XXII. SITZUNG VOM 21. OCTOBER 1869.

Herr Hofrath Dr. Th. Billroth dankt mit Schreiben vom 16. October für seine Wahl zum correspondirenden Mitgliede der Akademie.

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

„Bericht über eine Sammlung von Fischen aus Singapore, eingesendet von Eugen Freiherrn von Ransonnet, Mitglied der kais. österr. ostasiatischen Expedition", von Herrn Dr. Fr. Steindachner.

„Über Ratanhin und seine Verbindungen", von Herrn Dr. Wilh. Friedr. Gintl, eingesendet durch Herrn Prof. Dr. Fr. Rochleder in Prag.

Herr Regierungsrath Dr. Ed. Fenzl überreicht eine Abhandlung: „Über die Entstehung des fetten Öles in den Oliven", von Herrn Dr. C. O. Harz, Assistenten am k. k. botan.-physiolog. Laboratorium der Wiener Universität.

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Akademie der Künste und Wissenschaften, südslavische: Arbeiten. VIII. Band. — Alterthümer. I. Band. Agram, 1869; 8⁰.

Apotheker-Verein, allgem. österr.: Zeitschrift. 7. Jahrgang, Nr. 20. Wien, 1869; 8⁰.

Astronomische Nachrichten. Nr. 1774—1776. Altona, 1869; 4⁰.

Benfey, Theodor, Geschichte der Wissenschaften in Deutschland. Neuere Zeit. VIII. Band. Geschichte der Sprachwissenschaft. München, 1869; 8⁰.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Tome LXIX, Nr. 14. Paris, 1869; 4⁰.

Cosmos. XVIII^{e} Année. 3^{e} Série. Tome V, 16^{e} Livraison. Paris, 1869; 8⁰.

Fresenius, R., Analyse der Trinkquelle zu Driburg, der Herster Mineralquelle, so wie des zu Bädern benützten Satzer Schwefelschlammes. Wiesbaden, 1866; 8⁰. — Chemische Untersuchung des Lamscheider Mineral-Brunnens. Wiesbaden, 1869; 8⁰. — Analyse des Tönnissteiner Heilbrunnens und des Tönnissteiner Stahlbrunnens im Brohl-Thale. Wiesbaden, 1869; 8⁰.

Gesellschaft der Wissenschaften, Oberlausitzische: Neues Lausitzisches Magazin. XLVIII. Band, 1 & 2 Abth. Görlitz, 1869; 8°.

— naturforschende, in Basel: Verhandlungen. V. Theil, 2. Heft. Basel, 1869; 8°.

— Astronomische (in Leipzig): Vierteljahrsschrift. IV. Jahrgang, 3. Heft. Leipzig, 1869; 8°.

Grunert, Joh. Aug., Archiv der Mathematik und Physik. L. Theil, 1.—3. Heft. Greifswald, 1869; 8°.

Isis: Sitzungsberichte. Jahrgang 1869. Nr. 4—6. Dresden; 8°.

Instituto, R., Veneto di Scienze, Lettere ed Arti: Atti. Tomo XIV^e., Serie III^a, Disp. 8^a. Venezia, 1868—69; 8°.

Jahresbericht über die Fortschritte der Chemie etc., von H. Will. Für 1867, II. Heft. Gießen, 1869; 8°.

Landbote, Der steirische. 2. Jahrgang, Nr. 21. Graz, 1869; 4°.

Moniteur scientifique. Tome XI^e, Année 1869, 308^e Livraison. Paris; 4°.

Revue des cours scientifiques et littéraires de la France et de l'étranger. VI^e Année, Nr. 46. Paris & Bruxelles, 1869; 4°.

Santini, Giovanni, Tavole dei logaritmi dei numeri naturali dall 1 sino al 101.000 etc. (3^a edizione). Padova, 1869; kl. 4°. — Notizie intorno agli apparati magneto-elettrici per la determinazione delle longitudini geografiche etc. Padova, 1867; 8°.

Société littéraire, scientifique et artistique d'Apt: Annales. IV^e Année, 1866—1867. Apt, 1869: 8°.

— botanique de France: Bulletin. Tome XV. (1868.) Session extraordinaire; Tome XVI. (1869.) Comptes rendus des séances, Nrs. 2—3; Revue bibliographique. *C.* Paris; 8°.

— Impériale des Naturalistes de Moscou: Bulletin. Année 1868, Tome XLI, 2^de Partie. Moscou, 1869; 8°.

