©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Kubatur der Segmente und Schichtenräume in Flächen der zweiten Ordnung.

Von **Franz Unferdinger**,
Lehrer der Mathematik an der öffentlichen Oberrealschule am hohen Markt in Wien.

(Vorgelegt in der Sitzung am 7. October 1869.)

Einleitung.

Da die Ausbildung der Theorie der zwei- und mehrfachen Integrale erst in der neueren Zeit ihren Anfang genommen hat, so kommt es, daß in dem Zeitraume seit der Erfindung der Infinitesimalrechnung vornehmlich nur jene Volumsbestimmungen in Angriff genommen wurden, welche auf einfache Integrale führen.

Obgleich der allgemeine Integralausdruck für das Volumen, sei es in rechtwinkeligen oder in Polarcoordinaten, sehr einfach ist, so gelingt die Ausführung der Integrationen nur in wenigen Fällen, wenn zwei oder mehrere Grenzen constant sind oder wenn die Schnitte paralleler Ebenen Functionen nur einer Variabeln, wodurch sich ähnlich dem Verfahren bei Rotationsflächen, die Inhaltsbestimmung auf eine Quadratur reducirt.

Sind die geometrischen Grenzen gemischt, theils krumme Flächen, theils beliebige nicht parallele Ebenen, so mehren sich die Schwierigkeiten, da es nicht leicht gelingt, die geometrischen Grenzen des Volumens in die entsprechenden Grenzen des mehrfachen Integrals umzusetzen.

Seit Euler in seiner Introductio in analysin infinitorum, 1748 die allgemeine Gleichung des zweiten Grades von drei veränderlichen Coordinaten x, y, z einer ersten Discussion unterzog, durch welche uns die von dieser Gleichung dargestellten Flächen näher bekannt wurden, bildet auch die Ausmittelung der von solchen Flächen begrenzten Körperräume einen wichtigen Gegenstand, wissenschaftlicher Forschung.

Aber den hieher gehörigen Untersuchungen fehlt die wünschenswerthe Allgemeinheit, denn entweder beziehen sich die Volums-

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

bestimmungen nur auf Rotationskörper und die neue Rechnung führt zu den schon von Archimedes für die Sphäroide und Conoide gefundenen Resultaten, oder die begrenzenden Ebenen stehen auf einer Hauptaxe der Fläche senkrecht [1]).

In der Absicht, die Theorie der Kubatur in der bezeichneten Richtung zu fördern, veröffentlichten wir im Februar 1857 in Grunert's Archiv, Thl. 28, p. 52 eine Abhandlung, in welcher die Volumina der Segmente des allgemeinen dreiaxigen Ellipsoides und des zweitheiligen Hyperboloides, nach analytisch-geometrischer Methode unabhängig von jeder einschränkenden Bedingung über die Lage der schneidenden Ebene bestimmt werden. Hieran haben wir noch in Thl. 29, p. 209 die Bestimmung der Segmente des elliptischen Paraboloides angeschlossen.

Im 9. Bande der Sitzungsberichte der kön. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften (Sitzung vom 23. Mai 1857) entwickelt Schlömilch bei der Reduction eines vielfachen Integrals, für den Inhalt einer ellipsoidischen Schichte zwischen den zwei parallelen Ebenen:

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = \mu,$$
$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 1,$$

den Ausdruck:

$$\pi abc \left\{ \frac{1-\mu}{\rho} - \frac{1}{3} \frac{1-\mu^3}{\rho^3} \right\},$$

wobei $\rho = \sqrt{a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + c^2\gamma^2}$ und a, b, c die Halbaxen des Ellipsoides bezeichnen. Läßt man die zweite Ebene zu einer tangirenden

---

[1]) Lambert, Über die Bestimmung des körperlichen Raumes jeder Segmente solcher Körper, die durch Umdrehung einer konischen Section um ihre Axe entstehen. (Leipziger Magazin von J. Bernoulli und Hindenburg 1786.) L. Mossbrugger, Untersuchung über geometrische Örter, welche von Flächen zweiten Grades abhängig sind, nebst Vergleichung der Inhalte verschiedener Segmente von Flächen des zweiten Grades. (Grunert's Archiv, Thl. 27, p. 66.)

Die Mehrzahl der Abhandlungen über Volumsbestimmungen in wissenschaftlichen Zeitschriften beabsichtiget die Umgehung der Infinitesimalrechnung, durch mehr oder minder glückliche Kunstgriffe den Inhalt einfach begrenzter Räume mit elementaren Mitteln, wie nach der Methode der Alten zu bestimmen. (August, Crelle-Journal, Bd. 45, p. 239, 1853. Matzka, Grunert's Archiv, Thl. 33, p. 121. 1859 Bretschneider, Archiv, Thl. 36, p 20. Wittstein, Archiv, Thl. 39, p. 1.)

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

werden, wodurch $\rho = 1$ wird, so gibt die Formel den Inhalt des durch die erste abgeschnittenen Segmentes gleich $\frac{1}{3}\pi abc(2 - 3\mu + \mu^3)$ übereinstimmend mit dem von uns a. a. O. auf anderem Wege gefundenen Ausdruck, nur steht $\frac{1}{h}$ für μ.

