Nachweisung einiger Eigenschaften einer ausgedehnten Classe transcendenter Functionen.

Von Dr. Anton Winckler,

Professor am Joanneum in Gratz.

(Vorgelegt in der Sitzung am 18. Juli 1861.)

Das Folgende enthält einige Sätze sehr allgemeiner Art, welche sich auf eine zahlreiche Classe transcendenter Functionen beziehen und, wie aus den Anwendungen auf besondere Fälle hervorgehen wird, nicht ohne Interesse sind. Wenn dieselhen als sehr einfache Folgerungen aus den ersten Elementen der Analysis erscheinen, so gilt dies nicht minder von vielen anderen allgemeinen Sätzen, ja selbst von dem berühmten Abel'schen Theorem, und deutet dies vielleicht darauf hin, dass manche allgemeine und sehr nahe liegende Sätze noch nicht bemerkt wurden, deren Ergebnisse in speciellen Fällen auf anderem Wege weniger zugänglich sind.

1.

Unter φ (x) und ψ (x) mögen zwei Functionen von solcher Beschaffenheit verstanden werden, dass, wenn die Gleichung:

$$\varphi\left(x\right)=\psi\left(y\right)$$

stattfindet, zugleich auch

$$\varphi(y) = \psi(x)$$

ist, dass also diejenige Gleichung, aus welcher die eine dieser Functionen aus der andern zu berechnen ist, nothwendig eine symmetrische sein muss. So wird z. B. die Function $\psi(x)$ jener Bedingung entsprechen, wenn sie für eine gegebene Form von $\varphi(x)$ aus einer oder der andern der Gleichungen

$$\varphi(x) + \psi(x) = k$$
 $\varphi(x) \quad \psi(x) = k^2$

berechnet wird. Man kann eine grosse Zahl solcher Fälle zusammenfassen, wenn man festsetzt, dass in der Gleichung

$$X_0 \psi(x)^n + X_1 \psi(x)^{n-1} + X_{n-1} \psi(x) + X_n = 0$$

die Coëfficienten X_0 , X_1 , ... X_n solche Functionen von $\varphi(x)$ seien, dass, wenn man nach Potenzen von $\varphi(x)$ ordnet, die Gleichung

$$Y_0 \varphi(x)^n + Y_1 \varphi(x)^{n-1} + Y_{n-1} \varphi(x) + Y_n = 0$$

zum Vorschein kommt, in welcher die Y genau dieselben Functionen von $\psi(x)$ wie die X von $\varphi(x)$ sind, und also die letzteren Coëfficienten der Ordnung nach aus den ersteren erhalten werden, wenn man darin $\psi(x)$ mit $\varphi(x)$ vertauscht.

Die Bedingung der Symmetrie wird ferner auch erfüllt, wenn man

$$\varphi(x) + \psi(x) = S$$
 $\varphi(x)$ $\psi(x) = P$

setzt und $\psi(x)$ aus der Gleichung

$$[P^{n} + a_{1} P^{n-1} + a_{2} P^{n-2} + + a_{n-1} P + a_{n}] \times [S^{m} + b_{1} S^{m-1} + b_{2} S^{m-2} + + b_{m-1} S + b_{m}] = c$$

bestimmt wird, worin die α und b sowie auch c gegebene Coëfficienten sind. — Wenn indessen später von einer symmetrischen Function, oder von einer, bezüglich zweier Grössen symmetrischen Gleichung die Rede sein wird, so soll damit keineswegs gesagt sein, dass dieselbe aus einer der soeben bezeichneten Relationen abgeleitet sein müsse; sie kann, wie sich von selbst versteht, aus ganz anderen und zwar auch transcendenten Gleichungen herstammen, welche den Bedingungen der Symmetrie entsprechen.

2.

Es seien nun α und β , a und b Werthe von der Beschaffenheit, dass sie den Gleichungen

$$\varphi(a) = \psi(\alpha)$$
 oder $\varphi(\alpha) = \psi(a)$
 $\varphi(b) = \psi(\beta)$ $\varphi(\beta) = \psi(b)$

Genüge leisten; bezeichnet ferner II die Charakteristik einer Function, welche zwischen allen in Frage kommenden Werthen ihrer Veränderlichen einen endlichen und stetigen Werth behält, und setzt man der Kürze wegen:

$$\int \prod_{[f(\varphi,\psi)]} \frac{df(\varphi,\psi)}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dx} dx = F_{(a,b)}$$
 (1)

so finden die folgenden Sätze Statt:

