©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Über einige vielfache Integrale.

Von dem w. M. **Dr. Anton Winckler.**

(Vorgelegt in der Sitzung am 17. Juni 1869.)

Unter den zahlreichen Formeln für bestimmte einfache Integrale lassen sich bekanntlich viele als besondere und zwar einfachste Fälle gewisser, zwischen mehrfachen Integralen bestehender Relationen betrachten und aus diesen unmittelbar ableiten. Nicht selten aber kann man, was ebenfalls bekannt und in mancher Hinsicht wichtiger ist, auch umgekehrt, von jenen Formeln ausgehend, zu solchen allgemeinen Relationen gelangen, und mit einigen neuen Fällen dieser Art, welche sich hauptsächlich auf Exponentialfunctionen beziehen, wird sich das Folgende beschäftigen.

Dieselben scheinen ihrer größern Allgemeinheit wegen und auch darum von einigem Interesse zu sein, weil aus ihnen eine Anzahl bekannter Resultate als besondere Fälle abgeleitet werden können, die bisher auf verschiedenen, unter sich scheinbar nicht im Zusammenhange stehenden Wegen gefunden worden sind.

Der Gesichtspunkt, von welchem hierbei ausgegangen wird, besteht sehr einfach darin, daß die in den Exponenten vorkommenden, die Veränderlichen der Integration enthaltenden Summen in verschiedener Weise angeordnet werden können und hierdurch auch verschiedene Anordnungen der successive auszuführenden Integrationen gestatten, wie des Näheren sich sogleich ergeben wird.

1.

Es seien $x_1, x_2, x_3, \ldots x_m$, ferner $y_1, y_2, y_3, \ldots y_n$ von einander unabhängige veränderliche Größen; $a_1, a_2, a_3, \ldots a_m$, dann $b_1, b_2, b_3, \ldots b_n$, und $c_{\mu,\nu}$ für alle ganzzahligen Werthe von μ und ν positive Constanten und es werde der Kürze wegen:

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$X = \cos a_1 x_1 \cos a_2 x_2 \ldots \cos a_m x_m$$

$$Y = \cos b_1 y_1 \cos b_2 y_2 \ldots \cos b_n y_n$$

$$u = \sum_{\nu=0}^{\nu=n} \sum_{\mu=0}^{\mu=m} c_{\mu,\nu}\, x_\mu y_\nu, \text{ worin } c_{0,0} = 0 \text{ sein soll,}$$

gesetzt. Der Ausdruck:

$$XYe^{-u}$$

sei nach $x_1, x_2, \ldots x_m, y_1, y_2, \ldots y_n$ zwischen den Grenzen 0 und ∞ zu integriren.

Denkt man sich zunächst die Summe u nach den y geordnet, also:

$$u = \sum_{\nu=0}^{\nu=n} y_\nu \sum_{\mu=0}^{\mu=m} c_{\mu,\nu}\, x_\mu$$

geschrieben und berücksichtigt man die Formel:

$$\int_0^\infty e^{-ky} \cos ly\, dy = \frac{k}{l^2 + k^2}$$

so lassen sich die n Integrationen nach den y unmittelbar ausführen, und ebenso können die m Integrationen bezüglich der x vollzogen werden, wenn man die Summe u nach den x ordnet, also

$$u = \sum_{\mu=0}^{\mu=m} x_\mu \sum_{\nu=0}^{\nu=n} c_{\mu,\nu}\, y_\nu$$

schreibt. Es ergibt sich daher die Gleichung:

$$\overline{\int\int\ldots\int}_0^\infty Xe^{-y_0 \sum_1^m c_{\mu,0} x_\mu} \cdot \prod_{\nu=1}^{\nu=n} \left(\frac{p_\nu}{b_\nu^2 + p_\nu^2}\right) dx_1\, dx_2 \ldots dx_m =$$