Wir haben seit dieser Zeit die Untersuchungen über die Volumsbestimmung der von Flächen der zweiten Ordnung begrenzten Räume weiter ausgedehnt und erlauben uns die Resultate derselben im Folgenden in wesentlich vereinfachter Darstellung mitzutheilen in der Erwartung, damit eine längst fühlbare Lücke im System der analytischen Geometrie des Raumes auszufüllen.

I. Das Ellipsoid.

§. 1.

Der Rauminhalt S eines Kugelsegmentes von der Höhe h wird bekanntlich durch die Formel bestimmt:

$$S = \frac{\pi h^2}{3}(3r - h),$$

worin r den Radius der Kugel bezeichnet. Setzt man den vierten Theil des Kugelinhaltes gleich K und g statt h einführend:

$$\frac{h}{r} = 1 - g,$$

so erhält dieselbe folgende Gestalt:

$$(1) \qquad S = K.(1 - g)^2(2 + g)$$

und hier kann g aufgefaßt werden als das Verhältniß der Entfernungen der die Kugel schneidenden und der parallelen tangirenden Ebene.

Wir werden im Folgenden zeigen, daß dieselbe Formel, bei derselben Bedeutung von g auch für ein Segment des allgemeinen Ellipsoides oder des zweitheiligen Hyperboloides giltig ist, die schneidende Ebene mag wie immer gerichtet sein, nur bezeichnet alsdann K den vierten Theil des ganzen Ellipsoides oder den Inhalt eines Kegels, dessen elliptische Basis die Halbaxen

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

a und b hat und dessen Höhe gleich c ist, wenn a, b, c die Halbaxen des Hyperboloides sind.

§. 2.

Punktweise Construction des Ellipsoides.

Man beschreibe aus dem Mittelpunkt O des Ellipsoides als Anfangspunkt eines rechtwinkeligen Coordinatensystems der x, y, z drei concentrische Kugeln mit den Radien a, b, c als die Halbaxen des Ellipsoides, ziehe aus O einen beliebigen Strahl, welcher die drei Kugeln in A, B, C schneidet und mit den Coordinatenaxen die drei 180° nicht übersteigenden Winkel α, β, γ einschließt. Legt man nun durch A eine Ebene parallel zur Ebene (yz), durch B eine Ebene parallel zur Ebene (xz), durch C eine Ebene parallel zur (xy), so sind die Gleichungen derselben:

$$x = a\cos\alpha,\ y = b\cos\beta,\ z = c\cos\gamma, \tag{2}$$

ihr Durchschnittspunkt liegt auf der Oberfläche des Ellipsoides, dessen Gleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{3}$$

Bezeichnet P die Entfernung dieses Punktes vom Mittelpunkt O, so ist:

$$P = \sqrt{a^2\cos^2\alpha + b^2\cos^2\beta + c^2\cos^2\gamma} \tag{4}$$

und sind α', β', γ' die 180° nicht übersteigenden Winkel, welche der Strahl P mit den positiven Halbaxen der Coordinaten einschließt, so ist:

$$\cos\alpha' = \frac{a\cos\alpha}{P},\ \cos\beta' = \frac{b\cos\beta}{P},\ \cos\gamma' = \frac{c\cos\gamma}{P}. \tag{5}$$

Diese Construction für Punkte eines Ellipsoides ist einer bekannten Construction der Ellipse aus ihren Halbaxen analog und wir benützen dieselbe zur Ableitung einiger geometrischen Folgerungen, von denen später Gebrauch gemacht wird.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

§. 3.

Leiten wir aus dem Strahle P, welcher mit den Axen die Winkel α', β', γ' einschließt und die drei concentrischen Kugeln etwa in den Punkten A', B', C' schneidet, einen zweiten Punkt des Ellipsoides ab, so sind die Coordinaten desselben, im Sinne der Gleichungen (2) und (5) offenbar:

$$(6)\qquad \begin{cases} x' = a\cos\alpha' = \dfrac{a^2\cos\alpha}{P}, \\ y' = b\cos\beta' = \dfrac{b^2\cos\beta}{P}, \\ z' = c\cos\gamma' = \dfrac{c^2\cos\gamma}{P}. \end{cases}$$

Die das Ellipsoid in diesem Punkt $(x'y'z')$ berührende Ebene hat die Gleichung:

$$(7)\qquad z = -\frac{c^2x'}{a^2z'}x - \frac{c^2y'}{b^2z'}y + \frac{c^2}{z'},$$

wenn x, y, z die veränderlichen Coordinaten der Ebene bezeichnen. Ersetzt man hierin x', y', z' durch die Werthe aus (6), so verwandelt sich dieselbe in folgende:

$$(8)\qquad z = -\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}x - \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}y + \frac{P}{\cos\gamma}$$

und hieraus ist ersichtlich, daß diese Berührungsebene des zweiten abgeleiteten Punktes auf dem ersten Strahl $(\alpha\beta\gamma)$ senkrecht steht und die Entfernung derselben vom Ursprung O ist gleich P dem Leitstrahl des ersten abgeleiteten Punktes. Die Normale des zweiten abgeleiteten Punktes ist zum Strahl $(\alpha\beta\gamma)$ parallel[1]). Der letztere Satz gilt unverändert auch von der Ellipse im Sinne der am Schlusse des vorigen §. erwähnten Construction.

