Construction der Selbstschattengrenze von Rotationsflächen in der Perspective, unter Voraussetzung paralleler Lichtstrahlen.

Von **Emil Koutny,**
Assistent am k. k. technischen Institute in Brünn.

(Mit 2 Tafeln.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 10. Jänner 1867.)

Einleitung.

§. 1.

Die Lösung der gestellten Aufgabe besteht bekanntlich in der Bestimmung der Berührungscurve der gegebenen Umdrehungsfläche mit einem Cylinder, welcher zu der gegebenen Strahlenrichtung parallele Erzeugende besitzt und tangirend an die Fläche gelegt wurde. Die Durchführung der hiezu nöthigen Constructionen gestaltet sich auch bei perspectivischen Darstellungen nicht viel umständlicher als in der orthogonalen Projection, und man wird, abgesehen von dem wissenschaftlichen Werthe der Arbeit, jedenfalls weit schneller und einfacher zum Ziele gelangen, wenn man sich strenge auf die Grundsätze der Central-Projection fußt, als wenn, wie dies so häufig geschieht, die Berührungscurve vorerst in orthogonaler Projection bestimmt und hierauf punktweise (Durchschnittsmethode) in die Perspective übertragen wird.

Ist der Meridian der Fläche eine Curve, die einem bekannten Erzeugungsgesetze unterliegt, so werden auch die aus diesem Gesetze folgenden Eigenschaften der Fläche, und jene der zumeist in Vorhinein ihrer Gattung nach bestimmbaren Berührungscurve die Lösung der Aufgabe wesentlich modificiren und erleichtern, wie dies insbesondere bei den Rotationsflächen des zweiten Grades der Fall ist, be welchen die Berührungscurve gleichfalls eine Linie des zweiten Grades ist, demnach auch die Perspective der letzteren eine Kegelschnittslinie werden muß.

Bei den Rotationsflächen des zweiten Grades wird es daher gerathen erscheinen, die Bestimmungsstücke dieser Perspective, d. h.

zwei conjugirte Durchmesser, oder eine Axe und die Asymptoten derselben, aufzusuchen, was auch im Folgenden stets geschehen wird. Außerdem soll jedoch die punktweise Bestimmung der Curve, wenn sich das betreffende dieser Fläche zukommende Constructionsverfahren besonders einfach gestaltet, angegeben werden.

Wurde die Meridiancurve beliebig gewählt, so muß für die Verzeichnung der Berührungscurve ein allgemeines Verfahren in Anwendung gebracht werden, welches somit auch für die obbezeichneten Flächen seine volle Giltigkeit hat.

Was die Größe der Augdistanz betrifft, so wurde dieselbe verhältnißmäßig gering angenommen, um die einzelnen Constructionen in der Figur möglichst ersichtlich zu machen. Die Constructionen selbst wurden jedoch stets mit Benützung aliquoter Theile der Augdistanz durchgeführt, daher die einzelnen Methoden, betreffs ihrer praktischen Anwendung, von dem so häufig vorkommenden Umstande, daß dem perspectivischen Bilde eine nicht leicht in ihrer ganzen Länge zu benützen mögliche Augdistanz zu Grunde liegt, weniger oder eigentlich gar nicht beeinträchtigt erscheinen.

Nachdem die Entfernung der Verschwindungspunkte verschiedener Geraden vom Augpunkte unter sonst gleichen Bedingungen von der Größe der Augdistanz abhängt, so wird aus demselben Grunde wie oben die Benützung und Bestimmung von aliquoten Theilen der in Rede stehenden Entfernungen nothwendig, und wir werden den Endpunkt eines solchen Theiles der Entfernung (und zwar des ersten vom Augenpunkte A aus gemessen) in Form eines Bruches $\frac{v}{n}$ derart bezeichnen, daß der Buchstabe v des betreffenden Fluchtpunktes den Zähler, und die Zahl n, welche anzeigt, den wie vielten Theil der Länge Av dieser Punkt $\frac{v}{n}$ abschneidet, den Nenner bildet, mithin $A\frac{v}{n} = \frac{1}{n} \,.\, Av$ ist.

Die Axen der Umdrehungsflächen seien stets vertical angenommen; doch ändern sich die angegebenen Constructionen nicht, wenn die Fläche eine schiefe, jedoch zur Bildfläche parallele Drehungsaxe besitzt. In dem Falle, wo die Axe senkrecht auf der Bildfläche steht, ergeben sich auch einige wesentliche, aus dieser Lage entspringende Modificationen der Lösungsarten. Wir werden einen solchen Fall am Schlusse der Abhandlung einer näheren Betrachtung unterziehen.

Bei Annahme einer zur Bildfläche parallelen Rotationsaxe, denken wir uns diese stets in der Bildfläche gelegen, so daß die Umdrehungsfläche zur Hälfte vor und hinter der Bildebene liegt, und von letzterer im Hauptmeridiane geschnitten wird. Dies kann bekanntlich immer ohne Anstand geschehen, wenn man nur die Perspective des zur Bildebene parallelen Meridians der Fläche im Raume als Meridiancurve und die Perspective der Drehungsaxe als Axe einer neuen, der gegebenen Fläche ähnlichen Rotationsfläche betrachtet, und auf diese die sämmtlichen vorkommenden Linien, Ebenen, Kegel- und Cylinderflächen etc. bezieht.

Die parallelen Lichtstrahlen werden durch ihren gemeinschaftlichen Verschwindungspunkt, den wir immer mit V bezeichnen, jedoch durch einen aliquoten Theil $A\frac{V}{n} = \frac{1}{n} . AV$ seiner Entfernung vom Augpunkte A fixiren wollen, bestimmt. Der Verschwindungspunkt v der horizontalen Projectionen der Lichtstrahlen wird mithin im Durchschnitte des aus V auf die Horizontslinie HH gefällten Perpendikels Vv mit letzterer erhalten, und gleichfalls durch $\frac{v}{n}$ (in HH vertical über $\frac{V}{n}$) so bestimmt werden, daß $A\frac{v}{n} = \frac{1}{n}\ Av$ ist.

Die Verzeichnung der den Selbstschatten bildenden Erzeugenden eines Rotationskegels und Cylinders soll gleich bei der in §. 2 gegebenen allgemeinen Lösungsweise, wo dieselbe zur Anwendung gelangt, gegeben werden.

Wir wollen nun die allgemeinen Methoden für die Verzeichnung der Selbstschattengrenzcurve einer eingehenden Behandlung unterziehen, und hierauf zu den Rotationsflächen der zweiten Ordnung übergehen.

Allgemeine Lösungsweisen.

§. 2. Bestimmung der Selbstschattengrenze mit Benützung von berührenden Kegeln.

Denkt man sich in irgend einem Punkte des Hauptmeridians an diesen eine Tangente gezogen und mit dem Hauptmeridiane gedreht, so beschreibt sie einen senkrechten Kegel, welcher die Umdrehungsfläche in einem, dem angenommenen Punkte entsprechenden Parallelkreise berührt, und dessen Selbstschattengrenzen, im Durchschnitte mit diesem Parallelkreise, Punkte der zu suchenden Berührungscurve liefern. Auf diese Weise kann eine beliebige Anzahl von Punkten der Selbstschattengrenze gefunden werden.

Es sei *HH*, Fig. 1, Taf. II, die Horizontslinie, *A* der Augpunkt, *VV* die Verticallinie des Bildes, $A\frac{O}{3}$ der dritte Theil der Augdistanz, $V\left(\text{durch } \frac{V}{3} \text{ gegeben}\right)$ der Verschwindungspunkt der Lichtstrahlen; ferner *YZ* die (in der Bildfläche gelegene) Drehungsaxe, *abce*.. der Hauptmeridian der Fläche, (welcher sich blos zu einer Seite der Axe vollständig verzeichnet vorfindet), und $a'b'c'e'f'\ldots.x'$ der perspectivische Umriß der Fläche.

Nehmen wir nun irgend einen Parallelkreis aa_1 als Leitlinie eines die Rotationsfläche daselbst berührenden Kegels an, so wird die dem Punkte *a* zugehörige Erzeugende *at* den Hauptmeridian in *a* berühren, und im Durchschnitte *t* mit *YZ* die Kegelspitze bestimmen. Um die in dem angenommenen Parallelkreise gelegenen Punkte der Selbstschattengrenze zu erhalten, haben wir, dem Vorigen zufolge, an den Kegel parallel zur Strahlenrichtung *V* die berührenden Ebenen zu legen, also durch *t* einen Lichtstrahl zu führen, den Durchschnitt desselben mit der Parallelkreisebene zu suchen, und von diesem Punkte aus die beiden Tangenten an den Parallelkreis zu ziehen; die so erhaltenen Berührungspunkte werden, da sie gleichzeitig in der Kegel- und Umdrehungsfläche liegen, auch der zu suchenden Selbstschattengrenze angehören.

Behufs der einfachen Durchführung des eben Gesagten ist es am zweckmäßigsten derart vorzugehen, daß man sich die Ebene des Parallelkreises sammt diesem und dem Durchschnittspunkte des durch *t* geführten Lichtstrahls um aa_1 in die Bildfläche dreht, daselbst die Tangenten zieht, und die Berührungspunkte in die horizontale Lage zurückversetzt. Wir denken uns zu diesem Zwecke durch den Lichtstrahl und die Axe *YZ* eine Ebene gelegt. Dieselbe wird die Parallelkreisebene in einer Geraden schneiden, welche den Durchschnittspunkt in sich enthält und nichts anders als die horizontale Projection des Lichtstrahls auf der Parallelkreisebene ist, und welche Gerade, in die Bildfläche gedreht, nach $o\Delta$ gelangt. Die Richtung von $o\Delta$ wird offenbar durch den dem Punkte *v* entsprechenden, um *HH* in die Bildfläche gelegten Sehstrahl, also durch $\frac{v}{3}\frac{O}{3}$ angegeben.

Da es sich ferner um die Entfernung des besagten Durchschnittspunktes von der Drehungsaxe YZ handelt, so drehen wir die obige Ebene tV um YZ in die Bildebene. Die Richtung des so gedrehten Lichtstrahls kann wieder am einfachsten durch eine gleiche Drehung der den Punkt V mit dem Auge verbindenden Geraden gefunden werden. Überträgt man die Länge $\frac{O}{3}\frac{v}{3}$ nach $\frac{v}{3}W$ und verbindet W mit $\frac{V}{3}$. so gibt $W\frac{V}{3}$ die fragliche Richtung. Man hat demgemäß blos durch t die Gerade td parallel zu $\frac{V}{3}W$ zu ziehen, und die Länge do, als die zu suchende Entfernung, nach $o\Delta$ zu übertragen, um in Δ den umgelegten Durchschnitt zu erhalten.

Der umgelegte Parallelkreis ist selbstverständlich aus o über dem Durchmesser aa_1 zu beschreiben.

Werden schließlich aus Δ an den Kreis aa_1 die beiden Tangenten gezogen, die Berührungspunkte α, β in die horizontale Lage zurückversetzt, und dortselbst deren Perspectiven 1 und I bestimmt, so gehören diese Punkte der Selbstschattengrenze an.

Für einen oder mehrere Parallelkreise übergeht der berührende Kegel in einen senkrechten Cylinder. Diese Parallelkreise gehen bekanntlich durch Punkte der Meridiancurve, welchen zu YZ parallele Tangenten zukommen. Ist also mm_1 der Durchmesser eines solchen Parallelkreises, so wird für diesen die Entfernung $o\Delta$ unendlich groß, weßhalb man blos an den umgelegten Kreis mm_1 die beiden zu $\frac{v}{3}\frac{O}{3}$ parallelen Tangenten zu ziehen und die Berührungspunkte α_1 und β_1 in die Horizontalebene zurückzuführen hat, um die in dieser Ebene gelegenen Punkte 2 und II der Grenzcurve zu erhalten.

Berücksichtigt man, daß es sich nicht um die aus den umgelegten Durchschnittspunkten Δ an die bezüglichen Parallelkreise gezogenen Tangenten, sondern bloß um die Berührungspunkte handelt, so ist klar, daß diese einfacher gefunden werden können, wenn man anstatt dem Punkte Δ alsogleich den Halbirungspunkt der Länge $o\Delta$ sucht, und aus diesem, als Mittelpunkt mit dem Radius $o\frac{d}{2}$ einen Kreisbogen beschreibt, welcher den Parallelkreis in den fraglichen Punkten α und β betrifft.

Nehmen wir diesfalls z. B. den Parallelkreis bb_1, und führen in b die Tangente an den Hauptmeridian, wodurch in t_1 die Spitze des bezüglichen Berührungskegels sich ergibt. Betreffs der Auffindung der bezeichneten halben Entfernung braucht man blos durch t_1 eine Gerade $t_1\delta$ parallel zu jener Linie $M\frac{V}{3}$ zu führen, welche den Halbirungspunkt M der Länge $\frac{v}{3}W$ mit $\frac{V}{3}$ verbindet. Diese Gerade trifft die Trace bb_1 in δ und schneidet auf derselben das Stück $o_2\delta$ ab, welches nach $o_2\omega$ übertragen, den obigen Halbirungspunkt ω und zugleich den Radius des aus ω zu beschreibenden Bogens $\alpha_2 o_2 \beta_2$ liefert. Die Punkte α_2 und β_2 des umgelegten Parallelkreises $b\alpha_2 b_1 \beta_2$, in die Horizontalebene zurückgeführt, geben in 3 und III weitere zwei Punkte der Curve.

Fällt für einen Parallelkreis cc_1 die Spitze des zugehörigen berührenden Kegels außer die Zeichnungsfläche, so kann ein beliebiger aliquoter Theil $o_3\gamma$ des Halbmessers co_3 (hier $o_3\gamma = \frac{1}{2}o_3c$) derart gewählt werden, daß die im Theilpunkte γ parallel zur Tangente $c\sigma$ im Punkte c des Hauptmeridians gezogene Gerade $\gamma t_2'$ die Drehungsaxe noch auf der Papierfläche schneidet. Werden nun an den durch Rotation der Geraden $\gamma t_2'$ um YZ entstandenen Kegel parallel zur Strahlenrichtung V die Tangirungsebenen gelegt, und in der umgelegten Trace $\gamma\alpha_3'\beta_3'$ die Fußpunkte α_3', β_3' der Berührungserzeugenden auf dieselbe Weise wie früher bestimmt, indem man nämlich durch t_2' eine Parallele $t_2'\delta_1'$ zu $\frac{V}{3}M$ zieht, $o_3\omega_1' = o_3\delta_1'$ macht, und aus ω_1' den Kreisbogen $\alpha_3' o_3 \beta_3'$ beschreibt, so hat man bloß α_3' und β_3' mit o_3 zu verbinden, und diese Geraden bis zum Durchschnitte α_3, β_3 mit dem umgelegten Parallelkreise o_3c zu verlängern, um in α_3 und β_3 die in die Bildfläche gedrehten Punkte der Schattengrenzcurve zu erhalten.

Für die Verzeichnung der Perspectiven 4 und IV dieser Punkte (nachdem sie in die Horizontalebene zurückgedreht wurden) ist es jedoch zweckmäßiger aus α_3' und β_3' die Perpendikel auf die Parallelkreistrace cc_1 zu führen, und die Länge $o_3\alpha_3''$ dem Verhältnisse der Radien o_3c und $o_3\gamma$ entsprechend zu vergrößern, hier also $o_3\alpha''' = 2 . o_3\alpha_3''$ zu machen, wodurch in α''' die orthogonale Projection des Punktes α_3 im Raume auf der Bildfläche gefunden ist. Die Länge $\alpha_3'\alpha_3''$ gibt zugleich den entsprechenden aliquoten Theil der Entfernung dieses Punktes von der Bildebene, welches Stück, da man zur Verzeichnung der Perspective des Punktes ohnedies zumeist nur einen aliquoten Theil der Augdistanz benützen kann, und hiezu auch denselben Theil der Entfernung $\alpha_3\alpha'''$ benöthigt, nicht erst durch Theilen dieser Länge ermittelt zu werden braucht.

Über die Anwendung von berührenden Kegeln wäre noch der Fall in Betracht zu ziehen, wo die Kegelspitze mit dem Auge zusammenfällt. Es ist sodann offenbar der sichtbare Umriß $ab'c'e'$ zugleich die Bildflächtrace dieses Kegels, und die aus der Spitze parallel zu den Lichtstrahlen geführte Gerade schneidet die Bildfläche im Verschwindungspunkte V der Lichtstrahlen. Werden daher aus V die möglichen Tangenten an die Contour der Fläche gezogen, so berühren sie in Punkten der Schattengrenzcurve und bilden zugleich Tangenten derselben. Diese Punkte sind schon aus dem Grunde von besonderer Wichtigkeit weil sie die Grenze des sichtbaren Theiles der Curve bilden.