Verein, naturhistorischer, der preuss. Rheinlande und Westphalens: Verhandlungen. XXV. Jahrgang (III. Folge, 5. Jahrgang), 1. Hälfte. Bonn, 1868; 8°.

Wiener Landwirthschaftliche Zeitung. XIX. Jahrgang, Nr. 42. Wien, 1869; 4°.

— Medizin. Wochenschrift. XIX. Jahrgang, Nr. 83—84. Wien, 1869; 4°.

Über das Dirichlet'sche Paradoxon bei unendlichen Reihen.

Von **Franz Unferdinger,**
Lehrer der Mathematik an der öffentlichen Oberrealschule am hohen Markt in Wien.

(Vorgelegt in der Sitzung am 7. October 1869.)

§. 1.

Bekanntlich hat Dirichlet in den Abhandlungen der Berliner Akademie 1837, p. 49, zuerst darauf aufmerksam gemacht, daß unendliche Reihen, wie:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\cdot\cdot$$

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\ldots,$$

welche zwar dieselben Glieder enthalten, sich aber in dem Gesetz der Folge derselben unterscheiden, nicht gegen dieselbe Grenze convergiren oder mit anderen Worten verschiedene Summen haben.

Im 57. Band der Sitzungsberichte haben wir gezeigt, wie sich der Unterschied dieser Reihen durch eine harmonische Limite darstellen und der Werth der letzteren ermitteln läßt.

Im Nachstehenden geben wir eine Verallgemeinerung, ausgehend von der Reihe:

$$(1)\quad R=\frac{1}{z+1}+\frac{1}{z+2}+\frac{1}{z+3}+\ldots+\frac{1}{z+m}$$
$$-\frac{1}{z+m+1}-\frac{1}{z+m+2}-\frac{1}{z+m+3}-\ldots-\frac{1}{z+m+n}$$
$$+\frac{1}{z+m+n+1}+\frac{1}{z+m+n+2}+\frac{1}{z+m+n+3}+\ldots+\frac{1}{z+2m+n}$$
$$-$$

in welcher m positive und n negative Glieder mit einander abwechseln, indem wir die Anordnung der Glieder derart verändern, daß in der abgeleiteten Reihe auf mm' positive Glieder nn' negative folgen; es soll der Unterschied der Stammreihe und der abgeleiteten Reihe ermittelt werden.

Wir waren bestrebt, diesen Gegenstand, welchen seit Dirichlet, Scheibner, Stern, Schlömilch u. A. nur beispielsweise behandelten, in größerer Allgemeinheit aufzufassen und so weit derselbe die harmonische Reihe und ihre Dependenzen betrifft, hiermit abzuschließen.

§. 2.

Wir bezeichnen die m- und n-gliedrigen Gruppen der Stammreihe (1) der Ordnung nach mit $(m)_1$, $(n)_2$, $(m)_3, \ldots$, so daß

$$R = (m)_1 - (n)_2 + (m)_3 - \ldots \tag{2}$$

alsdann ist die in obigem Sinne abgeleitete Reihe:

$$\begin{aligned}(3)\quad S = &\{(m)_1 + (m)_3 + (m)_5 + \ldots + (m)_{2m'-1}\} \\ &\qquad - \{(n)_2 + (n)_4 + (n)_6 + \ldots + (n)_{2n'}\} \\ &+ \{(m)_{2m'+1} + (m)_{2m'+3} + (m)_{2m'+5} + \ldots + (m)_{4m'-1}\} \\ &\qquad - \{(n)_{2n'+2} + (n)_{2n'+4} + (n)_{2n'+6} + \ldots + (n)_{4n'}\} \\ &+ \{(m)_{4m'+1} + (m)_{4m'+3} + (m)_{4m'+5} + \ldots + (m)_{6m'-1}\} \\ &\qquad - \{(n)_{4n'+2} + (n)_{4n'+4} + (n)_{4n'+6} + \ldots + (n)_{6n'}\} \\ &+ \end{aligned}$$

und vergleichen vorerst die beiden endlichen Reihen:

$$R_s = (m)_1 - (n)_2 + (m)_3 - \ldots + (m)_{2s-1} - (n)_{2s}, \tag{4}$$

$$\begin{aligned}(5)\quad S_s = &\{(m)_1 + (m)_3 + (m)_5 + \ldots + (m)_{2m'-1}\} \\ &\qquad - \{(n)_2 + (n)_4 + (n)_6 + \ldots + (n)_{2n'}\} \\ &+ \{(m)_{2m'+1} + (m)_{2m'+3} + (m)_{2m'+5} + \ldots + (m)_{4m'-1}\} \\ &\qquad - \{(n)_{2n'+2} + (n)_{2n'+4} + (n)_{2n'+6} + \ldots + (n)_{4n'}\} \\ &+ \{(m)_{4m'+1} + (m)_{4m'+3} + (m)_{4m'+5} + \ldots + (m)_{6m'-1}\} \\ &\qquad - \{(n)_{4n'+2} + (n)_{4n'+4} + (n)_{4n'+6} + \ldots + (n)_{6n'}\} \\ &+ \\ &+ \{(m)_{2(s-1)m'+1} + (m)_{2(s-1)m'+3} + \ldots + (m)_{2sm'-1}\} \\ &\qquad - \{(n)_{2(s-1)n'+2} + (n)_{2(s-1)n'+4} + \ldots + (n)_{2sn'}\},\end{aligned}$$

von welchen die erste aus s Gliedergruppen der Reihe R besteht, deren jede m positive und n negative Glieder enthält. Die zweite besteht aus den s ersten Gliedergruppen der abgeleiteten Reihe S und jede Gruppe besteht aus mm' positiven und nn' negativen Gliedern. Für $s=\infty$ geht R_s in R und S_s in S über.

Folgende Zusammenstellung gibt die Nenner der letzten Glieder in den aufeinander folgenden Gruppen $(m)_1$, $(n)_2$, $(m)_3$,.. der Reihe R, wie man sie durch Abzählung leicht findet:

$$\begin{array}{ll}
(m)_1 & z+m, \\
(n)_2 & z+\lambda, \\
(m)_3 & z+m+\lambda, \\
(n)_4 & z+2\lambda, \\
(m)_5 & z+m+2\lambda, \\
(n)_6 & z+3\lambda,
\end{array}$$

Der Nenner des letzten Gliedes in

$$\begin{array}{lll}
(m)_{2s-1} & \text{ist also} & z+m+(s-1)\lambda, \\
(n)_{2s} & & z+s\lambda, \\
(m)_{2sm'-1} & & z+m+(sm'-1)\lambda, \\
(n)_{2sn'} & & z+sn'\lambda,
\end{array}$$

wobei zur Abkürzung $m+n=\lambda$ gesetzt wurde.

§. 3.

Die endliche Reihe S_s enthält ohne Unterbrechung alle m-gliederigen Gruppen von $(m)_1$, $(m)_3$,... bis $(m)_{2sm'-1}$ als positive Glieder und auch alle n-gliederigen Gruppen $(n)_2$, $(n)_4$, bis $(n)_{2sn'}$ als negative Glieder; man kann daher auch schreiben:

$$(6) \qquad \begin{aligned} S_s = {} & (m)_1+(m)_3+(m)_5+\ldots+(m)_{2sm'-1} \\ & -(n)_2-(n)_4-(n)_6-\ldots-(n)_{2sn'}. \end{aligned}$$

Wird diese Gleichung von jener (4) subtrahirt, so folgt:

$$(7)\ R_s-S_s=T_s=-\left\{\begin{array}{l} (m)_{2s+1}+(m)_{2s+3}+(m)_{2s+5}+\ldots+(m)_{2sm'-1} \\ -(n)_{2s+2}-(n)_{2s+4}-(n)_{2s+6}-\ldots-(n)_{2sn'} \end{array}\right\}$$

und für $s=\infty$ geht T_s in

$$(8) \qquad T=R-S$$

in den Unterschied der unendlichen Reihen (2) und (3) über.

Um den Grenzwerth des vorstehenden Ausdrucks T_s für $s=\infty$ zu ermitteln, schreiben wir denselben in entwickelter Form:

(9)

$$
\begin{aligned}
-T_s = & \frac{1}{z+\lambda s+1}+\frac{1}{z+\lambda s+2}+\cdots+\frac{1}{z+\lambda s+m} \\
& +\frac{1}{z+\lambda s+\lambda+1}+\frac{1}{z+\lambda s+\lambda+2}+\cdots+\frac{1}{z+\lambda s+\lambda+m} \\
& +\frac{1}{z+\lambda s+2\lambda+1}+\frac{1}{z+\lambda s+2\lambda+2}+\cdots+\frac{1}{z+\lambda s+2\lambda+m} \\
& + \\
& +\frac{1}{z+m'\lambda s-\lambda+1}+\frac{1}{z+m'\lambda s-\lambda+2}+\cdots+\frac{1}{z+m'\lambda s-\lambda+m} \\
& -\frac{1}{z+m+\lambda s+1}-\frac{1}{z+m+\lambda s+2}-\cdots-\frac{1}{z+\lambda s+\lambda} \\
& -\frac{1}{z+m+\lambda s+\lambda+1}-\frac{1}{z+m+\lambda s+\lambda+2}-\cdots-\frac{1}{z+\lambda s+2\lambda} \\
& -\frac{1}{z+m+\lambda s+2\lambda+1}-\frac{1}{z+m+\lambda s+2\lambda+2}-\cdots-\frac{1}{z+\lambda s+3\lambda} \\
& - \\
& -\frac{1}{z+m+n'\lambda s-\lambda+1}-\frac{1}{z+m+n'\lambda s-\lambda+2}-\cdots-\frac{1}{z+n'\lambda s}
\end{aligned}
$$

und betrachten zunächst diejenige Summe von Brüchen, welche der r^{ten} Verticalreihe der positiven Glieder entspricht; sie lautet mit $(m'-1)s$ Gliedern:

$$\frac{1}{z+\lambda s+r}+\frac{1}{z+\lambda s+\lambda+r}+\frac{1}{z+\lambda s+2\lambda+r}+\cdots+\frac{1}{z+m'\lambda s-\lambda+r}$$

und suchen den Werth derselben für $s=\infty$. Die zu limitirende Summe hat offenbar mit

$$\frac{1}{\alpha+\lambda s+\lambda}+\frac{1}{\alpha+\lambda s+2\lambda}+\cdots+\frac{1}{\alpha+m'\lambda s},$$

wenn zur Einfachheit die endliche Größe $z+r=\alpha$ gesetzt wird, denselben Grenzwerth.

Im 57. Bande der Sitzungsberichte haben wir gezeigt, daß für $s = \infty$:

$$(10) \lim \left\{ \frac{1}{\alpha+\lambda s+\lambda} + \frac{1}{\alpha+\lambda s+2\lambda} + \frac{1}{\alpha+\lambda s+3\lambda} + \cdots + \frac{1}{\alpha+v\lambda s} \right\} = \frac{1}{\lambda} \lg v.$$

Dieser Grenzwerth ist unabhängig von α respective von r, jeder der m Verticalreihen positiver Glieder in (9) entspricht also derselbe Grenzwerth $\frac{1}{\lambda}\lg m'$, mithin ist die Grenze der positiven Brüche $\frac{m}{\lambda}\lg m'$. Durch dasselbe Verfahren findet man $\frac{n}{\lambda}\lg n'$ als Grenzwerth der negativen Brüche und es wird:

$$(11) \qquad T = R - S = -\frac{m \lg m' - n \lg n'}{m+n},$$

also die abgeleitete Reihe:

$$(12) \qquad S = \text{Stammreihe} + \frac{m \lg m' - n \lg n'}{m+n}.$$

Der Unterschied T der beiden unendlichen Reihen R und S ist unabhängig von z und verschwindet nur dann, wenn

$$m \lg m' = n \lg n'$$

ist. Setzt man $m' = c^\mu$, $n' = c^\nu$, so wird diese Bedingung erfüllt sein wenn $m\mu = n\nu$ ist, d. h. der Unterschied T verschwindet, wenn m' und n' Potenzen derselben Zahl sind, deren Exponenten sich umgekehrt wie m und n verhalten.

Anmerkung. Den speciellen Fall für $m = n = 1$ hat Schlömilch in seiner Zeischrift Bd. 14, p. 205, angeregt durch eine briefliche Mittheilung von uns (21. März 1869), mit Hilfe der bestimmten Integrale untersucht.

§. 4.