Wenn die Function $f(\varphi, \psi) = f(\psi, \varphi)$ eine nach φ und ψ symmetrische Function ist, so hat man:

$$F(a,b) + F(\alpha,\beta) = \int_{f[\varphi(a),\psi(a)]}^{f[\varphi(b),\psi(b)]} \Pi(f) df$$
 (I)

Wenn die Function $f(\varphi, \psi) = -f(\psi, \varphi)$ eine alternirende Function von φ und ψ und $\Pi(f)$ eine ungerade Function von f ist, so findet die Gleichung Statt:

$$F(a,b) - F(\alpha,\beta) = \int_{f[\varphi(a),\psi(a)]}^{f[\varphi(b),\psi(b)]} \Pi(f) df$$
 (II)

Der Beweis dieser Sätze lässt sich, wie schon bemerkt wurde, sehr einfach und zwar wie folgt führen.

Da vermöge der Gleichung (1)

$$\int_{\alpha}^{\beta} \Pi_{[f(\varphi,\psi)]} \frac{df(\varphi,\psi)}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dx} dx = F_{(\alpha,\beta)}$$

so ergibt sich, wenn man für x eine neue Veränderliche y, bestimmt durch die Gleichung

$$\varphi(x) = \psi(y)$$

oder, was nach der Voraussetzung hiermit gleichbedeutend ist, durch die Gleichung

$$\varphi(y) = \psi(x)$$

einführt, und bemerkt, dass die neuen Grenzwerthe nun a und b sein werden

$$\int \prod_{[f(\psi,\,\varphi)]} \frac{df(\psi,\varphi)}{d\psi} \quad \frac{d\psi}{dy} \ dy = F_{(\alpha,\,\beta)}$$

Da nun $f(\psi, \varphi) = f(\varphi, \psi)$ eine symmetrische Function ist, und da an die Stelle der Integrationsveränderlichen y wieder der Buchstab x gesetzt werden kann, so geht diese Gleichung über in die folgende

$$\int_{\left[f(\varphi,\psi)\right]}^{b} \frac{df(\varphi,\psi)}{d\psi} \frac{d\psi}{dx} dx = F_{(\alpha,\beta)}$$
 (2)

Wird nunmehr die Gleichung (2) zu (1) addirt und berücksichtigt man, dass die Integrale gleiche Grenzen haben und unter dem Integralzeichen der Ausdruck

$$\left\{ \frac{df(\varphi,\psi)}{d\varphi} \quad \frac{d\varphi}{dx} + \frac{df(\varphi,\psi)}{d\psi} \quad \frac{d\psi}{dx} \right\} dx = df$$

das vollständige Differential von f ist, so gelangt man unmittelbar zu der Gleichung

$$\int_{r-a}^{a} \prod_{x=a}^{a} (f) df = F(a,b) + F(\alpha,\beta),$$

welche zeigt, dass zur Bildung des Integrals die Function $\Pi(f)$ nur insoferne sie von f abhängt, zu integriren ist, was offenbar damit zusammenfällt, dass man bei der Integration das Functionalzeichen f als die Integrationsveränderliche zu betrachten habe.

Hierin liegt ohne Weiteres der durch die Gleichung (I) ausgesprochene Satz.

Ist dagegen $f(\varphi, \psi) = -f(\psi, \varphi)$ eine alternirende Function von φ und ψ und $\Pi(f)$ eine gerade Function von f, und verfährt man mit dem Integrale $F(\alpha, \beta)$ in derselben Weise wie oben, transformirt dasselbe nämlich mittelst einer neuen Veränderlichen y, welche mit der ursprünglichen x in der Relation

$$\varphi(x) = \psi(y)$$
 oder $\varphi(y) = \psi(x)$

steht, so ergibt sich

$$\int_{a}^{b} \prod_{[f(\psi,\,\varphi)]} \frac{df(\varphi,\psi)}{d\psi} \quad \frac{d\psi}{dy} \quad dy = F(\alpha,\,\beta)$$

oder, wenn man φ mit ψ vertauscht und wieder x für y schreibt, die Gleichung sodann von (1) abzieht

$$\int_{x=a}^{x=b} \Pi(f) df = F(a,b) \qquad F(\alpha,\beta)$$

wie der durch die Gleichung (II) ausgesprochene Satz es besagt.

3.

Die Anwendung dieser Sätze auf einige besondere Fälle wird dazu dienen, die Bedeutung und den Nutzen derselben näher zu zeigen.