Wenn jedoch, wie dies häufig geschieht, V außer die Zeichnungsgrenze fällt, so dürfte es doch am gerathensten erscheinen, sich in irgend einer Weise die Zeichnungsfläche zu verlängern und aus dem Punkte V selbst die Tangenten zu ziehen, wiewohl der verlangte Punkt VI sich auch mit Zuhilfenahme des Punktes $\frac{V}{3}$ durch Verzeichnung einer fehlerzeugenden Curve ohne viele Mühe auffinden läßt.

Ist nämlich (Taf. I, Fig. 2) $a'm'x'$ die Contour, A der Augpunkt und $\frac{V}{3}A = \frac{1}{3}AV$, so ziehe man in einem beliebigen Punkte b' an den Umriß eine Tangente $b't$, und durch $\frac{V}{3}$ eine Gerade $\frac{V}{3}b$ parallel zu $b't$ bis zum Durchschnitte b mit der Verbindungslinie der Punkte b' und A. Es müßte nun, wenn die Tangente $b't$ durch V gienge, $Ab = \frac{1}{3}Ab'$ sein, wie dies aus den ähnlichen Dreiecken $Ab\frac{V}{3}$ und $Ab'V$ folgt. Das Stück bA von A dreimal nach $A1$ aufgetragen, gibt also einen Punkt 1, welcher um so näher dem Punkte b gelegen ist, je näher dieser dem zu suchenden Berührungspunkte VI der aus V an $a'm'x'$ zu ziehenden Tangente gewählt wurde.

Nimmt man mehrere Punkte c', d',... der Curve $a'm'x'$ an und verfährt in gleicher Weise wie mit b', so erhält man eine Reihe von auf einander folgenden Punkten 1, 2, 3..., die zu beiden Seiten des Umrisses liegen, und einer Curve angehören, welche die Contour $a'm'x'$ in dem zu suchenden Punkte schneidet. Diese Curve geht offenbar durch den Punkt A.

Daß man bei der Wahl der Punkte b', c', d' vorzugsweise jene berücksichtigen wird, welche bei der Construction der Contour aufgefunden wurden, da die Tangenten $b't$. in diesen Punkten größtentheils gleichfalls bekannt sind, oder sich sehr einfach und genau bestimmen lassen, braucht wohl kaum weiter erörtert zu werden.

Schließlich wird die Tangente in VI erhalten, wenn man die Verbindungslinie VI A in 6 in drei gleiche Theile theilt, 6 mit $\frac{V}{3}$ verbindet, und VI T parallel zu $6\frac{V}{3}$ zieht.

§. 3. Verzeichnung der Selbstschattengrenze mit Hilfe von berührenden Cylinderflächen.

Dieses Verfahren ist im Allgemeinen nicht so einfach als das eben besprochene, und eignet sich auch weniger für den praktischen Gebrauch, gibt jedoch für einzelne Punkte der Curve eine besonders einfache Lösung.

Denkt man sich in sämmtlichen Punkten irgend eines Meridians der Umdrehungsfläche die berührenden Ebenen gelegt, so werden diese von einer auf der angenommenen Meridianebene senkrechten Cylinderfläche umhüllt, welche, der Annahme zufolge, die Rotationsfläche in der gewählten Meridianebene berührt. Die an diesen Cylinder parallel zur Strahlenrichtung gelegten Berührungsebenen werden, je nach der Form der Meridiancurve, eine oder mehrere Erzeugende desselben in sich enthalten, welch' letztere, im Durchschnitt mit der angenommenen Meridiancurve, Punkte der zu suchenden Schattengrenze bestimmen.

Behufs der Construction wird der besagte Meridian um die Drehungsaxe in die Hauptmeridianebene gedreht, daselbst die Richtung der gedrehten Tracen der Berührungsebenen auf der Meridianebene bestimmt, die Tangenten an den Hauptmeridian gezogen, und die Berührungspunkte in die ursprüngliche Lage zurückgeführt.

Zur Durchführung des eben Gesagten wählen wir gleich eine spezielle Lage der Meridianebene Fig. 1, indem wir uns die Aufgabe stellen, jene Punkte V der Schattengrenze zu bestimmen, deren Perspectiven in der Drehungsaxe YZ liegen. Für diese Punkte muß YZ zugleich als Bildflächtrace und Fluchtlinie der Meridianebene betrachtet werden.

Man wird vor Allem in der Horizontslinie HH den Verschwindungspunkt v_1 der Cylindererzeugenden, welche senkrecht auf dieser Ebene stehen, zu bestimmen haben, was bekanntlich in der Weise geschieht, daß man den in der Verticallinie VV liegenden Distanzpunkt O mit o_3 verbindet und in O auf diese Gerade Oo_3 eine Senkrechte errichtet, welche die Horizontslinie in v_1 schneidet. Dieser Punkt fällt jedoch zumeist weit außer die Zeichnungsgrenze, und es ist zur Bestimmung eines aliquoten Theiles seiner Entfernung Av_1 vom Augpunkte zweckmäßig, einen aliquoten Theil der Augdistanz, z. B. $A\frac{O}{4} = \frac{1}{4}AO = \frac{1}{4}D$ in der Verticallinie so anzunehmen, daß die Horizontslinie von der im Punkte $\frac{O}{4}$ auf die Verbindungslinie $\frac{O}{4}o_3$ errichteten Senkrechten $\frac{O}{4}\frac{v_1}{16}$ noch innerhalb der Zeichnungsfläche getroffen wird.

Wie aus der Ähnlichkeit der rechtwinkligen Dreiecke o_3OA und AOv_1 folgt, ist die Länge

$$Av_1 = \frac{\overline{AO}^2}{Ao_3},$$

daher auch

$$A\frac{v_1}{16} = \frac{\overline{A\frac{O}{4}}^2}{Ao_3} = \frac{(\frac{1}{4}AO)^2}{Ao_3} = \frac{1}{16}\;\frac{\overline{AO}^2}{Ao_3} = \frac{1}{16}\cdot Av_1.$$

Es erscheint somit der Punkt v_1 durch $\frac{v_1}{16}$ fixirt, weßhalb auch der 16[te] Theil von AV, d. i. $A\frac{V}{16}$ gesucht werden muß; denn es gibt offenbar die Verbindungslinie der Punkte V und v_1 die Verschwindungslinie der zur Strahlenrichtung parallelen Berührungsebenen des Cylinders, daher im Durchschnitte v_2 (außer der Zeichnungsfläche) mit der Verschwindungslinie YZ der gewählten Meridianebene, den Verschwindungspunkt der Tracen der Berührungsebenen auf der Meridianebene. Der 16[te] Theil der Entfernung Av_2 wird in $A\varphi$ gefunden, indem man $A\varepsilon = \frac{1}{16}\cdot Ao_3$ und $\varepsilon\varphi \perp HH$ macht, und die letztgezogene Gerade mit der Verbindungslinie $\frac{V}{16}\frac{v_1}{16}$ in φ zum Durchschnitt bringt.

Weil die Meridianebene um YZ in die Bildfläche zu drehen ist, wird es sich weiters um die Lage der gedrehten Tracen (v_2) handeln, deren Richtung durch Drehung des dem Punkte v_2 zukommenden Sehstrahls, oder mit Hilfe des Punktes φ leicht gefunden werden kann. Zu diesem Zwecke hat man nämlich ein rechtwinkliges Dreieck zu verzeichnen, dessen eine Kathete $A\varepsilon$ ist, und dessen andere Kathete $\frac{1}{16}$ der Augdistanz beträgt, und die Hypothenuse desselben von ε nach $\varepsilon\pi$ aufzutragen. Die Gerade $\pi\varphi$ liefert sodann die Richtung der gedrehten Tracen Ts, welche tangentiell an den Hauptmeridian zu ziehen sind.

Von der Beschaffenheit der Meridiancurve wird es abhängen, wie viele Tangenten parallel zu $\pi\varphi$ an dieselbe geführt werden können, wie viele Punkte in der angenommenen Meridiancurve also resultiren. Ob die so gefundenen Punkte nach Zurückführung in die ursprüngliche Lage vor oder hinter die Blidfläche zu liegen kommen, erkennt man aus der Lage der Punkte s gegen die Drehungsaxe YZ, je nachdem dieselben nämlich auf derselben oder auf der entgegengesetzten Seite der Axe in Bezug auf jene Richtung liegen, in welcher die vorbezeichnete Hypothenuse $\varepsilon\pi$ vom Punkte ε aus aufgetragen wurde.

Das Zurückdrehen des Punktes s ist am zweckmäßigsten vermittelst des dem Fluchtpunkte o_3 zukommenden Theilungspunktes vorzunehmen, dessen Entfernung von o_3 durch obige Hypothenuse $\varepsilon\pi$ fixirt ist, indem $\varepsilon\pi$ den 16ten Theil dieser Entfernung angibt.

Wird der Hauptmeridian selbst als Leitlinie eines die Rotationsfläche berührenden Cylinders angenommen, so haben die Erzeugenden eine auf die Bildebene senkrechte Stellung, verschwinden daher im Augpunkte, aus welchem Grunde die Gerade $A\frac{V}{3}$ zugleich die Verschwindungslinie der Berührungsebenen und die Richtung der Tracen auf der Meridianebene angibt. Die parallel zu $A\frac{V}{3}$ an den Hauptmeridian geführten Tangenten werden daher denselben in Punkten VII der Schattengrenzcurve berühren.

Etwas einfacher gestaltet sich auch die Auffindung jener Punkte, welche in der auf der Bildfläche senkrechten Meridianebene liegen, weil die Verschwindungslinie dieser Ebene mit der Verticallinie VV zusammenfällt, und die Cylindererzeugenden zur Bildfläche parallel laufen.

§. 4. Lösungsweise mit Anwendung von berührenden Kugeln.

Ist in Fig. 3, Taf. I, bei sonst gleicher Annahme wie früher, *amx* die Hauptmeridiancurve und *mom'* der Durchmesser eines beliebigen Parallelkreises, so verzeichne man in *m* oder *m'* die Normale $m\omega$, $m'\omega$ der Meridiancurve und betrachte $m\omega$ als Radius einer Kugel, deren Mittelpunkt ω im Durchschnitte der Normale mit der Drehungsaxe *YZ* gelegen ist. Diese Kugel *K* wird die Umdrehungsfläche in dem angenommenen Parallelkreise *mm'* berühren, und es muß mithin die Selbstschattengrenzcurve der ersteren, im Durchschnitte mit dem Parallelkreise *mm'*, die in demselben gelegenen Punkte der Schattengrenzcurve der Umdrehungsfläche liefern.

Behufs der Durchführung des Gesagten wird zu berücksichtigen sein, daß die Berührungscurve der Kugel der in einer auf der Strahlenrichtung senkrechten Ebene gelegene größte Kreis der Kugel ist, daher dieser, wenn das Ganze um *YZ* so weit gedreht wird, bis die Strahlenrichtung parallel zur Bildfläche wird, also die Richtung $W\frac{V}{3}$ (§. 2) annimmt, sich in einer durch ω gehenden, auf $W\frac{V}{3}$ senkrechten Geraden *MN* auf der Bildfläche projecirt.

Der Durchschnitt dieser Kreisebene in der neuen Lage mit der Parallelkreisebene *mm'* erfolgt in einer bildflächprojecirenden Geraden, welche die Bildfläche in *f*, den Parallelkreis jedoch zumeist in zwei Punkten schneidet, welche in die anfängliche Lage zurückversetzt, die zu suchenden Punkte der Schattengrenze liefern.

Denkt man sich den Parallelkreis sammt der Schnittgeraden *f* um *mm'* in die Bildfläche gelegt, so ist ersterer aus *o* mit dem Radius *om* zu beschreiben, während die letztere durch *f* senkrecht auf *mm'* zu ziehen käme. Bei der vorbesprochenen Rückdrehung beschreibt der Punkt *f* den Kreis *fh*; es muß somit die Sehne 1 2 senkrecht auf $\frac{v}{3}\,\frac{O}{3}$ und tangentiell an den Kreis *fh* gezogen werden, wo dann sie den Parallelkreis *k* in 1 und 2 schneidet. Diese Punkte, um *mm'* in die Horizontalebene zurückgedreht, haben ihre Bildflächprojectionen in 1' und 2' und sind somit deren Perspectiven I und II, d. s. Punkte der Schattengrenze, einfach zu verzeichnen.

Für besondere Lagen des Parallelkreises erhält man auch durch das eben besprochene Verfahren die betreffenden Punkte der

Schattengrenze etwas einfacher. So z. B. gibt diese Lösungsweise die Punkte in jenen Parallelkreisen, für welche die Normale der Meridiancurve horizontal wird, durch dieselben Constructionslinien, wie das in §. 2 behandelte Verfahren. Überhaupt ist die interessante Gegenseitigkeit dieser beiden Methoden nicht zu verkennen.

Rotationsflächen der zweiten Ordnung.

§. 5. Allgemeine Bemerkungen.

In Folgendem sei die Construction der Selbstschattengrenze an Rotationsflächen des zweiten Grades in Betracht gezogen. Wie bereits anfangs erwähnt, könnten die eben besprochenen allgemeinen Lösungsmethoden auch hier Anwendung finden, doch ergibt sich durch diese selbstverständlich nicht die geringste Vereinfachung der Construction.

Die Grundsätze, deren Anwendung uns die Aufsuchung sowohl einzelner Punkte der Berührungscurve als auch der Bestimmungsstücke derselben im Bilde wesentlich vereinfachen wird, sind namentlich folgende:

1. Jede Fläche des zweiten Grades kann durch eine Ebene nur nach einer Curve des zweiten Grades (eingerechnet die gerade Linie) geschnitten werden.

2. Wird eine Fläche der zweiten Ordnung durch ein System paralleler Ebenen geschnitten, so sind die Schnittcurven ähnlich, d. h. sie haben ein gleiches Axenverhältniß.

3. Die Berührungslinien solcher Flächen mit andern Flächen desselben Grades, also auch deren Selbstschattengrenzcurven sind stets ebene Curven; die Ebene der letzteren ist zur Richtung der Lichtstrahlen conjugirt.

4. Die Perspective einer Kegelschnittslinie kann wieder nur eine Curve des zweiten Grades sein. [1])

Jene Grundsätze, von welchen bei der Asymptotenbestimmung der Berührungscurve in ihrem perspectivischen Bilde Gebrauch gemacht werden muß, sollen seinerzeit bei den betreffenden krummen Flächen erörtert und festgestellt werden.

---

[1]) Diese Wahrheit ist eigentlich blos eine Folge des erstaufgestellten Satzes.

Wir wollen nun der Reihe nach die Verzeichnung der Selbstschattengrenze bei den einzelnen Flächen sowohl punktweise als auch durch Auffindung ihrer Bestimmungsstücke durchführen, und in erster Reihe die wichtigste dieser Flächen, die Kugel, einer näheren Betrachtung unterziehen.

Die Kugel.

§. 6. Punktweise Bestimmung der Selbstschattengrenze[1]).

Es sei C Fig. 4, Taf. II, der Kugelmittelpunkt, welcher in der Bildfläche liegend angenommen werden soll, ab der Durchmesser derselben, daher der Kreis $abed$ der Schnitt der Kugel mit der Bildfläche. Die Richtung der Lichtstrahlen sei wieder durch den Verschwindungspunkt V, $\left(A\frac{V}{3} = \frac{1}{3}AV\right)$, gegeben.

Zum Behufe der Bestimmung einzelner Punkte der Berührungscurve schneiden wir die Kugel durch eine Reihe von Ebenen, welche auf der Bildfläche senkrecht stehen und parallel zur Strahlenrichtung sind, daher $A\frac{V}{3}$ zur gemeinschaftlichen Fluchtlinie haben. Der die Fläche berührende Strahlencylinder wird nach geraden Erzeugenden, die Kugel nach Kreisen geschnitten, und es werden sich in den Berührungspunkten beider Schnittlinien Punkte der zu suchenden Curve ergeben.