$$\overline{\int\int\int}_0^\infty Ye^{-x_0 \sum_1^n c_{0,\nu} y_\nu} \cdot \prod_{\mu=1}^{\mu=m} \left(\frac{q_\mu}{a_\mu^2 + q_\mu^2}\right) dy_1\, dy_2 \ldots dy_n$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

wobei der bequemern Schreibweise wegen:

$$p_\nu = \sum_{\mu=0}^{\mu=m} c_{\mu,\nu} x_\mu, \quad q_\mu = \sum_{\nu=0}^{\nu=n} c_{\mu,\nu} y_\nu$$

gesetzt wurde, und unter x_0, y_0 beliebige positive Constanten zu verstehen sind.

Für den besondern Fall $n = 1$ und $b_1 = 0$, $x_0 = y_0 = 1$ ergibt sich hieraus:

$$\overline{\iint \cdot\cdot \int_0^\infty} \frac{\cos a_1 x_1 \cos a_2 x_2 \cdot\cdot \cos a_m x_m}{c_{0,1} + c_{1,1} x_1 + \cdot\cdot + c_{m,1} x_m} e^{-(c_{1,0} x_1 + c_{2,0} x_2 + \cdot\cdot + c_{m,0} x_m} dx_1 dx_2 \cdot\cdot dx_m$$

$$= \int_0^\infty \frac{c_{1,0} + c_{1,1} y}{a_1^2 + (c_{1,0} + c_{1,1} y)^2} \cdot \frac{c_{2,0} + c_{2,1} y}{a_2^2 + (c_{2,0} + c_{2,1} y)^2} \cdot\cdot \frac{c_{m,0} + c_{m,1} y}{a_m^2 + (c_{m,0} + c_{m,1} y)^2} e^{-c_{0,1} y} dy$$

wobei rechter Hand y statt y_1 geschrieben wurde.

2.

Behalten X und Y ihre vorige Bedeutung, setzt man dagegen:

$$u = \sum_{\nu=0}^{\nu=n} \sum_{\mu=0}^{\mu=m} c_{\mu,\nu} x_\mu y_\nu^2, \quad c_{0,0} = 0$$

und unterzieht den Ausdruck:

$$XYe^{-u}$$

der Integration nach x_1, x_2, x_m, y_1, y_2, y_n zwischen den Grenzen 0 und ∞, so lassen sich, wenn man zunächst u nach den y ordnet, also

$$u = \sum_{\nu=0}^{\nu=n} y_\nu^2 \sum_{\mu=0}^{\mu=m} c_{\mu,\nu} x_\mu$$

schreibt, die n Integrationen nach den y insgesammt ausführen, da bekanntlich:

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$\int_0^\infty e^{-ky^2} \cos lydy = \tfrac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{k}} \cdot e^{-\frac{l^2}{4k}}$$

ist. Ordnet man dagegen u nach den x indem man schreibt:

$$u = \sum_{\mu=0}^{\mu=m} x_\mu \sum_{\nu=0}^{\nu=n} c_{\mu,\nu}\, y_\nu^2$$

so können wie im vorigen Art. die m Integrationen nach den x effectuirt werden.

Wird zur Abkürzung:

$$p_\nu = \sum_{\mu=0}^{\mu=m} c_{\mu,\nu}\, x_\mu, \quad q_\mu = \sum_{\nu=0}^{\nu=n} c_{\mu,\nu}\, y_\nu^2$$

und zugleich:

$$s = \frac{b_1^2}{p_1} + \frac{b_2^2}{p_2} + \qquad + \frac{b_n^2}{p_n}$$

gesetzt, so erhält man das folgende Resultat:

$$\overline{\int\int\int}_0^\infty \frac{Xe^{-\frac{s}{4} - y_0^2 \sum_1^m c_{\mu,0} x_\mu}}{\sqrt{p_1 p_2 p_3 \cdots p_n}} dx_1\, dx_2 \ldots dx_m =$$

$$\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^n \overline{\int\int\cdot\int}_0^\infty Ye^{-x_0 \sum_1^n c_{0,\nu} y_\nu^2} \prod_{\mu=1}^{\mu=m} \left(\frac{q_\mu}{a_\mu^2 + q_\mu^2}\right) dy_1\, dy_2 \ldots dy_n$$