1. Beispiel. Geht man von der Reihe für $\lg 2$ aus, also $z = 1$, $m = n = 1$ und setzt $m' = a$, $n' = 1$, so wird:

$$(13)\quad \lg \sqrt{4a} = \begin{cases} 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\dots+\frac{1}{2a-1}-\frac{1}{2} \\ +\frac{1}{2a+1}+\frac{1}{2a+3}+\frac{1}{2a+5}+\dots+\frac{1}{4a-1}-\frac{1}{4} \\ +\frac{1}{4a+1}+\frac{1}{4a+3}+\frac{1}{4a+5}+\dots+\frac{1}{6a-1}-\frac{1}{6} \\ + \end{cases}$$

Bezeichnet $[a, 1]$ die unendliche Reihe (13), so ist

$$(14)\qquad \lg a = 2\{[a, 1]-[1, 1]\},$$

hieraus ist ersichtlich, daß die natürlichen Logarithmen aller ganzen Zahlen durch dieselbe unendliche convergente Reihe $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots$ dargestellt werden können, indem man ihre Glieder nach einem bestimmten Ordnungsgesetz vertauscht.

2. Beispiel. Mit derselben Reihe

$$\lg 2 = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots,$$

also $z=0$, $m=n=1$ und $m'=3$, $n'=1$ erhält man nach (12):

$$(15)\quad \frac{1}{2}\lg 12 = 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{2}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{4}+\frac{1}{13}+\dots$$

3. Beispiel. Bekanntlich ist:

$$(16)\qquad \frac{1}{2}\lg 2+\frac{\pi}{4} = 1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\dots,$$

wird diese Reihe für R gesetzt, so ist $z=0$, $m=n=2$ und man hat mit $m'=1$, $n'=2$ nach (12):

$$(17)\qquad \begin{aligned} \frac{\pi}{4} = 1 &+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{7}-\frac{1}{8} \\ &+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{11}-\frac{1}{12}-\frac{1}{15}-\frac{1}{16} \\ &+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}-\frac{1}{19}-\frac{1}{20}-\frac{1}{23}-\frac{1}{24} \\ &+ \end{aligned}$$

§. 5.

Durch die Substitution $z=\frac{x}{\Delta}$ verwandelt sich die Reihe (1) nach Division mit Δ in folgende: $\Delta > 0$,

$$(18)\qquad \mathrm{R}=\frac{1}{x+\Delta}+\frac{1}{x+2\Delta}+\frac{1}{x+3\Delta}+\ldots+\frac{1}{x+m\Delta}$$

$$-\frac{1}{x+m\Delta+\Delta}-\frac{1}{x+m\Delta+2\Delta}-\frac{1}{x+m\Delta+3\Delta}-\ldots-\frac{1}{x+m\Delta+n\Delta}$$

$$+\frac{1}{x+m\Delta+n\Delta+\Delta}+\frac{1}{x+m\Delta+n\Delta+2\Delta}+\frac{1}{x+m\Delta+n\Delta+3\Delta}+\ldots+\frac{1}{x+2m\Delta+n\Delta}$$

$$-$$

wird nun aus dieser Reihe nach demselben Bildungsgesetze eine Reihe S abgeleitet, wie *S* aus *R* entstanden ist, so wird der Unterschied beider

$$(19)\qquad \mathrm{S}-\mathrm{R}=\frac{m\lg m'-n\lg n'}{(m+n)\Delta}.$$

4. Beispiel. Für $m=n=1$, also $\lambda=2$ und $x=-1$, $\Delta=2$ wird R gleich:

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\ldots,$$

läßt man in dieser Reihe auf zwei positive Glieder ein negatives folgen, so gibt (19) mit $m'=2$, $n'=1$:

$$(20)\qquad \frac{\pi+\lg 2}{4}=1+\frac{1}{5}-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{13}-\frac{1}{7}+\frac{1}{17}+\frac{1}{21}-\frac{1}{11}+\ldots$$

5. Beispiel. Für $m=n=3$, $x=-1$, $\Delta=2$, wird $\lambda=6$ und R gleich:

$$(21)\qquad \frac{5}{12}\pi=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}-\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{15}+\frac{1}{17}-\ldots$$ [1])

und wenn man in dieser Reihe die Glieder derart versetzt, daß sechs positive und drei negative abwechseln, so wird nach (19) mit $m'=2$, $n'=1$:

$$(22)\qquad \frac{5\pi+\lg 8}{12}=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{13}+\frac{1}{15}+\frac{1}{17}-\frac{1}{7}-\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\frac{1}{25}+\frac{1}{27}+\frac{1}{29}+\frac{1}{37}+\frac{1}{39}+\frac{1}{41}-\frac{1}{19}-\frac{1}{21}-\frac{1}{23}+\frac{1}{49}+\frac{1}{51}+\frac{1}{53}+\frac{1}{61}+\frac{1}{63}+\frac{1}{65}-\frac{1}{31}-\frac{1}{33}-\frac{1}{35}+\ldots$$