Legen wir eine solche Ebene durch den Kugelmittelpunkt C, so ist MN, parallel zu $A\frac{V}{3}$, die Bildflächtrace derselben, und der Schnitt mit der Kugel ein größter Kreis, welcher um MN in die Bildfläche gedreht, mit dem Kreise $abde$ zusammenfällt. Die Richtung des gedrehten Lichtstrahls wird bekanntlich erhalten, wenn man auf der im Punkte A auf $A\frac{V}{3}$ errichteten Senkrechten den dritten Theil der Augdistanz aufträgt und $\frac{O}{3}$ mit $\frac{V}{3}$ vereint.

---

[1]) Zwei neue und sehr einfache Constructionsweisen zur Bestimmung der Kugelcontour wurden von mir in der „Zeitschrift des österreichischen Ingenieur- und Architecten-Vereins“ Heft IX, 1866 veröffentlicht.

Da die Lichtstrahlen die Fläche berühren, so hat man parallel zu $\frac{O}{3}\frac{V}{3}$ die beiden Tangenten Tf, T_1g an den umgelegten Kreis zu führen, und die Berührungspunkte f, g in die Ebene MN, $A\frac{V}{3}$ zurückzudrehen, wo dann deren Perspectiven nach I und II fallen und zwei Punkte der zu suchenden Schattengrenze bilden. Zweckmäßiger ist es zur Bestimmung der Berührungspunkte f und g, anstatt der Tangenten, durch den Mittelpunkt C des Schnittkreises den die Punkte f und g verbindenden Durchmesser fCg senkrecht auf $\frac{V}{3}\frac{O}{3}$ zu errichten.

Weil der Durchmesser fCg zwei Punkte der Curve verbindet, also eine Sehne derselben bildet, so ist diese Gerade in der Ebene der Berührungscurve gelegen und es muß ihr Verschwindungspunkt in der Fluchtlinie der Ebene liegen. Führt man daher durch $\frac{O}{3}$ eine Parallele $\frac{O}{3}\frac{A_1}{3}$ zu fg und macht $A_1A = 3 . A\frac{A_1}{3}$, so ist A_1 dieser Verschwindungspunkt und es muß demgemäß die Verbindungslinie der Perspectiven I und II auf A_1 zugehen. Daß letztere Gerade auch durch C gehen wird, ist klar.

Werden die Berührungspunkte f und g mit den nächstliegenden Endpunkten des Durchmessers de verbunden, so erhält man zwei parallele Gerade, welche in der angenommenen Schnittebene liegend, in der Perspective gegen den Verschwindungspunkt v_1

$$\left(\frac{O}{3}\frac{v_1}{3} \parallel ef,\ Av_1 = 3 . A\frac{v_1}{3}\right)$$

gehen. Da die Punkte d und e während der Drehung ungeändert bleiben, so müssen die Bilder I und II auch in jenen Geraden liegen, welche die Endpunkte des in der Drehungsaxe liegenden Durchmessers des Schnittkreises mit dem eben gefundenen Fluchtpunkte v_1 vereinen.

Um nun weitere Punkte zu erhalten, hat man blos die Trace M_1N_1 einer zu MN, AV parallelen Ebene, und durch C ein für alle Mal eine auf AV senkrechte Gerade ab, als den geometrischen Ort der Mittelpunkte sämmtlicher Hilfsschnitte zu ziehen, den Mittelpunkt

o mit dem Fluchtpunkte A_1, und die Endpunkte m und n der in M_1N_1 gelegenen Sehne des Kreises *abde* mit v_1 zu verbinden; im Durchschnitte dieser drei Geraden ergeben sich sofort zwei Punkte 1 und 2 der Schattengrenze.

Die Richtigkeit der Construction findet ihre Begründung in dem Umstande, daß für sämmtliche Hilfsebenen MN, M_1N_1,. die Verbindungslinien der Berührungspunkte der Schnittkreise mit den zugehörigen Mittelpunkten, resp. Endpunkten der in der Bildfläche liegenden Durchmesser, zu einander parallel sind, mithin auf dieselben Verschwindungspunkte zugehen.

Bei Hilfsebenen, deren Bildflächtracen sehr nahe der Verschwindungslinie AV gewählt werden, tritt der Übelstand ein, daß die in diesen Ebenen liegenden Punkte der Schattengrenze durch sehr schiefe Schnitte erhalten werden. In solchen Fällen dürfte es am zweckmäßigsten sein, sich vorerst die in die Bildfläche gedrehten Punkte auf gleiche Weise wie f und g zu suchen, und sodann dieselben zurückzudrehen.

Ein Gleiches gilt für die folgenden Flächen, wenn zur Verzeichnung ihrer Schattengrenze ein ähnlicher Weg eingeschlagen wird.

Zwei Punkte a und b der Curve ergeben sich sehr einfach, wenn die schneidende Ebene MN so weit verschoben wird, bis sie in eine Berührungsebene übergeht. Demzufolge hat man parallel zu MN die beiden Tangenten, als Bildflächtracen besagter Ebenen, an den Kreis *abde* zu führen, oder einfach die Gerade Co, welche die Mittelpunkte sämmtlicher Schnittkreise enthält, bis zum Durchschnitte mit obigem Kreise zu verlängern, um die in Rede stehenden Punkte zu erhalten. In Anbetracht dessen, daß diese Punkte zugleich in der Bildfläche liegen, wird deren Verbindungslinie ab die Bildflächtrace E_b der Berührungscurven-Ebene geben.

Da ferner in A_1 ein Punkt der Fluchtlinie E_v dieser Ebene gefunden wurde, so wird erstere durch A_1 parallel zu E_b zu ziehen sein.

Weil endlich die durch a und b gelegten Hilfsebenen die Fläche tangiren, so müßen dieselben im Durchschnitte mit der Ebene $E_b E_v$ die Tangenten in den bezeichneten Punkten der Schattengrenze liefern, weßhalb dies bezüglich blos der Durchschnittspunkt A_1 der Fluchtlinien beider Ebenen mit a und b zu verbinden ist.

Würde der Punkt A_1 außer die Zeichnungsgrenze fallen, so könnte zur Verzeichnung der beiden Tangenten auch der Punkt $\frac{A_1}{3}$ benützt werden; man hätte sodann blos a und b mit A zu verbinden, diese Längen in drei gleiche Theile zu theilen, die dem Punkte A nächstliegenden Theilpunkte mit $\frac{A_1}{3}$ zu vereinen, und die Tangenten durch a und b geometrisch parallel zu letzteren Geraden zu ziehen.

Wenn man endlich berücksichtigt, daß jener Cylinder, welcher die Kugel in dem auf der Bildfläche senkrechten, größten Kreise dCe berührt, zu E_b parallele Mantellinien besitzt, so wird klar, daß die Tangenten $\varepsilon\varphi$ und $\pi\rho$ in den erstgefundenen Punkten I und II eine zu E_b parallele Lage haben müßen.

§. 7. Axenbestimmung.

Die Berührungscurve zwischen einer Kugel und einem Cylinder ist ein größter Kreis, also deren Perspective größtentheils eine Ellipse. Wie früher bewiesen wurde, entsprechen den in der Ebene MN, AV gefundenen Punkten I, II zu E_b parallele Tangenten, daher I II ein Diameter, E_b die Richtung des zu I II conjugirten Durchmessers, und der Halbirungspunkt c von I II der Mittelpunkt der Perspective ist.

Um nun die Endpunkte des durch c gehenden, zu E_b parallelen Durchmessers III IV zu bestimmen, kann man von folgendem Grundsatze ausgehen: Weil die Gerade I II und die beiden Tangenten in den Endpunkten des zu suchenden Durchmessers im Bilde zu einander geometrisch parallel sind, so müssen die diesen Perspectiven entsprechenden Geraden im Raume sich in einem Punkte jener Ebene schneiden, welche durch das Auge parallel zur Bildfläche geht. Dieser Durchschnittspunkt läßt sich hier leicht ermitteln; denn die Gerade I II, um E_b in die Bildfläche gelegt, fällt in die Gerade MN, und die Entfernung des zu suchenden Punktes von C ist der Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreiecks gleich, welches die Länge AA_1 und die Augdistanz zu Katheten hat. Es ist demgemäß $\frac{A_1}{3}\frac{O}{3}$ gleich dem dritten Theil dieser Entfernung, deren Hälfte von C nach Δ aufgetragen wurde, so daß $C\Delta = \frac{3}{2} \cdot \frac{A_1}{3}\frac{O}{3}$ ist.

Wird nun aus Δ mit dem Radius ΔC ein Bogen bis zum Durchschnitte mit der um ab in die Bildfläche gelegten Berührungscurve, (die sodann in den größten Kreis $adbc$ fällt) gezogen, und werden die den zu suchenden Tangenten entsprechenden Geraden im Raume in den Punkten α und β tangentiell an diesen Kreis geführt, so gehen dieselben selbstverständlich durch den eben gesuchten Durchschnittspunkt und schneiden die Drehungsaxe ab in zwei Punkten p und q, durch welche die fraglichen Tangenten der Perspective parallel zu I II gezogen, auf der zweiten Axenrichtung III IV die Länge dieser Axe abgeschnitten wird.

Würde selbst der Punkt Δ außer die Zeichnungsfläche fallen, so könnte die Bestimmung der Punkte α und β mit jedem beliebigen aliquoten Theile der Länge $C\Delta$, in ähnlicher Weise, wie z. B. in Fig. 1 der Punkt α_3 durch α'_3 ermittelt wurde, vorgenommen werden.

Bemerkung 1. Da C zugleich der Mittelpunkt der Schattengrenzcurve, und $ab \perp AV$ der in der Bildfläche liegende Durchmesser dieser Curve ist, so hat man hier eigentlich blos die Aufgabe zu lösen: „die Perspective eines Kreises von bekanntem Durchmesser in einer gegebenen Ebene zu verzeichnen", was auf verschiedene Weise und selbst dann leicht durchzuführen ist, wenn die Verschwindungslinie E_v der Kreisebene nicht benützbar sein sollte.

Bemerkung 2. Bei der im vorigen Paragraphe besprochenen Construction einzelner Punkte der Schattengrenze läßt sich auch die Verzeichnung der diesen Punkten zukommenden Tangenten äußerst einfach durchführen.

Denkt man sich nämlich E_b als Drehungsaxe für den Kreis $amdb$, welcher bei der Drehung die gegebene Kugel beschreibt, so ist die Ebene M_1N_1 eine Parallelkreisebene, und zwar jene der Punkte 1 und 2. Die in m und n an den Meridian gezogenen Tangenten mt schneiden E_b in t, und bilden die äußersten Mantellinien eines die Kugel in diesem Parallelkreise berührenden Kegels, dessen Spitze t in der Bildebene liegt. Hieraus erhellt, daß die Bildflächtracen, sämmtlicher durch Punkte des Parallelkreises mn gelegten Berührungsebenen der Kugel durch t gehen, und daß somit der Punkt t, weil er gleichzeitig in der Bildflächtrace der Ebene $E_b E_v$ der Schattengrenze liegt, der Schnittlinie dieser Ebene mit den den Punkten 1 und 2 zukommenden Tangirungsebenen angehört, demnach mit 1 und 2 verbunden, die gesuchten Tangenten liefert.

Das Ellipsoid.

§. 8. Bestimmung einzelner Punkte der Schattengrenze.

Das Ellipsoid sei durch Rotation der Ellipse *aembf* Fig. 5, Taf. II, um ihre große Axe *ab* entstanden. Die punktweise Bestimmung der Berührungscurve ist der im vorigen Beispiele durchgeführten (§. 6) ähnlich. Man schneide nämlich wieder das Ellipsoid und den dasselbe berührenden Strahlencylinder durch bildflächprojecirende, zu den Lichtstrahlen parallele Ebenen, und drehe jede derselben sammt den darin befindlichen Schnittlinien in die Bildfläche. Vorerst lege man jedoch eine dieser Hilfsebenen durch den Mittelpunkt *C* des Ellipsoids, und zwei andere, als Grenzebenen, berührend an diese Fläche. Die erstgenannte Ebene hat die durch C gehende, zu $A\frac{V}{2}$ parallele Gerade *MN* zur Bildflächtrace (selbstverständlich $A\frac{V}{2}$ zur Fluchtlinie), und schneidet das Ellipsoid nach einer Ellipse, deren große Axe der in *MN* gelegene Durchmesser *ef* des Hauptmeridians, und deren kleine Axe *gh* der kleinen Axe dieses Meridians gleichkömmt. Legt man diese Ellipse um *ef* in die Bildebene, so kann sie daselbst über den bekannten Axen *ef*, *gh* verzeichnet werden, während die Richtung der gedrehten Lichtstrahlen durch die Gerade $\frac{O}{2}\frac{V}{2}$ angegeben wird.

Die umgelegten Mantellinien des Strahlencylinders sind nun tangentiell an die Ellipse *efgh*, parallel zu $\frac{O}{2}\frac{V}{2}$ zu ziehen, und die Berührungspunkte *k* und *l* in die Ebene *MN*, *AV* zurückzudrehen. Ihre Perspectiven I und II geben sofort zwei Punkte der zu verzeichnenden Curve.

Es ist klar, daß behufs der Auffindung der Berührungspunkte *k* und *l* das Ziehen der Ellipse *efgh* nicht erforderlich ist, sondern daß dieselben auch aus den bekannten Axen vollkommen genau bestimmt werden können.

Die Verbindungslinie der Punkte *k* und *l* ist offenbar ein Durchmesser der Berührungscurve, weil diese mit der Fläche einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt besitzt und die Ebene *MN* durch denselben geführt wurde. Es muß folglich der Verschwindungspunkt v_2 dieser in die anfängliche Lage zurückversetzten Geraden kl ($Av_2 = 2 . A\frac{v_2}{2}$, und $\frac{O}{2}\frac{v_2}{2} \parallel kl$) in der Verschwindungslinie E_v der Ebene der Berührungscurve, und mit dem Punkte C in einer die Perspectiven I und II verbindenden Geraden liegen.

Die Bildflächtracen der beiden zu MN, AV parallelen Tangirungsebenen des Ellipsoids berühren den Hauptmeridian in den Punkten m und n. Diese beiden Punkte liegen in der Bildfläche und gehören der Schattengrenze an, geben also verbunden die Bildflächtrace E_b der Ebene der Berührungscurve; die Verschwindungslinie E_v geht sonach durch v_2 parallel zu E_b. Weil E_b durch den Mittelpunkt C der Fläche geht, so gibt mn einen zweiten Diameter der Berührungscurve.

Die durch I und II an das Ellipsoid gelegten Berührungsebenen sind parallel zu E_b; hieraus folgt, daß ihr Schnitt mit der Ebene E_bE_v gleichfalls parallel zu E_b ist, daß daher der Schnittcurve in den Punkten I und II zu E_b parallele Tangenten zukommen; aus diesem folgt jedoch ferner noch, daß mn und kl zusammengehören, also ein conjugirtes Axenpaar der Curve im Raume geben.

Werden die Punkte k und l beziehungsweise mit f und e verbunden, so erhält man die Parallelen kf und el, deren Fluchtpunkt v_1 so, wie jener v_2 gefunden wird. Die Perspectiven I und II müssen mithin auch in den Geraden ev_1 und fv_1 gelegen sein.

Für irgend eine zweite Hilfsebene wird jetzt die Construction sich äusserst einfach gestalten. Ist z. B. M_1N_1 die Bildflächtrace einer solchen Ebene, so wird $\alpha\beta$ die große Axe der zu $ehfg$ ähnlichen Schnittellipse angeben, und es werden die in dieser Ebene gelegenen Punkte 1 und 2 der Schattengrenze erhalten, wenn man den in mn liegenden Mittelpunkt o mit v_2, die Endpunkte α und β der großen Axe der Schnittellipse mit v_1 verbindet, und die beiden letzteren Geraden mit der ersteren zum Durchschnitt bringt.

Für zu nahe dem Augpunkte gelegene Ebenen erhält man die bezüglichen Punkte ungenau, nämlich durch sehr schiefe Schnitte. In einem solchen Falle dürfte es zweckmäßig erscheinen, sich vorerst die um die Bildflächtrace in die Bildfläche gedrehten Punkte derart zu ermitteln, daß man durch die Endpunkte α, β der großen Axe des Hilfsschnittes zu kf parallele Gerade, und durch den Mittelpunkt o desselben Schnittes den den Berührungspunkten zukommenden Diameter, parallel zu kl, bis zum Durchschnitte mit ersteren Geraden führt, und schließlich die so erhaltenen Punkte, in die ursprüngliche Ebene zurückversetzt, perspectivisch darstellt.