Ich will zunächst annehmen, es werde

$$f(\varphi) + f(\psi)$$
 für $f(\varphi, \psi)$

gesetzt, und es sei

$$\Pi(u) = (u - A)^{m-1} (B - u)^{n-1}$$

so sind die, bezüglich $f(\varphi, \psi)$ gemachten Voraussetzungen offenbar erfüllt und wenn man die noch nicht näher bestimmten Constanten A und B so wählt, dass

$$A = f[\varphi(a)] + f[\psi(a)], \quad B = f[\varphi(b)] + f[\psi(b)]$$

wird, so findet man zunächst

$$\int_{x=a}^{x=b} \prod_{f=a}^{a} (f) df = \int_{A}^{B} [f-A]^{m-1} [B-f]^{n-1} df$$

oder, wenn man statt der Veränderlichen f eine neue t, bestimmt durch die Gleichung

$$f - A = t$$
 $f = A + t$

einführt, so geht das Integral rechter Hand in das Folgende über

$$\int_{0}^{B-A} t^{m-1} (B-A-t)^{n-1} dt = (B-A)^{m+n-1} \int_{0}^{1} t^{m-1} (1-t)^{n-1} dt$$

Da ferner

$$F(a,b) = \int_{a}^{b} [f(\varphi) + f(\psi) - A]^{m-1} \left[B - f(\varphi) - f(\psi)\right]^{n-1} \frac{df(\varphi)}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dx} dx$$

so ergibt sich aus (I) der folgende bemerkenswerthe Satz:

Die Transcendente

$$F(a,b) = \int [f(\varphi) + f(\psi) - A]^{m-1} \left[B - f(\varphi) - f(\psi)\right]^{n-1} \frac{df(\varphi)}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dx} dx$$

hat, wenn die Gleichung $\varphi(x) = \psi(y)$ eine symmetrische nach x und y ist, und wenn $\varphi(a) = \psi(\alpha)$, $\varphi(b) = \psi(\beta)$, auch

$$A = f[\varphi(a)] + f[\psi(a)] \qquad B = f[\varphi(b)] + f[\psi(b)]$$

gesetzt wird, die Eigenschaft, dass

$$F(a,b) + F(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma_{(m)}\Gamma_{(n)}}{\Gamma_{(m+n)}} (B-A)^{m+n-1}$$

Es sei beispielsweise $\varphi(x) = x$, $\psi(x) = c - x$, so wird

$$A = f(a) + f(c-a) \qquad B = f(b) + f(c-b)$$

$$\alpha = c - a \qquad \beta = c - b$$

und man hat

$$\int_{a}^{b} [f(x)+f(c-x)-f(a)-f(c-a)]^{m-1} [f(b)+f(c-b)-f(x)-f(c-x)]^{n-1} \frac{df(x)}{dx} dx$$

mit der Eigenschaft, dass

$$F(a,b)+F(c-a,c-b)=\frac{\Gamma_{(m)}\Gamma_{(n)}}{\Gamma_{(m+n)}}\left[f(b)+f(c-b)-f(a)-f(c-a)\right]^{m+n-1}$$

Um einen noch specielleren Fall zu betrachten, sei

$$f(x) = \log x$$

so erhält man

$$F(a,b) = \int_{a}^{b} \left[\log \frac{x(c-x)}{a(c-a)} \right]^{m-1} \left[\log \frac{b(c-b)}{x(c-x)} \right]^{n-1} \frac{dx}{x}$$

mit der Eigenschaft, dass

$$F(a,b) + F(c-a,c-b) = \frac{\Gamma_{(m)}\Gamma_{(n)}}{\Gamma_{(m+n)}} \left[\log \frac{b(c-b)}{a(c-a)} \right]^{m+n-1}$$

Für c=0 folgt hieraus die neue Formel

$$\int \left[\log \frac{x}{a}\right]^{m-1} \left[\log \frac{b}{x}\right]^{n-1} \frac{dx}{x} = \frac{\Gamma_{(m)} \Gamma_{(n)}}{\Gamma_{(m+n-1)}} \left[\log \frac{b}{a}\right]^{m+n-1}$$

woraus insbesondere noch für $m=n=\frac{1}{2}$ sich ergibt:

$$\int \frac{dx}{x \sqrt{\log \frac{x}{a} \log \frac{b}{x}}} = \pi$$

Es verdient bemerkt zu werden, dass, wenn auch c nicht = 0 gesetzt wird, für diese Werthe von m und n immerhin

$$F(a,b) = \int_{a}^{b} \frac{dx}{x \sqrt{\log \frac{x(c-x)}{a(c-a)} \log \frac{b(c-b)}{x(c-x)}}}$$

mit der Eigenschaft

$$F(a,b) + F(c-a,c-b) = \pi$$

sich ergibt.

