist; folglich ist $\cos\alpha=\cos(90+\omega)=-\sin\omega$. Der Bogen GV des ebenen Winkels $GCV=\beta$ ist die Hypotenuse des rechtwinkligen sphärischen Dreieckes GVH, in welchem die Seite $GH=\omega$, die Seite $HV=HO'-O'V=90-\varphi$, und der Winkel $GHV=90^0$; folglich ist $\cos\beta-\cos\omega\cos(90-\varphi)=\cos\omega\sin\varphi$. Eben so ist der Bogen GN des ebenen Winkels $GCN=\gamma$ die Hypotenuse des rechtwinkeligen sphärischen Dreieckes GHN, in welchem die Seite $GH=\omega$, die Seite $HVO'N=NO'V+VH=90+(90-\varphi)=180-\varphi$, und der Winkel $GHN=90^0$; folglich $\cos\gamma=\cos\omega\cos(180-\varphi)=-\cos\omega\cos\varphi$. Es ist also $\cos\alpha=-\sin\omega$, $\cos\beta=\sin\varphi\cos\omega$, $\cos\gamma=-\cos\varphi\cos\omega$; folglich:

$$\begin{aligned}\Omega &= 2\sin\rho/_2\,(-\sin\varphi\sin\omega\sin\rho/_2+\sin^2\varphi\cos\omega\cos\rho/_2+\cos^2\varphi\cos\omega\cos\rho/_2)\cos\varphi\\ &= 2\sin\rho/_2\cos\varphi\,[\cos\omega\cos\rho/_2\,(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)-\sin\varphi\sin\omega\sin\rho/_2]\\ &= 2\sin\rho/_2\cos\varphi\,(\cos\omega\cos\rho/_2-\sin\varphi\sin\omega\sin\rho/_2).\end{aligned}$$

Die Grunert'schen Formeln (14) und (17) lauten demnach übersetzt:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\rho}=G''\left(\sin\varphi+\tfrac{1}{2}\sin 2\,\omega\cos^2\varphi\,\mathrm{tang}\,\rho/_2\right)$$

$$\frac{\cos\alpha}{\cos\rho}=G''\left(1-\frac{\Omega\sin(180-\omega)-\tfrac{1}{2}\sin 2\,\omega\cos\varphi\sin\rho}{\cos\varphi}\cot\varphi\right),$$

oder

$$\sin\alpha=\sin\rho\,G''\,(\sin\varphi+\tfrac{1}{2}\sin 2\,\omega\cos^2\varphi\,\mathrm{tang}\,\rho/_2)$$
$$\cos\alpha=G''[\cos\rho-\cot\varphi\,(\Omega\sin\omega-\tfrac{1}{2}\sin 2\,\omega\sin\rho\cos\varphi)].$$

Dividirt man die vorletzte Gleichung durch die letzte, so erhält man:

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{\sin \rho \sin \varphi + \frac{1}{2} \sin 2\omega \cos^2 \varphi \sin \rho \operatorname{tang} \rho/_2}{\cos \rho - \cot \varphi\,(\Omega \sin \omega - \frac{1}{2} \sin 2\omega \sin \rho \cos \varphi)},$$

oder auch wegen

$$\operatorname{tang} \frac{\rho}{2} = \frac{1-\cos \rho}{\sin \rho} = \frac{2 \sin^2 \rho/_2}{\sin \rho},$$

folglich $\sin \rho \operatorname{tang} \rho/_2 = 2 \sin^2 \rho/_2$,

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{\sin \rho \sin \varphi + \sin 2\omega \cos^2 \varphi \sin^2 \rho/_2}{\cos \rho + \cot \varphi\,(^1/_2 \sin 2\omega \sin \rho \cos \varphi - \Omega \sin \omega)}.$$

Man setze nun Kürze halber $\sin \rho \sin \varphi + \sin 2\omega \cos^2 \varphi \sin^2 \rho/_2 = Z$; so ist, wegen $^1/_2 \sin 2\omega = \sin \omega \cos \omega$, sofort:

