1. *Die Summe der Logarithmus- und Arcustangens-Reihe mit alternirenden Zeichengruppen.*

Von **Franz Unferdinger,**

Lehrer der Mathematik an der öffentlichen Oberrealschule am Bauernmarkt und jener von Meixner am Alsergrund.

§. 1.

Nimmt man in den genannten zwei unendlichen Reihen die ersten n Glieder mit dem Vorzeichen $+$, die n folgenden mit dem Vorzeichen $-$, die darauffolgenden n Glieder wieder mit dem Vorzeichen $+$, u. s. w. derart, daß also immer $n-1$ Zeichenfolgen von einem Zeichenwechsel unterbrochen werden, so erhält man:

$$\begin{aligned} X_n = {} & x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{n-1} + \frac{x^n}{n} \\ & - \frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{x^{n+2}}{n+2} - \frac{x^{n+3}}{n+3} - \cdots - \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \frac{x^{2n}}{2n} \\ & + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \frac{x^{2n+2}}{2n+2} + \frac{x^{2n+3}}{2n+3} + \cdots + \frac{x^{3n-1}}{3n-1} + \frac{x^{3n}}{3n} \\ & - \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} X'_n = {} & x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n-3}}{2n-3} + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} \\ & - \frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \frac{x^{2n-3}}{2n+3} - \frac{x^{2n+5}}{2n+5} - \cdots - \frac{x^{4n-3}}{4n-3} - \frac{x^{4n-1}}{4n-1} \\ & + \frac{x^{4n+1}}{4n+1} + \frac{x^{4n+3}}{4n+3} + \frac{x^{4n+5}}{4n+5} + \cdots + \frac{x^{6n-3}}{6n-3} + \frac{x^{6n-1}}{6n-1} \\ & - \,. \end{aligned} \tag{2}$$

ist der Zahlenwerth von x gleich oder kleiner als die Einheit, so convergiren je die n Verticalreihen, folglich auch ihre Summe und die vorliegende Abhandlung hat den Zweck jene Functionen von

x, X_n, X'_n zu bestimmen, welche den convergirenden Reihen (1), (2) gleich sind.

Setzt man in der Reihe (1) $-x$, statt x, so erhält man eine neue Reihe, in welcher immer $n-1$ Zeichenwechsel durch eine Zeichenfolge unterbrochen werden und die Summe derselben entsteht aus der Function X_n durch dieselbe Vertauschung.

Ist in (1) $n = 2r$ eine gerade Zahl und man setzt $-x$ an die Stelle von x, so ändern in der 1^{ten}, 3^{ten}, $5^{\text{ten}} \ldots (2r-1)^{\text{ten}}$ Verticalreihe sämmtliche Glieder ihr Zeichen, während die Glieder der 2^{ten}, 4^{ten}, $6^{\text{ten}}, \ldots 2r^{\text{ten}}$ Verticalreihe ihr Zeichen beibehalten. Da nun sämmtliche Verticalreihen einen regelmäßigen Zeichenwechsel darbieten, so wird dies auch noch dann der Fall sein, wenn $-x$ an die Stelle von x tritt und die Reihe (1) convergirt auch für $x = -1$.

Ist hingegen in (1) $n = 2r-1$ eine ungerade Zahl, so ist, wenn wir die Verticalreihen derselben mit S_1, S_2, $S_3 \ldots S_{2r-1}$ bezeichnen:

$$S_1 = x - \frac{x^{2r}}{2r} + \frac{x^{4r-1}}{4r-1} - \frac{x^{6r-2}}{6r-2} + \ldots$$

$$S_2 = \frac{x^2}{2} - \frac{x^{2r+1}}{2r+1} + \frac{x^{4r}}{4r} - \frac{x^{6r-1}}{6r-1} + \ldots$$

$$S_3 = \frac{x^3}{3} - \frac{x^{2r+2}}{2r+2} + \frac{x^{4r+1}}{4r+1} - \frac{x^{6r}}{6r} + \ldots$$

$$S_{2r-1} = \frac{x^{2r-1}}{2r-1} - \frac{x^{4r-2}}{4r-2} + \frac{x^{6r-3}}{6r-3} - \frac{x^{8r-4}}{8r-4} + \ldots$$

und wenn $-x$ statt x gesetzt wird, erhalten die Glieder der Reihen S_1, $S_3, \ldots S_{2r-1}$, sämmtlich das Vorzeichen $-$, die Glieder der Reihen S_2, $S_4, \ldots S_{2r-2}$ aber das Vorzeichen $+$ und diese Reihen convergiren nur dann, wenn der Zahlenwerth von $x < 1$. In diesem Falle wird die letzte Verticalreihe

$$-\frac{x^{2r-1}}{2r-1} - \frac{x^{4r-2}}{4r-2} - \frac{x^{6r-3}}{6r-3} - \ldots = \frac{1}{2r-1} \lg(1-x^{2r-1}),$$

welche für $x = 1$ divergirt. Die übrigen Verticalreihen $(2r-2)$ an der Zahl lassen sich aber paarweise so miteinander vereinigen, daß ein regelmäßiger Zeichenwechsel entsteht, die erste mit der zweiten, die dritte mit der vierten u. s. w. So geben z. B. die zwei ersten

$$-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^{2r}}{2r}+\frac{x^{2r+1}}{2r+1}-\frac{x^{4r-1}}{4r-1}+\frac{x^{4r}}{4r}-.$$

und diese Reihen convergiren auch für $x=1$, da die Zahlenwerthe der spätesten Glieder die Null zur Grenze haben.

Ist also in (1) n eine ungerade Zahl, so convergirt dieselbe für $x=-1$ nur dann, wenn man die letzte Verticalreihe ausläßt. Ist der Zahlenwerth von $x<1$, so convergirt die Reihe (1) immer.

In der Reihe (2) sind die Exponenten von x sämmtlich ungerade Zahlen, tritt nun $-x$ an die Stelle von x, so ändern sämmtliche Glieder ihr Zeichen, es kann also durch diese Vertauschung keine neue Reihe gewonnen werden.