Unter der bisherigen Annahme, dass $f(\varphi) + f(\psi)$ für $f(\varphi, \psi)$ gesetzt werde, will ich ferner setzen, es sei

$$\Pi(u) = u^{n-1} e^{-ku}$$

wofür sich alsdann

$$F(a,b) = \int_{a}^{b} \left[f(\varphi) + f(\psi) \right]^{n-1} e^{-k[f(\varphi) + f(\psi)]} \frac{df(\varphi)}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dx} dx$$

und

$$\int_{r-a}^{x=b} \Pi(f) df = \int_{A}^{B} f^{n-1} e^{-kf} df$$

ergibt. Nimmt man z. B. noch an, es sei

$$\varphi(x) = x$$
 $\qquad \psi(x) = \frac{c}{x}$ $\qquad \alpha = \frac{c}{a}, \ \beta = \frac{c}{b}$
 $f(\varphi) = \varphi$ $\qquad f(\psi) = \psi$

so findet man weiter

$$F(a,b) = \int_{a}^{b} \left(x + \frac{c}{x}\right)^{n-1} e^{-k\left(x + \frac{c}{x}\right)} dx$$

mit der Eigenschaft, dass

$$F(a,b) + F(\alpha,\beta) = \int_{a+\frac{c}{a}}^{b+\frac{c}{b}} e^{-kf} df$$

Ebenso ergibt sich, dass, wenn

$$F(a,b) = \int_{a}^{b} \left[b + \frac{c}{b} - \left(x + \frac{c}{x}\right)\right]^{n-1} e^{-k\left[b + \frac{c}{b} - \left(x + \frac{c}{x}\right)\right]} dx$$

die Gleichung

$$F(a,b) + F\left(\frac{c}{a}, \frac{c}{b}\right) = \int_{0}^{\frac{(b-a)(1-c)}{ab}} x^{n-1} e^{-kx} dx$$

stattfinde, u. s. w.

4.

Setzt man $f(\varphi) f(\psi)$ an die Stelle von $f(\varphi, \psi)$ und nimmt an, es sei

$$\Pi(u)=u^{n-1}$$

so ergibt sich

$$\int_{x=a}^{x=b} \prod_{\alpha} (f) df = \frac{1}{n} \left\{ f[\varphi(b)]^n f[\psi(b)]^n - f[\varphi(a)]^n f[\psi(a)]^n \right\}$$

und

$$F(a,b) = \int_{a}^{b} f[\varphi(x)]^{n-1} f[\psi(x)]^{n} \frac{df(\varphi)}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dx} dx \tag{1}$$

Vermöge der Gleichung (I) des Art. 2 ergibt sich also der Satz, dass

$$F(a,b) + F(\alpha,\beta) = \frac{1}{n} \left\{ f[\varphi(b)]^{\tilde{n}} f[\psi(b)]^{\tilde{n}} - f[\varphi(a)]^{\tilde{n}} f[\psi(a)]^{\tilde{n}} \right\}$$
(2) Hierin sind mehrere nicht unwichtige besondere Fälle enthalten, welche ich etwas näher ausführen werde.

Es sei zunächst

$$\varphi(x) = x \qquad \psi(x) = c - x$$

so entsprechen diese Annahmen den früheren Bedingungen und es ist

$$\alpha = c - a$$
 $\beta = c - b$

so dass also

$$F(a,b) = \int_{a}^{b} f(x)^{n-1} f(c-x)^{n} df(x)$$

mit der Eigenschaft

 $F(a,b) + F(c-a,c-b) = \frac{1}{n} \left\{ f(b)^n f(c-b)^n - f(a)^n f(c-a)^n \right\}$ sich ergibt, welche, wie man sieht, jeder beliebigen Function f(x) zukommt.

Als besonderer Fall verdient bemerkt zu werden, dass für

$$a=0$$
 $c=a-b$

und wenn

$$F(b) = \int_{0}^{b} f(a+b-x) df(x)$$

gesetzt wird, sich die Gleichung ergibt

$$F(a) + F(b) = F(a+b) + f(a)f(b) - f(a)f(a+b)$$

Es sei, um ein weiteres Beispiel zu betrachten

$$f(u) = \log u$$
.