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{Z}{\cos \rho + \cot \varphi\,(\sin \omega \cos \omega \sin \rho \cos \varphi - \Omega \sin \omega)}$$

$$= \frac{Z}{\cos \rho + \sin \omega \cot \varphi\,(\sin \rho \cos \varphi \cos \omega - \Omega)};$$

und den Werth von Ω gesetzt,

$\operatorname{tang} \alpha =$

$$= \frac{Z}{\cos \rho + \sin \omega \cot \varphi\,[\sin \rho \cos \varphi \cos \omega - 2 \sin \rho/_2 \cos \varphi\,(\cos \rho/_2 \cos \omega - \sin \rho/_2 \sin \varphi \sin \omega)]}$$

$$= \frac{Z}{\cos \rho + \sin \omega \cot \varphi\,(\sin \rho \cos \varphi \cos \omega - 2 \sin \rho/_2 \cos \rho/_2 \cos \varphi \cos \omega + 2 \sin^2 \rho/_2 \sin \varphi \cos \varphi \sin \omega)}$$

$$= \frac{Z}{\cos \rho + \sin \omega \cot \varphi\,(\sin \rho \cos \varphi \cos \omega - \sin \rho \cos \varphi \cos \omega + 2 \sin^2 \rho/_2 \sin \varphi \cos \varphi \sin \omega)}$$

$$= \frac{Z}{\cos \rho + 2 \sin^2 \rho/_2 \sin \varphi \cos \varphi \sin^2 \omega \cot \varphi}$$

$$= \frac{Z}{\cos \rho + 2 \sin^2 \rho/_2 \cos^2 \varphi \sin^2 \omega}$$

Wird nun der Werth von Z wieder hergestellt, so folgt:

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{\sin \rho \sin \varphi + \sin^2 \rho/_2 \cos^2 \varphi \sin 2\omega}{\cos \rho + 2 \sin^2 \rho/_2 \cos^2 \varphi \sin^2 \omega}$$

als Ausdruck eines Elementes α der Pendelabweichung für die gegebenen Grössen des der Schwingungszeit entsprechenden Stundenwinkels ρ, der geographischen Breite φ des Beobachtungsortes und des Azimuthes ω, unter welchem die Pendelschwingung zu Anfang einer jeden unendlich kurzen Schwingungszeit stattgefunden hat.

Dass nun die in der vorstehenden Abhandlung durchgeführte Entwickelung auf dieselbe Formel führe, ergibt sich aus der Auflösung und Reduction der auf S. 250 vorkommenden Gleichung:

$$\frac{\operatorname{tang}\alpha+\operatorname{tang}\omega}{1-\operatorname{tang}\alpha\operatorname{tang}\omega}=\frac{\cos\rho\sin^2\varphi+\cos^2\varphi+\sin\rho\sin\varphi\cot\omega}{\cos\rho\cot\omega-\sin\rho\sin\varphi},$$

welche als unentwickelter Ausdruck eines Elementes der Pendelabweichung hingestellt wurde. Setzt man Kürze halber

$$\frac{\cos\rho\sin^2\varphi+\cos^2\varphi+\sin\rho\sin\varphi\cot\omega}{\cos\rho\cot\omega-\sin\rho\sin\varphi}=\frac{P}{Q},$$

so ist

$$\frac{\operatorname{tang}\alpha+\operatorname{tang}\omega}{1-\operatorname{tang}\alpha\operatorname{tang}\omega}=\frac{P}{Q};$$

woraus

$$\operatorname{tang}\alpha=\frac{P-Q\operatorname{tang}\omega}{Q+P\operatorname{tang}\omega}\text{ folgt.}$$

Werden in diese letzte Gleichung die Werthe von P und Q eingeführt, so ist

$$\operatorname{tang}\alpha=\frac{\cos\rho\sin^2\varphi+\cos^2\varphi+\sin\rho\sin\varphi\cot\omega-\operatorname{tang}\omega(\cos\rho\cot\omega-\sin\rho\sin\varphi)}{\cos\rho\cot\omega-\sin\rho\sin\varphi+\operatorname{tang}\omega(\cos\rho\sin^2\varphi+\cos^2\varphi+\sin\rho\sin\varphi\cot\omega)}$$

und da $\operatorname{tang}\omega\cot\omega=1$,

$$\operatorname{tang}\alpha=\frac{\cos\rho\sin^2\varphi+\cos^2\varphi+\sin\rho\sin\varphi\cot\omega-\cos\rho+\sin\rho\sin\varphi\operatorname{tang}\omega}{\cos\rho\cot\omega-\sin\rho\sin\varphi+\sin^2\varphi\cos\rho\operatorname{tang}\omega+\cos^2\varphi\operatorname{tang}\omega+\sin\rho\sin\varphi}$$

$$=\frac{\cos\rho\sin^2\varphi+\cos^2\varphi+\sin\varphi\sin\rho(\operatorname{tang}\omega+\cot\omega)-\cos\rho}{(\cos\rho\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)\operatorname{tang}\omega+\cos\rho\cot\omega}.$$

