Die allgemeinen Differenzialquotienten der Functionen $e^{ax}.\cos(\alpha+\beta x)$, $e^{ax}.\sin(\alpha+\beta x)$, $x^a.\cos\{b\lg(\alpha+\beta x)\}$, $x^a.\sin\{b\lg(\alpha+\beta x)\}$, etc.

Von **Franz Unferdinger,**

Lehrer der Mathematik an der öffentlichen Oberrealschule am hohen Markt in Wien.

(Vorgelegt in der Sitzung am 7. October 1869.)

§. 1.

Es sei $\overset{a}{X}$ irgend eine Function von x, welche noch den unabhängigen Parameter a enthält und deren n^{ter} Differenzialquotient nach x $\overset{a}{X}{}^{(n)}$ ist, so daß in der Bezeichnung von Cauchy:

$$D^{(n)}\overset{a}{X}=\overset{a}{X}{}^{(n)}.$$

Wird der Parameter imaginär $a+bi$ und gehen hierfür bei der Reduction auf die Normalform die beiden Functionen $\overset{a}{X}$, $\overset{a}{X}{}^{(n)}$ beziehungsweise in

$$Y+iZ\,,\quad Y^{(n)}+iZ^{(n)}$$

über, so ist auch

$$D^n\{Y+iZ\}=Y^{(n)}+iZ^{(n)},$$

welche Gleichung in die beiden folgenden zerfällt:

$$D^nY=Y^{(n)},\ D^nZ=Z^{(n)}.$$

Da sich bei dem Durchgang durch das Imaginäre bekanntlich die Functionen in andere wesentlich verschiedene verwandeln, so dient das bezeichnete Verfahren zur Ableitung neuer Differenzialquotienten mit allgemeiner Ordnungszahl.

Wir werden im Folgenden dieses Verfahren anwenden auf die Functionen e^{ax}, x^m, deren Differenzialquotienten bekanntlich am einfachsten sind, denn es ist:

$$(1)\quad D^ne^{ax}=a^n.e^{ax},\qquad (2)\quad D^nx^m=n!\binom{m}{n}x^{m-n},\ n>0.$$

§. 2.

Wenn A_n, B_n die durch folgende Gleichungen ausgesprochene Bedeutung haben:

$$(3)\quad \begin{cases} A_n = a^n - \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \binom{n}{4} a^{n-4} b^4 - \ldots, \\ B_n = \binom{n}{1} a^{n-1} b - \binom{n}{3} a^{n-3} b^3 + \binom{n}{5} a^{n-5} b^5 - \end{cases}$$

so ist $(a+bi)^n = A_n + B_n i$ und da ferner

$$e^{(a+bi)x} = e^{ax}\{\cos bx + i \sin bx\},$$

so gibt die Gleichung (1) nach kurzer Rechnung:

$$(4)\quad \begin{cases} D^n\{e^{ax}.\cos bx\} = (A_n \cos bx - B_n \sin bx)\, e^{ax}, \\ D^n\{e^{ax}.\sin bx\} = (A_n \sin bx + B_n \cos bx)\, e^{ax}. \end{cases}$$

Für $x = 0$ wird

$$D^n\{e^{ax}\cos bx\}_0 = A_n,\ D^n\{e^{ax}\sin bx\}_0 = B_n$$

und hiermit nach dem Theorem von Maclaurin:

$$(5)\quad \begin{cases} e^{ax}.\cos bx = 1 + \frac{A_1 x}{1} + \frac{A_2 x^2}{1.2} + \frac{A_3 x^3}{1.2.3} + \ldots \\ e^{ax}.\sin bx = \frac{B_1 x}{1} + \frac{B_2 x^2}{1.2} + \frac{B_3 x^3}{1.2.3} + \ldots \end{cases} \qquad -\infty < x < +\infty$$

Die zweite Entwickelung folgt auch aus der ersten, durch Differenziation nach b, denn es ist

$$(6)\qquad \frac{dA_n}{db} = -nB_{n-1}, \qquad \text{so wie } \frac{dB_n}{db} = nA_{n-1}.$$

Durch die Substitution $a = \rho\cos\theta$, $b = \rho\sin\theta$ wird nach den Gleichungen des Vieta:

$$A_n = \rho^n \cos n\theta, \qquad B_n = \rho^n \sin n\theta$$

und da nun $\rho = \sqrt{a^2+b^2}$ und wenn a positiv vorausgesetzt wird $\theta = \operatorname{arctg}\frac{b}{a}$, so erlangen die Formeln (4) folgende Gestalt:

$$(7)\quad \begin{cases} D^n\{e^{ax}\cos bx\} = \sqrt{a^2+b^2}^n.\cos\{n\,\text{arc. tg}\,\frac{b}{a}+bx\}.e^{ax}, \\ D^n\{e^{ax}\sin bx\} = \sqrt{a^2+b^2}^n.\sin\{n\,\text{arc. tg}\,\frac{b}{a}+bx\}.e^{ax}. \end{cases} \quad a>0$$

Für $a<0$ wird $\theta=\pi+\text{arc. tg}\,\frac{b}{a}$ und die zweiten Theile dieser Gleichungen sind noch mit $(-1)^n$ zu multipliciren.

Will man beide Fälle zusammenziehen, so setze man ohne weitere Reduction

$$\theta=\frac{1}{2}\pi-\text{arc. tg}\,\frac{a}{b}$$

und man hat in voller Allgemeinheit:

$$(7')\quad \begin{cases} D^n\{e^{ax}\cos bx\} = \sqrt{a^2+b^2}^n.\cos\{n\left(\frac{1}{2}\pi-\text{arc. tg}\,\frac{a}{b}\right)+bx\}.e^{ax}, \\ D^n\{e^{ax}\sin bx\} = \sqrt{a^2+b^2}^n.\sin\{n\left(\frac{1}{2}\pi-\text{arc. tg}\,\frac{a}{b}\right)+bx\}.e^{ax}. \end{cases}$$

Ist in (7) $a=b=1$, so wird speciell:

$$(8)\quad \begin{cases} D^n\{e^x\cos x\} = \sqrt{2}^n.\cos\left(\frac{n\pi}{4}+x\right).e^x, \\ D^n\{e^x\sin x\} = \sqrt{2}^n.\sin\left(\frac{n\pi}{4}+x\right).e^x, \end{cases}$$

aber für $a=-1$, $b=1$

$$(8')\quad \begin{cases} D^n\{e^{-x}\cos x\} = (-\sqrt{2})^n\cos\left(\frac{n\pi}{4}-x\right)e^{-x}, \\ D^n\{e^{-x}\sin x\} = -(-\sqrt{2})^n\sin\left(\frac{n\pi}{4}-x\right)e^{-x}. \end{cases}$$

Für $a=0$ folgt aus (7') das bekannte Resultat:

$$(9)\quad \begin{cases} D^n(\cos bx) = b^n\cos\left\{\frac{n\pi}{2}+bx\right\}, \\ D^n(\sin bx) = b^n\sin\left\{\frac{n\pi}{2}+bx\right\}, \end{cases}$$

so wie für $b=0$ die Gleichung (1).