---

[1]) Construirt man auf dem Ellipsoid eine Reihe von Punkten

$$(xyz),\ (x'y'z'),\ (x''y''z''),\ (x'''y'''z'''),\ldots,$$

welche in derselben Weise aus einander abgeleitet werden, wie der Punkt $(x'y'z')$ aus jenem (xyz), so sind die Coordinaten derselben, wenn P, P', P'', P''',... ihre Entfernungen vom Ursprung bezeichnen:

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Bezeichnet nun

$$z = Ax + By + C \tag{9}$$

eine das Ellipsoid (3) schneidende und auf dem Strahl $(\alpha\beta\gamma)$ senkrechte Ebene im Abstand p vom Ursprung, so daß

$$A = -\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}, \quad B = -\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}. \quad C = \frac{p}{\cos\gamma}, \tag{10}$$

so wird das Volumen des ellipsoidischen Segments zwischen dieser Ebene und der parallelen tangirenden Ebene (7) durch die Formel (1) bestimmt, wenn:

$$g = \frac{p}{P} = \frac{p}{\sqrt{a^2\cos^2\alpha + b^2\cos^2\beta + c^2\cos^2\gamma}} \tag{11}$$

ist.

$$x = a\cos\alpha, \qquad x' = \frac{a^2\cos\alpha}{P},$$

$$y = b\cos\beta, \qquad y' = \frac{b^2\cos\beta}{P},$$

$$z = c\cos\gamma; \qquad z' = \frac{c^2\cos\gamma}{P};$$

$$x'' = \frac{a^3\cos\alpha}{PP'}, \quad x''' = \frac{a^4\cos\alpha}{PP'P''},$$

$$y'' = \frac{b^3\cos\beta}{PP'}, \quad y''' = \frac{b^4\cos\beta}{PP'P''},$$

$$z'' = \frac{c^3\cos\gamma}{PP'}; \quad z''' = \frac{c^4\cos\gamma}{PP'P''};$$

und es ist:

$$P = \sqrt{a^2\cos^2\alpha + b^2\cos^2\beta + c^2\cos^2\gamma},$$

$$P' = \frac{\sqrt{a^4\cos^2\alpha + b^4\cos^2\beta + c^4\cos^2\gamma}}{P},$$

$$P'' = \frac{\sqrt{a^6\cos^2\alpha + b^6\cos^2\beta + c^6\cos^2\gamma}}{PP'},$$

$$P''' = \frac{\sqrt{a^8\cos^2\alpha + b^8\cos^2\beta + c^8\cos^2\gamma}}{PP'P''},$$

Die tangirenden Ebenen aller dieser Punkte stehen mit einander in Zusammenhang der Art, daß die Entfernung des Ursprungs von einer derselben gleich ist dem vorhergehenden Strahl P und daß der zweitvorhergehende Strahl darauf senkrecht steht.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

§. 4.

In den beiden concentrischen und ähnlichen Ellipsoiden, deren Gleichungen:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \tag{3}$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=g^2, \tag{12}$$

verhalten sich die gleichliegenden Halbaxen wie $1:g$ und wenn wir $g<1$ voraussetzen, so wird das zweite Ellipsoid vom ersten umschlossen. Sind x', y', z' die Coordinaten eines Punktes des Ellipsoides (3), so daß:

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}+\frac{z'^2}{c^2}=1, \tag{13}$$

so leisten die Werthe $\pm gx'$, $\pm gy'$, $\pm gz'$ statt x, y, z offenbar auch der Gleichung (12) Genüge und wenn wir

$$x_1=gx',\ y_1=gy',\ z_1=gz' \tag{14}$$

setzen, so bezeichnet $(x_1 y_1 z_1)$ einen Punkt des Ellipsoides (12) welcher auf dem vom Ursprung aus nach dem Punkt $(x'y'z')$ gezogenen Strahl auf derselben Seite des Ursprungs liegt. Solche Punkte der beiden concentrischen, gleichliegenden und ähnlichen Ellipsoide heißen correspondirende Punkte. Die Gleichungen der tangirenden Ebenen in diesen zwei Punkten sind beziehungsweise:

$$z=-\frac{c^2x'}{a^2z'}x-\frac{c^2y'}{b^2z'}y+\frac{c^2}{z'}, \tag{7}$$

$$z=-\frac{c^2x_1}{a^2z_1}x-\frac{c^2y_1}{b^2z_1}y+\frac{c^2g^2}{z_1}, \tag{15}$$

statt der zweiten Gleichung kann aber vermöge der Beziehungen (14) auch gesetzt werden:

$$z=-\frac{c^2x'}{a^2z'}x-\frac{c^2y'}{b^2z'}y+\frac{c^2g}{z'}; \tag{16}$$

hieraus folgt im Vergleich mit (7): Die Berührungsebenen correspondirender Punkte sind parallel.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Sind P und p die Abstände des Ursprungs von den parallelen Ebenen (7) und (16), so ist nach den Lehren der analytischen Geometrie:

