Experimentelle Bestimmung des Leitungswiderstandes in Platin-Blechen.

Von **Albert v. Obermayer.**

(Ausgeführt im k. k physikalischen Institute.)

(Mit 1 Tafel.)

In einer Abhandlung über den Durchgang des elektrischen Stromes durch eine Ebene, insbesondere eine kreisförmige [1], hat Kirchhoff zunächst einen Ausdruck für das Potentiale in einer, von einem elektrischen Strome durchflossenen Scheibe und dann einen anderen Ausdruck für den Leitungswiderstand einer solchen Scheibe aufgestellt. Der Ausdruck für das Potentiale ist für eine kreisförmige Scheibe von Kirchhoff selbst, und später ein anderer ähnlicher Ausdruck für eine quadratische Scheibe von Quincke [2]) verificirt worden. Der Leitungswiderstand der Scheibe war jedoch so gering, daß Kirchhoff aus den Messungen desselben nichts die Theorie Bestätigendes noch ihr Widersprechendes schließen konnte.

Ich habe mehrere Widerstandsbestimmungen an Blechen ausgeführt, zunächst um eine von Herrn Prof. Stefan abgeleitete theoretische Formel für den Widerstand rechteckig begrenzter Blechstreifen und sodann, um auch die von Kirchhoff angegebene Formel für den Widerstand kreisförmiger Bleche zu prüfen. Ich wählte zu diesen Bestimmungen gewalzte Platinbleche, da dieselben in genügender Größe und dabei von geringer, aber ziemlich gleichförmiger Dicke zu erhalten sind, und Platin einen großen specifischen Leitungswiderstand besitzt, stets metallisch blank bleibt und von Quecksilber nicht angegriffen wird.

Die Dicke der rechteckigen Bleche ist aus nachfolgenden Messungen zu ersehen, welche an einem von denselben abge-

---

[1]) Kirchhoff. Pogg. Ann. Bd. 64, S. 497.

[2]) Quincke Pogg. Ann. Bd. 97, S. 382.

schnittenen Streifen mit einem Sphärometer vorgenommen wurden, das $0\cdot001^{mm}$ direct abzulesen, $0\cdot0005^{mm}$ noch zu schätzen gestattet.

Distanz vom Ende des Streifens	3^{mm}	52^{mm}	106^{mm}	149^{mm}	195^{mm}	240^{mm}
Dicke	0·0118	0·0115	0·0112	0·0111	0·0115	0·0116

Jede einzelne Zahl ist ein Mittelwerth aus zwanzig bis fünfundzwanzig Messungen.

Für die eine verwendete kreisförmige Scheibe, deren Durchmesser $162\cdot5^{mm}$ war, ergab sich die Blechdicke im Mittel mit $0\cdot0123^{mm}$.

Die Blechlängen, deren Widerstände gemessen werden sollten, wurden durch das Aufsetzen kreisförmiger Elektroden eingeschaltet. Um mit Leichtigkeit die richtige Elektrodenentfernung treffen zu können, wurden die Bleche auf einer Spiegelglastafel ausgebreitet und darüber ein Cartonblatt gelegt, welches genau nach der Contour des Bleches zugeschnitten und mit kleinen kreisförmigen Löchern versehen war, die sich genau in den erforderlichen Abständen befanden. Die Löcher ließen den Elektroden nur sehr wenig Spielraum, so daß die Fehler der eingeschalteten Blechlängen sehr gering anzuschlagen sind.

Den Elektroden gab ich folgende Gestalt: Eine kleine Holzscheibe war mit drei Füßen versehen, einen davon bildete der Elektrodendraht selbst. Sein oberes, durch die Holzscheibe gestecktes, amalgamirtes Ende ragte in ein auf dieser aufsitzendes Quecksilbernäpfchen. Der untere Abstand der Füße war ein so großer, daß stets die Elektrode am Bleche und die beiden anderen Füße auf der Spiegelglastafel aufruhen konnten. Die unteren Flächen der Füße waren so abgeschliffen, daß sie nahezu in einer Ebene lagen, jene des Elektrodendrahtes wurde noch amalgamirt.

Elektroden wendete ich in zweierlei Größen an; solche von $4\cdot835^{mm}$ und solche von $0\cdot919^{mm}$ Durchmesser. Der die letzteren bildende Draht war zwischen zwei Holzbacken eingekittet, die dessen Verbiegen verhindern sollten. Er stand über deren unterem Ende nur um 2 bis 3^{mm} vor.

Das Amalgamiren der unteren Elektrodenflächen mußte während der Beobachtung öfter wiederholt werden, jenes der kleineren Elektroden sogar vor jeder einzelnen Messung. Es geschah durch Einreiben der befeuchteten Elektrodenfläche mit salpetersaurem Quecksilberoxyd, sofortiges Aufnehmen eines kleinen Quecksilbertropfens und nochmaliges Abreiben mit weichem Filtrirpapier. Als beiläufiges Prüfungsmittel des richtigen Grades der Amalgamation diente das Aufsetzen der drei Füße auf die untere Fläche einer in der Hand gehaltenen kleinen Spiegelglasscheibe. Es mußte hiebei zwischen der Elektrodenfläche und der Glastafel eine dünne Quecksilberschichte sichtbar sein, welche glänzend am Glase anlag, die Contour der Elektroden jedoch nicht überragte. Trotz dieser Vorsichtsmaßregeln fiel es noch immer schwer, die Berührung der Blech- und Elektrodenflächen stets in gleicher Weise herzustellen.