Allgemeiner werden die Gleichungen (7) durch die Substitution $x = p + qz$, indem man von der Beziehung Gebrauch macht:

$$D_z^n = q^n D_{p+qz}^n.$$

Wird alsdann mit e^{ap} abgekürzt $aq = m$, $bp = \alpha$, $bq = \beta$ gesetzt und zuletzt wieder x für z geschrieben, so folgt:

$$(10) \quad \left\{\begin{aligned} &D^n\{e^{mx}.\cos(\alpha+\beta x)\} = \sqrt{m^2+\beta^2}^n.\cos\{n\,\text{arc.tg}\frac{\beta}{m}+\alpha+\beta x\}, \\ &D^n\{e^{mx}.\sin(\alpha+\beta x)\} = \sqrt{m^2+\beta^2}^n.\sin\{n\,\text{arc.tg}\frac{\beta}{m}+\alpha+\beta x\}. \end{aligned}\right. \quad m > 0$$

Ist $m < 0$, so sind die zweiten Theile noch mit $(-1)^n$ zu multipliciren.

§. 3.

Bevor wir die Gleichung (2) für complexe Werthe des Exponenten m anwenden können, ist nothwendig den Binomialcoefficient $\binom{m}{n}$ für $m = a + bi$ auf die Normalform zu reduciren. Es ist

$$\binom{a+bi}{n} = \frac{1}{n!}.\prod_0^{n-1}\{(a-r)+bi\}$$

oder wenn gesetzt wird:

$$(11) \qquad a - r = \rho_r \cos\theta_r, \quad b = \rho_r \sin\theta_r$$

$$\binom{a+bi}{n} = \frac{1}{n!}.\prod_0^{n-1}\rho_r(\cos\theta_r + i\sin\theta_r).$$

Aus den Gleichungen (11) folgt:

$$(12) \qquad \rho_r = \sqrt{(a-r)^2+b^2}$$

und für $a - r > 0$:

$$(13) \qquad \theta_r = \text{arc.tg}\frac{b}{a-r},$$

für $a - r < 0$:

$$(14) \qquad \theta_r = \pi + \text{arc.tg}\frac{b}{a-r}$$

oder ohne Unterscheidung nach dem Vorzeichen von $a-r$ und ohne weitere Reduction:

$$\theta_r = \frac{1}{2}\pi - \text{arc. tg}\frac{a-r}{b},$$

wird nun zur Abkürzung

(15) $$P_n = \rho_0 \rho_1 \rho_2 \dots \rho_{n-1} = \sqrt{[a^2+b^2]\,[(a-1)^2+b^2]\,[(a-2)^2+b^2]\dots[(a-n+1)^2+b^2]}$$

eingeführt, so erlangt unser Binomialcoefficient folgende Gestalt:

(16) $$\binom{a+bi}{n} = P_n \cdot \left\{ \begin{array}{l} \cos(\theta_0+\theta_1+\theta_2+\dots+\theta_{n-1}) \\ +\, i\sin(\theta_0+\theta_1+\theta_2+\dots+\theta_{n-1}) \end{array} \right\}$$

§. 4.

Für $m = a+bi$ wird

$$x^m = x^a . \{\cos\{b \lg x\} + i \sin\{b \lg x\}\} \qquad x^{m-n} = x^{a-n} . \{\cos\{b \lg x\} + i \sin\{b \lg x\}\}$$

40*

und die Substitution dieser Werthe in (2) gibt mit Anwendung der Reduction (16) nach leichter Rechnung:

(17) $$\left\{ \begin{array}{l} D^n\{x^a \cos\{b \lg x\}\} = P_n . \cos(\theta_0+\theta_1+\theta_2+\dots+\theta_{n-1}+b\lg x) . x^{a-n}, \\ D^n\{x^a \sin\{b \lg x\}\} = P_n . \sin(\theta_0+\theta_1+\theta_2+\dots+\theta_{n-1}+b\lg x) . x^{a-n}. \end{array} \right.$$

Hiermit gelangt man für $x=1$ durch Anwendung der folgenden Form des Maclaurin'schen Theorems

$$f(1+x)=f(1)+f'(1)\frac{x}{1}+f''(1)\frac{x^2}{1.2}+\cdots$$

zu den beiden Reihenentwickelungen:

$$(18)\qquad \begin{cases}(1+x)^a\cos\{b\lg(1+x)\}=1+a_1\dfrac{x}{1}+a_2\dfrac{x^2}{1.2}+a_3\dfrac{x^3}{1.2.3}+\cdots, \\ (1+x)^a\sin\{b\lg(1+x)\}=b_1\dfrac{x}{1}+b_2\dfrac{x^2}{1.2}+b_3\dfrac{x^3}{1.2.3}+\cdots,\end{cases}\quad -1<x<+1$$

in welchen die Coefficienten durch folgende Gleichungen bestimmt werden:

$$(19)\qquad \begin{cases}a_n=P_n.\cos(\theta_0+\theta_1+\theta_2+\ldots+\theta_{n-1}), \\ b_n=P_n.\sin(\theta_0+\theta_1+\theta_2+\ldots+\theta_{n-1}).\end{cases}$$

Diese Reihen convergiren für jene Werthe von x, für welche die folgende Reihe convergirt:

$$1+P_1\frac{x}{1}+P_2\frac{x^2}{1.2}+P_3\frac{x^3}{1.2.3}+\cdots$$

nun ist sicher, wenn rechts a und b auf ihre absoluten Werthe reducirt werden:

$$P_n<(a+b)(a+b-1)(a+b-2)\ldots(a+b+n-1)$$

$$\frac{P_n}{n!}<\binom{a+b}{n}.$$

Die Reihen (18) convergiren also sicher für jene Werthe von x, für welche

$$1+\binom{a+b}{1}x+\binom{a+b}{2}x^2+\binom{a+b}{3}x^3+$$

convergent bleibt, d. h. für $-1 < x < 1$.

Zu demselben Resultat führt das Kriterium von Cauchy für die Grenze von $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

Setzt man in den Gleichungen (17) $a=0$, so tritt zur Bestimmung der Winkel θ_r durchaus die Gleichung (14) in Kraft und man hat:

$$\theta_0+\theta_1+\theta_2+\cdot\;\;\cdot+\theta_{n-1}=n\pi-\text{arc. tg}\,\frac{b}{0}-\text{arc. tg}\,\frac{b}{1}-\text{arc. tg}\,\frac{b}{2}-\cdot\;\;\cdot-\text{arc. tg}\,\frac{b}{n-1}\,; \tag{20}$$

hiermit erhält man, wenn zuletzt a statt b geschrieben wird:

$$\left\{\begin{aligned} &D^n\left\{\cos\{a\lg x\}\right\}\\ &=\frac{(-1)^n}{x^n}\sqrt{a^2(a^2+1^2)(a^2+2^2)\ldots(a^2+\overline{n-1}^2)}\cos\left\{\text{arc. tg}\,\frac{a}{0}+\text{arc. tg}\,\frac{a}{1}+\cdot\;\;\cdot+\text{arc. tg}\,\frac{a}{n-1}-a\lg x\right\}\\ &D^n\left\{\sin\{a\lg x\}\right\}\\ &=-\frac{(-1)^n}{x^n}\sqrt{a^2(a^2+1^2)(a^2+2^2)\ldots(a^2+\overline{n-1}^2)}\sin\left\{\text{arc. tg}\,\frac{a}{0}+\text{arc. tg}\,\frac{a}{1}+\ldots+\text{arc. tg}\,\frac{a}{n-1}-a\lg x\right\}. \end{aligned}\right. \tag{21}$$