$$(17) \qquad \frac{P}{\cos\gamma} = \frac{c^2}{z'}, \qquad \frac{p}{\cos\gamma} = \frac{c^2 g}{z'},$$

wenn γ den Winkel der Senkrechten mit der Axe der z bezeichnet; mithin ist

$$(18) \qquad \frac{p}{P} = g \text{ oder } p = gP, \; p < P$$

und die Entfernung der beiden Ebenen:

$$(19) \qquad Q = (1-g)\,P.$$

Diese zwei Ebenen liegen bezüglich des Ursprungs auf derselben Seite und enthalten zwischen sich ein Segment des Ellipsoides (3), dessen Volumen im Allgemeinen als eine von x', y', z' abhängige Größe zu betrachten ist und dessen Bestimmung der Zweck der nachfolgenden Rechnungen ist.

§. 5.

In dieser Absicht bestimmen wir zunächst die Durchschnittslinie der zweiten tangirenden Ebene (16) mit dem äußeren Ellipsoid (3). Wird aus den Gleichungen (3) und (16) z eliminirt, so folgt:

$$c^2\{a^2b^2g - b^2x'x - a^2y'y\}^2 = a^2b^2z'^2\{a^2b^2 - b^2x^2 - a^2y^2\}.$$

Diese Gleichung bezeichnet die Projection der Durchschnittslinie der Ebene (16) mit dem äußeren Ellipsoid (3) auf die Ebene der xy.

Wird diese Gleichung entwickelt, nach abfallenden Potenzen von x und y geordnet, mit Hilfe der Gleichung (13) z' aus den Coefficienten von x^2 und y^2 eliminirt, endlich durch $a^2b^2c^2$ abgekürzt, so erlangt dieselbe die Form:

$$(20)$$

$$(b^2-y'^2)x^2+(a^2-x'^2)y^2+2x'y'.xy-2b^2gx'.x-2a^2gy'.y+a^2b^2\left(g^2-\frac{z'^2}{c^2}\right)=0.$$

§. 6.

Um die Gestalt und Abmessungen dieses Kegelschnittes mit Leichtigkeit ohne weitere Coordinatenverwandlung zu erkennen, bedienen wir uns der von Grunert gegebenen „Discussion der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades zwischen zwei veränderlichen Größen“ (Archiv, Thl. XXV, p. 146), aus welcher Abhandlung wir Folgendes entlehnen: Wenn die Gleichung der Curve lautet:

$$ax^2 + by^2 + 2cxy + 2dx + 2ey + f = 0$$

und es ist gleichzeitig:

$$ab - c^2 > 0$$
$$ae^2 + bd^2 + fc^2 - abf - 2cde > 0,$$

so bezeichnet dieselbe eine Ellipse und wenn A, B die Halbaxen derselben sind, so ist:

$$AB = \frac{ae^2 + bd^2 + fc^2 - abf - 2cde}{\sqrt{ab - c^2}^3}.$$

§. 7.

In unserem Falle ist nach (20) im Sinne der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades:

$$(21)\qquad \begin{cases} a = b^2 - y'^2, \\ b = a^2 - x'^2, \\ c = x'y', \\ d = -b^2 g x', \\ e = -a^2 g y', \\ f = a^2 b^2 \left(g^2 - \frac{z'^2}{c^2}\right); \end{cases}$$

hiermit wird:

$$(22)\qquad ab - c^2 = \left\{\frac{abz'}{c}\right\}^2$$

und nach einiger Rechnung:

$$(23)\qquad ae^2 + bd^2 + fc^2 - abf - 2cde = \left\{\frac{abz'}{c}\right\}^4 (1 - g^2).$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Da nun die in §. 6 aufgestellten Bedingungen erfüllt sind, so bezeichnet die Gleichung (20) eine Ellipse und es ist das Product ihrer Halbaxen:

$$\text{(24)} \qquad AB = \frac{ab}{c}(1-g^2)z'.$$

Bezeichnet f die Fläche der Projectionsellipse, so ist demnach:

$$f = \frac{ab\pi}{c}(1-g^2)z'$$

und die Fläche F der Durchschnittsellipse in der Ebene (16):

$$F = \frac{f}{\cos\gamma} = \frac{ab\pi}{c}(1-g^2)\frac{z'}{\cos\gamma},$$

wenn γ den Neigungswinkel der Berührungsebene (16) zur Projectionsebene xy bezeichnet. γ ist aber auch der Winkel, welchen das aus dem Ursprunge auf die tangirende Ebene (16) gefällte Perpendikel mit der Axe der z einschließt, folglich nach (17):

$$\frac{z'}{\cos\gamma} = \frac{c^2}{P}.$$

Es ist also auch:

$$\text{(25)} \qquad F = abc\pi.\frac{1-g^2}{P}.$$

§. 8.