Das Messen der Widerstände geschah nach der Brückenmethode. Die zu Grunde gelegte Einheit war eine Spirale eines $2\cdot5^{mm}$ dicken Kupferdrahtes und hatte ungefähr einen Widerstand von 0·056 Siemen'schen Einheiten.

Das Quecksilbernäpfchen jeder Elektrode wurde durch einen 13 bis 14^{mm} langen und $4\cdot8^{mm}$ dicken zweckmäßig gebogenen Kupferdraht mit je einem nicht mehr auf der Spiegelglasplatte stehenden Quecksilbernäpfchen verbunden; diese waren wieder durch 40 bis 50^{mm} lange Drähte, das eine mit der Einheit, das andere mit dem Ende der Brücke verbunden. In dieser Weise konnten die Elektroden bequem in jeder beliebigen Entfernung von einander aufgestellt oder abgehoben werden, ohne sonst etwas verändern zu müssen.

Die Enden des Meßdrahtes waren bei der von mir verwendeten Brücke durch Quecksilbernäpfchen gespannt, die gerade eine Drahtlänge von einem Meter zwischen sich ließen. Der Draht selbst lag auf der Unterlage auf und der Schlitten glitt darauf. Ich verwendete als Brückendraht anfänglich einen Aluminiumdraht von etwa $1\cdot5^{mm}$ Dicke. Da zeigten sich in den Quecksilbernäpfchen so bedeutende und ungleiche Übergangswiderstände, daß ich diesen Draht entfernen mußte. Nachdem ich mehrere Stahldrähte von verschiedenem Durchmesser versucht hatte, genügte endlich einer, dessen Durchmesser $0\cdot5^{mm}$ war. Die Brücke blieb einige Zeit richtig, wie wiederholte Prüfungen derselben ergaben. Ich maß mit dieser Anordnung die Widerstände in den Blechstreifen.

Als nun mit den Messungen einige Zeit ausgesetzt und dann mit jenen des Widerstandes des kreisförmigen Bleches begonnen wurde, traten wieder sich beständig ändernde Übergangswiderstände in den Quecksilberschälchen auf. Ich ließ nun die Enden des Stahldrahtes an dicke Kupferdrähte löthen. Die Löthstellen wurden mit Siegellack überzogen und der übrig bleibende amalgamirte Theil des Kupferdrahtes stellte die leitende Verbindung mit dem Quecksilber des Schälchens her. Der Brückendraht wurde außerdem noch an jenen Stellen zunächst der Schälchen, wo nicht mehr gemessen wurde, an die Unterlage angesiegelt. Diese Anordnung zeigte eine vollkommene Constanz, sie hatte aber einen Constructionsfehler, welcher dadurch corrigirt werden mußte, daß der Brückendraht an jener Stelle, welche mit den eingeschalteten Widerständen correspondirte, um 13 Theilstriche des in Millimeter getheilten Maßstabes kürzer gerechnet wurde.

Hat man den Widerstand w' für einen 1 Meter langen Draht ausgerechnet, so findet man den corrigirten w

$$w = \frac{987\,w' - 13}{1000}.$$

Die Prüfung der Brücke auf ihre Richtigkeit geschah mittelst vier Drähten von gleichem Widerstande, welche so combinirt wurden, daß auf der Seite, wo der Widerstand gemessen werden sollte, stets nur ein Draht als Widerstand blieb, während auf der anderen, mit der Einheit correspondirenden Seite nacheinander 1, 2, 3 Drähte hinter einander eingeschaltet wurden.

Bezeichnet man durch n_k die aufeinander folgenden Ablesungen für diese Drahtcombinationen, so hat man, wenn der Nullpunkt der Scala auf Seite der Einheit liegt, dafür:

$$n_k = \frac{(1000+\beta)\,k}{k+1}.$$

Dabei ist vorausgesetzt, daß es angehe, nur in einem der Schälchen ein β anzunehmen, was man durch Verschieben des Brückendrahtes, ehe derselbe noch mit der Unterlage verbunden wird, erreichen kann. Durch Probiren findet man nun, daß $\beta = -13$ im vorliegenden Falle am besten entspricht, denn es ist für:

k	Verhältniß der eingeschalteten Widerstände		n_k berechnet	n_k beobachtet
1	1	1	493·3	493·5
2	2	1	657·8	658·0
3	3	1	741·3	740·2.