Mit dem speciellen Werthe $x=1$ erhält man hieraus ähnlich wie früher zwei Potenzreihen:

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned} \cos\{a\lg(1+x)\} &= 1 + \mathfrak{a}_1\frac{x}{1} + \mathfrak{a}_2\frac{x^2}{1.2} + \mathfrak{a}_3\frac{x^3}{1.2.3} + \ldots, \\ \sin\{a\lg(1+x)\} &= \mathfrak{b}_1\frac{x}{1} + \mathfrak{b}_2\frac{x^2}{1.2} + \mathfrak{b}_3\frac{x^3}{1.2.3} + \ldots, \end{aligned}\right. \qquad -1 < x < +1$$

in welchen die Coefficienten folgende Bedeutung haben:

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{a}_n &= \quad (-1)^n \sqrt{a^2(a^2+1^2)(a^2+2^2)\ldots(a^2+\overline{n-1}^2)}\cos\left\{\text{arc.}\operatorname{tg}\frac{a}{0} + \text{arc.}\operatorname{tg}\frac{a}{1} + \ldots + \text{arc.}\operatorname{tg}\frac{a}{n-1}\right\}, \\ \mathfrak{b}_n &= -(-1)^n \sqrt{a^2(a^2+1^2)(a^2+2^2)\ldots(a^2+\overline{n-1}^2)}\sin\left\{\text{arc.}\operatorname{tg}\frac{a}{0} + \text{arc.}\operatorname{tg}\frac{a}{1} + \ldots + \text{arc.}\operatorname{tg}\frac{a}{n-1}\right\} \end{aligned}\right.$$

und die Convergenzgrenzen dieselben sind, wie in (18).

Die Substitution $a = 0$ in dem complexen Binomialcoefficienten (16) führt bei Anwendung der Gleichung (20), mit der Abkürzung

$$(24)\qquad R_n = \sqrt{b^2(b^2+1^2)(b^2+2^2)\ldots(b^2+\overline{n-1}^2)}$$

zu folgender Transformation, von welcher später Gebrauch gemacht wird:

$$(25)\qquad \binom{bi}{n} = \frac{(-1)^n R_n}{n!}\left\{\begin{aligned} &\cos\left\{\text{arc.}\operatorname{tg}\frac{b}{0} + \text{arc.}\operatorname{tg}\frac{b}{1} + \text{arc.}\operatorname{tg}\frac{b}{2} + \ldots + \text{arc.}\operatorname{tg}\frac{b}{n-1}\right\} \\ -\,i&\sin\left\{\text{arc.}\operatorname{tg}\frac{b}{0} + \text{arc.}\operatorname{tg}\frac{b}{1} + \text{arc.}\operatorname{tg}\frac{b}{2} + \ldots + \text{arc.}\operatorname{tg}\frac{b}{n-1}\right\} \end{aligned}\right\}.$$

§. 5.

Die Anwendung des im Eingange erläuterten Verfahrens auf die Function x^{a+bi} führte uns zur Kenntniß der allgemeinen Differenzialquotienten der Functionen $x^a \cos\{b \lg x\}$, $x^a \sin\{b \lg x\}$. Um die Differenzialquotienten der Functionen $x^a \cos\{b \lg(\alpha+\beta x)\}$, $x^a \sin\{b \lg(\alpha+\beta x)\}$ zu erhalten, gehen wir aus von der Function $x^a(\alpha+x)^{bi}$ und benützen die Leibnitz'sche Formel für die Differenziation der Producte:

$$D^n(uv) = \mathop{\mathrm{S}}_{0}^{n} \binom{n}{s} D^s u \,.\, D^{n-s} v,$$

worin sich die Summation auf s bezieht. Dieselbe kann auch in folgender Weise geschrieben werden, welche für unsere Zwecke dienlich ist:

$$D^n(uv) = vD^n u + \mathop{\mathrm{S}}_{0}^{n-1} \binom{n}{s} D^s u \,.\, D^{n-s} v. \tag{26}$$

Jetzt setzen wir $u = x^a$, $v = (\alpha+x)^{bi}$, so daß nach (2)

$$D^s x^a = s! \binom{a}{s} x^{a-s},$$

welche Gleichung auch für $s = 0$ gilt, mit $0! = 1$, $\binom{s}{0} = 1$.

Ferner ist

$$D^{n-s}(\alpha+x)^{bi} = (n-s)! \binom{bi}{n-s} (\alpha+x)^{-(n-s)+bi}$$

und hiermit gibt (26):

$$\frac{1}{n!} D^n \{x^a(\alpha+x)^{bi}\} =$$

$$\binom{a}{n} x^{a-n} . (\alpha+x)^{bi} + \mathop{\mathrm{S}}_{0}^{n-1} \binom{a}{s}\binom{bi}{n-s} \frac{x^{a-s}}{(\alpha+x)^{n-s}} (\alpha+x)^{bi}. \tag{27}$$

Aus der Gleichung (25) folgt, wenn $n-s$ an die Stelle von n tritt:

$$\binom{bi}{n-s} = \frac{(-1)^{n-s} R_{n-s}}{(n-s)!} \left\{ \begin{array}{l} \cos\left\{\text{arc. tg}\,\frac{b}{0} + \text{arc. tg}\,\frac{b}{1} + \ldots + \text{arc. tg}\,\frac{b}{n-s-1}\right\} \\ -\, i \sin\left\{\text{arc. tg}\,\frac{b}{0} + \text{arc. tg}\,\frac{b}{1} + \ldots + \text{arc. tg}\,\frac{b}{n-s-1}\right\} \end{array} \right\}$$

auch ist

$$(\alpha + x)^{bi} = \cos\{b \lg(\alpha + x)\} + i \sin\{b \lg(\alpha + x)\}.$$

Die Substitution dieser Werthe in (25) gibt nach kurzer Rechnung und nach Zerfällung des Reelen und Imaginären für sich:

$$(28) \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{n!} D^n \left\{x^a \cos\{b \lg(\alpha + x)\}\right\} \\ = \binom{a}{n} x^{a-n} . \cos\{b \lg(\alpha + x)\} + \mathop{\mathrm{S}}_{0}^{n-1} \frac{(-1)^{n-s} . R_{n-s} \binom{a}{s} x^{a-s}}{(n-s)!\,(\alpha + x)^{n-s}} . \cos\left\{\text{arc. tg}\,\frac{b}{0} + \ldots + \text{arc. tg}\,\frac{b}{n-s-1} - b \lg(\alpha + x)\right\}, \\ \frac{1}{n!} D^n \left\{x^a \sin\{b \lg(\alpha + x)\}\right\} \\ = \binom{a}{n} x^{a-n} . \sin\{b \lg(\alpha + x)\} + \mathop{\mathrm{S}}_{0}^{n-1} \frac{(-1)^{n-s} . R_{n-s} \binom{a}{s} x^{a-s}}{(n-s)!\,(\alpha + x)^{n-s}} . \sin\left\{\text{arc. tg}\,\frac{b}{0} + \ldots + \text{arc. tg}\,\frac{b}{n-s-1} - b \lg(\alpha + x)\right\} \end{array} \right.$$