Sollen die Tangenten der Berührungscurve in den eben gefundenen Punkten 1 und 2 angegeben werden, so berücksichtige man, daß die Gerade E_b den geometrischen Ort der Mittelpunkte aller Kegelflächen bildet, welche das Ellipsoid in den verschiedenen hier angewandten Hilfsebenen berühren. Die äußersten Erzeugenden βt eines solchen, das Ellipsoid in der Ebene M_1N_1 berührenden Kegels werden somit durch α und β gehen, die Meridiancurve berühren und die Axe E_b im betreffenden Kegelmittelpunkte t schneiden.

Nachdem nun die Bildflächtracen aller in den einzelnen Punkten der Ellipse $\alpha\beta$ an das Ellipsoid geführten Berührungsebenen durch t gehen, der Punkt t jedoch in der Bildflächtrace der Ebene E_bE_v der Schattencurve liegt, so gehört er auch der Schnittlinie der beiden den Punkten 1 und 2 entsprechenden Tangirungsebenen mit der Ebene E_bE_v an, und liefert mit 1 und 2 verbunden die gewünschten Tangenten.

§. 9. Axen der Perspective.

Wie im vorigen Paragraphe gezeigt wurde, sind kl und mn die wahren Längen von zwei conjugirten Axen der Berührungscurve im Raume. Hiebei ist die Lage der einen Axe mn gegeben, während die Richtung der andern durch Umlegung des dem Fluchtpunkte v_2 zugehörigen Sehstrahls um E_v in die Bildebene leicht ermittelt werden kann. Diese Ellipse kann somit, um E_b in die Bildfläche gedreht, verzeichnet, und ein beliebiges Axenpaar ihrer Perspective gesucht werden.

Am gerathensten dürfte es jedoch sein, den zu mn parallelen Durchmesser der Perspective zu bestimmen, weil er sich am einfachsten ergibt, und sein conjugirter Durchmesser I II bereits bekannt ist.

Wird I II in c halbirt, so ist c der Mittelpunkt der Perspective und die durch c zu E_b Parallele III c IV gibt den Ort der zweiten Axe, deren Endpunkte, als Durchschnittspunkte der Geraden III IV mit dem Ellipsoide auf verschiedene Weise ohne Schwierigkeit bestimmt werden könnten.

Es ist jedoch am einfachsten, die halbe Länge dieses Diameters mit Benützung der zu III IV parallelen Sehne mn zu ermitteln, und zu diesem Behufe eine bekannte Constructionsweise der Ellipse aus zwei conjugirten Axen, wo nämlich die Ellipse als schiefe Projection eines Kreises betrachtet und derart verzeichnet wird, in Anwendung zu bringen.

Wird nämlich aus c über I II als Durchmesser ein Halbkreis beschrieben, und werden in C und c die Senkrechten $C\pi$ und $c\gamma$ auf I II bis zum Durchschnitte mit dem Kreise errichtet, ferner die Punkte π und n verbunden, und wird endlich durch γ eine Parallele γ IV zu πn gezogen, so schneidet die letzterhaltene Gerade die Richtung III IV in dem verlangten Endpunkte IV der Axe, wodann bloß noch cIV nach cIII zu übertragen ist.

Schneiden sich die beiden Geraden cIV und γIV unter einem sehr spitzen Winkel, so ist es vortheilhaft, die Perpendikel $C\pi$ und $c\gamma$ zu verlängern, hierauf diese Längen doppelt oder mehrfach aufzutragen, und mit den so erhaltenen Endpunkten in gleicher Weise wie mit π und γ zu verfahren.

Bemerkung. Betrachtet man die Berührungscurve als Schnittlinie des Ellipsoids mit der Ebene E_b E_v, so lassen sich selbstverständlich auch noch andere Constructionsweisen für die Lösung der gestellten Aufgabe angeben.

Das Hyperboloid.

§. 10. Punktweise Verzeichnung der Berührungscurve.

Bei der punktweisen Verzeichnung der Schattengrenze eines Hyperboloids mit Einem Mantel werden uns dieselben Grundsätze leiten, von welchen bei der Kugel und beim Ellipsoide ausgegangen wurde.

Ist xaz, Fig. 6, Taf. II, die Hyperbel, welche, indem sie um ihre imaginäre Axe rotirt, die Fläche erzeugt, und sind TCT die Asymptoten derselben, so lege man wieder durch den Mittelpunkt C eine Ebene ef senkrecht auf die Bildebene und parallel zur Strahlenrichtung V, und drehe dieselbe um ef in die Bildebene. Der Hilfsschnitt mit dem Hyperboloide ist eine Ellipse, welche den Diameter ef der Meridiancurve zur großen, und die reelle Axe aCb der Hyperbel zur kleinen Axe hat. Die Richtung des umgelegten Lichtstrahls ist $\frac{O}{2}\frac{V}{2}$.

Bestimmt man die Berührungspunkte k und l der an die besagte Ellipse parallel zu $\frac{O}{2}\frac{V}{2}$ geführten Tangenten, und dreht dieselben in die Bildfläche zurück, so fallen deren Perspectiven nach I und II, und geben, aus gleichem Grunde wie beim Ellipsoide, die Endpunkte eines Diameters der zu suchenden Curve. Die Bildflächtrace E_b der Ebene der Berührungscurve geht durch C parallel zu den Tangenten T_1 in den Punkten e und f der Meridianhyperbel, und enthält zugleich die Mittelpunkte der Hilfsschnitte der Fläche mit sämmtlichen zu ef parallelen Ebenen, deren gemeinschaftliche Verschwindungslinie die Gerade AV bildet. Es entsprechen mithin der Berührungscurve in den Punkten I und II zu E_b parallele Tangenten.

Um weitere Punkte der Curve zu erhalten, bestimme man den Verschwindungspunkt v_1 der Sehne fl und den Fluchtpunkt einer zweiten durch den Berührungspunkt gehenden Geraden. Der Verschwindungspunkt des Diameters kl fällt in den meisten Fällen zu weit außer die Zeichnungsfläche, als daß es practisch wäre, denselben zu benützen. Es wird daher am zweckmäßigsten sein, die große Halbaxe Cf der Schnittellipse in eine beliebige Anzahl gleicher Theile zu theilen, einen Theilpunkt r mit l zu verbinden und den Verschwindungspunkt v_2 dieser Geraden rl zu bestimmen. Daß der Theilpunkt r so zu wählen sein wird, daß der Verschwindungspunkt v_2 gut benützt werden kann, ist selbstverständlich. Hier wurde Cf in r halbirt.

Für eine zweite Ebene MN hat man sodann bloß den Punkt α, in welchem die Bildflächtrace den Hauptmeridian schneidet, mit v_1, den Halbirungspunkt ω der halben Sehne $B\alpha$ mit v_2 zu verbinden, und ebenso auf der andern Seite von E_b vorzugehen, um im Durchschnitte der zusammengehörigen zwei Geraden je einen Punkt 1 der Curve zu erhalten.

Daß für den Fall, als der zweite Endpunkt α' und der Halbirungspunkt ω' der zweiten Sehnenhälfte nicht mehr auf die Zeichnungsfläche fallen sollte, die Verbindungslinien $\alpha' v_1$ und $v_2 \omega'$ mit Hilfe der Geraden αv_1, ωv_2 und mit Berücksichtigung des Umstandes, daß α' und ω' in der Geraden MN liegen und von B ebenso weit wie die Punkte α und ω abstehen, leicht gezogen werden können, ist klar.

§. 11. Asymptotenbestimmung.

Zum Behufe der Asymptotenbestimmung der Selbstschattengrenzcurve, welche bekanntlich in dem Falle, wo die Bildflächtrace ef der zu den Lichtstrahlen parallelen, bildflächprojecirenden Ebene *ef*, *AV* die Meridiancurve schneidet, eine Hyperbel ist[1]), und sich auch als Hyperbel perspectivisch darstellt, kann ein doppelter Weg eingeschlagen werden. Es kann nämlich die Richtung der Asymptoten auf Grundlage des im vorigen Paragraphe gegebenen Verfahrens zur punktweisen Bestimmung der Curve gefunden, oder es kann die Aufsuchung dieser Richtungen von dem obigen Verfahren unabhängig durchgeführt werden.

Ein Verfahren, den asymptotischen Kegel zur Bestimmung der in Rede stehenden Richtungen zu benützen, aufzufinden, ist mir bisher nicht gelungen, trotzdem ich anfänglich einzig und allein diese Idee verfolgte. Ich glaube, daß wenn auch auf Grundlage dieses Kegels eine Lösung der eben gestellten Aufgabe möglich sei, diese kaum einfacher als die beiden folgenden sein dürfte, und daß selbst dann auch von dem in Auflösung *b)* festgestellten Gesichtspunkte ausgegangen werden müßte.

a) Indirecte Lösungsweise.

Vermittelst des in §. 10 gegebenen Verfahrens werden die einzelnen Punkte 1 der Curve als Durchschnitte je zweier Geraden erhalten, welche auf die constanten Verschwindungspunkte v_1 und v_2 zugehen. Läßt man die Ebene *MN* sich immer weiter vom Mittelpunkte der Fläche entfernen, so wird die Sehne $\alpha\beta$, also auch die Viertelsehne $\omega\alpha$, fortwährend größer, daher der Winkel $v_2 1 v_1$ der beiden den Punkt 1 bestimmenden Geraden stets kleiner, bis endlich für eine gewisse Lage der Ebene *MN* dieser Winkel gleich Null wird, d. h. bis die genannten Geraden zu einander parallel werden, wodann ihr Durchschnittspunkt in unendliche Entfernung fällt, und diese Geraden, als auf unendlich weit entfernte Punkte der Curve zugehend, die Asymptotenrichtungen der Schattengrenze angeben.

Weil die Geraden αv_1, ωv_2 parallel werden sollen, so muß für die diesfällige Lage der Ebene *MN*, (da $v_1 v_2$ ebenfalls parallel zu $B\alpha$ ist) offenbar die Viertelsehne $\omega\alpha$ der Entfernung $v_1 v_2$, also die halbe Sehne $B\alpha = 2 . v_2 v_1$ sein. Demzufolge wird man zur Bestimmung des Punktes α auf der verlängerten Geraden *eCf* von *C* aus ein Stück

---

[1]) Dies ist hier nämlich in Bezug auf Fig. 6 gemeint; die Fälle, in welchen die Berührungscurve eine Hyperbel, Ellipse oder gerade Linie wird, sind aus der orthogonalen Projectionslehre bekannt.

gleich $2.v_1v_2$ aufzutragen, und durch den Endpunkt dieser Länge eine Paralle zu E_b zu ziehen haben, um im Durchschnitte der letzteren mit der Meridianhyperbel die zu suchenden Endpunkte der Sehnen zu erhalten.

Weil jedoch das Benützen solcher Längen in den meisten Fällen nicht möglich ist, so müßen wir in erster Reihe untersuchen, auf welche Weise die Construction mit aliquoten Theilen der vorkommenden Längenstücke vorgenommen werden könne.

Zu diesem Ende beziehen wir die Hyperbel auf ein schiefwinkeliges Coordinatensystem, dessen Ursprung mit dem Mittelpunkte C zusammenfällt, und dessen Coordinatenaxen die Geraden ef und E_b bilden.

Bezeichnen wir die Länge der Axe ef mit $2a$, und die Länge der in der Geraden E_b liegenden, zu ef conjugirten, imaginären Axe mit $2b$, so ist

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

die Gleichung der Meridiancurve.

Im Umfange dieser Hyperbel sind nun zwei Punkte, die wir mit P bezeichnen wollen, so anzugeben, daß denselben eine Abscissenlänge $2.v_1v_2 = 2.c$ entspricht, und sind die Geraden zu bestimmen, welche diese Punkte mit v_1 verbinden.

Die Ordinaten dieser Punkte haben somit die Länge

$$y_1 = \pm \frac{b}{a} \sqrt{(2c)^2 - a^2},$$

oder, um mit aliquoten Theilen, z. B. mit $^1/_4$ der einzelnen Längen, arbeiten zu können

$$\frac{y_1}{4} = \pm \frac{b}{a} \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{4}\right)^2}$$

Dieser Ausdruck läßt sich leicht construiren; denn trägt man auf der X-Axe von C aus das Stück $C\frac{x}{4} = \frac{1}{2}.v_1v_2$ auf, beschreibt über dieser Länge, als Durchmesser, einen Halbkreis, durchschneidet denselben aus $\frac{x}{4}$ mit einem Kreisbogen $\alpha_1\beta$ vom Radius

$$\frac{x}{4}\beta = \frac{1}{4}.Ce = \frac{1}{4}a,$$

und überträgt $C\beta$ nach $C\gamma$, so ist

$$C\gamma = C\beta = \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{4}\right)^2}$$

Um endlich $\frac{y_1}{4}$ als vierte geometrische Proportionale zu den Größen a, b und $C\gamma$ zu construiren, hat man blos durch γ eine Parallele $\gamma\varepsilon$ zu E_b bis zum Durchschnitte ε mit der Asymptote TCT der Meridianhyperbel zu ziehen, wo dann

$$\gamma\varepsilon = \frac{b}{a} \quad C\gamma = \frac{1}{4} y_1$$

wird.

Es ist nun am zweckmäßigsten, die so gefundene Ordinate $\frac{y_1}{4}$ der Abscisse $\frac{x}{4}$ entsprechend aufzutragen, d. h. durch $\frac{x}{4}$ eine zu $\gamma\varepsilon$ Parallele $\frac{x}{4}\,\varepsilon_1$ zu führen, und auf derselben die Länge $\frac{x}{4}\,\varepsilon_1 = \gamma\varepsilon$ aufzutragen. Man hat hiemit einen Punkt ε_1 gefunden, welcher vom Mittelpunkte C eine viermal kleinere Entfernung, als der zu suchende Punkt P hat.

Verbindet man nun v_1 mit C, und macht $Cw = \frac{1}{4} . Cv_1$, so hat offenbar der Punkt w gegen ε_1 eine ähnliche Lage, wie v_1 gegen den Punkt P, und es muß demzufolge die Verbindungslinie $w\varepsilon_1$ die Richtung der einen Asymptote geben.

Für die zweite Asymptote ist das untere (negative) Zeichen in Betracht zu ziehen, d. h. die Ordinate $\varepsilon_1 \frac{x}{4}$ ist nach abwärts aufzutragen, und der so resultirende Punkt mit w zu verbinden. Halbirt man jedoch $w\varepsilon_1$ in w_1 und verbindet w_1 mit $\frac{x}{4}$, so muß, wie aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $\varepsilon_1 w_1 \frac{x}{4}$ und $\varepsilon_1 w \varepsilon_2$ (wenn wir den untern Endpunkt der negativen Viertelordinate $\left(-\frac{y_1}{4}\right)$ mit ε_2 bezeichnen) folgt, $w_1 \frac{x}{4}$ parallel zur besagten Verbindungslinie $w\varepsilon_2$ sein, somit die Richtung der zweiten Asymptote angeben.

Die Asymptoten selbst sind schließlich durch den Halbirungspunkt c der Axe I H parallel zu den eben gefundenen Geraden $w\varepsilon_1$ und $w\frac{x}{4}$ zu ziehen und ergeben sich in L_1cL_1, L_2cL_2.

b) Directe Auflösung.

Um auf directem Wege die Richtungen der Asymptoten aufzufinden, müssen vorerst jene Punkte der Berührungscurve gesucht werden, welche in einer durch das Auge zur Bildfläche parallel gehenden Ebene, die wir Distanzebene heißen wollen, liegen; denn für diese Punkte sind die entsprechenden Sehstrahlen parallel zur Bildfläche, schneiden dieselbe somit in unendlicher Entfernung, weßhalb sie zu den Asymptoten der Schattencurve parallel laufen.

Zur Durchführung des Gesagten wird es nothwendig sein, die sämmtlichen in der Distanzebene oder in einer andern zur Bildfläche parallelen Ebene gelegenen Linien und Punkte auf die Bildfläche orthogonal zu projeciren, und die verschiedenen Constructionen in dieser Projection durchzuführen.

Um die in der Distanzebene liegenden Punkte der Schattengrenze zu erhalten, wird vorerst die Bestimmung des Schnittes der Distanzebene mit dem Hyperboloide erforderlich. Durch die aufeinanderfolgenden Punkte der Schnittcurve legen wir sodann berührende Ebenen an das Hyperboloid, bestimmen die entwickelbare Fläche, welche die sämmtlichen Berührungsebenen umhüllt, und führen an diese Fläche parallel zu den Lichtstrahlen die möglichen Tangirungsebenen; die Erzeugenden, in welchen die Berührung erfolgt, begegnen der Schnittcurve in den verlangten Punkten.