Unter den verschiedenen Zusammenstellungen der Brücke fand ich, daß jene die beste ist, wo der Brückendraht selbst sehr großen Widerstand hat; es verschwinden dann gegen den Widerstand des Drahtes die kleinen Übergangswiderstände in den Schälchen; — und wo der Brückendraht an einen dicken, gleich in ein Quecksilbernäpfchen tauchenden Kupferdraht angelöthet ist.

Die Widerstandsmessungen selbst zerfallen in zwei Abtheilungen; die eine bezieht sich auf die Widerstände rechteckiger Blechstreifen, die andere auf jene von Kreisscheiben. Beide sind im Nachfolgenden gesondert abgehandelt.

Der Widerstand in rechteckigen Blechstreifen.

Für den Widerstand in rechteckigen Blechstreifen hat Herr Prof. Stefan auf theoretischem Wege einen allgemein giltigen Ausdruck und aus demselben das ganz einfache Gesetz abgeleitet, daß die Summe der Widerstände, welche man erhält, wenn man das eine Mal die Elektroden in gleichen, bestimmten Entfernungen von der Mitte, das andere Mal in denselben und gleichen Entfernungen von den Enden des Bleches aufsetzt, eine constante Größe ist.

Bedeutend vereinfacht wird die allgemeine Formel, wenn eine Dimension des Blechstreifens unendlich groß angenommen wird, z. B. die Länge desselben. Sie wird dann für den Fall, wo die Elektroden in der Breitenmitte des Streifens aufgesetzt werden:

$$w_r = \frac{1}{\pi k \delta} \log \frac{b}{2\pi\rho} + \frac{1}{\pi k \delta} \log \left(e^{\frac{\pi a}{b}} - e^{-\frac{\pi a}{b}} \right),$$

worin w_r den Widerstand, a die Distanz des Elektroden, b die Breite, δ die Dicke, k die Leitungsfähigkeit des Bleches, ρ den Halbmesser der Elektroden bedeutet.

Diese Formel gilt angenähert auch noch dann, wenn die Widerstände an einem begrenzten Streifen gemessen werden, dessen Länge jedoch mehrmals größer als die Breite ist, und wenn dabei die Elektroden symmetrisch zur Längenmitte auf der Breitenmitte des Streifens, nicht zu nahe den Blechenden, aufgesetzt werden.

Ich wählte diese Formel zur Vergleichung mit den Messungen, soweit diese der angegebenen Bedingung entsprechen. Das Eingangs erwähnte, nur der allgemeinen Formel folgende Gesetz suchte ich durch Bildung der Summen zu prüfen.

Die Resultate w_r für den Widerstand, welche aus der eben angeführten theoretischen Formel dadurch erhalten werden, daß alle Größen in Millimetern eingesetzt werden, hängen mit den beobachteten Widerständen w_m durch die einfache lineare Gleichung

$$w_m = a + bw_r$$

zusammen. Die Constante a enthält dabei den Zuleitungswiderstand und einen allenfallsigen Übergangswiderstand aus dem Draht in das Blech; die Constante b ist der Reductionsfactor, welcher das Verhältniß der zu den Messungen verwendeten Einheit und jener angibt, welche man in der theoretischen Formel zu Grunde legt, indem man in dieselbe alles in Millimetern einsetzt und $\pi k\delta = 0{\cdot}5$ annimmt. Die Constante b ist somit dem specifischen Leitungswiderstande des Blechmaterials und der Blechdicke verkehrt proportional. Die beiden Constanten a und b wurden für die vier angestellten Beobachtungsreihen nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnet. Bei diesen Versuchsreihen wurden die Elektroden stets symmetrisch zur Längenmitte und in der Breitenmitte des Streifens aufgesetzt.

Im Nachfolgenden ist eine Zusammenstellung der berechneten und der Versuchsergebniße gegeben, welche enthält: die Elektrodendistanz in Theilen der Blechlänge; den berechneten Widerstand w_r, den gemessenen Widerstand w_m und den mit Hilfe der Relation $w_m = a + bw_r$ berechneten Widerstand w_m; endlich die Summen jener beiden gemessenen w_m, welche eine constante Größe sein sollen. Diese Summen sind für je zwei Beobachtungen nur bei jener angesetzt, welche der größeren Elektroden-Distanz entspricht.

A. Widerstände in einem Blechstreifen von 413$^{\text{mm}}$ Länge und 32·7$^{\text{mm}}$ Breite.

I. Bei Anwendung von Elektroden, deren Durchmesser 4·835$^{\text{mm}}$ ist.

$$w_m = 0{\cdot}0540 + 0{\cdot}03476\, w_r.$$

Elektroden-Distanz	w_r	w_m gemessen	w_m berechnet	Summe
0·025	3·2210	—	—	—
0·05	5·4627	0·241	0·2439	—

Elektr. Distanz	w_r	w_m gemessen	w_m berechnet	Summe
0·10	9·4679	0·383	0·3831	—
0·20	17·4043	0·663	0·6589	—
0·30	25·3400	0·932	0·9348	—
0.40	33·2756	1·207	1·2106	—
0·50	41·2113	1·488	1·4864	2·976
0·60	49·1471	1·756	1·7623	2·963
0·70	57·0824	2·039	2·0380	2·971
0·80	65·0178	2·323	2·3139	2·986
0·90		2·599	—	2·982
0·95	—	2·756	—	2·997