Setzt man in (1) $2n$ statt n, dann auch $-x$, statt x, bezeichnet die neuen Reihen mit X_{2n}, $\overline{X}_{2n}$ und subtrahirt, so gelangt man zu folgender Beziehung:

$$X'_n=\tfrac{1}{2}(X_2 \quad -\overline{X}_{2n}), \tag{3}$$

so daß es also hinreicht, die Function X_n zu bestimmen, um aus ihr auch die Summenformel X'_n für die unendliche Reihe (2) kennen zu lernen.

§. 2.

Werden die Gleichungen (1), (2) nach x differenzirt und in den Horizontalreihen die gemeinschaftlichen Factoren herausgehoben, so zeigt sich:

$$\begin{aligned}\frac{dX_n}{dx}= &\quad (1+x+x^2+x^3+\ldots+x^{n-1})\\ &-x^n\,(1+x+x^2+x^3+\ldots+x^{n-1})\\ &+x^{2n}(1+x+x^2+x^3+\ldots+x^{n-1})\\ &-\ldots.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dX'_n}{dx}= &\quad (1+x^2+x^4+x^6+\ldots+x^{2n-2})\\ &-x^{2n}(1+x^2+x^4+x^6+\ldots+x^{2n-2})\\ &+x^{4n}(1+x^2+x^4+x^6+\ldots+x^{2n-2})\\ &-.\end{aligned}$$

oder weil immer

$$1+x+x^2+x^3+\ldots+x^{n-1}=\frac{x^n-1}{x-1}$$

$$1+x^2+x^4+x^6+\ldots+x^{2n-2}=\frac{x^{2n}-1}{x^2-1}$$

und wenn der Zahlenwerth von x kleiner als die Einheit ist:

$$1-x^n+x^{2n}-x^{3n}+\ldots=\frac{1}{x^n+1}$$

$$1-x^{2n}+x^{4n}-x^{6n}+\ldots=\frac{1}{x^{2n}+1}$$

$$\frac{dX_n}{dx}=\frac{x^n-1}{x^n+1}\,\frac{1}{x-1}\,,\quad \frac{dX'_n}{dx}=\frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}\,\frac{1}{x^2-1}$$

oder wenn jetzt mit dx multiplicirt wird, durch Integration:

$$(4)\left\{\begin{aligned} X_n&=\int\frac{x^n-1}{x^n-1}\,\frac{dx}{x-1}+C=\lg(x-1)-2\int\frac{1}{x^n+1}\,\frac{dx}{x-1}+C\\ X'_n&=\int\frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}\,\frac{dx}{x^2-1}+C'=\tfrac{1}{2}\lg\frac{x-1}{x+1}-2\int\frac{1}{x^{2n}+1}\,\frac{dx}{x^2-1}+C'\end{aligned}\right.$$

und die Constanten C, C' sind so zu bestimmen, daß für $x=0$, die Theile rechter Hand verschwinden.

§. 3.

Um das erste der vorstehenden Integrale zu bestimmen, unterscheiden wir die zwei Fälle eines geraden und ungeraden n. Ist $n=2r$ und zerlegt man den Bruch $1:x^{2n}+1$ in Partialbrüche, so wird nach bekannter Methode:

$$\frac{1}{x^{2r}+1}=\frac{1}{r}\,S\,\frac{-\cos s\theta(x-\cos s\theta)+\sin^2 s\theta}{x^2-2x\cos s\theta+1}\,,$$

hierin bezieht sich das Summenzeichen auf s, und s erhält die r Werthe $1, 3, 5, \ldots 2r-1$; $\theta=\frac{\pi}{n}$. Multiplicirt man diese Gleichung mit $dx:x-1$, und integrirt, so folgt

$$\int \frac{1}{x^{2r}+1}\,\frac{dx}{x-1} = -\frac{1}{r} S \cos s\theta \int \frac{x-\cos s\theta}{x^2-2x\cos s\theta+1}\,\frac{dx}{x-1} + \frac{1}{r} S \sin^2 s\theta \int \frac{1}{x^2-2x\cos s\theta+1}\,\frac{dx}{x-1}. \tag{5}$$

Die zwei Functionen unter den Integralzeichen abermals in Partialbrüche zerlegt, geben nach kurzer Rechnung respective

$$\tfrac{1}{2}\frac{1}{x-1} - \tfrac{1}{2}\frac{x-\cos s\theta}{x^2-2x\cos s\theta+1} + \tfrac{1}{2}\frac{1+\cos s\theta}{x^2-2x\cos s\theta+1},$$

$$\frac{1}{2(1-\cos s\theta)}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2(1-\cos s\theta)}\frac{x-\cos s\theta}{x^2-2x\cos s\theta+1} - \tfrac{1}{2}\frac{1}{x^2-2x\cos s\theta+1},$$

also da

$$\int \frac{x-\cos\theta}{x^2-2x\cos s\theta+1}\,dx = \tfrac{1}{2}\lg(x^2-2x\cos s\theta+1)$$

$$\int \frac{1}{x^2-2x\cos s\theta+1}\,dx = \frac{1}{\sin s\theta}\,Arc.\operatorname{tg}\frac{x-\cos s\theta}{\sin s\theta}$$

$$\int \frac{x-\cos s\theta}{x^2-2x\cos s\theta+1}\,\frac{dx}{x-1} = \tfrac{1}{2}\lg(x-1) - \tfrac{1}{4}\lg(x^2-2x\cos s\theta+1) + \frac{1+\cos s\theta}{2\sin s\theta}\,Arc.\operatorname{tg}\frac{x-\cos s\theta}{\sin s\theta}, \tag{6}$$

$$\int \frac{1}{x^2-2x\cos s\theta+1}\,\frac{dx}{x-1} = \frac{1}{2(1-\cos s\theta)}\lg(x-1) - \frac{1}{4(1-\cos s\theta)}\lg(x^2-2x\cos s\theta+1) - \frac{1}{2\sin s\theta}\,Arc.\operatorname{tg}\frac{x-\cos s\theta}{\sin s\theta}. \tag{7}$$