6. Beispiel. Setzt man in (18) $m=n=2$, $x=-1$, $\Delta=2$, so wird $\lambda=4$ und

$$(23)\qquad \frac{\pi}{4}\sqrt{2}=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\ldots,$$

also ist nach (19) für $m'=1$, $n'=2$:

---

[1]) S. Sitzungsberichte Bd. 55, II. Abth.

$$(24) \quad \frac{\pi\sqrt{2}-\lg 2}{4} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15}$$
$$+ \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{21} - \frac{1}{23} - \frac{1}{29} - \frac{1}{31}$$
$$+ \frac{1}{17} + \frac{1}{19} - \frac{1}{37} - \frac{1}{39} - \frac{1}{45} - \frac{1}{47}$$
$$+$$

§. 6.

Um die Reihe R, welche unserer Untersuchung als Grundlage dient, in Bezug auf Convergenz zu prüfen, setzen wir

$$(25) \qquad R = R_s + E_s,$$

wobei R_s die Bedeutung (4) hat und E_s die Ergänzung bezeichnet:

$$(26) \quad E_s = (m)_{2s+1} - (n)_{2s+2} + (m)_{2s+3} - \ldots + (m)_{4s-1} - (n)_{4s} + \cdots$$

und unterscheiden zwei Fälle, je nachdem m größer oder kleiner als n ist.

Für $m > n$ ist offenbar

$$(m)_1 > (n)_2,\ (m)_3 > (n)_4,\ (m)_5 > (n)_6, \ldots$$

mithin auch

$$(27) \quad E_s > (m)_{2s+1} - (n)_{2s+2} + (m)_{2s+3} - \ldots + (m)_{4s-1} - (n)_{4s}$$

und

$$\lim. E_s > \lim. \{(m)_{2s+1} - (n)_{2s+2} + (m)_{2s+3} - \ldots + (m)_{4s-1} - (n)_{4s}\}.$$

Die Limite rechts folgert sich aus (7) und (11) mit $m' = n' = 2$ und es wird:

$$(28) \qquad \lim E_s > \frac{m-n}{m+n} \lg 2,$$

weil $m > n$, so ist die Reihe R divergent.

Der Grund dieser auffallenden Erscheinung liegt in Folgendem:

Betrachten wir in der Ergänzung E_s zunächst das zweite und dritte Glied; es ist in entwickelter Form:

$$(n)_{2s+2} = \frac{1}{z+s\lambda+m+1} + \frac{1}{z+s\lambda+m+2} + \cdot \quad + \frac{1}{z+s\lambda+\lambda}$$

$$(m)_{2s+3} = \frac{1}{z+s\lambda+\lambda+1} + \frac{1}{z+s\lambda+\lambda+2} + \ldots + \frac{1}{z+s\lambda+\lambda+m}$$

und da für große Werthe von s das erste Glied das größte, das letzte das kleinste ist:

$$(n)_{2s+2} < \frac{n}{z+s\lambda+m+1}, \qquad (m)_{2s+3} > \frac{m}{z+s\lambda+\lambda+m},$$

folglich:

$$(m)_{2s+3} - (n)_{2s+2} > \frac{m}{z+s\lambda+\lambda+m} - \frac{n}{z+s\lambda+m+1} =$$

$$= \frac{m(z+s\lambda+m+1) - n(z+s\lambda+\lambda+m}{(z+s\lambda+\lambda+m)(z+s\lambda+m+1)}.$$

Da für hinreichend große Werthe von s der Bruch:

$$\frac{z+s\lambda+m+1}{z+s\lambda+\lambda+m}$$

der Einheit beliebig nahe gebracht werden kann, so ist

$$\frac{n}{m} < \frac{z+s\lambda+m+1}{z+s\lambda+\lambda+m}$$

oder

$$m(z+s\lambda+m+1) - n(z+s\lambda+\lambda+m) > 0,$$

d. h. für hinreichend große Werthe von s ist:

$$(29) \qquad (m)_{2s+3} - (n)_{2s+2} > 0,$$

oder die positiven Gruppen der Reihe R sind größer als die Zahlwerthe der vorhergehenden negativen Gruppen. Für hinreichend große Werthe von s sind also die positiven Gruppen, sowohl größer als die Zahlwerthe der folgenden, als der vorhergehenden negativen Gruppen; die Reihe ist also keine durchaus fallende, sie divergirt gegen $+\infty$.