Nun ist $\operatorname{tang}\omega+\cot\omega=\frac{1}{\sin\omega\cos\omega}$, und $\cos\rho\sin^2\varphi+\cos^2\varphi-\cos\rho$ $=\cos^2\varphi-\cos\rho\,(1-\sin^2\varphi)=\cos^2\varphi-\cos\rho\cos^2\varphi=$ $\cos^2\varphi\,(1-\cos\rho)$; also

$$\operatorname{tang}\alpha=\frac{\cos^2\varphi(1-\cos\rho)+\frac{\sin\rho\sin\varphi}{\sin\omega\cos\omega}}{\cos\rho\cot\omega+\operatorname{tang}\omega(\cos\rho\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)}$$

$$=\frac{\sin\omega\cos\omega\cos^2\varphi(1-\cos\rho)+\sin\rho\sin\varphi}{\sin\omega\cos\omega[\cos\rho\cot\omega+\operatorname{tang}\omega(\cos\rho\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)]}$$

$$=\frac{\sin\rho\sin\varphi+\sin\omega\cos\omega\cos^2\varphi(1-\cos\rho)}{\cos\rho\cos^2\omega+\sin^2\omega(\cos\rho\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)};$$

ferner ist

$$\cos\rho\cos^2\omega+\sin^2\omega\,(\cos\rho\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)$$
$$=\cos\rho\cos^2\omega+\sin^2\omega\,[\cos\rho\,(1-\cos^2\varphi)+\cos^2\varphi]$$
$$=\cos\rho\cos^2\omega+\sin^2\omega\,(\cos\rho-\cos\rho\cos^2\varphi+\cos^2\varphi)$$
$$=\cos\rho\cos^2\omega+\sin^2\omega\,[\cos\rho+\cos^2\varphi\,(1-\cos\rho)]$$
$$=\cos\rho\cos^2\omega+\cos\rho\sin^2\omega+\sin^2\omega\cos^2\varphi\,(1-\cos\rho)$$
$$=\cos\rho\,(\sin^2\omega+\cos^2\omega)+\sin^2\omega\cos^2\varphi\,(1-\cos\rho)$$
$=\cos\rho+\sin^2\omega\cos^2\varphi\,(1-\cos\rho)$, indem $\sin^2\omega+\cos^2\omega=1$ ist.

Man hat demnach

$$\operatorname{tang}\alpha=\frac{\sin\rho\sin\varphi+\sin\omega\cos\omega\cos^2\varphi\,(1-\cos\rho)}{\cos\rho+\sin^2\omega\cos^2\varphi\,(1-\cos\rho)};$$

mithin wegen $1-\cos\rho=2\sin^2\rho/_2$,

$$\operatorname{tang}\alpha=\frac{\sin\rho\sin\varphi+2\sin^2\rho/_2\cos^2\varphi\sin\omega\cos\omega}{\cos\rho+2\sin^2\rho/_2\cos^2\varphi\sin^2\omega},$$