Wenn man in der Gleichung (20) der Projectionsellipse mittelst der Beziehungen (14) die Coordinaten x_1, y_1, z_1 einführt, so kann dieselbe auch in folgender Form dargestellt werden:

$$\text{(26)}$$

$$(xy_1-x_1y)^2+b^2g^2x(2x_1-x)+a^2g^2y(2y_1-y)+a^2b^2\left(g^4-\frac{z_1^2}{c^2}\right)=0.$$

Denken wir uns irgend einen Punkt $(x\ y)$ dieser Curve mit dem Punkt $(x_1\ y_1)$ durch eine Gerade verbunden und die Verbindungslinie über $(x_1\ y_1)$ so weit verlängert, bis die Verlängerung gleich dem Abstand $(x\ y)$ $(x_1\ y_1)$ wird. Sind u, v die Coordinaten des Endpunktes der Verlängerung, so ist, da $(x_1\ y_1)$ der Mittelpunkt der Strecke $(x\ y)$ $(u\ v)$:

$$x_1 = \frac{1}{2}(x+u), \qquad y_1 = \frac{1}{2}(y+v)$$

oder

$$x = 2x_1 - u, \qquad y = 2y_1 - v;$$

werden diese Werthe statt x und y in die Gleichung (26) substituirt, so daß nun die veränderlichen Coordinaten u und v sind, so erhält man die Gleichung des Ortes der Punkte $(u\ v)$, welche durch die angegebene Construction mit den Punkten $(x\ y)$ zusammenhängen. Nun gibt aber die Substitution:

$$(27)$$

$$(uy_1 - x_1 v)^2 + b^2 g^2 u(2x_1 - u) + a^2 g^2 v(2y_1 - v) + a^2 b^2 \left(g^4 - \frac{z_1^2}{c^2}\right) = 0$$

eine Gleichung, welche sich von jener der Projectionsellipse nur dadurch unterscheidet, daß u an der Stelle von x, v an der Stelle von y steht. Folglich ist auch der Punkt $(u\ v)$ ein Punkt der Projectionsellipse. Jede durch den Punkt $(x_1\ y_1)$ gezogene Sehne wird durch diesen Punkt halbirt, also ist $(x_1\ y_1)$ der Mittelpunkt der Projectionsellipse und der Punkt $(x_1\ y_1\ z_1)$ der Mittelpunkt der Durchschnittsellipse in der Ebene (16).

§. 9.

Wird um den Anfangspunkt der Coordinaten als Mittelpunkt ein drittes gleichliegendes Ellipsoid beschrieben mit den Halbaxen ak, bk, ck, welches zwischen den Ellipsoiden (3) und (12) liegt, so ist die Gleichung desselben:

$$(28) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = k^2$$

und der Werth von k liegt zwischen 1 und g. Sind x_1', y_1', z_1' die Coordinaten des correspondirenden Punktes zu jenem $(x'\ y'\ z')$, so ist:

$$(29) \qquad x_1' = kx', \quad y_1' = ky', \quad z_1' = kz',$$

die tangirende Ebene desselben ist zu jener (16) parallel und schneidet das Ellipsoid (3) in einer Ellipse, deren Fläche F aus der Formel (25) folgt, wenn man k für g setzt:

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

(30) $$F = abc\pi . \frac{1-k^2}{P}.$$

Ebenso ist der Abstand q dieser Ebene von der Ebene (7) aus (19) abzuleiten, so daß

(31) $$q = (1-k)P.$$

§. 10.

Betrachten wir nun k als eine unabhängig veränderliche Größe, welche nach und nach alle Werthe von g bis 1 annimmt, so werden die stetig auf einander folgenden tangirenden Ebenen der Ellipsoide (28) das zwischen den Ebenen (7) und (16) enthaltene Segment in eine unendliche Anzahl von Schichten zerlegen von der Dicke dq, wobei nach (31):

$$dq = -P . dk.$$

Der Inhalt einer solchen Schichte ist das Differenzial dS des Inhaltes S des Segments

$$dS = F\,dq = -abc\pi . (1-k^2)\,dk$$

und wenn man zwischen den Grenzen 1 und g integrirt:

(32) $$S = \frac{1}{3} abc\pi (2 - 3g + g^3).$$

Bezeichnet K den vierten Theil des ganzen Ellipsoides, also

(33) $$K = \frac{1}{3} abc\pi,$$

so kann man auch schreiben:

(34) $$S = K . (1-g)^2 (2+g)$$ [1])

---

[1]) Denkt man sich den Raum eines solchen Segmentes gleichförmig mit Masse erfüllt und sind X, Y, Z die Coordinaten des Schwerpunktes, so ist nach den Lehren der analytischen Mechanik:

$$X . S = \int x_1' dS, \quad Y . S = \int y_1' dS, \quad Z\ S = \int z_1' dS,$$

da x_1', y_1', z_1' die Coordinaten des Schwerpunktes des Differenzials dS sind. Hiernach findet man:

$$X = \frac{3}{4} \frac{(1+g)^2}{2+g} x',$$

$$Y = \frac{3}{4} \frac{(1+g)^2}{2+g} y',$$

$$Z = \frac{3}{4} \frac{(1+g)^2}{2+g} z'.$$

und die geometrische Bedeutung von g ist durch die Gleichung (18) bestimmt.