Man erhält alsdann

$$F(a,b) = \int_{a}^{b} \left[\log x\right]^{n-1} \left[\log \left(c - x\right)\right]^{n} \frac{dx}{x}$$

und

$$F(a,b) + F(c-a,c-b) = \frac{1}{n} \left\{ \left[\log b \log (c-b) \right]^n - \left[\log a \log (c-a) \right]^n \right\}$$

Wenn n=1, so gehen diese Gleichungen über in die folgenden:

$$F(a,b) = \int_{-\infty}^{b} \frac{\log(c-x)}{x} dx$$

 $F(a,b) + F(c-a,c-b) = \log b \log (c-b) - \log a \log (c-a)$ und wenn man hierin auch noch a=0, c=1, und der Kürze wegen

$$F(b) = -\int_{0}^{b} \frac{\log(1-x)}{x} dx \operatorname{also} F(1-b) - F(1) = -\int_{1}^{1-b} \frac{\log(1-x)}{x} dx$$

setzt, so entsteht die Gleichung

$$F(b) + F(1-b) = F(1) - \log b \log (1-b)$$

welche zuerst von Landen in seinen Mathematical Memoirs bewiesen worden ist, und eine Eigenschaft der durch F(b) bezeichneten Transcendente ausdrückt. Man sieht hieraus, dass diese ein sehr specieller Fall einer viel allgemeineren Formel ist.

Ich will nun ferner die Annahme machen, es sei

$$\varphi(x) = x$$
 $\psi(x) = \frac{c}{x}$

dann ist

$$\alpha = \frac{c}{a} \qquad \beta = \frac{c}{b}$$

und man erhält aus den Gleichungen (1) und (2) die folgende

$$F(a,b) = \int_{a}^{b} f(x)^{n-1} f\left(\frac{c}{x}\right)^{n} df(x)$$

mit der Eigenschaft, dass

$$F(a,b) + F\left(\frac{c}{a}, \frac{c}{b}\right) = \frac{1}{n} \left\{ \left[f(b) f\left(\frac{c}{b}\right) \right]^n - \left[f(a) f\left(\frac{c}{a}\right) \right]^n \right\}$$

welche, wie man sieht, ebenfalls jeder beliebigen Function f(x) zukommt. Um sie etwas umzuformen, bemerke man, dass jederzeit

$$F(a,b) = F(1,b) - F(1,a)$$

und dass also, wenn man statt $F\left(1,b\right)$ der Kürze wegen nur $F\left(b\right)$ oder, was dasselbe ist

$$F(b) = \int_{-\infty}^{b} f(x)^{n-1} f\left(\frac{c}{x}\right)^{n} df(x)$$
 (3)

setzt, dieser Annahme entsprechend, die Relation sich ergibt

$$F(b) - F(a) + F\left(\frac{c}{b}\right) - F\left(\frac{c}{a}\right) = \frac{1}{n} \left\{ \left[f(b) f(1) \right]^n - \left[f(a) f\left(\frac{b}{a}\right) \right]^n \right\}$$

Setzt man aber c = b, und beachtet dass F(1) = 0, so findet man

$$F(b) - F(a) = F\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{1}{n} \left\{ \left[f(b)f(1)\right]^n - \left[f(a)f\left(\frac{b}{a}\right)\right]^n \right\} \tag{4}$$

Für b=1, $c=a\,b$ folgt ferner

$$F(a) + F(b) = F(ab) - \frac{1}{n} \left\{ [f(ab)f(1)]^n - [f(a)f(b)]^n \right\}$$
 (5)

Die vorstehenden Gleichungen gehen in dem besondern Falle, dass f(u) = u und n = 1 gesetzt wird, über in die folgenden:

$$F(b) = \int_{1}^{b} \frac{dx}{x}$$

$$F(b) - F(a) = F\left(\frac{b}{a}\right) \qquad F(b) + F(a) = F(ab)$$

welche, wie man sieht, die Definition des Logarithmus und dessen Grundeigenschaften ausdrücken, welche also nur sehr specielle Fälle der durch die Gleichungen (3), (4), (5) gegebenen Relationen sind.

Endlich sei noch in der Gleichung (3)

$$n = 1$$
, $c = r.s$, $f(x) = \sqrt{r} \cdot e^{\frac{x}{r}}$

Dann folgt

$$F(a) = \int_{1}^{a} \frac{\frac{x}{r} + \frac{s}{x}}{e} dx \qquad F(b) = \int_{1}^{b} \frac{\frac{x}{r} + \frac{s}{x}}{e} dx$$

und hierzu gehört die Beziehung

$$F(b) - F(a) + F\left(\frac{rs}{b}\right) - F\left(\frac{rs}{a}\right) = r \left\{ e^{\frac{b}{r} + \frac{s}{b}} - e^{\frac{a}{r} + \frac{s}{a}} \right\}$$

u. s. w.

5.