II. Bei Anwendung von Elektroden, deren Durchmesser 0·919^{mm} ist.

$$w_m = 0{\cdot}1445 + 0{\cdot}03496\, w_r.$$

Elektr.-Distanz	w_r	w_m gemessen	w_m berechnet	Summe
0·025	6·5422	0·367	0·3732	—
0·05	8·7838	0·449	0·4516	—
0·10	12·7890	0·605	0·5916	—
0·20	20·7254	0·867	0·8691	—
0·30	28·6611	1·149	1·1466	—
0·40	36·5967	1·426	1·4241	—
0·50	44·5324	1·690	1·7015	3·380
0·60	52·4682	1·960	1·9790	3·386
0·70	60·4035	2·277	2·2516	3·426
0·80	68·3389	2·531	2·5339	3·398
0·90	—	2·837	—	3·442
0·95	—	2·984	—	3·433
0·975	—	3·055	—	3·422

B. Widerstände in einem Blechstreifen von 400^{mm} Länge und 86^{mm} Breite.

III. Bei Anwendung von Elektroden, deren Durchmesser 4·835^{mm} ist.

$$w_m = 0{\cdot}05287 + 0{\cdot}03358\, w_r.$$

Elektr.-Distanz	w_r	w_m gemessen	w_m berechnet	Summe
0·025	2·8832	—	—	—
0·05	4·4004	0·202	0·2006	—
0·10	6·2789	0·265	0·2637	—
0·20	9·3058	0·366	0·3654	—
0·30	12·2338	0·462	0·4637	—
0·40	15·1566	0·561	0·5619	—
0·50	18·0789	0·658	0·6600	1·316
0·60	21·0014	0·755	0·7581	1·316
0·70	23·9240	0·875	0·8563	1·319
0·80	26·8463	0·958	0·9544	1·324
0·90	—	1·062	—	1·327
0·95	—	1·128	—	1·330

IV. Bei Anwendung von Elektroden, deren Durchmesser 0·919^{mm} ist.

$$w_m = 0{\cdot}13946 + 0{\cdot}03386\, w_r.$$

Elektr.-Distanz	w_r	w_m gemessen	w_m berechnet	Summe
0·025	6·2043	0·345	0·3495	—
0·05	7·7215	0·402	0·4009	—
0·10	9·5999	0·472	0·4645	—
0·20	12·6269	0·571	0·5671	—
0·30	15·5549	0·665	0·6662	—
0·40	18·4777	0·757	0·7652	—
0·50	21·4000	0·861	0·8642	1·722
0·60	24·3225	0·962	0·9631	1·719
0·70	27·2451	1·066	1·0621	1·731
0·80	30·1674	1 163	1·1611	1·734
0·90	—	1·274	—	1.746
0·95	—	1·344	—	1·746
0·975	—	1·399	—	1·734

Die gemessenen Widerstände sind Mittelwerthe aus zwei bis drei Messungen, welche von einander in der Mehrzahl der Fälle um 0·002 bis 0·003 und nur in einzelnen um 0·01 abweichen.

Die Werthe der Constanten *a*, *b* stimmen in den vier Beobachtungsreihen genügend genau überein. Die gemessenen und die berechneten Werthe von w_m fallen sehr nahe zusammen, die Fehler sind bald positiv, bald negativ. Die Summen sind nicht ganz constant, sie sind größer, wenn sehr verschiedene Widerstände addirt werden. Für die Elektroden, deren Durchmesser $4 \cdot 835^{mm}$ ist, beträgt ihre größte Abweichung 0·7 bis 1%, für jene von $0 \cdot 919^{mm}$ Durchmesser ungefähr 1·4% des kleinsten Werthes.

In der beigelegten Tafel sind die Elektroden-Distanzen als Abscissen in Theilen der durch die Linie *AB* angestellten Blechlänge und die zugehörigen berechneten, mit 50 multiplicirten w_m als Ordinaten aufgetragen. Die den berechneten Werthen entsprechenden Curven sind ausgezogen. Der punktirte Theil der Curven gehört zu denjenigen gemessenen Werthen, welche mit der Formel nicht mehr verglichen werden konnten.

Die Curven sind mit den entsprechenden Nummern der Versuchsreihen bezeichnet.

In der Abscisse 0·5 der durch Messung erhaltenen Curven soll ein Wendepunkt liegen und die Curvenzweige oberhalb und unterhalb desselben sollen vollkommen congruent sein. Es ist dies auch in der That nahezu der Fall.

Der Widerstand in kreisförmigen Blechen.