Legt man durch den Mittelpunkt C der Fläche ein rechtwinkliges Coordinatensystem derart, daß YZ die Y-Axe, FCF' die X-Axe bildet, und bezeichnen die reelle Axe ab der Meridiancurve mit $2a$, die imaginäre, in YZ liegende Axe mit $2b$, die Augdistanz mit d, so ist

$$\frac{x^2+z^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{1}$$

die Gleichung des Hyperboloids,

$$z=d \tag{2}$$

jene der Distanzebene, mithin beide zusammen, die Gleichungen der Schnittcurve.

Die Gleichung einer Berührungsebene des Hyperboloids in einem Punkte dieser Curve ist

$$z-z_1=\frac{dz_1}{dx_1}(x-x_1)+\frac{dz_1}{dy_1}(y-y_1),$$

wobei für x_1, y_1 und z_1 die Bedingungen (1) und (2) existiren.

Da nun

$$\frac{dz_1}{dx_1} = -\frac{x_1}{z_1} = -\frac{x_1}{d}$$

und

$$\frac{dz_1}{dy_1} = \frac{a^2 y_1}{b^2 z_1} = \frac{a^2 y_1}{b^2 d}$$

ist, so folgt

$$\frac{xx_1 + dz}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1 \tag{3}$$

als Gleichung der Berührungsebene, wobei noch für x_1 und y_1 die Relation

$$\frac{x_1^2 + d^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \tag{4}$$

besteht.

Soll die umhüllende Fläche sämmtlicher Tangirungsebenen gefunden werden, so sind aus den Gleichungen (3) und (4), sowie aus dem ersten Differentialquotienten derselben nach x_1, die Größen x_1 und y_1 zu eliminiren.

Aus (3) folgt:

$$\frac{x}{a^2} - \frac{y}{b^2} \cdot \frac{dy_1}{dx_1} = 0$$

und aus (4)

$$\frac{x_1}{a^2} - \frac{y_1}{b^2} \frac{dy_1}{dx_1} = 0$$

folglich durch Elimination von $\frac{dy_1}{dx_1}$

$$\frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1} \tag{5}$$

oder, wenn der Werth $y = x . \frac{y_1}{x_1}$ in die Gleichungen (3) und (4) substituirt wird,

$$x_1 = x \sqrt{\frac{\left(\frac{d}{a}\right)^2 - 1}{\left(\frac{y}{b}\right)^2 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}}$$

und

$$x_1 = x \frac{\frac{dz}{a^2} - 1}{\left(\frac{y}{b}\right)^2 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}.$$

Unter der Voraussetzung, daß $d > a$ ist, wie dies fast immer der Fall ist, ergibt sich sonach durch Gleichstellung dieser beiden Werthe und gehöriges Ordnen

$$\text{(I)} \qquad \left(\frac{y}{b}\right)^2 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 = \frac{\left(\frac{dz}{a^2} - 1\right)^2}{\left(\frac{d}{a}\right)^2 - 1}$$

als Gleichung der entwickelbaren Fläche.

Diese Fläche ist somit ein hyperbolischer Kegel, dessen Axe mit der Z-Axe zusammenfällt, also in C senkrecht auf der Bildebene steht.

Für die Kegelspitze haben wir $x = o$, $y = o$ zu setzen, und erhalten für deren Abstand s von der Bildebene die Relation

$$\frac{d.s}{a^2} - 1 = 0$$

und hieraus

$$\text{(II)} \qquad s = \frac{a^2}{d}.$$

Wie aus (I) ersichtlich ist, wird der Kegel durch jede zur Bildfläche parallele Ebene nach einer Hyperbel geschnitten, welche orthogonal auf die Bildfläche projecirt, dieselben Asymptoten TCT wie die Meridiancurve besitzt; nur sind die Richtungen der Axen beider Curven um 90° gegen einander verwendet. Soll eine schneidende Ebene so gelegt werden, das die Schnittcurve des Kegels dieselben Axenlängen a und b wie die Meridiancurve, nur mit dem Unterschiede, daß hier a die imaginäre, b die reelle Axe wird, besitzt, so muß offenbar der Ausdruck zur rechten Seite des Gleichheitszeichens [Relation (I)] gleich 1 werden, woraus der Abstand z_2 der verlangten Ebene von der Bildfläche resultirt. Es ist somit

$$\left(\frac{dz_2}{a^2} - 1\right)^2 = \left(\frac{d}{a}\right)^2 - 1$$

oder

$$\frac{dz_2}{a^2} = 1 \pm \sqrt{\left(\frac{d}{a}\right)^2 - 1}$$

und

$$\text{(III)} \qquad z_2 = \frac{a^2}{d}\left[1 \pm \sqrt{\left(\frac{d}{a}\right)^2 - 1}\right] = s.\left[1 \pm \sqrt{\left(\frac{d}{a}\right)^2 - 1}\right],$$

daher der Abstand h dieser Ebene von der Kegelspitze

$$\text{(IV)} \qquad h = z_2 - s = \pm \frac{a^2}{d} \sqrt{\left(\frac{d}{a}\right)^2 - 1} = \pm \sqrt{a^2 - s^2}.$$

Faßt man den Satz ins Auge, daß eine Fläche des zweiten Grades nur wieder von einer Fläche des zweiten Grades in einer ebenen Curve berührt werden kann, so folgt schon aus diesem, daß die eben analytisch bestimmte, entwickelbare Fläche nur ein hyperbolischer Kegel oder Cylinder sein könne. Da jedoch ein Cylinder die Fläche in einer Diametralebene berührt, was hier nicht der Fall ist, so wird ersichtlich, daß die entwickelbare Fläche ein Kegel ist. Ferner ist bekannt, daß die Ebene, in welcher die Berührung eines Kegels mit einer Fläche der zweiten Ordnung erfolgt, conjugirt ist zur Verbindungslinie der Kegelspitze mit dem Mittelpunkte der letzteren Fläche; da nun die Distanzebene parallel zur Rotationsaxe des Hyperboloids ist, so muß die Kegelspitze in einer durch den Mittelpunkt des Hyperboloids gehenden, auf der Bildfläche senkrechten Geraden gelegen sein.

Auf diese Weise haben wir das Nöthige ohne jede analytische Entwicklung gefunden, und können nun das Übrige leicht constructiv durchführen.

Denken wir uns nämlich durch die Axe YZ eine auf die Bildfläche senkrechte Ebene gelegt, und diese sammt den darin liegenden Linien in die Bildfläche gedreht. Das Hyperboloid wird nach einem Meridiane geschnitten, welcher nach der Drehung in den Hauptmeridian fällt, während der Schnitt mit der Distanzebene in einer zu YZ parallelen Geraden erfolgt, welche nach der Umlegung in einem der Augdistanz $2 . A \frac{O}{2}$ gleichen Abstande von YZ zu ziehen wäre, und die Hyperbel in zwei Punkten schneiden würde, welche die umgelegten Endpunkte der reellen Axe der in der Distanzebene liegenden, die Leitlinie des Berührungskegels bildenden Hyperbel wären. Diesen Punkten entspricht also eine Abscissenlänge gleich der Augdistanz.

Die beiden Erzeugenden, in welchen der Berührungskegel geschnitten wird, berühren den Meridian in den besagten Punkten und schneiden die Gerade FCF', d. i. die Kegelaxe nach der Umlegung in der Kegelspitze S.

Um nun die obigen Punkte, welche gewöhnlich weit hinausfallen, nicht erst angeben zu müssen, ist es am zweckmäßigsten, den Punkt S in der Weise zu bestimmen, daß man die Länge CS (Subtangente) construirt.

Die Gleichung der Tangente an die Meridianhyperbel ist nämlich:

$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1,$$

also für $y = o$ und $x = CS$

$$\frac{xx_1}{a^2} = 1 \quad \text{oder} \quad CS = \frac{a^2}{x_1} = \frac{a^2}{d},$$

wie dies auch in (II) erhalten wurde.

Zur Bequemlichkeit der Construction stellen wir den Ausdruck in der Form

$$CS = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2}{\frac{d}{4}}$$

dar. Macht man also $C\Delta = \frac{d}{4}$, beschreibt über dieser Länge als Durchmesser den Halbkreis $Cs\Delta$, und durchschneidet denselben in s mit einem aus dem Mittelpunkte C beschriebenen Kreisbogen vom Halbmesser $C\delta = \frac{1}{2} . Ca = \frac{1}{2} a$, so ist bloß durch s ein Perpendikel sS auf FCF' zu errichten, um in S die gesuchte Kegelspitze zu erhalten. Die Tangenten St, St_1 selbst, können nun, ohne daß die Berührungspunkte zugänglich sind, mit Benützung der Brennpunkte F und F' gefunden werden. Diese Tangenten stellen uns hier gleichsam die Umrisse des um 90° gedrehten Berührungskegels in der verticalen Projection vor.

Soll der Kegel so geschnitten werden, daß die reelle Axe der Schnittcurve gleich $2b = mn$ wird, so hat man nur durch m eine zu FCF' Parallele mm', und durch den Durchschnittspunkt m' derselben mit der Tangente St eine zu YZ parallele Gerade $m'yu$ zu führen. Cy ist sodann der Abstand (III) der Ebene von der Bildfläche, also Sy der Abstand (IV) von der Kegelspitze.

Die letztfixirte Schnittcurve projecirt sich demzufolge orthogonal auf der Bildfläche in einer Hyperbel, welche die reelle Axe nCm, die imaginäre Axe aCb und die Brennpunkte F_1, F_1' ($F_1C = F_1'C = FC$) besitzt.

Sollen an die Kegelfläche die Tangirungsebenen parallel zur Strahlenrichtung gelegt werden, so hat man durch die Kegelspitze S eine zur Richtung der Lichtstrahlen parallele Gerade zu legen, den Durchschnitt derselben mit der Basisebene, als welche wir die Ebene

$m'yu$ betrachten wollen, und die orthogonale Projection des Durchschnittspunktes auf der Bildfläche zu bestimmen. Nachdem C die Projection der Kegelspitze und $A\frac{V}{2}$ die Richtung der Bildflächprojection der Lichtstrahlen ist, wird der zu suchende Punkt in der durch C zu $A\frac{V}{2}$ parallel geführten Geraden fCe liegen müssen. Sein Abstand von C bildet offenbar die eine Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks dessen zweite Kathete die Höhe Sy des Kegels ist, und von welchem außerdem der dieser Kathete gegenüberliegende Winkel, d. i. der Neigungswinkel der Lichtstrahlen gegen die Bildfläche $\left(\sphericalangle \frac{O}{2}\frac{V}{2}A\right)$ bekannt ist.

Sucht man also in dem Dreiecke $\frac{O}{2}A\frac{V}{2}$ eine zu $A\frac{O}{2}$ parallele Sehne $S'y'$, derart, daß sie die Länge Sy besitzt, so ist $\frac{V}{2}S'$ der verlangte Abstand. Dieser wird, wie aus der Richtung der Lichtstrahlen und der Lage der Basisebene einleuchtet, von C nach aufwärts nach CD zu übertragen sein.

Werden aus D die beiden Tangenten DE_1 und DE_2 an die durch ihre Axen mn, ab und die Brennpunkte F_1, F_1' bestimmte Hyperbel gezogen, und die Berührungspunkte E_1, E_2 gesucht, so brauchen diese bloß mit C verbunden, und die Längen CE_1 und CE_2 im Verhältnisse der Abstände der Kegelspitze von der Distanzebene und von der Basisebene $m'yu$ verlängert zu werden, um die orthogonalen Projectionen der in der Distanzebene liegenden Punkte der Schattengrenze auf der Bildfläche zu erhalten, welche Projectionen mit A verbunden, die zu suchenden Asymptotenrichtungen gäben.

Sucht man jedoch in der Ebene $m'yu$ einen Punkt derart auf, daß er gegen die in derselben Ebene liegende Hyperbel eine ähnliche Lage wie der Gesichtspunkt gegen die in der Distanzebene befindliche Schnittcurve hat, so werden selbstverständlich die Verbindungslinien desselben mit E_1 und E_2 gleichfalls die Asymptotenrichtungen angeben.

Zur Bestimmung dieses Punktes wird zu berücksichtigen sein, daß die beiden Hyperbeln in der Oberfläche des berührenden Kegels Stt_1 liegen, daß somit der zu suchende Punkt nur als Durchschnitt der die Kegelspitze S mit dem Auge verbindenden Geraden mit der Ebene $m'yu$ gefunden werden kann.

Die Bildflächprojection der letztgenannten Verbindungslinie ist die Gerade CA, welche dem eben Gesagten zufolge, durch den gewünschten Punkt so getheilt werden wird, daß die ganze Länge CA zu dem abgeschnittenen Stücke in demselben Verhältnisse wie die Abstände der Kegelspitze von beiden Hyperbelebenen zu einander steht.

Dies kann einfach dadurch bewerkstelligt werden, daß man $C\frac{O_1}{2}$ der halben Augdistanz, und $\frac{O_1}{2}p = \frac{1}{2}CS$, ferner das Perpendikel pq auf FCF' gleich $\frac{1}{2}AC$ macht, und q mit S verbindet; die auf $m'yu$ abgeschnittene Länge $y2$ ist sodann der Abstand des zu bestimmenden Punktes 3 von A.

Man hat daher bloß $y2$ nach $C3$ zu übertragen, und 3 mit E_1 und E_2 zu verbinden, um die Richtungen $3E_1$, $3E_2$ der Asymptoten L_1cL_1, L_2cL_2 des Bildes zu erhalten, — diese somit durch den Halbirungspunkt c des Diameters I II parallel zu den gefundenen Richtungen zu ziehen.

Würde das in der orthogonalen Projection angewendete Verfahren zur Bestimmung der Asymptoten der Selbstschattengrenze in der Perspective benützt werden, so erhielte man bloß zwei Tangenten in jenen Punkten der Curve, in welchen diese von der Fluchtlinie des Hyperboloids geschnitten wird.

Aus der Axe I II und den Asymptoten läßt sich einfach die senkrechte, reelle Axe der Curve verzeichnen.

Das Paraboloid.

§. 12. Punktweise Verzeichnung der Selbstschattengrenze.

Die punktweise Aufsuchung der Selbstschattengrenze mit Benützung von bildflächprojecirenden, zu den Lichtstrahlen parallelen Ebenen ist der in den §§. 6, 8 und 10 durchgeführten gleich, weßhalb sie daselbst weiter nicht besprochen werden soll.

Bei dem Paraboloide ist es am zweckmäßigsten, behufs der Bestimmung der Berührungscurve von dem Satze Gebrauch zu machen, daß die Berührungscurve stets eine zur Meridianparabel xay, Fig. 7, Taf. II, congruente Curve ist, und in einer zur Axe YZ parallelen Ebene E_b E_v liegt, welche senkrecht auf der zu den Lichtstrahlen parallelen Meridianebene steht.

Diesem zufolge wird man, da die Gerade Vv die Verschwindungslinie der zu den Lichtstrahlen parallelen Meridianebene, folglich $\frac{v}{2}\frac{O}{2}$ die Richtung einer in dieser Ebene liegenden, um HH in die Bildfläche gedrehten, horizontalen Geraden angibt, in $\frac{O}{2}$ eine auf $\frac{v}{2}\frac{O}{2}$ senkrechte Gerade $\frac{O}{2}\frac{v_1}{2}$ errichten, um im Durchschnitte $\frac{v_1}{2}$ derselben mit HH die halbe Entfernung $A\frac{v_1}{2}$ des in der Horizontslinie gelegenen Punktes v_1 der Verschwindungslinie E_v der Curvenebene vom Augpunkte begrenzt zu erhalten, welch' letztere (E_v) durch v_1 parallel zu YZ geht.

Ebenso einfach ergibt sich die Bildflächtrace E_b dieser Ebene, wenn man berücksichtigt, daß bei der bekannten Richtung derselben bloß die Bestimmung eines Punktes erforderlich wird, welcher, wie in allen vorhergehenden Fällen, am schnellsten im Hauptmeridiane gefunden wird. Sucht man nämlich die in dem Hauptmeridiane, also in der Bildebene liegenden Punkte der Berührungscurve, so hat man bloß parallel zu $A\frac{V}{2}$ an den Meridian die Tangente zu ziehen, welche diesen in dem gesuchten Punkte I berührt. Die fragliche Bildflächtrace E_b ist sofort durch I parallel zu YZ zu ziehen.