Der Rauminhalt S ist also unabhägig von den Coordinaten x_1, y_1, z_1, folglich für alle Punkte des Ellipsoides (12) constant.

Die Resultate dieser Untersuchung geben folgenden

I. Lehrsatz.

In concentrischen gleichliegenden und ähnlichen Ellipsoiden schneidet jede das innere Ellipsoid berührende Ebene von dem äußeren Ellipsoid Segmente von constantem Inhalt ab und der Berührungspunkt liegt stets im Mittelpunkt der Durchschnittsellipse.

Die tangirende Ebene (16) theilt das ganze Ellipsoid in zwei Segmente S und S, von welchen das erstere den Mittelpunkt des Ellipsoides nicht enthält. Setzt man in (34) $-g$ statt g im Sinne des §. 4, so folgt:

$$\mathrm{S} = K(1+g)^2(2-g), \tag{35}$$

in der That ist:

$$S + \mathrm{S} = 4K,$$

gleich dem ganzen Ellipsoide.

§. 11.

Bezeichnet Kg den Rauminhalt des elliptischen Kegels, welcher die Durchschnittsellipse F zur Basis und den Scheitel im Ursprung hat, so ist offenbar:

$$Kg = \frac{1}{3} F \cdot p$$

oder wenn man für F und p die Werthe aus (25) und (18) substituirt:

$$Kg = K(g - g^3) \tag{36}$$

und wenn Sc den Inhalt des ellipsoidischen Sectors bezeichnet, welcher von dem Mantel dieses Kegels und der ellipsoidischen Schale des Segmentes S begrenzt wird, so ist:

$$Sc = S + Kg$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

oder durch Anwendung der Gleichungen (34) und (36):

$$Sc = 2K(1-g). \tag{37}$$

Die Rauminhalte des Schnittkegels und des ellipsoidischen Sectors sind unabhängig von den Coordinaten x_1, y_1, z_1 des Berührungspunktes auf dem Ellipsoid (12), folglich auch für alle Punkte desselben constant.

§. 12.

Mit Hilfe der vorhergehenden Untersuchungen sind wir auch im Stande die Volumen des Segments, des Schnittkegels und des Sectors zu bestimmen, welche irgend eine schneidende Ebene, deren Gleichung:

$$z = Ax + By + C \tag{9}$$

auf dem Ellipsoid:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{3}$$

erzeugt.

Denkt man sich um den Ursprung, als Mittelpunkt ein Ellipsoid beschrieben, welches die gleichliegenden Halbaxen ag, bg, cg hat und die Ebene (9) in dem Punkt $(x_1\ y_1\ z_1)$ berührt, so daß auch

$$z_1 = Ax_1 + By_1 + C, \tag{38}$$

so kommt es jetzt nur darauf an, die der Ebene (9) entsprechende Verhältnißzahl g zu bestimmen.

Wenn die Ebene (9) das Ellipsoid (12) in dem Punkt $(x_1\ y_1\ z_1)$ berührt, so muß sie mit jener (15) identisch sein, d. h. es muß

$$A = -\frac{c^2 x_1}{a^2 z_1}, \quad B = -\frac{c^2 y_1}{b^2 z_1}, \quad C = \frac{c^2 g^2}{z_1}$$

sein und wenn man aus diesen Gleichungen und jener (38) die Coordinaten x_1, y_1, z_1 eliminirt, endlich die Eliminationsgleichung nach g auflöst, so folgt:

$$g = \pm \frac{C}{\sqrt{a^2A^2 + b^2B^2 + c^2}}, \tag{39}$$

wobei das Vorzeichen so zu wählen ist, daß g positiv wird.

Mit diesem Werth von g geben nun die Gleichungen (34), (36) und (37) die gesuchten Rauminhalte S, Kg und Sc.

Der Natur der Sache nach muß $g < 1$ sein, d. h.

$$C^2 < a^2A^2 + b^2B^2 + c^2$$

und diese Relation ist bekanntlich das analytische Kennzeichen, daß die Ebene (9) das Ellipsoid (3) schneidet.

§. 13.

Eine das Ellipsoid (3) berührende Ebene, welche zu jener (9) parallel ist, hat die Gleichung:

$$(40) \qquad z = Ax + By \pm \sqrt{a^2A^2 + b^2B^2 + c^2}$$

und wenn das Vorzeichen der Wurzel übereinstimmend mit jenem von C genommen wird, so liegen entsprechend den correspondirenden Punkten in §. 4 beide Ebenen auf derselben Seite des Ursprungs.

Wenn α, β, γ die 180° nicht übersteigenden Winkel bezeichnen, welche die aus dem Ursprung auf dieselben gefällte Senkrechte mit den positiven Halbaxen der Coordinaten einschließt, so ist bekanntlich:

$$A = -\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma},\quad B = -\frac{\cos\beta}{\cos\gamma},\quad C = \frac{p}{\cos\gamma},\quad \sqrt{a^2A^2 + b^2B^2 + c^2} = \frac{P}{\cos\gamma},$$

wenn p und P die Entfernungen des Ursprungs von diesen Ebenen (9) und (40) sind. Es ist daher auch:

$$(11) \qquad g = \frac{p}{\sqrt{a^2\cos^2\alpha + b^2\cos^2\beta + c^2\cos^2\gamma}} = \frac{p}{P},$$

welches Ergebniß mit der Formel (11) in §. 3 und mit der Gleichung (18) in §. 4 übereinstimmt.