Für den Widerstand in kreisförmigen Blechen leitete Kirchhoff folgenden Ausdruck ab:

$$w_r = \frac{1}{2\pi k \delta} \log \left[\left(\frac{\overline{A_1 A_2}}{\rho} \right)^2 \frac{\overline{A_1 A_2'} \cdot \overline{A_2 A_1'}}{\overline{A_1 A_1'} \quad \overline{A_2 A_2'}} \right]$$

in welchem ρ der Elektrodenhalbmesser, δ die Blechdicke, k der specifische Leitungswiderstand sind. Der constante Factor vor dem Logarithmenzeichen kann Eins gesetzt werden, was auch im Nachfolgenden geschehen wird. Nennt man C den Mittelpunkt des Blechkreises, dessen Halbmesser r ist, und setzt die Elektroden in Punkten A_1 und A_2 am Bleche auf, so sind $A_1 C$ und $A_2 C$ deren Abstände vom Mittelpunkte und $A_1 A_2$ ihr gegenseitiger Abstand.

Die Punkte A_1' und A_2' liegen beziehungsweise mit A_1 und A_2 auf demselben Halbmesser und dieser ist die mittere geometrische Proportionale zwischen ihren Abständen vom Mittelpunkte; es ist also:

$$A'_1C = \frac{r^2}{A_1C} \text{ und } A'_2C = \frac{r^2}{A_2C}.$$

$A_1A'_1$ und $A_2A'_2$ sind somit die Abstände zweier stets auf einem und demselben Halbmesser gelegener zusammengehöriger Punkte; $A_1A'_2$ und $A_2A'_1$ die Abstände zweier im Allgemeinen nicht auf einem Halbmesser liegenden Punkte, wovon einer innerhalb, der andere außerhalb des Kreises liegt.

Um die Formel zur Berechnung verwenden zu können, müssen die Größen $\overline{A_1A_2}$ $\overline{A_1A'_1}$ u. s. w. durch den Elektrodenabstand und den Halbmesser r für den betrachteten Fall ausgedrückt werden. Ich setze nun voraus, die Elektroden werden nach einander in verschiedenen Entfernungen auf einer Sehne aufgesetzt und die Formel soll für diesen Fall transformirt werden. Diese Annahme ändert nichts an der Allgemeinheit des Problems.

Ich denke mir nun in den Mittelpunkt des Kreises den Anfangspunkt der Coordinaten verlegt und ziehe durch denselben einen Durchmesser parallel zur gegebenen Sehne; er sei die y-Achse; senkrecht darauf ziehe ich die x-Achse. Ist ferner 2φ der der Sehne entsprechendeMittelpunktswinkel, so ist $r \sin\varphi$ die Größe der halben Sehne und $r\cos\varphi$ deren senkrechter Abstand vom Mittelpunkte des Kreises. Vom Halbirungspunkte der Sehne stehe der Punkt A_1 um $\alpha_1 r \sin\varphi$ und jener A_2 um $\alpha_2 r \sin\varphi$ ab. α_1 und α_2 sind kleiner als Eins und beide gleichbezeichnet, wenn sich die Elektroden auf derselben Seite des Sehnenmittelpunktes befinden.

Sind $r\varepsilon_1$ und $r\varepsilon_2$ die Abstände der auf der Sehne befindlichen Elektroden vom Kreismittelpunkte, so hat man für ε_1 und ε_2 die Beziehungen:

$$\varepsilon_1^2 = \cos^2\varphi + \alpha_1^2 \sin^2\varphi, \quad \varepsilon_2^2 = \cos^2\varphi + \alpha_2^2 \sin^2\varphi.$$

Unter Anwendung dieser Größen und Berücksichtigung der obigen Beziehung zwischen den Abständen der Punkte A_1, A'_1 und A_2, A'_2 vom Kreismittelpunkte erhält man:

$$A_1A_2 = r\sin\varphi \quad (\alpha_1 - \alpha_2)$$

$$A_1A'_1 = r \cdot \frac{1-\varepsilon_1^2}{\varepsilon_1}, \; A_2A'_2 = r\,\frac{1-\varepsilon_2^2}{\varepsilon_2}$$

Für die Coordinaten der Punkte A_1' und A_2' findet man, da $CA_1' = \frac{r}{\varepsilon_1}$ und $CA_2' = \frac{r}{\varepsilon_2}$ ist

$$x_1 = \frac{r\cos\varphi}{\varepsilon_1^2}\;,\; x_2 = \frac{r\cos\varphi}{\varepsilon_2^2}$$

$$y_1 = \frac{r\alpha_1 \sin\varphi}{\varepsilon_1^2},\; y_2 = \frac{r\alpha_2 \cos\varphi}{\varepsilon_2^2}$$ [1]

Für die Abstände A_1A_2' erhält man:

$$\overline{A_1A_2'}^2 = (x_2 - r\cos\varphi)^2 + (y_2 - r\alpha_1 \sin\varphi)^2.$$