Durch Substitution dieser Werthe in (5) und Vereinigung der gleichartigen Glieder zeigt sich:

$$\int \frac{1}{x^{2r}+1}\,\frac{dx}{x-1} = \frac{1}{r}\left\{\tfrac{1}{2} S \lg(x-1) - \tfrac{1}{4} S \lg(x^2-2x\cos s\theta+1) - \tfrac{1}{2} S \operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}s\theta.\,Arc.\operatorname{tg}\frac{x-\cos s\theta}{\sin s\theta}\right\} \tag{8}$$

denn es ist der Factor von $\lg(x-1)$

$$-\tfrac{1}{2}\cos s\theta+\frac{\sin^2 s\theta}{2(1-\cos s\theta)}=\tfrac{1}{2},$$

der Factor von $\lg(x^2-2x\cos s\theta+1)$

$$\tfrac{1}{4}\cos s\theta-\frac{\sin^2 s\theta}{4(1-\cos s\theta)}=-\tfrac{1}{2},$$

der Factor von Arcustangens

$$-\frac{(1+\cos s\theta)\cos s\theta}{2\sin s\theta}-\tfrac{1}{2}\sin s\theta=-\tfrac{1}{2}\operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}s\theta,$$

da aber nach dem Sinne des Summenzeichens, welches sich auf die r Werthe von s bezieht, nämlich $1, 3, 5, \ldots (2r-1)$ offenbar

$$S\lg(x-1)=r\lg(x-1),$$

$$S\lg(x^2-2x\cos s\theta+1)=x^{2r}+1,$$

so wird:

$$\int\frac{1}{x^{2r}+1}\,\frac{dx}{x-1} \tag{9}$$

$$=\tfrac{1}{2}\lg(x-1)-\frac{1}{4r}\lg(x^{2r}+1)-\frac{1}{2r}S\operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}s\theta\,.\,Arc.\operatorname{tg}\frac{x-\cos s\theta}{\sin s\theta}$$

und hiermit nach (4):

$$X_n=\frac{1}{2r}\lg(x^{2r}+1)+\frac{1}{r}S\operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}s\theta\,.\,Arc.\operatorname{tg}\frac{x-\cos s\theta}{\sin s\theta}+C. \tag{10}$$

Um die Constante zu bestimmen, setzen wir $x=0$, wodurch der erste Theil verschwindet, und da

$$Arc.\operatorname{tg}(-\operatorname{ctg}s\theta)=-Arc.\operatorname{tg}(\operatorname{ctg}s\theta)=-\left(\frac{\pi}{2}-s\theta\right),$$

so ist

$$C=\frac{1}{r}S\left(\frac{\pi}{2}-s\theta\right)\operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}s\theta, \tag{11}$$

so daß also die Constante im Allgemeinen als Function von r, respective von n erscheint.

§. 4.

Ist $n=2r-1$, so hat die Gleichung $x^n+1=0$ die reele Wurzel -1 und r Paare conjugirte imaginäre und die Zerlegung des Bruches $1:x^n+1$ in Partialbrüche gibt folgende Gleichung:

$$\frac{1}{x^n+1}=\frac{1}{n}\frac{1}{x+1}+\frac{2}{n}S\frac{-\cos s\theta\,(x-\cos s\theta)+\sin^2 s\theta}{x^2-2x\cos s\theta+1},$$

worin sich wieder wie früher das Summenzeichen auf s bezieht und $\theta=\frac{\pi}{n}$. Aber s erhält jetzt nur die $r-1$ Werthe

$$1,\ 3,\ 5,\ldots 2r-3=n-2.$$

Mit $dx:x-1$ multiplicirt und integrirt, erhält man nun:

$$\int\frac{1}{x^n-1}\frac{dx}{x-1}=\frac{1}{2n}\lg\frac{x-1}{x+1}-\frac{2}{n}S\cos s\theta\int\frac{x-\cos s\theta}{x^2-2x\cos s\theta+1}\frac{dx}{x-1}$$
$$+\frac{2}{n}S\sin^2 s\theta\int\frac{1}{x^2-2x\cos s\theta+1}\frac{dx}{x-1}.$$

Da die hier vorkommenden Integrale mit jenen in (5) übereinstimmen und der Unterschied nur in der Anzahl der Werthe von s besteht, so kann man hier unmittelbar die Formeln (6) und (7) anwenden und gelangt sofort zu folgender Gleichung:

$$\int\frac{1}{x^n+1}\frac{dx}{x-1}=\frac{1}{2n}\lg\frac{x-1}{x+1}+\frac{1}{n}S\lg(x-1)$$
$$-\frac{1}{2n}S\lg(x^2-2x\cos s\theta+1)$$
$$-\frac{1}{n}S\operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}s\theta\,.\,Arc.\operatorname{tg}\frac{x-\cos s\theta}{\sin s\theta}$$

und da nach der Bedeutung des Summenzeichens:

$$S\lg(x-1)=(r-1)\lg(x-1)$$
$$\lg(x+1)+S\lg(x^2-2x\cos s\theta+1)=\lg(x^n+1),$$

$$\int\frac{1}{x^n+1}\frac{dx}{x-1} \tag{12}$$
$$=\tfrac{1}{2}\lg(x-1)-\frac{1}{2n}\lg(x^n+1)-\frac{1}{n}S\operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}s\theta\,.\,Arc.\operatorname{tg}\frac{x-\cos s\theta}{\sin s\theta},$$

welcher Werth in (4) eingesetzt gibt:

$$(13)\qquad X_n = \frac{1}{n}\lg(x^n+1) + \frac{2}{n} S \operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}s\theta \,.\, Arc.\operatorname{tg}\frac{x - \cos s\theta}{\sin s\theta} + C.$$

Diese Formel, mit der entsprechenden (10) verglichen, unterscheidet sich von dieser nur darin, daß $n = 2r-1$ ist und s nur die $r-1$ Werthe $1, 3, 5, \ldots 2r-3$ erhält. Wird $x = 0$ gesetzt, so verschwindet der erste Theil und es folgt, mit derselben Bedingung für s:

$$(14)\qquad C = \frac{2}{n} S\left(\frac{\pi}{2} - s\theta\right).\operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}s\theta.$$

Mit den Formeln (10), (11), (13), (14) können alle Reihen von der Art (1) summirt werden. Wir gehen nun über zur Bestimmung der Summenformel für die Reihe (2) und benützen hierzu die Beziehung (3).