Um die Gleichungen (34), (36) und (37) zur Volumsbestimmung für eine beliebige schneidende Ebene anzuwenden, ist nur nothwendig das Verhältniß g der Entfernungen des Ursprungs von dieser Ebene und der parallelen Berührungsebene zu ermitteln.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

§. 14.

Um den Inhalt der ellipsoidischen Schichte zu bestimmen, welche zwischen zwei gegebenen Ebenen:

$$z = Ax + By + C, \tag{9}$$

$$z = A'x + B'y + C' \tag{41}$$

enthalten ist, berechne man im Sinne der Gleichung (39) die positiven Verhältnißzahlen g, g', welche diesen Ebenen entsprechen:

$$g = \pm \frac{C}{\sqrt{a^2A^2 + b^2B^2 + c^2}}, \tag{39}$$

$$g' = \pm \frac{C'}{\sqrt{a^2A'^2 + b^2B'^2 + c^2}} \tag{42}$$

und es sei $g > g'$. Alsdann giebt die Formel (34):

$$S = K(2 - 3g + g^3),$$
$$S' = K(2 - 3g' + g'^3),$$

wobei S und S' diejenigen Segmente bezeichnen, welche den Mittelpunkt des Ellipsoides nicht enthalten und es ist $S < S'$.

Haben nun C und C' gleiche Vorzeichen, so schneiden die Ebenen (9) und (41) die Axe der z auf derselben Seite des Ursprungs, der Inhalt der Schichte ist gleich dem Unterschied der Segmente und zwar ist unter der gemachten Voraussetzung

$$Sch = S' - S$$

wenn Sch den Inhalt der Schichte bezeichnet,

$$Sch = K\{3(g - g') - (g^3 - g'^3)\}. \tag{43}$$

Haben C und C' ungleiche Vorzeichen, so schneiden die Ebenen (9) und (41) die Axe der z auf entgegengesetzten Seiten des Ursprungs, die Schichte enthält den Mittelpunkt des Ellipsoides und es ist:

$$Sch = 4K - S - S'$$

oder

$$Sch = K\{3(g + g') - (g^3 + g'^3)\}, \tag{44}$$

welches Resultat auch aus jenem (43) folgt, wenn man $-g'$ statt g' setzt, was mit der Bemerkung am Schlusse des §. 10 übereinstimmt, denn es ist in diesem Falle auch:

$$Sch = (4K - S') - S.$$

II. Das zweitheilige Hyperboloid.

§. 15.

In den beiden concentrischen und ähnlichen zweitheiligen Hyperboloiden, deren Gleichungen:

$$(45) \qquad -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

$$(46) \qquad -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = g^2$$

verhalten sich die gleichliegenden Axen wie 1 g, die reellen Axen liegen in der Axe der z und wenn wir voraussetzen, daß $g > 1$, so liegt das zweite Hyperboloid ganz innerhalb des ersten. Sind x', y', z' die Coordinaten eines bestimmten Punktes des Hyperboloides (45), so daß

$$(47) \qquad -\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2} = 1,$$

so sind offenbar $\pm gx'$, $\pm gy'$, $\pm gz'$ Coordinaten von Punkten des Hyperboloides (46), und wenn wir

$$(14) \qquad x_1 = gx', \; y_1 = gy', \; z_1 = gz'$$

setzen, so bezeichnet $(x_1\, y_1\, z_1)$ denjenigen Punkt des Hyperboloides (46), welcher auf der Verlängerung des vom Ursprung nach dem Punkt $(x'\; y'\; z')$ gezogenen Strahles auf derselben Seite des Ursprungs liegt. Die Gleichungen der diesen correspondirenden Punkten $(x'\, y'\, z')$, $(x_1\, y_1\, z_1)$ entsprechenden Berührungsebenen sind beziehungsweise:

$$(48) \qquad z = \frac{c^2 x'}{a^2 z'}\, x + \frac{c^2 y'}{b^2 z'}\, y + \frac{c^2}{z'},$$

$$(49) \qquad z = \frac{c^2 x_1}{a^2 z_1}\, x + \frac{c^2 y_1}{b^2 z_1}\, y + \frac{c^2 g^2}{z_1}$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

oder wenn man in der zweiten Gleichung mittelst der Beziehungen (14) auch die Coordinaten x', y', z' einführt:

$$z = \frac{c^2 x'}{a^2 z'} x + \frac{c^2 y'}{b^2 z'} y + \frac{c^2 g}{z'}, \tag{50}$$

wodurch ersichtlich wird, daß die tangirenden Ebenen der correspondirenden Punkte parallel sind.