Durch Substitution der Werthe von x_2 und y_2 wird

$$\overline{A_1A_2'} = \frac{r}{\varepsilon_2^2}\left[\cos^2\varphi(1-\varepsilon_2^1)^2 + \sin^2\varphi(\alpha_2 - \alpha_1\varepsilon_2^2)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

und in ähnlicher Weise erhält man

$$\overline{A_2A_1'} = \frac{r}{\varepsilon_1^2}\left[\cos^2\varphi(1-\varepsilon_1^2)^2 + \sin^2\varphi(\alpha_1 - \alpha_2\varepsilon_1^2)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

---

[1] Eliminirt man aus den Gleichungen für x_1 und y_1 des α_1 durch Substitution des Werthes von α_1 aus der Gleichung für x_1 in jene für y_1, so erhält man die Gleichung des geometrischen Ortes aller jener Punkte A', welche mit einem Punkte A der Sehne auf demselben Halbmesser liegen und durch die Beziehung $\overline{CA} \,.\, CA' = r^2$ verbunden sind.

Es ist die Gleichung des geometrischen Ortes:

$$y^2 + \left(x - \frac{r}{2\cos\varphi}\right)^2 = \frac{r^2}{4\cos^2\varphi}$$

Sie stellt einen Kreis dar, welcher durch den Mittelpunkt des Blechkreises und durch die Endpunkte der Sehne geht. Man ist somit im Stande, durch eine einfache Construction die den Punkten A_1, A_2 entsprechenden A_1' und A_2', so wie die Größen der in der Formel vorkommenden Abstände A_1A_2', A_2A_1' u. s. w. zu finden.

Der Ausdruck für den Widerstand w_r nimmt somit folgende Gestalt an:

$$(1) \qquad w_r = 2 \log \frac{r \sin \varphi}{\rho} + \log \left\{ \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)^2 [(\cos^2\varphi (1-\varepsilon_1^2)^2 + \sin^2\varphi (\alpha_1 - \alpha_2 \varepsilon_1^2)^2)(\cos^2\varphi (1-\varepsilon_2^2)^2 + \sin^2\varphi (\alpha_2 - \alpha_1 \varepsilon_2^2)^2)]^{\frac{1}{2}}}{\varepsilon_1 \varepsilon_2 (1-\varepsilon_1^2)(1-\varepsilon_2^2)} \right\}$$

Werden die Elektroden symmetrisch zur Mitte der Sehne aufgesetzt, so hat man $\alpha_1 = -\alpha_2$ und $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ es wird:

$$w = 2 \log \frac{r \sin \varphi}{\rho} + \log \left[\frac{4\alpha^2}{\varepsilon^2} \frac{\cos^2\varphi (1-\varepsilon^2)^2 + \alpha^2 \sin^2\varphi (1-\varepsilon^2)^2}{(1-\varepsilon^2)^2} \right].$$

Da diese Formel mit Messungen verglichen werden soll, die auf einer Sechseckseite ausgeführt wurden, so führe ich unter Berücksichtigung der Eigenthümlichkeiten der Sechseckseite für $\sin^2\varphi = 0{\cdot}25$, für $\cos^2\varphi = 0{\cdot}75$ und für $\varepsilon = 0{\cdot}25\,(3+\alpha^2)$ in die Formel ein; sie geht über in:

$$(2) \qquad w_r = 2 \log \frac{r}{2\rho} + \log \left[\frac{4\alpha^2}{3+\alpha^2} \frac{3(1-\alpha^2)^2 + \alpha^2 (7+\alpha^2)^2}{(1-\alpha^2)^2} \right].$$

Geschehen die Messungen auf einem Durchmesser und setzt man die Elektroden nicht symmetrisch zum Mittelpunkte auf, so hat man, um den Widerstand zu finden, in (1) $\varphi = 90^\circ$ zu setzen; es wird dann $\varepsilon_1 = \alpha_1$ und $\varepsilon_2 = \alpha_2$ und damit:

$$(3) \qquad w_r = 2 \log \frac{r}{\rho} + \log \left[\frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 (1 - \varepsilon_1 \varepsilon_2)^2}{(1-\varepsilon_1^2)(1-\varepsilon_2^2)} \right].$$

Werden die Elektroden symmetrisch zum Mittelpunkte auf einem Durchmesser aufgesetzt, so ist $\varepsilon_2 = -\varepsilon_1$ und es wird:

$$(4) \qquad w_r = 2\log\frac{r}{\rho} + 2\log\left[2\varepsilon\frac{1+\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}\right].$$

Die Werthe w_r der Widerstände, welche aus den theoretischen Formeln gefunden werden, wenn man in dieselben alles in Millimetern einsetzt, hängen mit den gemessenen Werthen w_m wieder durch die Relation $w_m = a + bw_r$ zusammen. Die Größen a und b, welche nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnet werden müssen, haben hier dieselbe Bedeutung wie bei den Versuchen mit Blechstreifen. Jene a sollen für die Versuchsreihen mit gleich großen Elektroden gleich sein; jene b sollen für die Versuchsreihen mit demselben Bleche gleiche Werthe besitzen. Da das kreisförmige Blech etwas dicker als die Streifen war, wurden für die Constante b auch etwas kleinere Werthe erhalten.