§. 5.

Ersetzt man in den Gleichungen (10), (11) r durch n, so ist auch statt $\theta = \frac{\pi}{n}$, $\frac{1}{2}\theta = \frac{\pi}{2n}$ zu setzen und man hat:

$$X_{2n} = \frac{1}{2n}\lg(x^{2n}+1) + \frac{1}{n} S \operatorname{ctg}\tfrac{1}{4}s\theta \,.\, Arc.\operatorname{tg}\frac{x - \cos\frac{1}{2}s\theta}{\sin\frac{1}{2}s\theta} + C$$

und für s sind jetzt alle ungeraden Zahlen zu setzen $1, 3, 5 \ldots 2n-1$, während wie früher $\theta = \frac{\pi}{n}$. Wird x mit $-x$ vertauscht, so wird mit denselben Bedingungen:

$$\overline{X}_{2n} = \frac{1}{2n}\lg(x^{2n}+1) - \frac{1}{n} S \operatorname{ctg}\tfrac{1}{4}s\theta \,.\, Arc.\operatorname{tg}\frac{x + \cos\frac{1}{2}s\theta}{\sin\frac{1}{2}s\theta} + C,$$

wobei die Constanten in beiden Gleichungen denselben Werth haben. Die Relation (3) gibt hiermit:

$$X'_n = \frac{1}{2n} S \operatorname{ctg}\tfrac{1}{4}s\theta \left\{Arc.\operatorname{tg}\frac{x + \cos\frac{1}{2}s\theta}{\sin\frac{1}{2}s\theta} + Arc.\operatorname{tg}\frac{x - \cos\frac{1}{2}s\theta}{\sin\frac{1}{2}s\theta}\right\}$$

$$(15)\qquad X'_n = \frac{1}{2n} S \operatorname{ctg}\tfrac{1}{4}s\theta \,.\, Arc.\operatorname{tg}\frac{2x\sin\frac{1}{2}s\theta}{1-x^2},$$

dieses ist die Summenformel für die Reihenart (2).

Wir lassen zur Erläuterung der allgemeinen Formeln einige Beispiele folgen.

§. 6.

Wenden wir uns zunächst zu den Gleichungen (10), (11), welche die Reihe (1) summiren, für $n=2r$.

Ist $n=2$, $r=1$, $\theta=\frac{\pi}{2}=90^\circ$, $s=1$, so finden sich $C=0$ und man hat:

$$\tfrac{1}{2}\lg(1+x^2)+Arc.\operatorname{tg} x \tag{16}$$
$$=x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^6}{6}-\ldots$$

und von der Richtigkeit dieser Gleichung kann man sich auch durch Entwicklung der zwei Glieder des ersten Theils überzeugen.

Setzt man hierin $x=1$, so wird:

$$\tfrac{1}{2}\lg 2+\tfrac{1}{4}\pi=1+\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{6}-\ldots \tag{17}$$

Ist $n=4$, $r=2$, $\theta=\frac{\pi}{4}=45^\circ$, $s=1, 3$, so wird

$$C=\frac{\pi}{8}\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{8}-\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{8}\right)=\frac{\pi}{4},$$

$$X_4=\tfrac{1}{4}\lg(1+x^4)+\tfrac{1}{2}\left\{\begin{array}{l}(\sqrt{2}+1)\,Arc.\operatorname{tg}(x\sqrt{2}-1)\\+(\sqrt{2}-1)\,Arc.\operatorname{tg}(x\sqrt{2}+1)\end{array}\right\}+\frac{\pi}{4},$$
$$=\tfrac{1}{4}\lg(1+x^4)+\tfrac{1}{2}\left\{\sqrt{2}\,Arc.\operatorname{tg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}-Arc.\operatorname{tg}\frac{1}{x^2}\right\}+\frac{\pi}{4},$$
$$=\tfrac{1}{4}\lg(1+x^4)+\tfrac{1}{2}\left\{\sqrt{2}\,Arc.\operatorname{tg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}+Arc.\operatorname{tg}(x^2)\right\},$$

man hat daher die Gleichung:

$$\tfrac{1}{4}\lg(1+x^4)+\tfrac{1}{2}Arc.\operatorname{tg}(x^2)+\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,Arc.\operatorname{tg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2} \tag{18}$$
$$=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}$$
$$-\frac{x^5}{5}-\frac{x^6}{6}-\frac{x^7}{7}-\frac{x^8}{8}$$
$$+\frac{x^9}{9}+\frac{x^{10}}{10}+\frac{x^{11}}{11}+\frac{x^{12}}{12}$$
$$-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

für $-x$ statt x verwandelt sich diese Gleichung in folgende;

$$(19)\quad \tfrac{1}{4}\lg(1+x^4)+\tfrac{1}{4}Arc.\mathrm{tg}(x^2)-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,Arc.\mathrm{tg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}$$

$$=-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}$$

$$+\frac{x^5}{5}-\frac{x^6}{6}+\frac{x^7}{7}-\frac{x^8}{8}$$

$$-\frac{x^9}{9}+\frac{x^{10}}{10}-\frac{x^{11}}{11}+\frac{x^{12}}{12}$$

$$+$$

während in der ersten Reihe auf drei Zeichenfolgen ein Zeichenwechsel folgt, folgt in der zweiten auf drei Zeichenwechsel eine Zeichenfolge. — Wird (19) von (18) abgezogen, so erhält man auch im Sinne der Beziehung (3):

$$(20)\quad \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,Arc.\mathrm{tg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}=x+\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}+\frac{x^{11}}{11}-\ldots,$$

setzt man hierin $x=1$, so ist:

$$(21)\qquad \frac{\pi}{4}\sqrt{2}=1+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{9}+\tfrac{1}{11}-\ldots$$

Bezeichnet s die Sehne eines Kreisquadranten vom Radius r, so ist $s=r\sqrt{2}$, die Länge des Quadranten aber ist $=\frac{1}{2}r\pi$, oder wenn man $r=\frac{1}{2}s\sqrt{2}$ einsetzt, so wird der Quadrant $=\frac{\pi}{4}\sqrt{2}.s$. Die Reihe (21) gibt also die Länge des Kreisquadranten, wenn man die Sehne desselben zur Einheit nimmt. Diese Reihe wurde zuerst von Newton mitgetheilt in einem Briefe an Collins (24. October 1676), aber ohne Beweis für ihre Summe. Euler kommt auf dieselbe in seiner Introd. in analys. inf. T. I, §. 179 auf andere Art ohne die allgemeine Form (20) aufzustellen.