Für den besondern Fall $n = 1$ und $b_1 = 0$, $x_0 = y_0 = 1$ ergibt sich hieraus:

$$\overline{\int\int\cdot\int}_0^\infty \frac{\cos a_1 x_1 \cos a_2 x_2 \ldots \cos a_m x_m}{\sqrt{c_{0,1} + c_{1,1} x_1 + \ldots + c_{m,1} x_m}} \cdot e^{-(c_{1,0} x_1 + c_{2,0} x_2 + \ldots + c_{m,0} x_m)} . dx_1 dx_2 \cdots dx_m$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{c_{1,0} + c_{1,1} y}{a_1^2 + (c_{1,0} + c_{1,1} y)^2} \cdot \frac{c_{2,0} + c_{2,1} y}{a_2^2 + (c_{2,0} + c_{2,1} y)^2} \cdots \frac{c_{m,0} + c_{m,1} y}{a_m^2 + (c_{m,0} + c_{m,1} y)^2} \cdot e^{-c_{0,1} y} \cdot \frac{dy}{\sqrt{y}}$$

wobei rechter Hand y statt y_1^2 geschrieben wurde.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Wie man sieht, unterscheidet sich diese Gleichung von der am Schlusse des vorigen Art. erhaltenen im Wesentlichen darin, daß in der erstern links die Quadratwurzel der linearen Function $c_{0,1} + c_{1,1} x_1 + \ldots + c_{m,1} x_m$ statt der ersten Potenz, rechts aber noch $\sqrt{y}$ im Nenner vorkommt.

Es ist leicht, beide Gleichungen mit bekannten Resultaten in Übereinstimmung zu bringen, wenn man etwa $m = 1$, oder $m = 1$ und $c_{1,1} = 0$ setzt.

3.

Es seien wieder $x_0, x_1, x_2, \ldots x_m$, dann $y_0, y_1, y_2, \ldots y_n$ von einander unabhängige veränderliche Größen; $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$, $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$ seien positive Constanten, ferner seien alle Werthe positiv, welche allgemein mit $c_{\mu,\nu}$ bezeichnet sind, unter μ die Zahlen $1, 2, \ldots m$ und unter ν die Zahlen $1, 2, \ldots n$ verstanden. Der Abkürzung wegen werde:

$$X = x_1^{\alpha_1 - 1} x_2^{\alpha_2 - 1} \ldots x_m^{\alpha_m - 1}$$
$$Y = y_1^{\beta_1 - 1} y_2^{\beta_2 - 1} \ldots y_n^{\beta_n - 1}$$

sodann:

$$u = \sum_{\nu=0}^{\nu=n} \sum_{\mu=0}^{\mu=m} c_{\mu,\nu} x_\mu y_\nu$$

gesetzt. Der Ausdruck:

$$XYe^{-u}$$

sei nach $x_1, x_2, \ldots x_m, y_1, y_2, \ldots y_n$ zwischen die Grenzen 0 und ∞ zu integriren, so daß also zunächst x_0 und y_0 als constant betrachtet werden.

Die Integration läßt sich auf zwei verschiedene Arten anordnen, so nämlich, daß in der einen die Integration nach allen x und in der andern nach allen y unmittelbar vollzogen werden kann. Denkt man sich zu dem Ende die Doppelsumme u nach den y geordnet, also

$$u = \sum_{\nu=0}^{\nu=n} y_\nu \sum_{\mu=0}^{\mu=m} c_{\mu,\nu} x_\mu$$

geschrieben und berücksichtigt, daß:

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$\int_0^\infty y^{\beta-1} e^{-ky}\, dy = \frac{\Gamma(\beta)}{k^\beta}$$

so gelangt man, wie leicht einzusehen ist, zu dem folgenden Ausdruck:

$$\Gamma(\beta_1)\Gamma(\beta_2)\,..\,\Gamma(\beta_n) \int\!\!\int\!\!\cdots\!\!\int_0^\infty \frac{X.\, e^{-y_0 \sum_0^m c_{\mu,0} x_\mu}}{\prod_{\nu=1}^{\nu=n} \left(\sum_{\mu=0}^{\mu=m} c_{\mu,\nu} x_\mu\right)^{\beta_\nu}}\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_m$$

Ordnet man dagegen die Doppelsumme u nach den x, schreibt also:

$$u = \sum_{\mu=0}^{\mu=m} x_\mu \sum_{\nu=0}^{\nu=n} c_{\mu,\nu}\, y_\nu$$

und macht nunmehr die Integration nach den x zur ersten, so ergibt sich für dasselbe $m+n$ fache Integral der Ausdruck:

$$\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\,..\,\Gamma(\alpha_m) \int\!\!\int\!\!\cdots\!\!\int_0^\infty \frac{Y.\, e^{-x_0 \sum_0^n c_{0,\nu} y_\nu}}{\prod_{\mu=1}^{\mu=m} \left(\sum_{\nu=0}^{\nu=n} c_{\mu,\nu}\, y_\nu\right)^{\alpha_\mu}}\, dy_1\, dy_2 \ldots dy_n$$

worin nun, wie bemerkt, x_0, y_0 beliebige constante, jedoch positive Werthe bezeichnen.

Diese beiden Ausdrücke stellen dieselbe Größe dar; man hat daher die Gleichung:

$$\Gamma(\beta_1)\Gamma(\beta_2)\,..\,\Gamma(\beta_n) \int\!\!\int\!\!\cdots\!\!\int_0^\infty \frac{X.\, e^{-y_0 \sum_0^m c_{\mu,0} x_\mu}}{\prod_{\nu=1}^{\nu=n} \left(\sum_{\mu=0}^{\mu=m} c_{\mu,\nu} x_\mu\right)^{\beta_\nu}}\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_m$$

$$\ldots (\mathrm{I})$$

$$= \Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\,..\,\Gamma(\alpha_m) \int\!\!\int\!\!\cdots\!\!\int_0^\infty \frac{Y.\, e^{-x_0 \sum_0^n c_{0,\nu} y_\nu}}{\prod_{\mu=1}^{\mu=m} \left(\sum_{\nu=0}^{\nu=n} c_{\mu,\nu}\, y_\nu\right)^{\alpha_\mu}}\, dy_1\, dy_2 \ldots dy_n$$

aus welcher sich nun zwei verschiedene Resultate ziehen lassen.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Es sei $x_0 = 1$, $y_0 = 1$ und der Abkürzung wegen werde:

$$A = \Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\ldots\Gamma(\alpha_m)$$

$$B = \Gamma(\beta_1)\Gamma(\beta_2)\ldots\Gamma(\beta_n)$$

gesetzt; schreibt man außerdem die Summenausdrücke in entwickelter Form, so ergibt sich:

$$B.\int\!\!\int\!\cdots\!\int_0^\infty \frac{x_1^{\alpha_1-1}x_2^{\alpha_2-1}\ldots x_m^{\alpha_m-1}.e^{-(c_{1,0}x_1+c_{2,0}x_2+\ldots+c_{m,0}x_m)}}{\prod\limits_{\nu=1}^{\nu=n}\{c_{0,\nu}+c_{1,\nu}x_1+c_{2,\nu}x_2+\ldots+c_{m,\nu}x_m\}^{\beta_\nu}}dx_1dx_2\ldots dx_m \quad \ldots(1)$$

$$=A.\int\!\!\int\!\cdots\!\int_0^\infty \frac{y_1^{\beta_1-1}y_2^{\beta_2-1}\ldots y_n^{\beta_n-1}.e^{-(c_{0,1}y_1+c_{0,2}y_2+\ldots+c_{0,n}y_n)}}{\prod\limits_{\mu=1}^{\mu=m}\{c_{\mu,0}+c_{\mu,1}y_1+c_{\mu,2}y_2+\ldots+c_{\mu,n}y_n\}^{\alpha_\mu}}dy_1dy_2\ldots dy_n$$

Das zweite Resultat ergibt sich auf folgende Art.