Die gemessenen Widerstände w_m sind Mittelwerthe aus zwei bis vier Beobachtungen, welche an verschiedenen Stellen des Bleches angestellt sind.

In der beiliegenden Zeichnung sind die mit 100 multiplicirten berechneten w_m wie für die Blechstreifen eingetragen. Die Linie *AB* ist hier der Durchmesser $2r = 162{\cdot}5^{\text{mm}}$ des Blechkreises und die Elektrodendistanzen sind in Theilen desselben aufgetragen, was auch für die Messungen auf einer Sechseckseite gilt.

Es folgt nun wieder eine Zusammenstellung der gemessenen und berechneten Resultate.

A. Die Widerstände werden auf einem Durchmesser des Blechkreises gemessen, die Elektroden symmetrisch zum Kreismittelpunkte aufgesetzt. Die Widerstände w_r sind nach der Formel (4) gerechnet.

V. Der Elektrodendurchmesser ist $4{\cdot}835^{\text{mm}}$

$$w_w = 0{\cdot}0614 + 0{\cdot}03019\, w_r.$$

Elektr.-Distanz 2ε	w_r	w_m gemessen	w_m berechnet
0·05	2·4354	0·1311	0·1350
0·10	3·8507	0·1766	0·1777

Elektr.-Distanz 2ε	w_r	w_m gemessen	w_m berechnet
0·20	5·3571	0·2253	0·2212
0·40	7·2288	0·2848	0·2797
0·60	8·9018	0·3316	0·3302
0·80	11·0034	0·3925	0·3936
0·90	12·7153	0·4458	0·4453
0·95	14·2554	0·4890	0·4915

VI. Der Elektrodendurchmesser ist 0·919^{mm}.

$$w_m = 0{\cdot}1422 + 0{\cdot}03135\, w_r.$$

Elektr.-Distanz 2ε	w_r	w_m gemessen	w_m berechnet
0·05	5·7561	0·3157	0·3226
0·10	7·1714	0·3641	0·3670
0·20	8·6778	0·4108	0·4142
0·40	10·5459	0·4733	0·4729
0·60	12·2225	0·5247	0·5254
0·80	14·3242	0·5842	0·5913
0·90	16·0360	0·6432	0·6450
0·95	17·5761	0·6877	0·6933

B. VII. Die Widerstände werden auf einem Durchmesser gemessen, die eine Elektrode bleibt im Punkte $\varepsilon_1 = +0{\cdot}95$ stehen, die andere wird verschoben. Der Elektrodendurchmesser ist 4·835^{mm}. Die Widerstände w_r sind nach Formel (3) gerechnet.

$$w_m = 0{\cdot}05478 + 0{\cdot}03031\, w_r.$$

Elektr.-Distanz $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$	ε_2	w_r	w_m gemessen	w_m berechnet
0·05	+0·85	2·7389	0·1385	0·1378
0·10	+0·75	4·4722	0·1898	0·1903
0·20	+0·55	6·4668	0·2493	0·2490
0·30	+0·35	7·7791	—	0·2906
0·40	+0·15	8·6265	0·3169	0·3163
0·60	−0·25	10·2129	0·3661	0·3643
0·80	−0·65	11·8082	0·4125	0·4127

Elektr.-Distanz $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$	ε_2	w_r	w_m gemessen	w_m berechnet
0·90	—0·85	12·9989	0·4479	0·4488
0·95	—0·95	14·2554	0·4862	0·4868

C. VIII. Die Widerstände werden auf einer Sechseckseite gemessen, die Elektroden symmetrisch zur Mitte derselben aufgestellt, ihr Durchmesser beträgt 0·919$^{\text{mm}}$. Die Widerstände w_r sind nach der Formel (2) gerechnet. a ist die Elektrodendistanz in Theilen von $2r$.

$$w_m = 0{\cdot}1355 + 0{\cdot}02958\, w_r.$$

a	w_r	w_m gemessen	w_m berechnet
0·05	5·8983	0·3094	0·3099
0·10	7·6588	0·3629	0·3620
0·20	10·0499	0·4327	0·4328
0·30	12·0408	0·4883	0·4917
0·40	14·2862	0·5654	0·5581
0·45	16·0255	0·6055	0·6095

Wie schon oben erwähnt, ist an den gemessenen Widerständen w_m des kreisförmigen Bleches eine Correction angebracht.

Die Unterschiede in den Constanten b betragen hier nicht mehr als bei den Streifen. Die Werthe der gemessenen und der berechneten w_m fallen auch hier sehr nahe zusammen und die Fehler sind bald positiv bald negativ.