Um eine weitere Anwendung der Gleichung (I) des Art. 2 zu zeigen, setze ich

$$f\left[\varphi\sqrt{1-\psi^2}+\sqrt{1-\varphi^2}\right]$$

für $f\left(\varphi,\psi\right)$, was offenbar geschehen darf. Bezeichnet man zur Abkürzung

$$u = \varphi \sqrt{1 - \psi^2} + \psi \sqrt{1 - \varphi^2}$$

so ergibt sich

$$\frac{df(\varphi,\psi)}{d\varphi} = \frac{df(u)}{du} \quad \frac{du}{d\varphi} = \frac{\sqrt{(1-\varphi^2)(1-\psi^2)}-\varphi\psi}{\sqrt{1-\varphi^2}} \cdot \frac{df(u)}{du}$$

und man erhält also

$$F(a,b) = \int_{-1}^{b} \frac{\sqrt{(1-\varphi^2)(1-\psi^2)} - \varphi\psi}{\sqrt{1-\varphi^2}} \frac{df(u)}{du} \frac{d\varphi}{dx} dx$$

Wenn hierin z. B.

$$f(u) = \arcsin u$$

ist, so wird

$$\frac{df(u)}{du} = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \omega^2)(1 - \psi^2) - \omega\psi}}$$

und man sieht daher, dass die Function

$$F(a,b) = \int_{a}^{b} \left[\arcsin \left(\varphi \sqrt{1 - \psi^2} + \psi \sqrt{1 - \psi^2} \right) \right] \frac{\frac{d\varphi}{dx}}{\sqrt{1 - \varphi^2}} dx \quad (1)$$

die Eigenschaft hat, der Gleichung

$$F(a,b) + F(\alpha,\beta) = \int_{1}^{B} \Pi(f) df$$
 (2)

Genüge zu thun, wobei die Bedeutung von A und B durch die Gleichungen

$$A = \arcsin \left\{ \varphi(a) \sqrt{1 - \psi(a)^2} + \psi(a) \sqrt{1 - \varphi(a)^2} \right\}$$

$$B = \arcsin \left\{ \varphi(b) \sqrt{1 - \psi(b)^2} + \psi(b) \sqrt{1 - \varphi(b)^2} \right\}$$

gegeben ist. - Wird z. B.

gesetzt, so findet man

$$\int_{0}^{b} \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2}}} + \int_{c}^{c-b} \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2}}} =$$

 $\arcsin \left\{ b\sqrt{1-(c-b)^2} + (c-b)\sqrt{1-b^2} \right\} - \arcsin c$ oder, wenn c-b=a und dann c=0 gesetzt wird

$$\int_{a}^{a} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_{0}^{b} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin \left\{ a \sqrt{1-b^2} + b \sqrt{1-a^2} \right\}$$

was mit der bekannten Gleichung

 $\arcsin a + \arcsin b = \arcsin \left\{ a \sqrt{1 - b^2} + b \sqrt{1 - a^2} \right\}$ ühereinstimmt.

Man kann daher den Zusammenhang der Gleichungen (1) und (2) auch in folgender Weise ausdrücken.

Wenn

$$F(a,b) = \int_{a}^{b} \prod \left(\arcsin \varphi + \arcsin \psi\right) \frac{\frac{d\varphi}{dx}}{\sqrt{1 - \varphi^2}} dx$$

und zur Abkürzung

 $A = \arcsin \varphi(a) + \arcsin \psi(a)$ $B = \arcsin \varphi(b) + \arcsin \psi(b)$ gesetzt wird, so findet die Gleichung Statt

$$F(a,b) + F(\alpha,\beta) = \int_{A}^{B} \prod_{i}^{B} (f) df$$

Übrigens ist leicht einzusehen, dass, weil Π ein willkürliches Functionalzeichen darstellt, dieses Resultat auch durch die Gleichungen

$$F(a,b) = \int_{a}^{b} \left(\varphi \sqrt{1 - \psi^{2}} + \psi \sqrt{1 - \varphi^{2}} \right) \frac{\frac{d\varphi}{dx}}{\sqrt{1 - \varphi^{2}}} dx$$

$$F(a,b) + F(\alpha,\beta) = \int_{A}^{B} \left(\sin f \right) df$$

ersetzt werden kann.

6.