In diesen Formeln ist im Sinne der Gleichungen (24):

$$(29) \qquad R_{n-s} = \sqrt{b^2 (b^2 + 1^2)(b^2 + 2^2) \ldots (b^2 + \overline{n-s-1}^2)}$$

und wenn βx statt x gesetzt wird, so erhält man folgende allgemeine Resultate:

$$(30)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{n!} D^n \left\{x^a \cos\{b \lg(\alpha+\beta x)\}\right\} \\ = \dbinom{a}{n} x^{a-n}.\cos\{b\lg(\alpha+\beta x)\} + \displaystyle\mathop{\mathrm{S}}_{0}^{n-1} \frac{(-1)^{n-s} R_{n-s}\binom{a}{s} x^{a-s}}{(n-s)!}.\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta x}\right)^{n-s} \cos\left\{\mathrm{arc.tg}\frac{b}{0}+\ldots+\mathrm{arc.tg}\frac{b}{n-s-1} - b\lg(\alpha+\beta x)\right\}, \\ \dfrac{1}{n!} D^n \left\{x^a \sin\{b \lg(\alpha+\beta x)\}\right\} \\ = \dbinom{a}{n} x^{a-n}.\sin\{b\lg(\alpha+\beta x)\} + \displaystyle\mathop{\mathrm{S}}_{0}^{n-1} \frac{(-1)^{n-s} R_{n-s}\binom{a}{s} x^{a-s}}{(n-s)!}.\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta x}\right)^{n-s} \sin\left\{\mathrm{arc.tg}\frac{b}{0}+\ldots+\mathrm{arc.tg}\frac{b}{n-s-1} - b\lg(\alpha+\beta x)\right\}. \end{cases}$$

Speciell für $a=0$ verschwinden unter dem Summenzeichen alle Glieder bis auf jenes, welches $s=0$ entspricht und man erhält, wenn a für b geschrieben wird:

$$(31)\quad \begin{cases} D^n\left\{\cos\{a\lg(\alpha+\beta x)\}\right\} = (-1)^n R_n \left(\dfrac{\beta}{\alpha+\beta x}\right)^n.\cos\left\{\mathrm{arc.\,tg}\dfrac{a}{0}+\mathrm{arc.\,tg}\dfrac{a}{1}+\ldots+\mathrm{arc.\,tg}\dfrac{a}{n-1} - a\lg(\alpha+\beta x)\right\}, \\ D^n\left\{\sin\{a\lg(\alpha+\beta x)\}\right\} = -(-1)^n R_n \left(\dfrac{\beta}{\alpha+\beta x}\right)^n.\sin\left\{\mathrm{arc.\,tg}\dfrac{a}{0}+\mathrm{arc.\,tg}\dfrac{a}{1}+\ldots+\mathrm{arc.\,tg}\dfrac{a}{n-1} - a\lg(\alpha+\beta x)\right\}: \end{cases}$$

worin jetzt:

$$R_n = \sqrt{a^2(a^2+1^2)(a^2+2^2)\ldots(a^2+\overline{n-1}^2)}. \tag{32}$$

Hieraus folgt unmittelbar, wenn zur Abkürzung gesetzt wird:

$$\lambda_n = \text{arc. tg}\,\frac{a}{0} + \text{arc. tg}\,\frac{a}{1} + \ldots + \text{arc. tg}\,\frac{a}{n-1} - a\lg\alpha, \tag{33}$$

$$\left\{\begin{aligned} D^n\Big\{\cos\{a\lg(\alpha+\beta x)\}\Big\}_0 &= \quad\;\; (-1)^n R_n\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n.\cos\lambda_n,\\ D^n\Big\{\sin\{a\lg(\alpha+\beta x)\}\Big\}_0 &= -(-1)^n R_n\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n.\sin\lambda_n,\end{aligned}\right. \tag{34}$$

was auf folgende Reihenentwickelungen führt für $\alpha > 0$:

$$\left\{\begin{aligned} \cos\{a\lg(\alpha+\beta x)\} &= \cos(a\lg\alpha) - \frac{R_1\cos\lambda_1}{1}\left(\frac{\beta x}{\alpha}\right) + \frac{R_2\cos\lambda_2}{1.2}\left(\frac{\beta x}{\alpha}\right)^2 - \frac{R_3\cos\lambda_3}{1.2.3}\left(\frac{\beta x}{\alpha}\right)^3 + \ldots,\\ \sin\{a\lg(\alpha+\beta x)\} &= \sin(a\lg\alpha) + \frac{R_1\sin\lambda_1}{1}\left(\frac{\beta x}{\alpha}\right) - \frac{R_2\sin\lambda_2}{1.2}\left(\frac{\beta x}{\alpha}\right)^2 + \frac{R_3\sin\lambda_3}{1.2.3}\left(\frac{\beta x}{\alpha}\right)^3 - \end{aligned}\right. \tag{35}$$

mit der Convergenzbedingung $-1 < \dfrac{\beta x}{\alpha} < +1$.

Für $\alpha = \beta = 1$ gehen diese Entwickelungen in jene (22) über.

§. 6.

Für $\alpha = 0$ stimmen die linken Seiten der Gleichungen (28) beziehungsweise mit jenen (17) und man gelangt durch die Gleichstellung der rechten Seiten nach Kürzung mit x^{a-n} zu folgenden Summationen:

$$
(36)\left\{\begin{aligned}
&\frac{P_n}{n!}\cos(\theta_0+\theta_1+\theta_2+\ldots+\theta_{n-1}+b\lg x)\\
&=\binom{a}{n}\cos(b\lg x)+\mathop{\mathrm{S}}_{0}^{n-1}\frac{(-1)^{n-s}R_{n-s}\binom{a}{s}}{(n-s)!}\cos\left\{\text{arc. tg}\frac{b}{0}+\text{arc. tg}\frac{b}{1}+\ldots+\text{arc. tg}\frac{b}{n-s-1}-b\lg x\right\},\\
&\frac{P_n}{n!}\sin(\theta_0+\theta_1+\theta_2+\ldots+\theta_{n-1}+b\lg x)\\
&=\binom{a}{n}\sin(b\lg x)-\mathop{\mathrm{S}}_{0}^{n-1}\frac{(-1)^{n-s}R_{n-s}\binom{a}{s}}{(n-s)!}\sin\left\{\text{arc. tg}\frac{b}{0}+\text{arc. tg}\frac{b}{1}+\ldots+\text{arc. tg}\frac{b}{n-s-1}-b\lg x\right\},
\end{aligned}\right.
$$

in welchen P_n und R_{n-s} die Werthe aus (15) und (29) bezeichnen und θ_r entsprechend dem Vorzeichen von $a-r$ aus (13) oder (14) zu entnehmen ist.