In der Gleichung (I) denke man sich x_0x_1, x_0x_2, $\ldots x_0x_m$ resp. für x_1, x_2, $\ldots x_m$ und wieder $y_0 = 1$ gesetzt, ferner jene Gleichung beiderseits mit:

$$x_0^{\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_n+\lambda-1}dx_0$$

multiplicirt und hierauf nach x_0 zwischen den Grenzen 0 und ∞ integrirt; es ergibt sich dann, wenn der Abkürzung wegen

$$a = \alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_m+\lambda$$

$$b = \beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_n+\lambda$$

gesetzt und $a > 0$, $b > 0$ angenommen wird, die Gleichung

$$\frac{B}{\Gamma(b)}\int\!\!\int\!\cdots\!\int_0^\infty \frac{x_1^{\alpha_1-1}x_2^{\alpha_2-1}\ldots x_m^{\alpha_m-1}.dx_1dx_2\ldots dx_m}{[c_{0,0}+c_{1,0}x_1+\ldots+c_{m,0}x_m]^a\prod\limits_{\nu=1}^{\nu=n}(c_{0,\nu}+c_{1,\nu}x_1+\ldots+c_{m,\nu}x_m)^{\beta_\nu}} = \quad \ldots(2)$$

$$\frac{A}{\Gamma(a)}\int\!\!\int\!\cdots\!\int_0^\infty \frac{y_1^{\beta_1-1}y_2^{\beta_2-1}\ldots y_n^{\beta_n-1}.dy_1dy_2\ldots dy_n}{[c_{0,0}+c_{0,1}y_1+\ldots+c_{0,n}y_n]^b\prod\limits_{\mu=1}^{\mu=m}(c_{\mu,0}+c_{\mu,1}y_1+\ldots+c_{\mu,n}y_n)^{\alpha_\mu}}$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Die Fälle der Gleichungen (1) und (2), welche der Annahme $m = n = 1$ entsprechen, sind bekannt.

Aus (1) erhält man nämlich für diese Annahme:

$$\Gamma(\beta)\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}e^{-c_{1,0}x}}{(c_{0,1}+c_{1,1}x)^\beta}dx = \Gamma(\alpha)\int_0^\infty \frac{y^{\beta-1}e^{-c_{0,1}y}}{(c_{1,0}+c_{1,1}y)^\alpha}dy$$

wobei α, β für α_1, β_1 und x, y für x_1, y_1 gesetzt worden sind.

Diese Gleichung wurde von Cauchy gefunden. (Journal de l'école polytechn. T. XVII p. 154.)

Aus (2) ergibt sich für dieselbe Annahme:

$$\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\lambda)}\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}dx}{(c_{0,0}+c_{1,0}x)^{\alpha+\lambda}(c_{0,1}+c_{1,1}x)^\beta}$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+\lambda)}\int_0^\infty \frac{y^{\beta-1}dy}{(c_{0,0}+c_{0,1}y)^{\beta+\lambda}(c_{1,0}+c_{1,1}y)^\alpha}$$

wobei abermals die Indices bei α, β, x, y weggelassen worden sind.

Diese Gleichung hat Abel in etwas verschiedener Form auf anderem Wege (Oeuvres compl. T. I, p. 96) hergeleitet.

Für $c_{0,0} = c_{0,1} = c_{1,0} = c_{1,1} = 1$, $\beta = 1$, $\lambda = \gamma - 1$ erhält man daraus auch die bekannte Relation zwischen den Euler'schen Integralen erster und zweiter Gattung.