So ist z. B. die Reihe:

$$(30) \qquad \left(1+\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right) - \frac{1}{6} + \left(\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right) - \cdot$$

divergent, obgleich sie einen regelmäßigen Zeichenwechsel darbietet, ihre Glieder unendlich abnehmen und die Nulle zur Grenze haben; denn vom dritten Gliede an beträgt jedes positive Glied mehr als der Zahlwerth des vorhergehenden negativen Gliedes.

§. 7.

Für $m < n$ betrachten wir in E_s das erste und zweite Glied; es ist in entwickelter Form:

$$(m)_{2s+1} = \frac{1}{z+s\lambda+1} + \frac{1}{z+s\lambda+2} + \ldots + \frac{1}{z+s\lambda+m},$$

$$(n)_{2s+2} = \frac{1}{z+s\lambda+m+1} + \frac{1}{z+s\lambda+m+2} + \ldots + \frac{1}{z+s\lambda+\lambda}$$

und es ist in ähnlicher Schlußweise wie früher:

$$(m)_{2s+1} < \frac{m}{z+s\lambda+1}, \quad (n)_{2s+2} > \frac{n}{z+s\lambda+\lambda},$$

folglich:

$$(m)_{2s+1} - (n)_{2s+2} < \frac{m(z+s\lambda+\lambda) - n(z+s\lambda+1)}{(z+s\lambda+1)(z+s\lambda+\lambda)};$$

da nun der Bruch:

$$\frac{z+s\lambda+1}{z+s\lambda+\lambda}$$

für hinreichend große Werthe von s der Einheit beliebig nahe gebracht werden kann, so ist sicher:

$$\frac{m}{n} < \frac{z+s\lambda+1}{z+s\lambda+\lambda}$$

oder

$$m(z+s\lambda+\lambda) - n(z+s\lambda+1) < 0,$$

also um so mehr:

(31) $$(m)_{2s+1} - (n)_{2s+2} < 0.$$

Für hinreichend große Werthe von s sind die Zahlwerthe der negativen Gruppen größer als die vorhergehenden positiven; die in E_s (26) aufeinander folgenden Differenzen sind sämmtlich negativ, also ist E_s selbst negativ:

$$-E_s > -(m)_{2s+1} + (n)_{2s+2} - (m)_{2s+3} + \qquad -(m)_{4s-1} + (n)_{4s}$$

und

$$\lim(-E_s) > \frac{n-m}{n+m}\lg 2, \tag{32}$$

d. h. die Reihe R divergirt gegen $-\infty$.

So ist z. B. die Reihe:

$$1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) + \frac{1}{7} - \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{9}\right) + . \tag{33}$$

divergent, obgleich sie einen regelmäßigen Zeichenwechsel darbietet, ihre Glieder unendlich abnehmen und die Nulle zur Grenze haben; denn vom vierten Gliede an beträgt jedes negative Glied mehr als das vorhergehende positive.

Anmerkung. Der Beweis der Divergenz der Reihe R im zweiten Fall für $m < n$ kann auch auf den ersten Fall zurückgeführt werden, indem man in R das erste Glied wegläßt, und den Rest mit -1 multiplicirt; die neue Reihe entspricht dem ersten Fall, nur sind m und n mit einander vertauscht.

Für $m = n$ wird die Reihe R eine durchaus fallende, denn es ist offenbar:

$$(m)_1 > (m)_2 > (m)_3 > .$$

und diese ist also nach dem Kriterium von Cauchy convergent.

Da die vorhergehenden Betrachtungen von dem besonderen Werth von z unabhängig sind, so gelten dieselben auch für die Reihe R in (18), auch diese ist nur dann convergent, wenn die positiven und negativen Gruppen gleich viele Glieder enthalten.

§. 8.