Die Gleichungen (28) gestatten noch eine bemerkenswerthe Transformation für $x-\alpha$ statt x. Setzt man zuletzt noch $-\frac{\alpha}{\beta}$ statt α und multiplicirt mit β^a, so zeigen sich folgende Resultate:

$$
(37)\left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{n!}D^n\left\{(\alpha+\beta x)^a\cos\{b\lg x\}\right\}\\
&=\binom{a}{n}\beta^n(\alpha+\beta x)^{a-n}\cos\{b\lg x\}+\mathop{\mathrm{S}}_{0}^{n-1}\frac{(-1)^{n-s}R_{n-s}\binom{a}{s}\beta^s(\alpha+\beta x)^{n-s}}{(n-s)!\,x^{n-s}}\cos\left\{\operatorname{arc.tg}\frac{b}{0}+\ldots+\operatorname{arc.tg}\frac{b}{n-s-1}-b\lg x\right\},\\
&\frac{1}{n!}D^n\left\{(\alpha+\beta x)^a\sin\{b\lg x\}\right\}\\
&=\binom{a}{n}\beta^n(\alpha+\beta x)^{a-n}\sin\{b\lg x\}-\mathop{\mathrm{S}}_{0}^{n-1}\frac{(-1)^{n-s}R_{n-s}\binom{a}{s}\beta^s(\alpha+\beta x)^{n-s}}{(n-s)!\,x^{n-s}}\sin\left\{\operatorname{arc.tg}\frac{b}{0}+\ldots+\operatorname{arc.tg}\frac{b}{n-s-1}-b\lg x\right\},
\end{aligned}\right.
$$

welche Formeln ebenfalls giltig sind für jeden reellen Werth von a

Zu demselben Resultat gelangt man auch im Sinne der Bemerkung zu Anfang des §. 5 mit der Form $(\alpha+x)^a.x^{bi}$, wenn man auf reelle Functionen reducirt.

§. 7.

Eine andere Anwendung unserer Methode gewährt die bekannte Formel:

$$
(38)\qquad D^n\lg(a+bx)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!\,b^n}{(a+bx)^n}
$$

für $b=i$. Die Reduction auf die Normalform gibt:

$$\lg(a+xi) = \frac{1}{2}\lg(x^2+a^2) + i\,\text{arc.}\,\text{tg}\,\frac{x}{a}.$$

$$\left\{\frac{i}{a+xi}\right\}^n = (x-ai)^{-n} = \frac{1}{\rho^n}(\cos n\theta + i\sin n\theta),$$

wobei $\rho = \sqrt{x^2+a^2}$ und

(39) für $x > 0$ $\theta = \text{arc.}\,\text{tg}\,\frac{a}{x}$, für $x < 0$ $\theta = \pi + \text{arc.}\,\text{tg}\,\frac{a}{x}$,

oder ohne Unterscheidung nach x:

$$\theta = \frac{1}{2}\pi - \text{arc.}\,\text{tg}\,\frac{x}{a}. \tag{40}$$

Hiermit erhält man unmittelbar:

$$\begin{cases} D^n \lg(x^2+a^2) = \dfrac{2(-1)^{n-1}(n-1)!}{\sqrt{x^2+a^2}^{\,n}}\cos n\theta, \\[2ex] D^n\,\text{arc.}\,\text{tg}\,\dfrac{x}{a} \quad = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{\sqrt{x^2+a^2}^{\,n}}\sin n\theta. \end{cases} \tag{41}$$

Zur Bestimmung des n^{ten} Differenzialquotienten von $\lg(x^2-a^2) = \lg(x+a) + \lg(x-a)$ wendet man die Gleichung (38) an, mit $b=1$ und $-a$ statt a:

$$D^n \lg(x^2-a^2) = (-1)^{n-1}(n-1)!\frac{(x+a)^n+(x-a)^n}{(x^2-a^2)^n}. \tag{42}$$

Die erste Gleichung in (41) und jene (42) lassen sich verallgemeinern durch Anwendung der Identitäten:

$$\left(\frac{b+cx}{\sqrt{c}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{ac-b^2}}{\sqrt{c}}\right)^2 = a + 2bx + cx^2 \text{ für } ac - b^2 > 0,$$

$$\left(\frac{b+cx}{\sqrt{c}}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2-ac}}{\sqrt{c}}\right)^2 = a + 2bx + cx^2 \text{ für } b^2 - ac > 0.$$

Setzt man nämlich in den genannten Gleichungen $\frac{b+cx}{\sqrt{c}}$ statt x und statt a in der ersteren $\frac{\sqrt{ac-b^2}}{\sqrt{c}}$, in der letzteren statt a aber $\frac{\sqrt{b^2-ac}}{\sqrt{c}}$, so verwandeln sich dieselben in folgende:

$$(43)\begin{cases} D^n \lg(a+2bx+cx^2) = 2(-1)^{n-1}(n-1)! \sqrt{\frac{c}{a+2bx+cx^2}}^{\,n} \cos n\theta, \quad ac-b^2>0, \\ D^n \lg(a+2bx+cx^2) = (-1)^{n-1}(n-1)! \frac{\{b+\sqrt{b^2-ac}+cx\}^n + \{b-\sqrt{b^2-ac}+cx\}^n}{(a+2bx+cx^2)^n}, \; b^2-ac>0; \end{cases}$$

dabei ist in der ersteren

$$(44)\qquad \begin{cases} \text{für } b+cx>0, \quad \theta = \text{arc.tg}\,\frac{\sqrt{ac-b^2}}{b+cx}, \\ \text{für } b+cx<0, \quad \theta = \pi + \text{arc.tg}\,\frac{\sqrt{ac-b^2}}{b+cx}, \end{cases}$$

eine Unterscheidung, welche in vielen Fällen übersehen wird. Will man dieselbe vermeiden, so ist zu setzen, o h n e w e i t e r e R e d u c t i o n :

$$(45)\qquad \theta = \frac{1}{2}\pi - \text{arc.tg}\,\frac{b+cx}{\sqrt{ac-b^2}},$$

so daß der Winkel θ stumpf wird, wenn $b+cx$ negativ ist.

Ist in der ersten Formel (43) $c<0$, so muß auch $a<0$ sein und um imaginäre Größen zu vermeiden, ist alsdann der Bruch rechts durch den gleichwerthigen

$$\frac{-c}{-a-2bx-cx^2}$$

zu ersetzen.

Entwickelt man in der zweiten Gleichung (43)

$$(b+cx\pm\sqrt{b^2-ac})^n$$

nach dem binomischen Lehrsatz, so gelangt man leicht zu folgender Summenform, welche allgemein giltig ist:

$$(46)\qquad D^n\lg(a+2bx+cx^2)$$
$$=\frac{2(-1)^{n-1}(n-1)!}{(a+2bx+cx^2)^n}\mathbf{S}\binom{n}{2s}(b^2-ac)^s(b+cx)^{n-2s},$$

das Summenzeichen bezieht sich auf s für alle ganzen positiven Zahlen 0, 1, 2, 3,... bis die Reihe von selbst abbricht.