Ein Punkt der Bildflächtrace könnte auch in der Weise gefunden werden, daß man in einem beliebigen Parallelkreise mn die um mn in die Bildfläche gedrehten Punkte α und β der Selbstschattengrenze nach der allgemeinen Methode (§. 2) bestimmt, und durch eine Gerade vereint, welche, als in der Ebene der Berührungscurve liegend, im Durchschnitte γ mit der Drehungsaxe mn einen Punkt der Bildflächtrace liefert. Gleichzeitig gibt auch die Sehne $\alpha\beta$ die Richtung der horizontalen, in die Bildfläche gedrehten Sehnen der Curve.

Sollen nun einzelne Punkte der Selbstschattengrenze angegeben werden, so ist es am zweckmäßigsten, ein System von horizontalen Hilfsebenen anzuwenden, und diese in die Bildfläche zu drehen. Is z. B. MN die Bildflächtrace einer solchen Ebene, so schneidet diese das Paraboloid im Parallelkreise $m_1 o_1$, die Ebene $E_b E_v$ in der (umgelegten) Geraden $\alpha_1\beta_1$, welche durch den Durchschnittspunkt ω_1 der beiden Bildflächtracen MN und E_b parallel zu $\frac{O}{2}\frac{v_1}{2}$ oder $\alpha\beta$ läuft, und den Parallelkreis in den Punkten $\alpha_1 \beta_1$ schneidet, die in die Horizontalebene MN zurückgedreht, der Schattengrenze angehören und perspectivisch verzeichnet nach 1 und 2 zu liegen kommen.

Daß die Punkte 1 und 2 auch in der Geraden $w_1 v_1$ liegen müssen, braucht wohl kaum bemerkt zu werden. Wenn jedoch v_1 unzugänglich ist, so kann hier die Richtung dieser Verbindungslinie einfach mit Benützung von $\frac{v_1}{2}$ $\left(\text{oder } \frac{v_1}{n}\right)$ gefunden werden, wenn man nämlich die Länge $A\gamma$ halbirt, (beziehungsweise in n gleiche Theile theilt) und durch den (dem Punkte A nächstliegenden) Theilpunkt B eine zu E_b parallele Gerade BF führt. Verbindet man den Punkt w_1 der Bildflächtrace mit A, so wird diese Gerade die Verticale BF in einem Punkte d_1 schneiden, welcher mit $\frac{v_1}{2}$ verbunden, eine zu $2 w_1 1 v_1$ geometrisch Parallele gibt.

Etwas complicirter gestaltet sich die Construction, wenn man Punkte in einzelnen Meridianen sucht. Hiefür dürfte es gerathen erscheinen, die Horizontsebene als Grundebene anzusehen, und selbe um HH in die Bildfläche zu drehen. Alsdann ist $\alpha\beta$ $\left(\text{durch } \gamma \text{ parallel zu } \frac{v_1}{2} \frac{O}{2}\right)$ die Trace der Ebene der Berührungscurve auf der Grundebene, während die Trace einer Meridianebene durch o beliebig gewählt, und die Ebene selbst, welche sich mit jener $E_b E_v$ in einer sich im Punkte R projecirenden Geraden schneidet, um YZ in die Bildfläche gedreht werden muß, woselbst der Punkt R nach R', daher die besagte Gerade nach $R'\Delta$ gelangt. Letztere trifft den Hauptmeridian in Δ, welcher Punkt in die ursprüngliche Lage oR zurückzuführen ist.

Zu diesem Behufe fällen wir aus R ein Perpendikel $R5't$ auf HH und aus Δ eine Senkrechte Δo_2 auf YZ. Beide Senkrechten schneiden sich in der orthogonalen Projection $5'$ des zurückgedrehten Punktes Δ auf der Bildebene, und es gibt Rt den Abstand desselben von der Bildfläche, daher die Perspective 5 leicht gefunden werden kann, ohne daß es nöthig sei, die Fluchtlinie der Meridianebene aufzusuchen.

Soll in dem Punkte 4 die Tangente der Curve verzeichnet werden, so ist am einfachsten, wie folgt vorzugehen:

Man denke sich durch den Punkt 4 im Raume eine bildflächprojecirende, zu den Lichtstrahlen parallele Ebene gelegt. Diese muß sich mit der Parallelkreisebene desselben Punktes in einer auf der

Bildebene senkrechten Geraden, also im Perpendikel $\beta\beta'$ schneiden, aus welchem Grunde die Bildflächtrace rn' der ersteren Ebene durch β' parallel zu $A\frac{V}{2}$ läuft, und die Meridianparabel in n' schneidet.

Wird durch n' eine Tangente an den Hauptmeridian gezogen, so schneidet sie die Bildflächtrace E_b in t, welcher Punkt die Spitze eines das Paraboloid in der Ebene rn' berührenden Kegels, und zugleich einen Punkt der Bildflächtrace der durch 4 an das Paraboloid gelegten Berührungsebene liefert, und, weil er auch in der Bildflächtrace E_b der Curvenebene liegt, der Schnittlinie beider Ebenen angehört, also mit 4 verbunden, die gesuchte Tangente bestimmt.

Aus der bekannten Eigenschaft der Parabel folgt, daß $r\mathrm{I} = \mathrm{I}t$ ist, und es ergibt sich somit für die Tangentenverzeichnung das einfache Verfahren, daß man durch die Bildflächprojection β' des gegebenen Punktes 4 eine zu $A\frac{V}{2}$ Parallele $\beta'r$ bis zum Durchschnitte r mit der Bildflächtrace E_b der Curvenebene führt, den Abstand $r\mathrm{I}$ nach der entgegengesetzten Seite des Scheitels I, nach $\mathrm{I}t$ überträgt, und t mit dem gegebenen Punkte 4 vereint.

§. 13. Asymptotenbestimmung.

Bei verticaler Axe der Rotationsfläche ist die Perspective der Selbstschattengrenze eine Hyperbel, mit Ausnahme jenes Falles, wo die Lichtstrahlen in verticalen, auf der Bildfläche senkrechten Ebenen liegen, wodann deren Verschwindungspunkt in die Verticallinie fällt, und die Berührungscurve in einer zur Bildfläche parallelen Ebene liegt, sich also perspectivisch wieder als Parabel darstellt.

Berücksichtigt man, daß die Axe der die Schattengrenzcurve bildenden Parabel eine zur Bildflächtrace E_b ihrer Ebene parallele Lage hat, so folgt, daß die Verschwindungslinie E_v der Parabelebene eine Asymptote der Perspective dieser Curve bildet, daher es sich bloß noch um die Bestimmung der Lage und Richtung der zweiten Asymptote handeln wird.

Man könnte zu diesem Zwecke eine dem in §. 11, *b* beim Hyperboloide durchgeführten Verfahren ähnliche Lösungsweise der gestellten Aufgabe auffinden, die sich beim Paraboloide um so einfacher gestalten würde, als der Schnitt desselben mit der Distanzebene eine der Meridiancurve congruente Parabel ist, (welche sich durch einfache Verschiebung in den Hauptmeridian versetzen läßt) und die das Paraboloid in der Distanzebene berührende entwickelbare Fläche ein parabolischer Cylinder wird, dessen Erzeugenden in bildflächprojecirenden Verticalebenen liegen, und in die Bildfläche umgelegt leicht erhalten werden können, wenn man in jenem Punkte der Hauptmeridiancurve, welchen eine der Augdistanz gleiche Ordinatenlänge (*YZ* die Abscissenaxe) zukommt, die Tangente verzeichnet.

Bestimmt man die Berührungserzeugenden der parallel zu den Lichtstrahlen an diesen Cylinder geführten Berührungsebenen und die Durchstoßpunkte derselben mit der Distanzebene, so geben die Verbindungslinien dieser Punkte mit dem Auge die gewünschten Asymptotenrichtungen.

Nach dem hier Angegebenen unterliegt die Durchführung der Construction weiter keinen Schwierigkeiten, weßhalb wir dieselbe nicht weiter verfolgen, und zu zwei anderen Lösungsweisen übergehen wollen, von welchen insbesondere die eine, sich auf die zum Schlusse des vorhergehenden Paragraphes gegebene Bestimmungsweise einzelner Punkte der Curve mit Benützung von Meridianebenen basirend, sich äußerst einfach gestaltet.

Endlich sei hier noch bemerkt, daß, wie aus dem Nachfolgenden ersichtlich werden wird, selbst bei verhältnißmäßig sehr kleiner Augdistanz die reelle Axe der sich als Perspective ergebenden Hyperbel sehr groß wird, und der Mittelpunkt weit hinausfällt, aus welchem Grunde es wohl kaum der Mühe werth erscheinen dürfte, die benannten Bestimmungsstücke der Curve aufzusuchen, und aus diesen die letztere zu verzeichnen. Diese Aufgabe hat somit mehr ein theoretisches Interesse.

a) Indirecte Lösungsweise.

Man bestimme vor Allem den im Hauptmeridian xax Fig. 8, Taf. I, liegenden Punkt I der Selbstschattengrenze und den Punkt v_1 der Verschwindungslinie E_v ihrer Ebene, auf die im §. 12 angegebene Weise. Wie bereits erwähnt, geht durch I die Bildflächtrace E_b parallel zur Drehungsaxe *YZ*.

Faßt man das Verfahren zur Bestimmung einzelner Punkte der Curve mit Benützung von Meridianebenen ins Auge, so wird klar, daß jede Meridianebene sich mit der Curvenebene in einer verticalen Geraden schneidet, deren Entfernung von der Bildfläche durch die Höhe *Bt*, Fig. 7, Taf. II, des Dreiecks $B\gamma R$, welches die constante

Entfernung $B\gamma$ der Bildflächtrace E_b von der Drehungsaxe YZ zur Grundlinie, die umgelegte Horizontaltrace BR der Meridianebene und jene γR der Curvenebene $E_b E_v$ als Seiten hat, — und deren Abstand von der Drehungsaxe YZ durch die Seite BR dieses Dreiecks gegeben erscheint.

Diesem zufolge muß für in der Distanzebene liegende Punkte, welchen zur Bildfläche, also auch zu den Asymptoten parallele Sehstrahlen zukommen, die Meridianebene so gewählt werden, daß die Höhe des Dreiecks γBR der Augdistanz AO gleich wird. Die weitere Construction ist sodann in ähnlicher Weise wie beim Dreieck $B\gamma R$ Fig. 7, durchzuführen.

Ist nämlich αR, Fig. 8, Taf. I, die umgelegte Horizontaltrace der Curvenebene (αR durch γ parallel zu $v_1 O$), so ziehe man durch O die zu HH Parallele OR bis zum Durchschnitte R mit αR, wodann oR die umgelegte Horizontaltrace der bezüglichen Meridianebene angibt, drehe diesen Punkt um o in die Bildfläche nach R' ($oR' = oR$), und errichte in R' das Perpendikel $R'\Delta$ auf HH, welches die Meridiancurve in Δ trifft. Der Punkt Δ bestimmt den in die Bildfläche gedrehten, in der Distanzebene liegenden Punkt der Selbstschattengrenze, und bewegt sich beim Zurückdrehen in dem Parallelkreise $o_2\Delta$, daher seine orthogonale Projection t auf der Bildfläche in der Trace $o_2\Delta$ dieses Parallelkreises und in dem aus R auf $o_2\Delta$ errichteten Perpendikel Rt sich vorfindet.

Nachdem der Augpunkt A die Bildflächprojection des Auges ist, so hat man bloß t mit A zu vereinen, um die Richtung der fraglichen Asymptote zu erhalten.

Die Lage dieser Asymptote ergibt sich nun sehr einfach auf mehrfache Weise. Entweder, kann man die Tangente $v_2 b$ in dem Punkte I der Selbstschattengrenze, als Durchschnitt der betreffenden Berührungsebene, deren Verschwindungslinie AV ist, mit der schneidenden Ebene $E_b E_v$, ziehen, und die Länge v_2I nach Ib übertragen, wodurch in b ein Punkt der zweiten Asymptote $T_1 T_1$ gefunden ist, durch welchen diese parallel zu At läuft; oder man suche in derselben Weise, wie in §. 12 gezeigt wurde, die Tangente der Curve in jenem Punkte, welcher in dem Parallelkreise $o_2\Delta$ liegt. Zu diesem Behufe wird man einfach durch t eine zu AV Parallele $t\varphi$ bis zum Durchschnitte φ mit E_b zu ziehen und Iφ nach Iε zu übertragen haben, um in ε einen Punkt der verlangten Asymptote zu erhalten.

Directe Lösungsweise.

Man bestimme wieder, wie früher, den Punkt I sammt der Tangente $v_2 b$ in diesem Punkte der Curve, und lege $v_2 b$ um E_b in die Bildfläche, indem man bloß die Richtung dieser umgelegten Geraden, d. i. $v_2 O_1$ $(v_1 O_1 = v_1 O)$ angibt.

Ebenso denke man sich die Schattengrenze, welche eine der Meridiancurve congruente Parabel ist, um E_b in die Bildfläche gedreht, und sodann parallel zu sich selbst so lange verschoben, bis sie mit dem Hauptmeridiane zusammenfällt. Dies kann einfach durchgeführt werden, wenn man berücksichtigt, daß E_b eine zur Hauptaxe parallele Axe der Selbstschattengrenze bildet, welcher Axe im Durchschnittspunkte mit der Parabel eine zu $v_2 O_1$ parallele Tangente der letzteren zukommt.

Wir müssen also der obbezeichneten Verschiebung entsprechend eine gleichliegende Axe E'_b der Meridiancurve suchen, was auf doppelte Weise geschehen kann. Man kann nämlich parallel zu $v_2 O_1$ eine Tangente an den Hauptmeridian ziehen, und durch den Berührungspunkt I′ die verlangte Axe parallel zu E_b ziehen, oder bloß auf die umgelegte Horizontaltrace γR der Curvenebene aus o ein Perpendikel $o\alpha$ führen, und das Stück $\alpha\gamma$ der Trace nach $o\beta$ übertragen, wodann β einen Punkt von E'_b gibt; denn es stellt uns offenbar α den umgelegten Fußpunkt der Hauptaxe der Berührungscurve auf der Horizontalebene, daher $\alpha\gamma$ den Abstand dieser Axe von der Bildflächtrace E_b vor. Nachdem jedoch die Hauptaxe nach der Verschiebung mit YZ zusammenfallen soll, so gibt die Länge $\alpha\gamma$ zugleich den Abstand der Geraden YZ und E'_b. Werden die Punkte I und I' mit einander verbunden, so zeigt uns diese Gerade sowohl die Richtung als auch die Größe der vorgenommenen Verschiebung eines jeden Punktes an.

Nun hat man den Durchschnitt der Curve mit der Distanztrace [1]) ihrer Ebene zu suchen. Die Entfernung der Distanztrace von der Bildflächtrace ist durch die Länge $v_1 O$ gegeben, daher dieselbe, in die Bildfläche umgelegt, in dem Abstande $v_1 O$ von E_b zu ziehen käme. Nehmen wir aber gleichzeitig die Verschiebung der Trace in der Richtung II' vor, so wird man dieselbe durch r, $(\beta r = v_1 O)$, parallel zu YZ führen.

---

1) Distanztrace nenne ich den Durchschnitt einer Ebene mit der Distanzebene.

Die letztgezogene Gerade schneidet die Hauptmeridiancurve in λ. Die durch λ an den Hauptmeridian geführte Tangente $\lambda\varepsilon'$ stellt uns die umgelegte und verschobene Trace jener Berührungsebene des der Schattengrenzcurve entsprechenden Sehkegels auf der Basisebene $E_b E_v$ vor, welche durch den in der Distanzebene liegenden Punkt λ geht, und im Durchschnitt mit der Bildfläche die zu suchende Asymptote $T_1 T_1$ liefert. Demzufolge wird $T_1 T_1$ gefunden, wenn man durch O_1 eine Parallele $O_1 v_3$ zu $\lambda\varepsilon'$, bis zum Durchschnitte v_3 mit E_v, führt, den Punkt ε', in welchem $\lambda\varepsilon'$ der Geraden E'_b begegnet, parallel zu $I\,I'$ in die Bildflächtrace E_b nach ε zurückversetzt, und ε mit v_3 verbindet,

Da die Verschwindungslinie E_v eine Asymptote der Berührungscurve ist, so muß v_3 zugleich den Mittelpunkt c der Perspective darstellen, welcher hier, selbst bei der kleinen Augdistanz AO, noch außer die Zeichnungsgrenze fällt.