oder auch, mit Rücksicht auf $\sin\omega\cos\omega=\frac{1}{2}\sin 2\omega$,

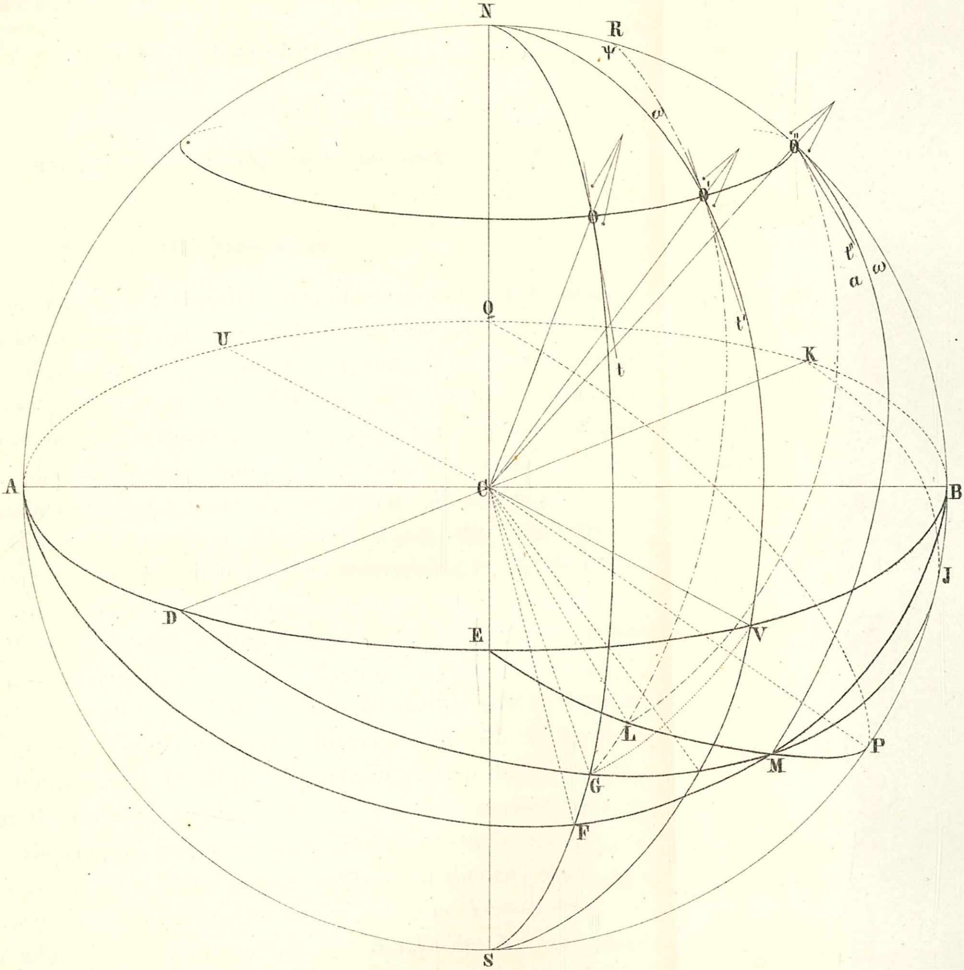
$$\operatorname{tang}\alpha=\frac{\sin\rho\sin\varphi+\sin^2\rho/_2\cos^2\varphi\sin 2\omega}{\cos\rho+2\sin^2\rho/_2\cos^2\varphi\sin^2\omega},$$

welche Formel mit dem aus der Grunert'schen Entwickelung abgeleiteten Ausdrucke eines Elementes der Pendelabweichung vollkommen übereinstimmt.

Für eine unendlich abnehmende Grösse des Stundenwinkels ρ, d. h. für eine unendlich kurze Zeit der Pendelschwingung wird auch das Element α der Pendelabweichung unendlich klein: daher $\operatorname{tang}\alpha=\alpha$, $\sin\rho=\rho$, $\cos\rho=1$; und da $(\sin\rho/_2)^2$ eine unendlich kleine Grösse zweiter Ordnung ist, folglich $\sin^2\varphi/_2\cos^2\varphi\sin 2\omega$ gegen $\sin\rho\sin\varphi$, und gleicher Weise $2\sin^2\varphi/_2\cos\varphi\sin^2\omega$ gegen $\cos\rho$ verschwinden, so erhält man aus obiger Formel unmittelbar

$$\alpha=\rho\sin\varphi$$

als den Ausdruck eines jener Elemente der Pendelabweichung, deren durch die Foucault'sche Formel $a=r\sin\varphi$ ausgedrückte Summe den ganzen Betrag der Pendelabweichung für die geographische Breite α des Beobachtungsortes und die dem Stundenwinkel r entsprechende Zeit der Pendelschwingung darstellt.



Aus d. k. k. Hof- u. Staatsdruckerei.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1861

Band/Volume: 44_2

Autor(en)/Author(s): Jelinek Karl

Artikel/Article: Theorie der Pendelabweichung. 241-258