§. 8.

In der bekannten Entwickelung mit n als ganze positive Zahl:

$$(47)\quad (1+\sqrt{1-z})^n+(1-\sqrt{1-z})^n=n2^n\mathbf{S}\frac{(-1)^s}{n-s}\binom{n-s}{s}\left(\frac{z}{4}\right)^s$$

bezieht sich die Summation auf $s=0, 1, 2, 3.$ bis die Reihe rechts von selbst abbricht. Für

$$z=\frac{a+2bx+cx^2}{(b+cx)^2}c,\quad \text{also } 1-z=\frac{b^2-ac}{(b+cx)^2}$$

erhält man hieraus mit Leichtigkeit:

$$\{b+\sqrt{b^2-ac}+cx\}^n+\{b-\sqrt{b^2-ac}+cx\}^n$$
$$=n\mathbf{S}\frac{(-1)^s}{n-s}\binom{n-s}{s}c^s\{2(b+cx)\}^{n-2s}(a+2bx+cx^2)^s$$

und die zweite Gleichung in (43) verwandelt sich hiermit in folgende:

$$(48)\qquad D^n \lg (a + 2bx + cx^2) = (-1)^{n-1} n! \mathsf{S} \frac{(-1)^s}{n-s} \binom{n-s}{s} \frac{c^s \{2(b+cx)\}^{n-2s}}{(a+2bx+cx^2)^{n-s}},$$

welche Summenformel gleichfalls allgemeine Giltigkeit hat.

§. 9.

Bezeichnen $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{m-1}$ die sämmtlichen reellen oder imaginären Wurzeln der Gleichung:

$$(49)\qquad \begin{cases} F(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_{m-1} x + A_m = 0, \\ F(x) = A_0 (x-\alpha_0)(x-\alpha_1)(x-\alpha_2) \ldots (x-\alpha_{m-1}) = 0, \end{cases}$$

so ist mit Anwendung der Formel (38):

$$(50)\qquad D^n \lg F(x) = (-1)^{n-1}(n-1)! \left\{ \frac{1}{(x-\alpha_0)^n} + \frac{1}{(x-\alpha_1)^n} + \frac{1}{(x-\alpha_2)^n} + \ldots + \frac{1}{(x-\alpha_{m-1})^n} \right\}.$$

Um den Ausdruck rechts unabhängig von den Wurzeln der Gleichung (49) darzustellen, bedienen wir uns der von Waring (Meditationes algebraicae 1770) mitgetheilten Formel zur Darstellung der Potenzsummen der Wurzeln einer Gleichung durch ihre Coefficienten. Bezeichnet $[n]$ die Summe der n^{ten} Potenzen, $[-n]$ die Summe der $(-n)^{\text{ten}}$ Potenzen aller Wurzeln der Gleichung (49), so ist

$$(51)\qquad [n] = n \mathsf{S} \frac{(-1)^{s_1+s_2+\ldots+s_m} . (s_1+s_2+\ldots+s_m-1)!}{s_1!\, s_2!\, s_3! \ldots s_m!} . \frac{A_1^{s_1} A_2^{s_2} A_3^{s_3} \ldots A_m^{s_m}}{A_0^{s_1+s_2+\ldots+s_m}},$$

$$(52)\qquad [-n] = n \mathsf{S} \frac{(-1)^{s_1+s_2+\ldots+s_m} . (s_1+s_2+\ldots+s_m-1)!}{s_1!\, s_2!\, s_3! \ldots s_m!} . \frac{A_{m-1}^{s_1} A_{m-2}^{s_2} A_{m-3}^{s_3} \ldots A_0^{s_m}}{A_m^{s_1+s_2+\ldots+s_m}},$$

in welchen Ausdrücken sich die Summationen auf alle ganzen positiven Werthe einschließlich Null von $s_1, s_2, s_3, \quad s_m$ beziehen, die der Gleichung

$$s_1+2s_2+3s_3+\ldots+ms_m=n \tag{53}$$

Genüge leisten. (S. die Note am Ende.)

Diejenige Gleichung, deren Wurzeln

$$x-\alpha_0,\ x-\alpha_1,\ x-\alpha_2,\qquad x-\alpha_{m-1}$$

sind lautet, wenn u die Unbekannte bezeichnet:

$$A_0\{u-(x-\alpha_0)\}\{u-(x-\alpha_1)\}\{u-(x-\alpha_2)\}\ldots\{u-(x-\alpha_{m-1})\}=0$$

oder

$$F(x-u)=0$$

oder mit Anwendung des Taylor'schen Theorems:

$$F(x)-F'(x)u+\frac{F''(x)}{2!}u^2-\ldots+(-1)^{m-1}\frac{F^{(m-1)}(x)}{(m-1)!}u^{m-1}+(-1)^m\frac{F^{(m)}(x)}{m!}u^m=0.$$

Setzt man also in der Gleichung (52) statt:

$$A_m,\ A_{m-1},\ A_{m-2},\ldots A_0$$

der Ordnung nach:

$$F(x),-F'(x),\frac{F''(x)}{2!},\ldots(-1)^m\frac{F^{(m)}(x)}{m!},$$

so erhält man die Summe

$$\frac{1}{(x-\alpha_0)^n}+\frac{1}{(x-\alpha_1)^n}+\frac{1}{(x-\alpha_2)^n}+\ldots+\frac{1}{(x-\alpha_{m-1})^n}$$

dargestellt als Function von x und der Coefficienten des Polynoms in (49). Dann gibt die Substitution in (50) das Resultat:

$$(54)\qquad D^n \lg F(x) = n!\, \mathbf{S} \frac{(-1)^{s_1+s_2+\cdots+s_m-1}.(s_1+s_2+\cdots+s_m-1)!}{s_1!\; s_2!\; s_3! \ldots s_m!} \cdot \frac{F'(x)^{s_1} F''(x)^{s_2} F'''(x)^{s_3} \ldots F^{(m)}(x)^{s_m}}{1!^{s_1}\, 2!^{s_2}\, 3!^{s_3} \ldots m!^{s_m}\, F(x)^{s_1+s_2+\cdots+s_m}}$$

worin

$$F(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \cdots + A_{m-1} x + A_m$$

und $s_1, s_2, s_3, \ldots s_m$ alle ganzen positiven Werthe anzunehmen haben, welche der Gleichung (53) genügen.

Ist $m=2$, so wird $F(x) = A_0 x^2 + A_1 x + A_2$, $F'(x) = 2 A_0 x + A_1$, $F''(x) = 2 A_0$ die Bedingungsgleichung (53) $s_1 + 2 s_2 = n$, ersetzt man überdieß

$$A_0,\; A_1,\; A_2,\; s_2,\; s_1$$

der Reihe nach durch die Zeichen:

$$c,\; 2b,\; a,\; s,\; n-2s$$

und bedenkt, daß

$$(55)\qquad \frac{(n-s-1)!}{s!\,(n-2s)!} = \frac{1}{n-s}\binom{n-s}{s},$$

so erhält man wieder die specielle Formel (48).

§. 10.