Behufs der Verbindung der Punkte v_3 und ε mußte eine Hilfsconstruction angewendet werden; es wurden nämlich durch ε zwei die Geraden $O_1 v_3$ in n, und E_v in m schneidende Linien, ferner $O_1 M$ durch O_1 parallel zu mn, $O_1 N$ durch O_1 parallel zu $n\varepsilon$ und MN parallel zu $m\varepsilon$ geführt und im Durchschnitte der beiden letztgezogenen Geraden ein zweiter Punkt N der Asymptote $T_1 T_1$ erhalten.

Die Tangente $\lambda\varepsilon'$ wird nicht zu ziehen nothwendig, wenn man berücksichtigt, daß die durch λ gehende, zu $v_2 O_1$ Parallele $\lambda\delta$ auf E'_b ein Stück $I'\delta$ abschneidet, welches, einer bekannten Eigenschaft der Parabel zufolge, blos von I' nach $I'\varepsilon'$, oder von I nach $I\varepsilon$ aufgetragen, die Punkte ε' und ε fixirt.

Sind die Asymptoten bekannt, so unterliegt die Bestimmung der senkrechten reellen Axe der Hyperbel weiter keinen Schwierigkeiten. Wir werden betreffs der Auffindung der Endpunkte dieser Axe zwei Tangenten der Schattengrenze so zu bestimmen suchen, daß sie zu einander geometrisch parallel und auf der Halbirungslinie XX des Asymptotenwinkels, welche eben die Richtung der Axe ist, senkrecht sind. Hiebei wird in Betracht zu ziehen sein, daß die sämmtlichen auf XX geometrisch senkrechten Perspectiven einem System gerader Linien im Raume entsprechen, welche sich in einem bestimmten Punkte der Distanztrace ihrer Ebene $E_b E_v$ schneiden. Um diesen Durchschnittspunkt zu erhalten, denken wir uns diese Geraden um E_b in die Bildfläche gedreht, und führen die Perspective $v_1 e$ einer solchen Linie durch v_1 senkrecht auf XX. Diese Gerade muß umgelegt durch e senkrecht auf E_b zu liegen kommen, weil v_1 der Fluchtpunkt aller in der Ebene $E_b E_v$ liegenden, auf der Bildflächtrace senkrechten Geraden ist, und es wird demgemäß die Länge $v_1 O$ von e nach ed aufzutragen sein, um in d den verlangten Durchschnittspunkt zu erhalten, welcher, entsprechend verschoben, nach d' ($dd' \# II'$) gelangt.

Wird endlich durch d' eine Tangente an den Hauptmeridian und durch d und O_1 die zu $d'f'$ Parallelen df und $O_1 v_4$ gezogen, so erhält man in E_v den Verschwindungspunkt v_4, und in E_b den Durchstoßpunkt f der zu suchenden Tangente $v_4 f$, daher in 1 den Scheitel der Hyperbel.

Selbstverständlich gibt $v_4 d_1$ zugleich die Größe der imaginären Axe dieser Curve.

Begnügt man sich mit einem conjugirten Axenpaar der Hyperbel, so ist am zweckmäßigsten, die Verbindungslinie der Punkte I und c als reelle Halbaxe und $v_2 b$ als wahre Länge der entsprechenden conjugirten imaginären Axe zu betrachten, und über diesen die Hyperbel zu verzeichnen.

Rotationsflächen mit einer auf der Bildfläche senkrechten Axe.

§. 14. Verzeichnung des Umrisses dieser Flächen.

Es sei mir erlaubt, gleichzeitig der Verzeichnung der Contour solcher Flächen zu erwähnen, insbesonders ein Verfahren anzugeben, vermittelst welchem man die senkrechten Axen der Contour einer so gestellten Rotationsfläche des zweiten Grades mit wenigen Linien finden kann.

Ist der Hauptmeridian eine beliebig gewählte Curve, so dürfte man wohl am schnellsten zum Ziele gelangen, wenn man sich die Fläche durch eine Reihe von zur Bildfläche parallelen Ebenen nach Parallelkreisen geschnitten denkt, die Perspectiven dieser Schnittlinien, die sich wieder als Kreise darstellen, verzeichnet, und durch eine Curve, den perspectivischen Umriß, umhüllt.

Nachdem die Bilder aller Kreismittelpunkte in die Perspective der Drehungsaxe fallen, und diese den Durchstoßpunkt der Axe mit der Bildfläche mit dem Augpunkte verbindet, so ist ersichtlich, daß diese Verbindungslinie immer eine Axe des Umrisses liefert, weil sie alle auf ihr senkrechten Sehnen desselben halbirt.

Um das Verfahren für die Bestimmung der senkrechten Axen des Umrisses einer Fläche des zweiten Grades gleich an einem Beispiele durchführen zu können, wählen wir den Punkt *o*, Fig. 9, Taf. II, als Durchstoßpunkt der Drehungsaxe eines Paraboloids mit der Bildebene, welche Fläche durch Rotation der Parabel *xax* um die Hauptaxe entstanden ist. Denken wir uns ferner die Meridiancurve vorerst in die durch das Auge gehende Meridianebene *Ao* versetzt, und hierauf um *Ao* in die Bildfläche gedreht, so ist die umgelegte Drehungsaxe durch *o* senkrecht auf *Ao* zu ziehen, und die Meridiancurve *xax* über der Hauptaxe durch den umgelegten Scheitel *a* zu verzeichnen. Das Auge gelangt nach der Drehung nach *O*, ($AO \perp Ao$ und gleich der Augdistanz).

Der den perspectivischen Umriß bildende Strahlenkegel wird durch die bezeichnete Meridianebene *Ao* nach zwei Erzeugenden *Ob*, *Oe* geschnitten, welche nach der Umlegung durch *O* tangentiell an die Parabel *xax* gehen, und im Durchschnitte *b* und *f* mit der verlängerten Trace *Ao* die Endpunkte der einen Axe *bf*, daher im Halbirungspunkt *o* derselben (welcher hier zufällig mit dem Durchstoßpunkte *o* der Drehungsaxe zusammenfällt), den Mittelpunkt der Contour geben.

Da sich die zweite Tangente *Oe* zumeist nicht direct an die Parabel ziehen läßt, indem der Berührungspunkt außer die Zeichnungsfläche fällt, so ist es am zweckmäßigsten derart vorzugehen, daß man vorerst die eine Tangente *Ob*, ferner in dem Punkte *c*, wo die Parabel von der Geraden *AO* getroffen wird, die Tangente *ecd* verzeichnet, das Stück *cd* nach *ce* überträgt, und *e* mit *O* verbindet, wodurch man die zweite Tangente *Oe* erhält.

Behufs der Bestimmung der zweiten Axe denke man sich an die Fläche einen dieselbe nach einem Parallelkreise berührenden Kegel gelegt, der seine Spitze im Durchschnitt der Rotationsaxe mit der Distanzebene hat. Weil die aus dem Auge an diesen Kegel gelegten Berührungsebenen zu *Ao* parallele Bildflächtracen besitzen und diese zugleich Tangenten an den Umriß bilden, so muß der Durchmesser der Bildflächtrace des in Rede stehenden Kegels die Länge der zweiten Axe des Umrisses geben.

Der besagte Kegel wird durch die Meridianebene *Ao* in zwei Erzeugenden geschnitten, welche, in die Bildfläche gedreht, durch die umgelegte Kegelspitze *S* ($OS \parallel Ao$) gehen, die Parabel *xax* berühren, und die Trace Ao in g schneiden, daher in og die zu suchende zweite Halbaxe bestimmen.

§. 15. Allgemeine Methode für die Verzeichnung der Selbstschattengrenze.

Die allgemeine Methode, vermittelst welcher die punktweise Bestimmung der Berührungscurve einer jeden Rotationsfläche mit einer auf der Bildfläche senkrechten Drehungsaxe vorgenommen werden kann, ist von der in §. 2 gegebenen nur insofern verschieden, als die Durchführung der Construction durch die verschiedene Lage der Kegelaxe eine Änderung erleidet. Die Axe der die Rotationsfläche in einem Parallelkreise berührenden Kegelfläche hat nämlich in diesem Falle eine auf die Bildfläche senkrechte Stellung, daher sie sich in o projecirt. Ebenso wird sich der durch die Kegelspitze gelegte Lichtstrahl, folglich auch sein Durchschnittspunkt mit der Parallelkreisebene auf der Bildfläche in der durch o gehenden, zu $A\frac{V}{2}$ Parallelen oq orthogonal projeciren.

Nimmt man eine beliebige auf YZ senkrechte Gerade lp als Trace einer mit dem Meridiane xax gedrehten Parallelkreisebene auf der Bildebene an, und zieht durch l an die Parabel xax die Tangente lt, so ist t die umgelegte Kegelspitze.

Es wird sich weiters darum handeln, die Lage des in gleicher Weise umgelegten Lichtstrahls, nachdem derselbe zuvor in die Meridianebene Ao gedreht wurde, zu ermitteln. Ist $\frac{O}{2}\frac{V}{2}$ der um $A\frac{V}{2}$ gedrehte Lichtstrahl, so ist selbstverständlich, daß der Punkt $\frac{V}{2}$ bei der Drehung in die Trace Ao nach B gelangt, wobei $AB = A\frac{V}{2}$ ist, und daß bei der nachfolgenden Umlegung die halbe Augdistanz $A\frac{O}{2}$ in die Gerade AO, also nach $A\frac{O_1}{2}$ fällt. Es ist somit $B\frac{O_1}{2}$ die verlangte Richtung, zu welcher parallel durch t der Lichtstrahl gezogen, auf der Trace pl ein Stück abschneidet, welches der Entfernung des bezeichneten Durchschnittspunktes von der Kegelaxe gleichkommt.

Der Parallelkreis projecirt sich auf der Bildfläche in dem aus o beschriebenen Kreise K vom Radius $\omega l = \omega p$; die Entfernung des Durchschnittspunktes von der Kegelaxe wurde soeben gefunden, daher diese Länge von o auf die Gerade oq aufgetragen, und aus dem

Endpunkte die beiden Tangenten an K gezogen, die Berührungspunkte m und n erhalten werden, welche die Bildflächprojectionen der fraglichen Punkte der Schattengrenze bilden.

Da es sich blos um die Berührungspunkte m und n handelt, so wird es zweckmäßiger sein, blos die halbe Größe oq der obgenannten Entfernung zu benützen, und aus q mit dem Kreisbogen mon den Parallelkreis in den Punkten m und n zu durchschneiden. Diese halbe Entfernung wird jedoch einfach gefunden, wenn man durch die Kegelspitze t, statt der zu $B\frac{O_1}{2}$ Parallelen, jene Gerade tr führt, deren Richtung $F\frac{O_1}{2}$ durch Halbiren der Länge AB, als Verbindungslinie der Punkte F und $\frac{O_1}{2}$ bestimmt wird. Man hat sodann blos die Länge ωr nach oq zu übertragen und, wie oben angedeutet, vorzugehen.

Nachdem in m und n die Bildflächprojectionen der Punkte, und in $o\omega$ die Entfernung derselben von der Bildebene bekannt ist, so sind auch deren Perspectiven 1 und 2 leicht zu ermitteln.

§. 16. Zweite allgemeine Lösungsweise.

Die in §. 3 bei verticaler Drehungsaxe durchgeführte Methode mit Benützung von die Fläche nach Meridianen berührenden Cylindern, kann auch hier mit Vortheil angewendet werden, und gestaltet sich daselbst bedeutend einfacher, weil die Meridianebenen bildflächprojecirend, und die Cylindererzeugenden parallel zur Bildfläche werden, mithin die Verschwindungslinien der ersteren sämmtlich durch A gehen, also innerhalb die Zeichnungsgrenze fallen, und die Erzeugenden geometrisch senkrecht auf den angenommenen Fluchtlinien der Meridianebenen stehen.

Die Construction selbst wird wie in §. 3, nur mit den sich aus der veränderten Stellung der Drehungsaxe ergebenden Abänderungen durchzuführen sein, daher hier nur noch bemerkt werden soll, daß jeder Meridian vorerst in jenen Ao gedreht, und sodann um Ao in die Bildfläche gelegt wird, wodurch er in die Curve xax fällt. Daß dann auch die Verschwindungspunkte der Tracen der Berührungsebenen (parallel zu den Lichtstrahlen an die Hilfscylinder) auf den zugehörigen Meridianebenen in die Gerade Ao fallen, ist klar.

Ebenso einfach wie in §. 4, und in gleicher Weise, läßt sich auch die Kugel als Hilfsfläche in Anwendung bringen.

§. 17. Punktweise Bestimmung der Selbstschattengrenze für Flächen der zweiten Ordnung.

Für Rotationsflächen des zweiten Grades kann wieder das Verfahren angewendet werden, daß man die Fläche durch eine Reihe von bildflächprojecirenden, zu den Lichtstrahlen parallelen Ebenen schneidet, und an die Schnittlinien, welche der Meridiancurve ähnlich sind, parallel zur Strahlenrichtung Tangenten führt.

Auch hier muß bemerkt werden, daß es am zweckmäßigsten ist, den Mittelpunkt der Fläche (wenn die Fläche einen Mittelpunkt besitzt) in der Bildfläche anzunehmen, — was, wie bereits in §. 1 gezeigt wurde, stets geschehen kann, wenn man nur den Hauptmeridian entsprechend vergrößert oder verkleinert darstellt, — weil dadurch die Construction vereinfacht wird.

Daß man jede solche Hilfsebene sammt den darin befindlichen Schnittlinien des Rotationskörpers und des Strahlencylinders um ihre Bildflächtrace in die Bildfläche legt, daselbst die Berührungspunkte bestimmt, überhaupt in ganz derselben Weise vorgeht, wie dies in den §§. 6, 8 und 10 durchgeführt erscheint, ist von selbst verständlich.

Hat die Fläche keinen Mittelpunkt, wie dies gerade in dem gewählten Beispiele, Fig. 9, der Fall ist, so wird die Durchführung der Construction eine Änderung erleiden. Beim Paraboloide ist noch der Umstand günstig, daß die sämmtlichen so erhaltenen Schnittcurven der Meridiancurve congruent sind.

Der aus o mit dem Radius og beschriebene Kreis ist offenbar die Bildflächtrace der Rotationsfläche.

Nimmt man die Trace MN einer Hilfsebene parallel zu $A\frac{V}{2}$ an, so kann die als Schnittlinie der Fläche resultirende Parabel in jene xax versetzt werden, woselbst die Bildflächtrace MN nach $\varepsilon\varphi k\psi$ zu liegen kommt. Diese Gerade $\varepsilon\psi\varphi k$ muß natürlich derart bestimmt werden, daß man in der Parabel xax eine Doppelordinate $\varphi\psi$ von der Länge $\beta\gamma$ sucht, also $o\beta' = \beta\delta = \delta\gamma$ macht, und $\beta'\psi \parallel YZ$ bis zum Durchschnitte ψ mit der Parabel zieht.

Wird nun an die Parabel xax parallel zu den in gleicher Weise in die Parabel xax versetzten Lichtstrahl $B\frac{O_1}{2}$ die Tangente $T\varepsilon$

gezogen, und der Abstand des Berührungspunktes s von der Axe YZ, von δ nach $\delta'\delta$ übertragen, so ist δ' die Bildflächprojection des in der Ebene MN liegenden Punktes der Berührungscurve, dessen Perspective auch leicht gefunden werden kann, weil sein Abstand von der Bildebene durch die Entfernung des Punktes s von der Geraden $\varphi\psi$ gegeben ist.

§. 18. Axenbestimmung.

Die Bestimmung der Perspective der Selbstschattengrenze durch ihre Axen gestaltet sich hier gleichfalls etwas einfacher als bei verticaler Drehungsaxe.

Hat die Fläche einen Mittelpunkt, so sind (unter der Voraussetzung, daß dieser in der Bildfläche gedacht wird) die durch Punkte der Bildflächtrace der Fläche gelegten Berührungsebenen senkrecht auf der Bildfläche, weßhalb die an diese Trace parallel zu $A\frac{V}{2}$ geführten Tangenten, in den Berührungspunkten, zwei in der Bildfläche liegende Punkte der Selbstschattengrenze liefern. Die Verbindungslinie dieser Punkte gibt sofort die Bildflächtrace der Ebene dieser Curve und zugleich, da sie den Mittelpunkt der Fläche enthält, die Perspective eines Diameters.