Wären wir in den vorhergehenden Untersuchungen von folgender Reihe ausgegangen:

$$\mathfrak{R} = \frac{1}{m}(m)_1 - \frac{1}{n}(n)_2 + \frac{1}{m}(m)_3 - \frac{1}{n}(n)_4 + \tag{34}$$

welche sich von jener R in (2) darin unterscheidet, daß sämmtliche positive Gliedergruppen durch m, die negativen durch n dividirt sind, so ist die nach demselben Bildungsgesetz abgeleitete Reihe:

$$
\begin{aligned}
(35)\ \mathfrak{S} = \frac{1}{m}\{(m)_1 + (m)_3 + (m)_5 + \cdots + (m)_{2m'-1}\} \\
- \frac{1}{n}\{(n)_2 + (n)_4 + (n)_6 + \cdots + (n)_{2n'}\} \\
+ \frac{1}{m}\{(m)_{2m'+1} + (m)_{2m'+3} + (m)_{2m'+5} + \cdots + (m)_{4m'-1}\} \\
- \frac{1}{n}\{(n)_{2n'+2} + (n)_{2n'+4} + (n)_{2n'+6} + \cdots + (n)_{4n'}\} \\
+ \frac{1}{m}\{(m)_{4m'+1} + (m)_{4m'+3} + (m)_{4m'+5} + \cdots + (m)_{6m'-1}\} \\
- \frac{1}{n}\{(n)_{4n'+2} + (n)_{4n'+4} + (n)_{4n'+6} + \cdots + (n)_{6n'}\} \\
+ \ldots
\end{aligned}
$$

und die Betrachtungen in §. 3 ergeben hiefür:

$$
(36) \qquad \mathfrak{S} - \mathfrak{R} = \frac{\lg m' - \lg n'}{m+n},
$$

aber die Reihe $\mathfrak{R}$ ist in allen Fällen convergent, wie aus dem Folgenden erhellt.

Es ist

$$
(n)_{2s} = \frac{1}{z+(s-1)\lambda+m+1} + \frac{1}{z+(s-1)\lambda+m+2} + \cdots + \frac{1}{z+s\lambda},
$$

$$
(m)_{2s+1} = \frac{1}{z+s\lambda+1} + \frac{1}{z+s\lambda+2} + \cdots + \frac{1}{z+s\lambda+m},
$$

$$
(n)_{2s+2} = \frac{1}{z+s\lambda+m+1} + \frac{1}{z+s\lambda+m+2} + \cdots + \frac{1}{z+s\lambda+\lambda},
$$

also offenbar:

$$
(m)_{2s+1} < \frac{m}{z+s\lambda+1}, \quad (n)_{2s} > \frac{n}{z+s\lambda},
$$

$$
(m)_{2s+1} > \frac{m}{z+s\lambda+m}, \quad (n)_{2s+2} < \frac{n}{z+s\lambda+m+1};
$$

aus diesen Relationen folgt durch Division:

$$\frac{(m)_{2s+1}}{(n)_{2s}} < \frac{m}{n} \, \frac{z+s\lambda}{z+s\lambda+1} < \frac{m}{n},$$

$$\frac{(m)_{2s+1}}{(n)_{2s+2}} > \frac{m}{n} \cdot \frac{z+s\lambda+m+1}{z+s\lambda+m} > \frac{m}{n}$$

oder

$$\frac{1}{n}(n)_{2s} > \frac{1}{m}(m)_{2s+1} > \frac{1}{n}(n)_{2s+2}. \tag{37}$$

Da nun

$$\frac{1}{n}(n)_{2s}, \; \frac{1}{m}(m)_{2s+1}, \; \frac{1}{n}(n)_{2s+2}$$

die drei aufeinander folgenden allgemeinen Glieder der Reihe $\mathfrak{R}$ sind, so ist dieselbe nach (37) eine durchaus fallende, also nach dem Kriterium von Cauchy convergent. In Folge dessen convergirt auch die abgeleitete Reihe $\mathfrak{S}$.

Während also z. B. die Reihen (30) und (33), für welche $m=2$, $n=1$ und $m=1$, $n=2$ ist, divergiren, sind die beiden folgenden convergent:

$$\left\{\begin{array}{l} \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{10}\right)-\frac{1}{6}+\left(\frac{1}{14}+\frac{1}{16}\right)-\frac{1}{9}+\cdots, \\ 1-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\right)+\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{12}\right)+\frac{1}{7}-\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{18}\right)+\cdots. \end{array}\right. \tag{38}$$

Der Unterschied der beiden convergenten Reihen $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{S}$ verschwindet, wenn $m'=n'$ ist. Da nun die Reihe $\mathfrak{R}$ offenbar divergirt, wenn alle Glieder mit gleichen Vorzeichen genommen werden, so ist es von Interesse, dieses Ergebniß mit dem Scheibner'schen Satze zu vergleichen.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1869

Band/Volume: 60_2

Autor(en)/Author(s): Anonymous

Artikel/Article: XXII. Sitzung vom 21. October 1869. 589-604