Eine einfache Anwendung der allgemeinen Formel (54) gewährt die Annahme $F(x) = x^m \pm a^m$. In diesem Falle wird:

$$F'(x) = m\,x^{m-1},\; F''(x) = m(m-1)\,x^{m-2},\; F'''(x) = m(m-1)\,(m-2)\,x^{m-3}, .$$
$$F^{(m)}(x) = m(m-1)\,(m-2)\ldots 3.2.1$$

und der von den F-Functionen abhängige Bruch in der Gleichung (54) rechts, erhält mit Rücksicht auf die Bedingung (53) den Werth:

$$\binom{m}{1}^{s_1}\binom{m}{2}^{s_2}\binom{m}{3}^{s_3}\quad\binom{m}{m}^{s_m}\cdot\frac{x^{m(s_1+s_2+\ldots+s_m)-n}}{(x^m\pm a^m)^{s_1+s_2+\ldots+s_m}}.$$

Hiermit wird unmittelbar:

$$(56)\quad D^n\lg(x^m\pm a^m) = \frac{n!}{x^n}\mathbf{S}\frac{(-1)^{s_1+s_2+\ldots+s_m-1}.(s_1+s_2+\ldots+s_m-1)!}{s_1!\,s_2!\ldots s_m!}\binom{m}{1}^{s_1}\binom{m}{2}^{s_2}\quad.\binom{m}{m}^{s_m}\left(\frac{x^m}{x^m\pm a^m}\right)^{s_1+s_2+\ldots+s_m}$$

Für $a=0$ kann der Differenzialquotient links direct hergestellt werden und man gelangt so nach einigen Kürzungen zu folgender bemerkenswerthen Summation, giltig für n als ganze positive Zahl:

$$(57)\qquad (-1)^n\frac{m}{n} = \mathbf{S}\frac{(-1)^{s_1+s_2+\ldots+s_m}(s_1+s_2+\ldots+s_m-1)!}{s_1!\,s_2!\ldots s_m!}\binom{m}{1}^{s_1}\binom{m}{2}^{s_2}\quad\binom{m}{m}^{s_m}$$

in welcher sich das Summenzeichen auf alle ganzen positiven Werthe von s_1, s_2, s_m inclusive Null bezieht, welche der Bedingung (53) entsprechen.

Ist z. B. $m=2$, so ist letztere $s_1+2s_2=n$ und wenn man s für s_2 schreibt, schließlich die Transformation (55) anwendet, so erhält man folgendes aus der algebraischen Analysis bekannte Resultat:

$$(58)\qquad \frac{1}{n\,2^{n-1}} = \mathbf{S}\frac{(-1)^s}{n-s}\binom{n-s}{s}\frac{1}{2^{2s}}$$

worin s die Werthe 0, 1, 2   erhält, bis die Reihe von selbst abbricht.

Note.

Neuer Beweis des Ausdrucks von Waring für die Potenzsummen der Wurzeln einer algebraischen Gleichung.

Die folgende Ableitung der im Titel genannten wichtigen Formel empfiehlt sich vielleicht durch Kürze und Klarheit der Deduction und durch den geringen Aufwand analytischer und combinatorischer Hilfsmittel, welche zur Entwickelung nothwendig sind.

Sind $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{m-1}$ die m reellen oder imaginären Wurzeln der Gleichung:

$$F(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_{m-1} x + A_m = 0$$

und führt man die abkürzenden Bezeichnungen ein:

$$a_r = \frac{A_r}{A_0},\ [n] = \alpha_0^n + \alpha_1^n + \alpha_2^n + \ldots + \alpha_{m-1}^n,$$

so ist erstens

$$Z = (1 - \alpha_0 x)(1 - \alpha_1 x)(1 - \alpha_2 x) \ldots (1 - \alpha_{m-1} x)$$
$$= 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m = 1 + z$$

und zweitens mit m-maliger Anwendung der bekannten Entwickelung:

$$\lg \frac{1}{1 - \alpha x} = \alpha x + \frac{1}{2} \alpha^2 x^2 + \frac{1}{3} \alpha^3 x^3 + \ldots$$

$$\lg \frac{1}{Z} = [1]\, x + \frac{1}{2} [2]\, x^2 + \frac{1}{3} [3]\, x^3 + \ldots.$$

Anderseits ist auch:

$$\lg \frac{1}{Z} = \lg \frac{1}{1 + z} = -z + \frac{1}{2} z^2 - \frac{1}{3} z^3 + \ldots = \mathop{\mathrm{S}}_{1}^{\infty} (-1)^r \frac{1}{r} z^r$$

und es sind immer so kleine Werthe von x respective von z denkbar, daß beide Entwickelungen convergiren. Um auch die zweite Entwickelung von $\lg \frac{1}{Z}$ in eine Potenzreihe nach x zu verwandeln, benützen wir den polynomischen Lehrsatz. Bezeichnen $s_1, s_2, s_3 \ldots s_m$ solche ganze positive Zahlen inclusive Null, welche der Bedingung

$$s_1 + s_2 + s_3 + \ldots + s_m = r$$

entsprechen, so ist bekanntlich:

$$z^r = \mathbf{S} \frac{r!}{s_1!\, s_2!\, s_3! \ldots s_m!} a_1^{s_1} a_2^{s_2} a_3^{s_3} \ldots a_m^{s_m} . x^{s_1+2s_2+3s_3+\ldots+ms_m}$$

wobei sich die Summation eben auf alle Werthe von s_1, s_2, s_3. bezieht, welche die vorhergehende Bedingungsgleichung erfüllen. Hiermit wird:

$$\lg\frac{1}{Z} = \overset{\infty}{\underset{1}{\mathbf{S}}} \mathbf{S} (-1)^r \frac{(r-1)!}{s_1!\, s_2!\, s_3! \ldots s_m!} a_1^{s_1} a_2^{s_2} \ldots a_m^{s_m} . x^{s_1+2s_2+3s_3+\ldots+ms_m}.$$

Soll diese doppelte Summation nur jene Glieder zusammenfassen, welche die Potenz x^n enthalten, so kann dieselbe wieder auf eine einfache Summation reducirt werden, wenn man r durch $s_1 + s_2 + s_3 + \ldots + s_m$ ersetzt und nur jene Werthe von $s_1, s_2, s_3 \ldots s_m$ gelten läßt, welche der Bedingung:

$$s_1 + 2s_2 + 3s_3 + \ldots + ms_m = n$$

entsprechen.