§. 7.

Setzen wir jetzt $n=6$, $r=3$, $\theta=\frac{\pi}{6}=30°$, so wird $s=1,3,5$

$$\cos\theta=\tfrac{1}{2}\sqrt{3},\ \cos 3\theta=0,\ \cos 5\theta=-\tfrac{1}{2}\sqrt{3},\ \mathrm{ctg}\tfrac{1}{2}\theta=2+\sqrt{3},\ \mathrm{ctg}\frac{3\theta}{2}=1.$$

$$\sin\theta = \tfrac{1}{2},\ \sin 3\theta = 1,\ \sin 5\theta = \tfrac{1}{2},\ \operatorname{ctg}\frac{5\theta}{2} = 2 - \sqrt{3},$$

und hiermit nach einigen Reductionen:

$$C = \tfrac{1}{3}\left\{(2+\sqrt{3})\frac{\pi}{3} - (2-\sqrt{3})\frac{\pi}{3}\right\} = \frac{2\pi}{9}\sqrt{3}.$$

$$(22)\quad \frac{2\pi}{9}\sqrt{3} + \tfrac{1}{6}\lg(1+x^6) + \tfrac{1}{3}\,Arc.\operatorname{tg} x + \tfrac{2}{3}\,Arc.\operatorname{tg}\frac{x}{1-x^2}$$
$$+\frac{\sqrt{3}}{3}\left\{Arc.\operatorname{tg}(2x-\sqrt{3}) - Arc.\operatorname{tg}(2x+\sqrt{3})\right\}$$
$$= x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^6}{6}$$
$$- \frac{x^7}{7} - \frac{x^8}{8} - \frac{x^9}{9} - \frac{x^{10}}{10} - \frac{x^{11}}{11} - \frac{x^{12}}{12}$$
$$+ \frac{x^{13}}{13} + \frac{x^{14}}{14} + \frac{x^{15}}{15} + \frac{x^{16}}{16} + \frac{x^{17}}{17} + \frac{x^{18}}{18}$$
$$-$$

da nach bekannter Entwicklung:

$$\tfrac{1}{6}\lg(1+x^6) = \frac{x^6}{6} - \frac{x^{12}}{12} + \frac{x^{18}}{18} - \ldots,$$

so kann man hierin dieses Glied im ersten Theile, gegen die letzte Verticalreihe im zweiten Theile auslassen. Man erhält so z. B. für $x = 1$,

$$(23)\quad \left(\frac{5}{12} + \frac{\sqrt{3}}{9}\right)\pi = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5}$$
$$- \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{9} - \tfrac{1}{10} - \tfrac{1}{11}$$
$$+ \tfrac{1}{13} + \tfrac{1}{14} + \tfrac{1}{15} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{17}$$
$$- \ldots\ldots$$

Vertauschen wir in (22) x mit $-x$, so ergibt sich unmittelbar folgende Gleichung, in welcher die Reihenentwicklung auf je fünf Zeichenwechsel eine Zeichenfolge hat:

$$(24)\quad \frac{2\pi}{9}\sqrt{3}+\tfrac{1}{6}\lg(1+x^6)-\tfrac{1}{3}Arc.\mathrm{tg}\,x-\tfrac{2}{3}Arc.\mathrm{tg}\frac{x}{1-x^2}$$
$$+\frac{\sqrt{3}}{3}\left\{Arc.\mathrm{tg}(2x-\sqrt{3})-Arc.\mathrm{tg}(2x+\sqrt{3})\right\}$$
$$=-\,x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{5}+\frac{x^6}{6}$$
$$+\frac{x^7}{7}-\frac{x^8}{8}+\frac{x^9}{9}-\frac{x^{10}}{10}+\frac{x^{11}}{11}-\frac{x^{12}}{12}$$
$$-\frac{x^{13}}{13}+\frac{x^{14}}{14}-\frac{x^{15}}{15}+\frac{x^{16}}{16}-\frac{x^{17}}{17}+\frac{x^{18}}{18}$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

und wenn man (24) von (22) subtrahirt:

$$(25)\quad \tfrac{1}{3}Arc.\mathrm{tg}\,x+\tfrac{2}{3}Arc.\mathrm{tg}\frac{x}{1-x^2}$$
$$=x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}$$
$$-\frac{x^7}{7}-\frac{x^9}{9}-\frac{x^{11}}{11}$$
$$+\frac{x^{13}}{13}+\frac{x^{15}}{15}+\frac{x^{17}}{17}$$
$$-\ldots\ldots\ldots$$

werden hingegen die Gleichungen addirt, aber auch $\frac{1}{6}\lg(1+x^6)$ gegen die letzte Verticalreihe beiderseits weggelassen:

$$(26)\quad \sqrt{3}\left\{Arc.\mathrm{tg}(2x+\sqrt{3})-Arc.\mathrm{tg}(2x-\sqrt{3})\right\}$$
$$=\frac{2\pi}{9}\sqrt{3}-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}$$
$$+\frac{x^8}{8}+\frac{x^{10}}{10}$$
$$-\frac{x^{14}}{14}-\frac{x^{16}}{16}$$
$$+\frac{x^{20}}{20}+\frac{x^{22}}{22}$$
$$-\ldots\ldots$$

§. 8.

Wir wollen nun specielle Annahmen für die Gleichungen (13), (14) treffen, welche sich noch immer auf die Reihe (1) beziehen, aber für ungerade Werthe von n.

Für $n=3$, $r=2$, $\theta=\frac{\pi}{3}=60°$, $s=1$, wird $\cos\theta=\frac{1}{2}$.