In ähnlicher Weise wie soeben der Satz über die Addition der Kreisbogen lässt das Additionstheorem der elliptischen Integrale eine neue und sehr erhebliche Verallgemeinerung zu. Setzt man zu dem Ende f(u) für $f(\varphi, \psi)$, wobei zur Abkürzung

$$u = \frac{\varphi \sqrt{(1-\psi^2)(1-k^2\psi^2)} + \psi \sqrt{(1-\varphi^2)(1-k^2\varphi^2)}}{1-k^2\varphi^2\psi^2}$$

bezeichnet, so genügt die Annahme den zu Grunde liegenden Voraussetzungen, und man erhält zur Bestimmung von $\frac{du}{d\varphi}$ nach einigen Reductionen die Gleichung

$$(1 - k^{2} \varphi^{2} \psi^{2})^{2} \sqrt{(1 - \varphi^{2}) (1 - k^{2} \varphi^{2})} \frac{du}{d\varphi} =$$

$$(1 + k^{2} \varphi^{2} \psi^{2}) \sqrt{(1 - \varphi^{2}) (1 - \psi^{2}) (1 - k^{2} \varphi^{2}) (1 - k^{2} \psi^{2})} + \varphi \psi \left[2 k^{2} (\varphi^{2} + \psi^{2}) - (1 + k^{2}) (1 + k^{2} \varphi^{2} \psi^{2}) \right]$$

Setzt man ferner, der Abkürzung wegen

$$A = \frac{\varphi(a)\sqrt{(1-\psi(a)^2)(1-k^2\psi(a)^2)} + \psi(a)\sqrt{(1-\varphi(a)^2)(1-k^2\varphi(a)^2)}}{1-k^2\varphi(a)^2\psi(a)^2}$$

$$B = \frac{\varphi(b)\sqrt{(1-\psi(b)^2)(1-k^2\psi(b)^2)} + \psi(b)\sqrt{(1-\varphi(b)^2)(1-k^2\varphi(b)^2)}}{1-k^2\varphi(b)^2\psi(b)^2}$$

so ergeben sich wieder die Gleichungen

$$F(a,b) = \int_{a}^{b} \prod_{[f(u)]} \frac{df(u)}{du} \frac{du}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dx} dx$$

$$F(a,b) + F(\alpha,\beta) = \int_{f(A)}^{f(B)} \prod_{f(A)} (f) df$$

Als besonderen Fall setze man

$$f(u) = \int_{0}^{u} \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}$$

Dann ist

$$\frac{df(u)}{du} = \frac{1}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}$$

oder, wenn man für u den oben angegebenen Ausdruck substituirt und die nöthigen Reductionen eintreten lässt

$$\frac{df(u)}{du} =$$

$$(1 - k^2 \varphi^2 \psi^2)^3$$

$$\frac{(1-k^2\varphi^2\psi^2)^2}{(1+k^2\varphi^2\psi^2)\sqrt{(1-\varphi^2)(1-\psi^2)(1-k^2\varphi^2)(1-k^2\psi^2)}+\varphi\psi\left[2k^2\left(\varphi^2+\psi^2\right)-(1+k^2)\left(1+k^2\varphi^2\psi^2\right)\right]}$$

Verbindet man nun diesen Werth mit dem für $\frac{du}{d\varphi}$ gefundenen, so tritt, wie man sogleich bemerkt, eine beträchtliche Vereinfachung ein; man erhält nämlich

$$\frac{df(u)}{du} \quad \frac{du}{d\varphi} = \frac{1}{\sqrt{(1-\varphi^2)(1-k^2\varphi^2)}}$$

Daraus folgt nun der Satz:

Wird

$$u = \frac{\varphi \sqrt{(1-\psi^2)(1-k^2\psi^2)} + \psi \sqrt{(1-\varphi^2)(1-k^2\varphi^2)}}{1-k^2\varphi^2\psi^2}$$

und

$$\int_{a}^{b} \left\{ \int_{0}^{u} \frac{du}{\sqrt{(1-u^{2})(1-k^{2}u^{2})}} \right\} \quad \frac{\frac{d\varphi}{dx}}{\sqrt{(1-\varphi^{2})(1-k^{2}\varphi^{2})}} dx = F(a,b)$$

gesetzt, so findet die Gleichung Statt

$$F(a,b) + F(\alpha,\beta) = \int_{f(A)}^{f(B)} \prod_{f(A)} f(f) df$$

Setzt man z. B.

$$\varphi(x) = x \qquad \qquad \psi(x) = c - x , \quad \Pi(f) = 1$$

$$a = 0 , \qquad \alpha = c - a , \qquad \beta = c - b$$

und bezeichnet in üblicher Weise

$$\int_{0}^{b} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^{2})(1-k^{2}x^{2})}} = F(b)$$

so erfolgt

$$F(b) + F(c-b) - F(c) = \int_{f(c)}^{f(B)} df = f(B) - f(c)$$

Da aber

$$f(c) = F(c)$$

so ergibt sich ohne Weiteres

$$F(b) + F(\beta) = F\{b\sqrt{(1-\beta^2)(1-k^2\beta^2)} + \beta\sqrt{(1-b^2)(1-k^2b^2)}\}$$

worin bekanntlich das Additionstheorem der elliptischen Integrale erster Gattung besteht.