Die Curven, welche sich beim Aufzeichnen der Beobachtungsreihen V und VI ergeben, besitzen einen Wendepunkt, dessen Lage bestimmt wird durch die Gleichung:

$$\varepsilon^8 - 12\varepsilon^6 - 2\varepsilon^4 + 4\varepsilon^2 - 1 = 0.$$

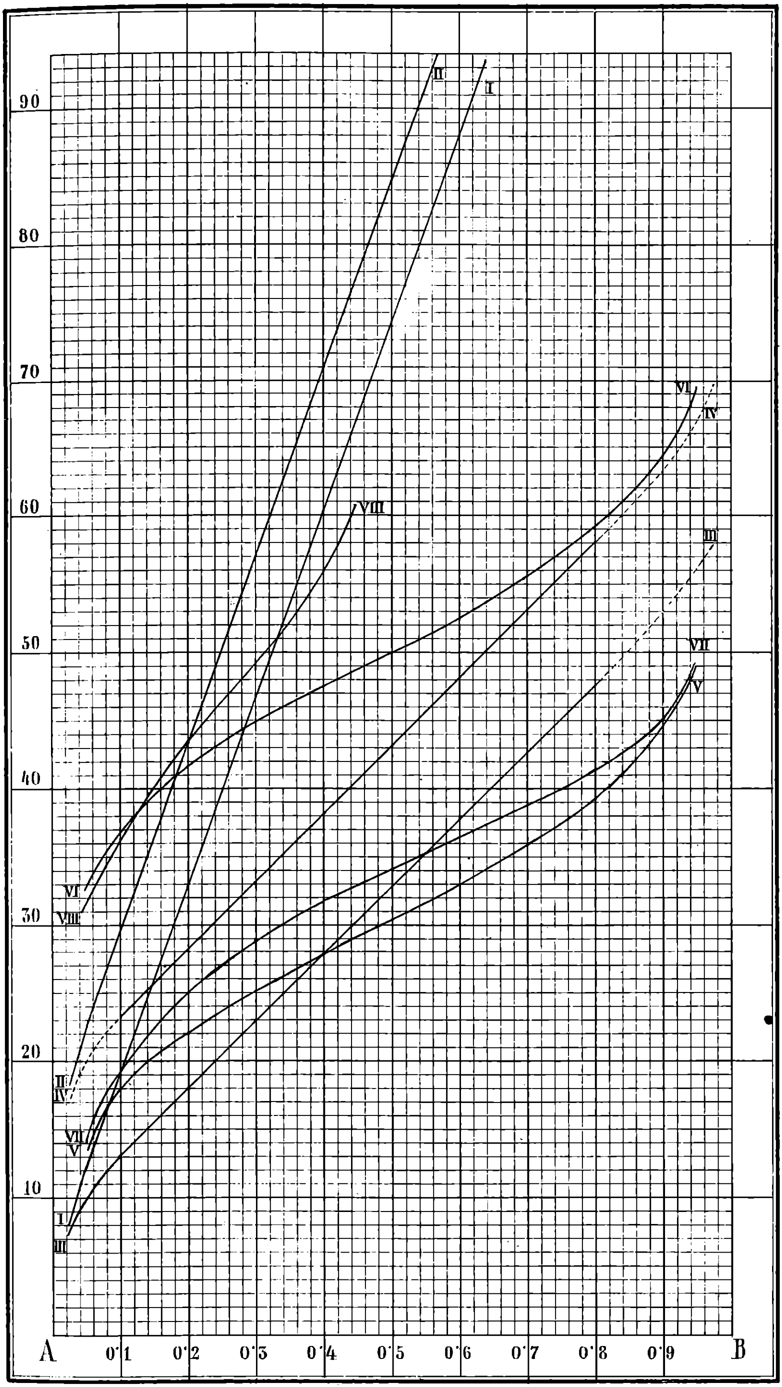
Diese Gleichung hat vier reelle Wurzeln, wovon je zwei gleich, aber entgegengesetzt bezeichnet sind. Für den vorliegenden Fall kommt nur die positive zwischen Null und Eins liegende Wurzel in Betracht, sie ist $\varepsilon = 0{\cdot}451773$.

Der Wendepunkt der Curve, welche der Versuchsreihe VII entspricht, ist bestimmt durch die Gleichung

$$\varepsilon_2^6 - 5\varepsilon_2^4 + \frac{551 \cdot 25}{95}\varepsilon_2^3 - 2{\cdot}7075\,\varepsilon_2^2 + \frac{570 \cdot 75}{95}\varepsilon_2 - 1{\cdot}042625 = 0$$

ε_2 wird daraus gefunden $\varepsilon_2 = 0{\cdot}18368$; es entspricht dies einer Elektrodendistanz $\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = 0{\cdot}76632$ in Theilen des Halbmessers oder 0·38316 in Theilen des Durchmessers. Der Widerstand zu dieser Abscisse ist $w = 8{\cdot}4758$.

Der Wendepunkt der Curve, welche der Sechseckseite entspricht, ist durch eine Gleichung bestimmt, welche bezüglich α^2 vom 18. Grade ist.



A. d. k. k. Hof-u. Staatsdruckerei.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1869

Band/Volume: 60_2

Autor(en)/Author(s): Obermayer Albert von

Artikel/Article: Experimentelle Bestimmung des Leitungswiderstandes in Platin-Blechen. 245-260