$\sin\theta=\frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\theta=\sqrt{3}$ und hiermit $C=\frac{\pi}{9}\sqrt{3}$,

$$\frac{1}{3}\lg(1+x^3)+\frac{2\sqrt{3}}{3}Arc.\operatorname{tg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} \tag{27}$$
$$\begin{aligned}&= x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\\ &-\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{5}-\frac{x^6}{6}\\ &+\frac{x^7}{7}+\frac{x^8}{8}+\frac{x^9}{9}\\ &-\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

auch hier ist $\frac{1}{3}\lg(1+x^3)$ gleich der letzten Verticalreihe rechter Hand, kann also beiderseits ausgelassen werden. Man erhält hiedurch:

$$\frac{\pi}{9}\sqrt{3}+\frac{2\sqrt{3}}{3}Arc.\operatorname{tg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}=\begin{aligned}&x+\frac{x^2}{2}\\ &-\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{5}\\ &+\frac{x^7}{7}+\frac{x^8}{8}\\ &-\ldots\ldots\end{aligned} \tag{28}$$

$$\frac{\pi}{9}\sqrt{3}-\frac{2\sqrt{3}}{3}Arc.\operatorname{tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}=\begin{aligned}&-x+\frac{x^2}{2}\\ &-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}\\ &-\frac{x^7}{7}+\frac{x^8}{8}\\ &-\end{aligned} \tag{29}$$

die letztere Reihe durch Vertauschung von $-x$ mit x. Endlich für $x=1$ im Sinne der Convergenzbemerkung in §. 1:

$$\frac{2\pi}{9}\sqrt{3} = 1 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8} - \ldots\ldots \tag{30}$$

$$\frac{\pi}{9}\sqrt{3} = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{8} - \ldots\ldots, \tag{31}$$

zur letzteren Reihe (31) gelangt auch Euler in seiner Introd. in analys. inf. T. I, §. 176, aber auf anderem Wege.

Da der erste Theil in (30) das Doppelte des ersten Theiles in (31) ist, so gibt die Reihe (31) um die Hälfte jener (30) vermindert Null. Zieht man Glied um Glied ab und vereinigt das Gleichartige, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} 0 = {} & \tfrac{1}{2}\left\{1 - \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{11} + \tfrac{1}{13} - \tfrac{1}{17} + \ldots\right\} \\ & - \tfrac{2}{3}\left\{\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{10} + \tfrac{1}{14} - \tfrac{1}{16} + \ldots\right\}. \end{aligned} \tag{32}$$

Für $x=\frac{1}{2}$ gibt (28) noch folgende gut convergirende Reihe:

$$\frac{\pi}{9}\sqrt{3} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.2^2} - \frac{1}{4.2^4} - \frac{1}{5.2^5} + \frac{1}{7.2^7} + \frac{1}{8.2^8} - \ldots\ldots\ldots\ldots \tag{33}$$

§. 9.

Für die Reihe (2), welche durch die Formel (15) summirt wird, sei zunächst $n=1$, also $\theta=\pi$, $s=1$, $\cos\frac{1}{2}\theta=0$, $\sin\frac{1}{2}\theta=1$, $\operatorname{ctg}\frac{1}{4}\theta=1$, also

$$Arc.\mathrm{tg}\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \tag{34}$$

und dies ist die bekannte Entwicklung von Jacob Gregory.

Ist $n = 3$, $\theta = \frac{\pi}{3} = 60°$, $s = 1, 3, 5$, so wird $\cos \frac{1}{2}\theta = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\sin \frac{1}{2}\theta = \frac{1}{2}$, $\cos \frac{3}{2}\theta = 0$, $\sin \frac{3}{2}\theta = 1$, $\cos \frac{5}{2}\theta = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\sin \frac{5}{2}\theta = \frac{1}{2}$, $\mathrm{ctg}\, \frac{1}{4}\theta = 2 + \sqrt{3}$, $\mathrm{ctg}\, \frac{3}{4}\theta = 1$, $\mathrm{ctg}\, \frac{5}{4}\theta = 2 - \sqrt{3}$ und hiermit wird:

$$X_3' = \frac{1}{6}\left\{(2+\sqrt{3})\, Arc.\mathrm{tg} \frac{x}{1-x^2} + Arc.\ \mathrm{tg} \frac{2x}{1-x^2} + (2-\sqrt{3})\, Arc.\mathrm{tg} \frac{x}{1-x^2}\right\}$$

oder

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{3} Arc.\mathrm{tg} x + \tfrac{2}{3} Arc.\mathrm{tg} \frac{x}{1-x^2} & \\ = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} & \\ - \frac{x^7}{7} - \frac{x^9}{9} - \frac{x^{11}}{11} & \\ + \frac{x^{13}}{13} + \frac{x^{15}}{15} + \frac{x^{17}}{17} & \\ - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \end{aligned} \tag{35}$$

Zu diesem Ausdrucke gelangten wir auch in §. 7 (25) auf indirecte Art. Setzt man hierin $x = 1$, so erhält man folgende bemerkenswerthe Form für einen Bruchtheil der Ludolph'schen Zahl:

$$\begin{aligned} \frac{5}{12}\pi &= 1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} \\ &- \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{9} - \tfrac{1}{11} \\ &+ \tfrac{1}{13} + \tfrac{1}{15} + \tfrac{1}{17} \\ &- \ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{36}$$

und hiermit in Verbindung mit der Gleichung (23):

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{9}\sqrt{3} &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} \\ &- \tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{10} \\ &+ \tfrac{1}{14} + \tfrac{1}{16} \\ &- \ldots\ldots \end{aligned} \tag{37}$$

§. 10.