Für $n = 1$, also $B = \Gamma(\beta_1)$ und wenn $\beta_1 = \beta$, $y_1 = y$ gesetzt wird, erhält man aus (1) die Gleichung:

$$\int\cdots\int_0^\infty \frac{x_1^{\alpha_1-1}x_2^{\alpha_2-1}\ldots x_m^{\alpha_m-1}e^{-(c_{1,0}x_1+c_{2,0}x_2+\ldots+c_{m,0}x_m)}}{(c_{0,1}+c_{1,1}x_1+c_{2,1}x_2+\ldots+c_{m,1}x_m)^\beta}dx_1\,dx_2\ldots dx_m =$$

$$\frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\ldots\Gamma(\alpha_m)}{\Gamma(\beta)}\int_0^\infty \frac{y^{\beta-1}e^{-c_{0,1}y}dy}{(c_{1,0}+c_{1,1}y)^{\alpha_1}(c_{2,0}+c_{2,1}y)^{\alpha_2}\ldots(c_{m,0}+c_{m,1}y)^{\alpha_m}}$$

welche, soviel mir bekannt ist, ebenfalls von Cauchy herrührt.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Für dieselben Annahmen ergibt sich aus (2) die Gleichung:

$$\overline{\int\int\cdot\cdot\int}_0^\infty \frac{x_1^{\alpha_1-1}\,x_2^{\alpha_2-1}\quad .x_m^{\alpha_m-1}\,.\,dx_1\,dx_2\ldots dx_m}{(c_{0,0}+c_{1,0}\,x_1+\ldots+c_{m,0}\,x_m)^a\,(c_{0,1}+c_{1,1}x_1+\ldots+c_{m,1}\,x_m)^\beta}=$$

$$\frac{\Gamma(\beta+\lambda)}{\Gamma(\beta)}\cdot\frac{A}{\Gamma(a)}\cdot\int_0^\infty \frac{y^{\beta-1}\,dy}{(c_{0,0}+c_{0,1}\,y)^{\beta+\lambda}(c_{1,0}+c_{1,1}\,y)^{\alpha_1}\ldots(c_{m,0}+c_{m,1}\,y)^{\alpha_m}}$$

Wird $c_{0,0}=c_{0,1},\ c_{1,0}=c_{1,1},\ c_{2,0}=c_{2,1},\ldots\ .c_{m,0}=c_{m,1}$ gesetzt, so geht diese Gleichung über in:

$$\overline{\int\int\cdot\cdot\int}_0^\infty \frac{x_1^{\alpha_1-1}\,x_2^{\alpha_2-1}\ldots x_m^{\alpha_m-1}dx_1\,dx_2\ldots dx_m}{(c_{0,0}+c_{1,0}\,x_1+c_{2,0}\,x_2+\ldots+c_{m,0}\,x_m)^{\beta+a}}=$$

$$\frac{1}{c_{0,0}^{\beta+\lambda}\,c_{1,0}^{\alpha_1}\,c_{2,0}^{\alpha_2}\ldots c_{m,0}^{\alpha_m}}\cdot\frac{\Gamma(\beta+\lambda)}{\Gamma(\beta+a)}\cdot\Gamma(\alpha_1)\,\Gamma(\alpha_2)\ldots\Gamma(\alpha_m)$$

und dieses Resultat stimmt ebenfalls mit einem bekannten überein, wenn $\beta+a=\gamma$ also $\beta+\lambda=\gamma-(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_m)$ und $c_{0,0}=1$ gesetzt wird. (Moigno, Calc. intégral. p. 260.)

Wie man sieht, sind die meisten der hierher gehörigen Relationen, welche einzeln auf verschiedenen Wegen gefunden wurden, in den hier entwickelten Formeln als besondere Fälle enthalten.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1869

Band/Volume: 60_2

Autor(en)/Author(s): Winckler Anton

Artikel/Article: Über einige vielfache Integrale. 379-387