Wird ferner durch den Mittelpunkt der Fläche eine zu $A\frac{V}{2}$ parallele Ebene gelegt, und werden die Perspectiven der in derselben liegenden Punkte der Schattengrenze gesucht, so entsprechen diesen Perspectiven auf $A\frac{V}{2}$ senkrechte Tangenten, daher die Verbindungslinie derselben eine Axe der Curve bilden wird.

Der zu dieser Axe conjugirte Durchmesser geht durch den Halbirungspunkt der ersteren parallel zu den besagten Tangenten, hat somit eine zur Bildfläche parallele Lage, woraus schon hervorgeht, daß die Endpunkte desselben mit Hilfe einer durch diese Gerade gelegten, zur Bildfläche parallelen Ebene, in der Perspective des in dieser Ebene liegenden Parallelkreises gefunden werden.

Bei einem Paraboloide gestaltet sich die Lösung noch einfacher, indem die Berührungscurve eine auf der Bildfläche und auf $A\frac{V}{2}$ senkrechte, der Curve xax congruente Parabel ist. Die Fluchtlinie der Ebene, in welcher die Berührung erfolgt, ist somit durch A senkrecht auf $A\frac{V}{2}$ zu verzeichnen, und muß zugleich Tangente an die Perspective der Selbstschattengrenze im Augpunkte A sein.

Um die Bildflächtrace dieser Ebene zu bestimmen, denken wir uns die zu $A\frac{V}{2}$ parallele Meridianebene in die Lage Ao gedreht und sodann um Ao in die Bildfläche gelegt. Der Meridian fällt hiebei nach xax, während die Richtung des Lichtstrahls in $B\frac{O_1}{2}$ gegeben ist. Führt man daher parallel zu $B\frac{O_1}{2}$ an die Parabel xax die Tangente $Ts\varepsilon$, so berührt diese im Punkte s, welcher sich vertical in u projecirt. Der Punkt u beschreibt beim Zurückdrehen den Kreisbogen $u\alpha$, welchen die verlangte auf $A\frac{V}{2}$ senkrechte Bildflächtrace I II berührt.

Der Berührungspunkt gibt die Bildflächprojection, der Abstand su die Entfernung des zweiten Endpunktes des Durchmessers der Selbstschattengrenze von der Bildebene, daher ist dessen Perspective leicht gefunden, und gibt mit A verbunden diesen Durchmesser selbst.

Wie die zugehörige zweite Axe ermittelt wird, wurde bereits angegeben.

In dem hier gewählten Beispiele fiel zufällig die Bildflächtrace mit der Fluchtlinie zusammen, woraus hervorgeht, daß diesfalls die Ebene der Selbstschattengrenze durch das Auge geht, die Selbstschattengrenze sich daher als die Gerade I II perspectivisch darstellt. Dies war auch schon aus dem Umstande zu entnehmen, daß die Verbindungslinie der Punkte m und n durch den Augpunkt A gieng.

§. 19. Construction der Selbstschattengrenze bei zur Bildfläche parallelen Lichtstrahlen.

Nimmt man den Fluchtpunkt V der Lichtstrahlen in unendlicher Entfernung, und die Richtung AV als gegeben an, und führt auf Grundlage dieser Annahme die Lösung der bisher behandelten Aufgaben nach denselben Grundsätzen und in gleicher Weise wie bisher durch, so wird man ohne die geringsten Schwierigkeiten zu dem gewünschten Resultate gelangen, und es werden sich noch bedeutende, aus dieser besonderen Lage der Lichtstrahlen folgende Vereinfachungen ergeben. So z. B. wird bei der ersten allgemeinen Lösungsweise (§. 2) der Mittelpunkt ω jenes Kreisbogens $\alpha_2 o_2 \beta_2$, welcher die in die Bildfläche umgelegten Punkte $\alpha_2 \beta_2$ der Berührungscurve enthält, in die verlängerte Trace $bb_1\delta$ der betreffenden Parallelkreisebene fallen, und es werden daher je zwei in einem Parallelkreise befindliche Punkte der Selbstschattengrenze gleich weit vor und hinter der Bildfläche liegen und dieselbe Bildflächprojection besitzen.

Bei den Rotationsflächen des zweiten Grades ist vorzugsweise zu beachten, daß die Ebene der Berührungscurve bildflächprojecirend wird, daher ihre Fluchtlinie durch den Augpunkt geht.

§. 20. Schlußbemerkungen.

Durch das bisher Gegebene wäre alles Wichtigere für die directe Construction der Selbstschattengrenze der Umdrehungsflächen bei parallelen Lichtstrahlen in perspectivischer Projection, für zur Bildfläche parallele oder auf derselben senkrechte Rotationsaxen angedeutet, und wäre höchstens nur noch zu bemerken, daß die Constructionen für den Fall, wo die Drehungsaxe nicht vertical, jedoch zur Bildfläche parallel ist, also gleichfalls in der Bildfläche liegend gedacht werden kann, keine wesentliche Änderung erfahren.

Complicirter jedoch gestaltet sich die Lösung der gestellten Aufgabe, wenn die Drehungsaxe gegen die Bildfläche geneigt ist, wiewohl eine entsprechende Anwendung derselben Grundgedanken auch hier zum gewünschten Ziele führt. Die diesbezüglichen Constructionen dürften in einer später folgenden Abhandlung erörtert werden.

Die directe Bestimmung der Selbstschattengrenze an Rotationsflächen mit verticaler, in der Bildfläche liegender Axe bei parallelen Lichtstrahlen ist in G. Schreiber's Port-Folio in einem speciellen Falle durchgeführt; es ist dort jenes in §. 2 angegebene Verfahren mit Benützung von berührenden Kegeln angewendet. Obzwar ich in §. 2 denselben Grundgedanken beibehalten mußte, so habe ich doch einige, meiner Ansicht nach wesentliche Vereinfachungen dieser Lösungsweise angeführt, welche es ermöglichen, mit jedem aliquoten Theile der Augdistanz, und bei beliebiger Neigung der Lichtstrahlen gegen die Bildfläche ohne bedeutende Mehrarbeit die Construction durchzuführen, was eben für die Praxis ein bedeutender Vortheil ist.

Weiter ist, so viel mir bekannt, über diesen Gegenstand nichts veröffentlicht worden.

Eine ähnliche Idee wie jene, welche der directen Bestimmung der Asymptoten der Berührungscurve (§. 11, *b*) zu Grunde liegt, habe ich auch bei der Construction der ebenen Schnitte der Kegel- und Cylinderflächen in der Perspective benützt, und die bezügliche Abhandlung in Dr. O. Schlömilch's Zeitschrift für Mathematik und Physik, Jahrgang 1867, veröffentlicht.

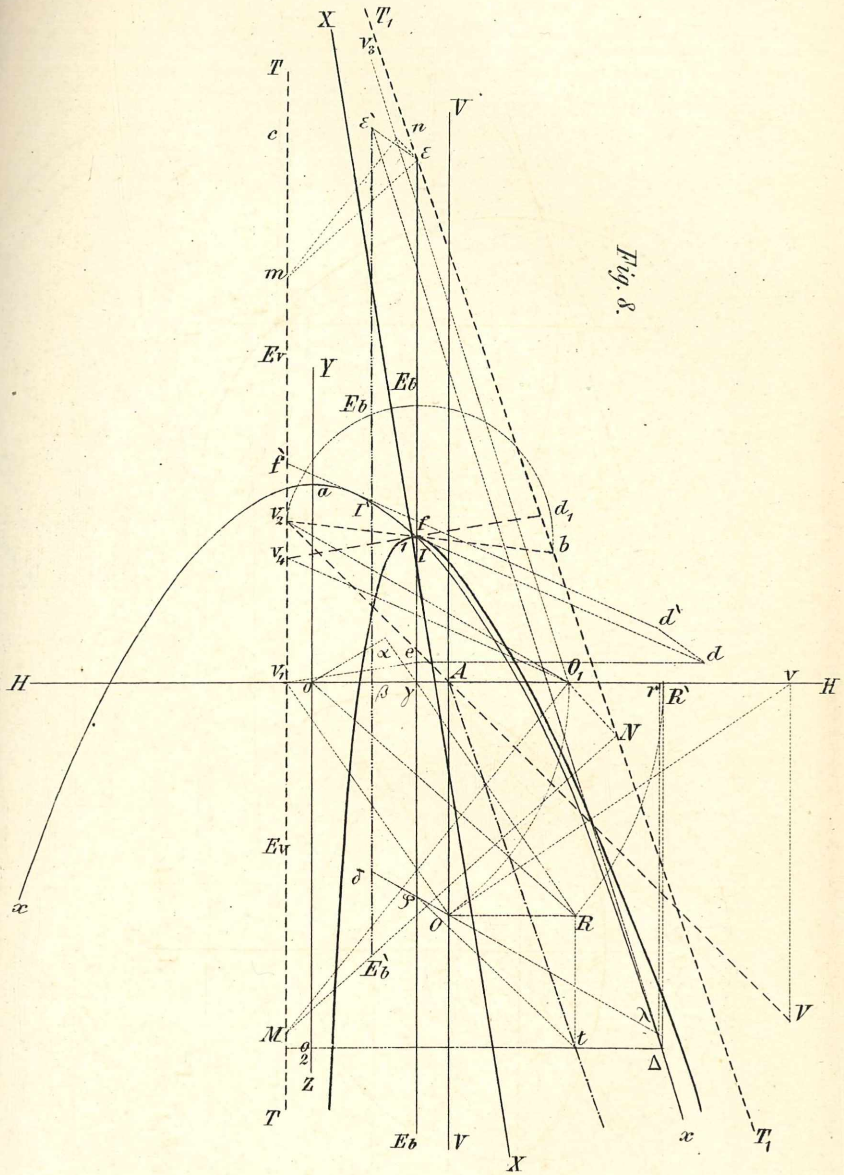


Fig. 8.

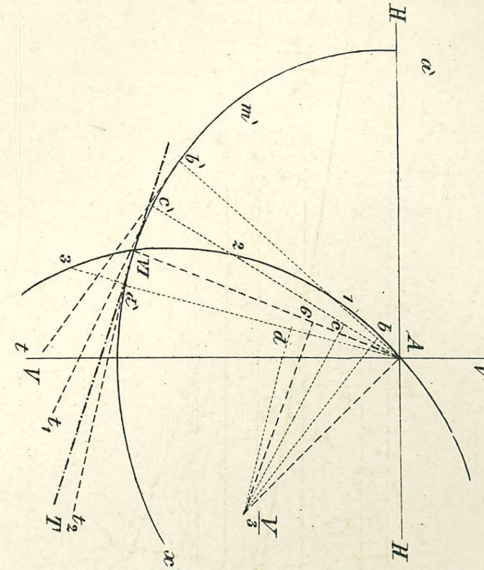


Fig. 2.

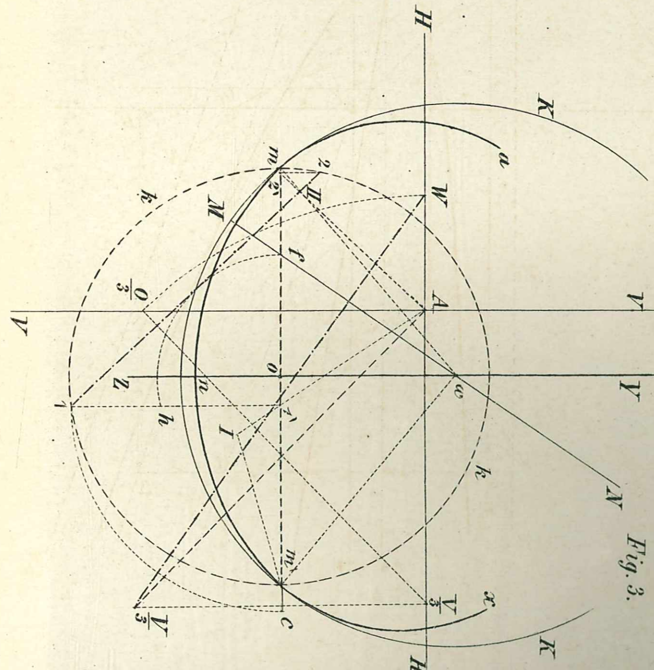
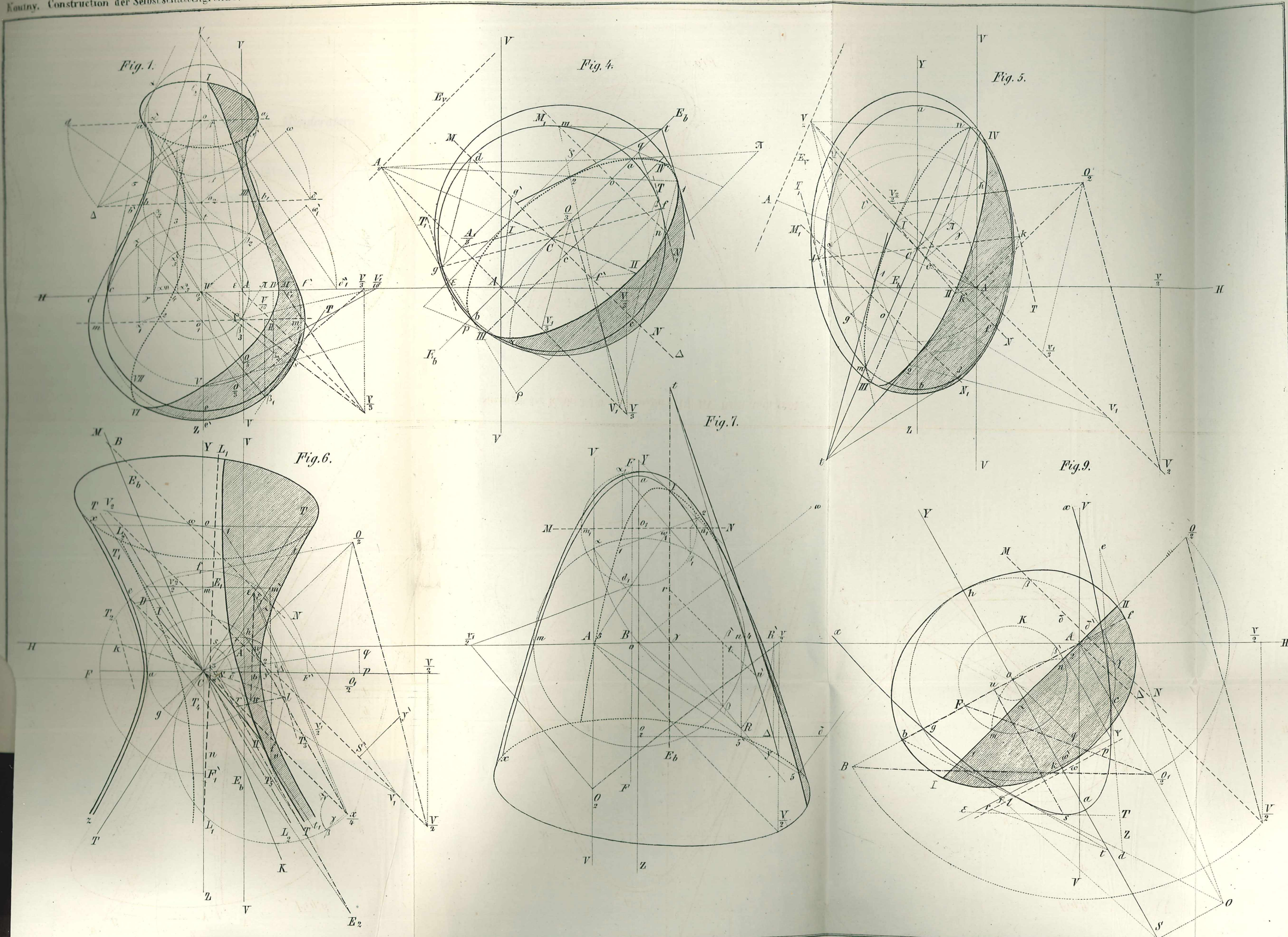


Fig. 3.

Aus d. k. k. Hof- u. Staatsdruckerei.



Aus d. k. k. Hof- u. Staatsdruckerei.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1867

Band/Volume: 55_2

Autor(en)/Author(s): Koutny Emil

Artikel/Article: Construction der Selbstschattengrenze von Rotationsflächen in der Perspective, unter Voraussetzung paralleler Lichtstrahlen. 215-262