Der im §. 2 entwickelte Grundgedanke zur Summirung der unendlichen Reihen (1) und (2) ist auch dann noch anwendbar, wenn die Exponenten und Nenner von x irgend eine arithmetische Reihe der ersten Ordnung bilden:

$$\begin{array}{llll} a, & a+\partial, & a+2\partial, & \ldots . a+(\;n-1)\partial, \\ a+\;n\partial, & a+(\;n+1)\partial, & a+(\;n+2)\partial, & \ldots . a+(2n-1)\partial, \\ a+2n\partial, & a+(2n+1)\partial, & a+(2n+2)\partial, & \ldots . a+(3n-1)\partial, \end{array}$$

bezeichnen wir eine solche Reihe mit X_n, so kann der erste Differenzialquotient derselben immer auf die Form gebracht werden:

$$x^{a-1}.(1+x^{\partial}+x^{2\partial}+\ldots+x^{(n-1)\partial})(1-x^{n\partial}+x^{2n\partial}-\ldots)$$

und dieser Ausdruck ist für $x<1$ und ein positives ∂ immer gleich

$$x^{a-1}.\frac{x^{n\partial}-1}{x^{\partial}-1}\;\frac{1}{1+x^{r\partial}}$$

und in Folge dessen:

$$X_n=\int\frac{x^{n\partial}-1}{x^{n\partial}+1}\;\frac{x^{a-1}}{x^{\partial}-1}\,dx+C.$$

---

2. Über einige mit dem Laplace'schen verwandte bestimmte Integrale.

Wenn in

$$\frac{1}{1+u}=1-u+u^2-\ldots\pm u^{n-1}\mp\frac{u^u}{1+u}$$

$u=e^{-x^2}$ gesetzt wird und man multiplicirt mit $e^{-x^2}dx$, integrirt zwischen den Grenzen 0 und ∞, und zwar mit Anwendung der bekannten Laplace'schen Formel:

$$\int_0^{\infty}e^{-ax^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}},\;\;a>0,$$

so gelangt man zu folgender Gleichung:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{e^{x^2}+1} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\ldots\pm\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\mp\int_0^\infty \frac{1}{e^{x^2}+1}\,e^{-nx^2}.dx \qquad (1)$$

und zwar gelten die oberen Zeichen, wenn $n=2r+1$, die unteren, wenn $n=2r$ ist. Da e^{-nx^2} innerhalb der Integrationsgrenzen sein Zeichen nicht ändert und der Bruch vor diesem Factor für diese Grenzen $\frac{1}{2}$ zum Maximum und 0 zum Minimum hat, so liegt der Werth des Rest-Integrals nach einem bekannten Theorem immer zwischen den Grenzen

$$\frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{n}} \text{ und } 0;$$

für $n=\infty$ ist also der Werth desselben Null und es ist sicher

$$\int_0^\infty \frac{dx}{e^{x^2}+1} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\ldots\right). \qquad (2)$$

In verkehrter Auffassung wird durch diese Gleichung die bekannte convergente unendliche Reihe

$$1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\ldots$$

durch ein bestimmtes Integrale dargestellt.

Aus der Gleichung (1) lassen sich noch folgende bestimmte Integrale in endlicher Form darstellen:

$$\int_0^\infty \frac{1+e^{-(2r+1)x^2}}{e^{x^2}+1}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\ldots+\frac{1}{\sqrt{2r+1}}\right) \qquad (3)$$

$$\int_0^\infty \frac{1+e^{-2r.}}{e^{x^2}+1}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\ldots-\frac{1}{\sqrt{2r}}\right), \qquad (4)$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-2rx^2}-e^{-2sx^2}}{e^{x^2}+1}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2r}}-\frac{1}{\sqrt{2r+1}}+\ldots-\frac{1}{\sqrt{2s-1}}\right),\ s>r \qquad (5)$$

$$(6)\quad \int_0^\infty \frac{e^{-2rx^2}-e^{-2sx^2}}{e^{x^2}+1}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2r+1}}-\frac{1}{\sqrt{2r+2}}+\ldots-\frac{1}{\sqrt{2s}}\right),\ s>r.$$

Geht man aber von der Entwicklung

$$\frac{1}{1-u}=1+u+u^2+u^3\ldots+u^{n-1}+\frac{u^n}{1-u}$$

aus, so gelangt man bei ganz ähnlichem Vorgange zu folgender Integration:

$$(7)\quad \int_0^\infty \frac{1-e^{-nx^2}}{e^{x^2}-1}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

$$(8)\quad \int_0^\infty \frac{dx}{e^{x^2}-1}=\infty$$

$$(9)\quad \int_0^\infty \frac{e^{-mx^2}-e^{-nx^2}}{e^{x^2}-1}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{m+1}}+\frac{1}{\sqrt{m+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

$$n \gtreqless m+1.$$

Etwas allgemeiner und mit ähnlicher Ableitung wie die Gleichung (2) hat man noch für $a \gtreqless 1$:

$$(10)\quad \int_0^\infty \frac{dx}{e^{x^2}+a}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(1-\frac{a}{\sqrt{2}}+\frac{a^2}{\sqrt{3}}-\ldots\right),$$

$$(11)\quad \int_0^\infty \frac{dx}{e^{x^2}-a}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(1+\frac{a}{\sqrt{2}}+\frac{a^2}{\sqrt{3}}+\quad\right),$$

in umgekehrter Auffassung werden durch diese Formeln die Summen zweier bekannten convergenten Reihen durch bestimmte Integrale dargestellt.

3. Über die Grenze des Ausdruckes

$$\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\ldots+\frac{1}{2m} \text{ für } m=\infty.$$

Bei der Untersuchung der harmonischen Reihe in Bezug auf Convergenz und Divergenz wird nach Cauchy meist der obige Ausdruck zu Rathe gezogen und es ist oft bemerkt worden, daß der Werth desselben immer zwischen 1 und $\frac{1}{2}$ enthalten ist. Im Folgenden soll die Grenze bestimmt werden, welcher sich diese Summe für ein unendlich zunehmendes m ohne Ende nähert.