Der Coefficient von x^n in der zweiten Entwickelung von $\lg\frac{1}{Z}$ ist daher:

$$\mathbf{S} (-1)^{s_1+s_2+\ldots+s_m} . \frac{(s_1+s_2+\ldots+s_m-1)!}{s_1!\, s_2!\, s_3! \ldots s_m!} a_1^{s_1} a_2^{s_2} a_3^{s_3} . \;\; . a_m^{s_m}$$

und die Gleichstellung mit dem entsprechenden Coefficienten der ersten Entwickelung gibt, wenn wieder a_1, a_2, a_3, $\quad a_m$ durch ihre Werthe ersetzt werden:

$$(51)\ [n] = n \mathbf{S} (-1)^{s_1+s_2+\ldots+s_m} . \frac{(s_1+s_2+\ldots+s_m-1)!}{s_1!\, s_2!\, s_3! \ldots s_m!} . \frac{A_1^{s_1} A_2^{s_2} A_3^{s_3} \ldots A_m^{s_m}}{A_0^{s_1+s_2+\ldots+s_m}},$$

hierin ist die Summation auf alle positiven ganzen Zahlen einschließlich Null für s_1, s_2, s_3, $\quad s_m$ zu erstrecken, welche die Gleichung erfüllen:

$$(53)\qquad s_1 + 2s_2 + 3s_3 + \ldots + ms_m = n.$$

Diese Formel wird ohne Beweis mitgetheilt von Waring in seinen Meditationes algebraicae 1782 und wird die Erfindung derselben meist ihm zugeschrieben. Dieselbe kommt schon in der seltenen kleinen Schrift des niederländischen Mathematikers Albert Girard vor, Invention nouvelle en l'Algèbre etc. Amsterdam 1629. Hiermit ist zu vergleichen: Euler Comm. Petrop. novis Vol. XV. Lagrange Mem. de l'Acad. de Berlin 1768 und Traité de la rèsolution des èquations etc. Note XI. Klügel Math. Wörterbuch 1803, Bd. I, p. 506. Ettingshausen, Combinatorische Analysis 1826, p. 326. J. A. Serret Cours d'algébre supèrieure III. ed. 1866, §. 196.

Um die Anwendung der Formel (51) zu zeigen, beziehen wir dieselbe auf die binomische Gleichung:

$$x^m \pm a^m = 0.$$

In diesem Falle ist $A_0 = 1$, $A_1 = A_2 = A_3 = \ldots = A_{m-1} = 0$, $A_m = \pm a^m$ und in dem Summenausdruck verschwinden alle Glieder bis auf eines, welches

$$s_1 = s_2 = s_3 = \ldots = s_{m-1} = 0, \;\; m s_m = n \;\text{ nach (53)}$$

entspricht. Ist n kein Vielfaches von m, so kann die letzte Bedingung nicht erfüllt werden, es ist daher:

$$[n] = 0.$$

Ist aber $n = km$, so wird $s_m = k$ und hiermit:

$$[n] = (\mp 1)^k m a^{km}.$$

Das umgekehrte Problem, die Coefficienten der Gleichung als Functionen der Potenzsummen ihrer Wurzeln darzustellen, kann durch ähnliche Betrachtungen einfach auf folgende Art gelöset werden.

Wenn die früheren Bezeichnungen dieselben bleiben und zur Kürze

$$u = [1]x + \frac{1}{2}[2]x^2 + \frac{1}{3}[3]x^3 + .$$

gesetzt wird, so ist:

$$Z = \frac{-}{A_0}\{A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_m x^m\}$$
$$= e^{-u} = -u + \frac{u^2}{1.2} - \frac{u^3}{1.2.3} + \cdot \quad \cdot = \overset{\infty}{\underset{1}{\mathbf{S}}}(-1)^r \frac{1}{r!} u^r.$$

Bezeichnen $s_1, s_2, s_3, \ldots$ solche ganze positive Zahlen inclusive Null, welche der Bedingung

$$s_1 + s_2 + s_3 + \ldots = r$$

entsprechen, so ist nach dem polynomischen Lehrsatz:

$$u^r = \mathbf{S}\frac{r!}{s_1!\, s_2!\, s_3! \ldots}\{[1]\}^{s_1}\left\{\frac{1}{2}[2]\right\}^{s_2}\left\{\frac{1}{3}[3]\right\}^{s_3} \qquad x^{s_1+2s_2+3s_3+\ldots}$$

worin sich die Summation eben auf die Werthe von s_1, s_2, s_3 bezieht. Hierdurch wird:

$$Z = \overset{\infty}{\underset{1}{\mathbf{S}}}\mathbf{S}(-1)^r \frac{\{[1]\}^{s_1}\left\{\frac{1}{2}[2]\right\}^{s_2}\left\{\frac{1}{3}[3]\right\}^{s_3}}{s_1!\, s_2!\, s_3! \ldots} \,.\, x^{s_1+2s_2+3s+\ldots}$$

Soll diese zweifache Summation nur jene Glieder vereinigen, welche den Factor x^n enthalten, so kann dieselbe wieder auf eine einfache Summation gebracht werden, wenn man r durch seinen Werth $s_1 + s_2 + s_3 + \ldots$ ersetzt und nur jene Werthe von $s_1, s_2, s_3 \quad s_n$ gelten läßt, welche die Gleichung:

$$s_1 + 2s_2 + 3s_3 + \cdot \quad \cdot + ns_n = n$$

erfüllen.

Der Coefficient von x^n in Z wird dann sein:

$$\mathbf{S}(-1)^{s_1+s_2+\ldots+s_n}.\, \frac{\{[1]\}^{s_1}\left\{\frac{1}{2}[2]\right\}^{s_2}\left\{\frac{1}{3}[3]\right\}^{s_3} \quad \left\{\frac{1}{n}[n]\right\}^{s_n}}{s_1!\, s_2!\, s_3! \quad s_n!}$$

und die Gleichstellung mit dem entsprechenden Coefficienten des ersten Ausdrucks für Z gibt das Resultat:

$$\frac{A_n}{A_0} = \mathbf{S}(-1)^{s_1+s_2+\ldots+s_n}.\, \frac{\{[1]\}^{s_1}\left\{\frac{1}{2}[2]\right\}^{s_2}\left\{\frac{1}{3}[3]\right\}^{s_3} \,.\, \left\{\frac{1}{n}[n]\right\}^{s_n}}{s_1!\, s_2!\, s_3! \quad s_n!},$$

hierin ist die Summation auf alle positiven Zahlen einschließlich Null für $s_1, s_2, s_3, \ldots s_n$ zu erstrecken, welche die Gleichung erfüllen:

$$s_1 + 2s_2 + 3s_3 + \ldots + ns_n = n.$$

Das Verdienst, die Coefficienten einer Gleichung durch die Potenzsummen ihrer Wurzeln zuerst dargestellt zu haben, wird meist Kramp zugeschrieben. (Hindenburg's erste Sammlung combinatorisch-analytischer Abhandlungen 1796, p. 110.) Doch folgt sein Ausdruck aus einer allgemeineren Formel von Waring. Vergl. herüber J. A. Serret a. a. O. §. 198.

Errata.

Sinnstörende Druckfehler in Unferdinger's Abhandlungen. Sitzungsberichte Bd. LX, II. Abth. Octoberheft 1869.

(Die eingeschlossene Seitenzahl bezieht sich auf die Separatabdrücke.)

Seite 618 (28),	Zeile 2 u. 4	von oben	lies $(\alpha+\beta x)^{a-s}$ statt $(\alpha+\beta x)^{n-s}$.
653 (63),	6	von unten	lies x^2 statt x^3.
664 (74),	12		gleiche statt ungleiche.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1869

Band/Volume: 60_2

Autor(en)/Author(s): Unferdinger Franz

Artikel/Article: Die allgemeinen Differenzialquotienten der Functionen 605-630