Hätte man

$$\Pi(f) = f^{n-1}$$

angenommen und in bisheriger Weise

$$\int_{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}^{b} f(x) dx = F(a,b)$$

sodann auch

$$A = \frac{a\sqrt{(1-\alpha^2)(1-k^2\alpha^2)} + \alpha\sqrt{(1-a^2)(1-k^2a^2)}}{1-k^2b^2\beta^2}$$

$$B = \frac{b\sqrt{(1-\beta^2)(1-k^2\beta^2)} + \beta\sqrt{(1-b^2)(1-k^2b^2)}}{1-k^2a^2\alpha^2}$$

gesetzt, so hätte man erhalten

$$F(a,b) + F(\alpha,\beta) = \frac{1}{n} \left\{ F(B)^{n} - F(A)^{n} \right\}$$

u. s. w.

7.

Der Satz, von welchem bisher die Rede war, ist selbst noch einer Ausdehnung und zwar auf doppelte Integrale fähig. Um dieses näher zu zeigen, seien wieder $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ zwei Functionen von der Beschaffenheit, dass $\varphi(x) = \psi(z)$ eine symmetrische Gleichung zwischen x und z ist; und ferner sei f(u, v, y) eine symmetrische Function von u und v, so dass also

$$f(u, v, y) = f(v, u, y).$$

Bezeichnet man nun

$$F(a, b, \alpha, \beta) = \int_{a}^{b} dx \int_{a}^{\beta} \prod_{\alpha} (f) \frac{df(\varphi, \psi, y)}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dx} dy$$
 (1)

so wird man in gleicher Weise auch haben

$$F(a', b', \alpha, \beta) = \int_{a'}^{b'} dx \int_{a}^{\beta} \prod (f') \frac{df(\varphi, \psi, y)}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dx} dy$$

wobei hier, wie früher der Kürze wegen blos φ und ψ für φ (x) und ψ (x) gesetzt worden sind.

Vorausgesetzt nun, es seien a', b' diejenigen Werthe, welche den Gleichungen

$$\varphi(a) = \psi(a')$$
 $\varphi(b) = \psi(b')$

Genüge leisten, so wird man, wenn statt x die neue Veränderliche z gemäss der Gleichung

$$\varphi(x) = \psi(z)$$

eingeführt wird, erhalten

$$F(a', b', \alpha, \beta) = \int_{a}^{b} dz \int_{a}^{\beta} \prod_{i} (f) \frac{df(\varphi, \psi, y)}{d\psi} \frac{d\psi}{dz} dy$$
 (2)

Setzt man hierin wieder x für z, was keinen Irrthum zur Folge haben kann, und addirt dann die beiden Gleichungen (1) und (2), so wird man finden

$$F(a, b, \alpha, \beta) + F(a', b', \alpha, \beta) = \int_{a}^{b} dy \int_{a}^{b} \Pi(f) \left\{ \frac{df}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dx} + \frac{df}{d\psi} \cdot \frac{d\psi}{dx} \right\} dx$$

Nun ist aber der Ausdruck in der Klammer das vollständige Differential von f genommen nach x, so dass man auch schreiben kann

$$F(a, b, \alpha, \beta) + F(a', b', \alpha, \beta) = \int_{a}^{b} dy \int_{a}^{b} \prod_{a} (f) \left(\frac{df}{dx}\right) dx$$

oder, wenn man statt x die Veränderliche f einführt:

$$F(a, b, \alpha, \beta) + F(a', b', \alpha, \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} dy \int_{f[\varphi(a), \psi(a), y]}^{f[\varphi(b), \psi(b), y]} \prod_{\alpha} (f) df$$

Diese bemerkenswerthe Gleichung, worin α , β die bisherige Bedeutung haben, ist nun in der That die Erweiterung des früheren Theorems für Doppelintegrale.

Ich unterlasse es hier in weitere Einzelheiten einzugehen, weil es meine Absicht ist, auf den hier zur Sprache gebrachten Gegenstand bei einer andern Gelegenheit und in anderer Weise zurückzukommen.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: <u>Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften</u> mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1861

Band/Volume: 44 2

Autor(en)/Author(s): Winckler Anton

Artikel/Article: Nachweisung einiger Eigenschaften einer ausgedehnten Classe transcendenter Functionen. 477-492