Ist $n < m$, so gibt die Gleichung:

$$\frac{1}{m+n}=\frac{1}{m}\left\{1-\left(\frac{n}{m}\right)+\left(\frac{n}{m}\right)^2-\left(\frac{n}{m}\right)^3+\ldots\right\},$$

setzen wir daher

$$\overset{m}{\underset{1}{S}}\frac{1}{m+n}=\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\ldots+\frac{1}{2m},$$

so wird auch

$$\overset{m}{\underset{1}{S}}\frac{1}{m+n}=\frac{1}{m}\left\{m-S\left(\frac{n}{m}\right)+S\left(\frac{n}{m}\right)^2-S\left(\frac{n}{m}\right)^3+\ldots\right\}$$

$$=1-\frac{1}{m^2}Sn+\frac{1}{m^3}Sn^2-\frac{1}{m^4}Sn^3+\ldots$$

und für $m=\infty$

$$\text{Lim.}\overset{m}{\underset{1}{S}}\frac{1}{m+n}=1-\text{Lim.}\frac{1}{m^2}Sn+\text{Lim.}\frac{1}{m^3}Sn^2-\text{Lim.}\frac{1}{m^4}Sn^3+\ldots.$$

Nun ist bekanntlich, wenn B_1, B_3,.. die Bernoulli'schen Zahlen bedeuten:

$$\overset{m}{\underset{1}{S}}n^k=\frac{m^{k+1}}{k+1}+\tfrac{1}{2}m^k+\tfrac{1}{2}\binom{k}{1}B_1m^{k-1}-\tfrac{1}{4}\binom{k}{3}B_3m^{k-2}+\ldots$$

also

$$\text{Lim.}\frac{1}{m^{k+1}}\overset{m}{\underset{1}{S}}n^k=\frac{1}{k+1},$$

setzt man hierin $k = 1, 2, 3, \ldots$ und substituirt, so folgt:

$$\text{Lim.} \overset{m}{\underset{1}{S}} \frac{1}{m+n} = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \ldots = \lg 2$$

$$\text{Lim.} \left(\frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \ldots + \frac{1}{2m} \right) = \lg 2,$$

wobei lg den natürlichen Logarithmus bezeichnet.

Von der Richtigkeit dieser Gleichung kann man sich auch noch auf folgende Art überzeugen. Bezeichnen wir unseren Ausdruck mit μ, und setzen

$$s_m = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{m},$$

so ist bekanntlich die Constante des Integrallogarithmus

$$\text{Lim.} (s_m - \lg m) = 0 \cdot 5772 \ldots$$

und

$$s_{2m} = s_m + \mu,$$

setzen wir in dieser Limite $2m$ an die Stelle von m und wenden die zweite Gleichung an, so zeigt sich

$$\text{Lim.} (s_m + \mu - \lg 2 - \lg m) = 0 \cdot 5772,$$

$$\text{Lim.} (\mu - \lg 2) = 0,$$

$$\text{Lim.} \ \mu = \lg 2.$$

Aus dieser Limite lassen sich nun noch andere ableiten, so ist z. B.

$$\text{Lim.} \left(\frac{1}{m + \frac{1}{2}} + \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m + \frac{3}{2}} + \ldots + \frac{1}{m + m \cdot \frac{1}{2}} \right) = \lg 4,$$

$$\text{Lim.} \left(\frac{1}{m + \frac{1}{3}} + \frac{1}{m + \frac{2}{3}} + \frac{1}{m + \frac{3}{3}} + \ldots + \frac{1}{m + 3m \cdot \frac{1}{3}} \right) = \lg 8.$$

4. Beweis der Divergenz der unendlichen Reihe

$$\frac{1}{s_1}+\frac{1}{2s_2}+\frac{1}{3s_3}+\ldots,\ \text{wenn}\ s_n=1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$$

Kurz nachdem Olivier im 2. Bande des Crelle-Journals sein trügliches Criterium für die Convergenz der unendlichen Reihen entwickelte, hat Abel eben daselbst Bd. 3, p. 82 sich mit der obigen Reihe beschäftiget und ihre Divergenz nachgewiesen. Neuerlich wurde diese Reihe wieder von Schlömilch citirt im zehnten Jahrgang seiner Zeitschrift p. 355. Im Folgenden gebe ich einen Beweis ihrer Divergenz, welcher sich durch seine Einfachheit empfehlen dürfte.

Nach einem bekannten Satze von Cauchy sind folgende zwei Reihen gleichzeitig convergent und divergent:

$$u_0,\quad u_1,\quad u_2,\quad u_3,\quad u_4,\ldots,$$
$$u_0,\ 2u_1,\ 4u_3,\ 8u_7,\ 16u_{15},\ldots,$$

mithin auch die folgenden

$$\frac{1}{s_1},\ \frac{1}{2s_2},\ \frac{1}{3s_3},\ \frac{1}{4s_4},\ \frac{1}{5s_5},\ldots$$
$$\frac{1}{s_1},\ \frac{1}{s_2},\ \frac{1}{s_4},\ \frac{1}{s_8},\ \frac{1}{s_{16}},\ldots,$$

so daß es hinreicht die letztere Reihe in Bezug auf Convergenz zu prüfen, um über die erstere zu entscheiden.

Es ist

$$s_{2m}=s_m+\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\ldots+\frac{1}{2m}$$

und da immer

$$\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\ldots+\frac{1}{2m}<1,$$

so ist $s_{2m}<s_m+1$ und man hat in successiver Anwendung dieser Relation:

$$\begin{array}{lll}
s_1 = 1 & s_1 = 1 & \text{also } \frac{1}{s_1} = 1 \\
s_2 = \frac{3}{2} & s_2 = \frac{3}{2} & \frac{1}{s_2} = \frac{2}{3} \\
s_4 < s_2 + 1 & s_4 < \frac{5}{2} & \frac{1}{s_4} > \frac{2}{5} \\
s_8 < s_4 + 1 & s_8 < \frac{7}{2} & \frac{1}{s_8} > \frac{2}{7} \\
s_{16} < s_8 + 1 & s_{16} < \frac{9}{2} & \frac{1}{s_{16}} > \frac{2}{9}
\end{array}$$

und durch Summation;

$$\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} + \frac{1}{s_4} + \ldots > 2(1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} + \ldots) - 1,$$

da nun die Reihe rechts divergirt, so divergirt um so mehr die Reihe links, mithin auch die vorgelegte Reihe.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1867

Band/Volume: 55_2

Autor(en)/Author(s): Unferdinger Franz

Artikel/Article: 1. Die Summe der Logarithmus- und Arcustangens-Reihe mit alternirenden Zeichengruppen. 75-96