Sind P und p die Entfernungen des Ursprungs von diesen Ebenen (48) und (50) und ist γ der Winkel der Senkrechten mit der Axe der z, so ist bekanntlich:

$$\frac{P}{\cos\gamma} = \frac{c^2}{z'}, \quad \frac{p}{\cos\gamma} = \frac{c^2 g}{z'}, \tag{17}$$

mithin

$$\frac{p}{P} = g \text{ oder } p = gP, \; p > P; \tag{18}$$

die Entfernung der beiden Ebenen aber ist:

$$Q = (g - 1) P. \tag{51}$$

Diese zwei Ebenen enthalten zwischen sich ein Segment des Hyperboloides (45), dessen Volumen im Allgemeinen als Function von x_1, y_1, z_1, oder respective von x', y', z' zu betrachten ist und dessen Größe wir nun bestimmen wollen.

§. 16.

Wir bestimmen zunächst die Durchschnittslinie der zweiten tangirenden Ebene (50) mit dem äußeren Hyperboloid (45). Wird z aus der Gleichung (45) und (50) eliminirt, so folgt:

$$c^2\{a^2 b^2 g + b^2 x' x + a^2 y' y\}^2 = a^2 b^2 z'^2 \{a^2 b^2 + b^2 x^2 + a^2 y^2\},$$

diese Gleichung bezeichnet die Projection der besagten Durchschnittslinie auf die Ebene der xy.

Wenn man entwickelt, nach abfallenden Potenzen von x und y ordnet, aus den Coefficienten von x^2 und y^2 mittelst (47) z' eliminirt und endlich durch $a^2 b^2 c^2$ abkürzt, so lautet dieselbe so:

$$(b^2+y'^2)x^2+(a^2+x'^2)y^2-2x'y'.\,xy-2b^2gx'.\,x-2a^2gy'.\,y-a^2b^2\left(g^2-\frac{z'^2}{c^2}\right)=0. \tag{52}$$

§. 17.

Zur Bestimmung der Form und Dimensionen des durch diese Gleichung repräsentirten Kegelschnittes bedienen wir uns wieder der Formeln des §. 6 und haben im Sinne der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades:

$$(53)\qquad \begin{cases} \mathrm{a} = b^2 + y'^2, \\ \mathrm{b} = a^2 + x'^2, \\ \mathrm{c} = -x'y'. \\ \mathrm{d} = -b^2 g x', \\ \mathrm{e} = -a^2 g y', \\ \mathrm{f} = -a^2 b^2 \left(g^2 - \frac{z'^2}{c^2}\right), \end{cases}$$

hiermit wird:

$$(22)\qquad \mathrm{ab} - \mathrm{c}^2 = \left\{\frac{abz'}{c}\right\}^2$$

und nach einiger Rechnung:

$$(54)\qquad \mathrm{ae}^2 + \mathrm{bd}^2 + \mathrm{fc}^2 - \mathrm{abf} - 2\,\mathrm{cde} = \left\{\frac{abz'}{c}\right\}^4 . (g^2 - 1).$$

Die in §. 6 aufgestellten Bedingungen sind erfüllt, die Gleichung (52) bezieht sich auf eine Ellipse und das Product ihrer Halbaxen ist:

$$(55)\qquad \mathrm{AB} = \frac{ab}{c}\,(g^2 - 1)\,z'.$$

Bezeichnet f die Fläche dieser Projectionsellipse, so ist demnach:

$$f = \frac{ab\pi}{c}\,(g^2 - 1)\,z'$$

und die Fläche F der Durchschnittsellipse in der Ebene (50) wird durch die Formel bestimmt:

$$F = \frac{f}{\cos\gamma} = \frac{ab\pi}{c}(g^2 - 1)\frac{z'}{\cos\gamma},$$

worin γ dieselbe geometrische Bedeutung hat, wie in der Gleichung (17). Aus dieser folgt aber

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$\frac{z'}{\cos\gamma} = \frac{c^2}{P},$$

mithin

$$F = abc\pi\frac{g^2-1}{P}. \tag{56}$$

§. 18.

Wenn man in der Gleichung (52) der Projectionsellipse mittelst der Beziehungen (14) statt x', y', z' die Coordinaten x_1, y_1, z_1 einführt, so kann man dieselbe leicht in folgende transformiren:

$$(xy_1 - x_1y)^2 - b^2g^2x(2x_1-x) - a^2g^2y(2y_1-y) - a^2b^2\left(g^4 - \frac{z_1^2}{c^2}\right) = 0. \tag{57}$$

Denken wir uns irgend einen Punkt (xy) dieser Curve mit dem Punkt $(x_1\ y_1)$ durch eine Gerade verbunden und die Verbindungslinie über $(x_1\ y_1)$ hinaus so weit verlängert, bis die Verlängerung gleich (xy) $(x_1\ y_1)$ wird. Sind u, v die Coordinaten des Endpunktes der Verlängerung, so ist offenbar:

$$x_1 = \frac{1}{2}(x+u), \quad y_1 = \frac{1}{2}(y+v)$$

oder

$$x = 2x_1 - u, \quad y = 2y_1 - v;$$

setzt man nun diese Werthe statt x und y in die Gleichung (57), so daß nun die veränderlichen Coordinaten u und v, so bezeichnet die entstehende Gleichung:

$$(uy_1 - x_1v)^2 - b^2g^2u(2x_1-u) - a^2g^2v(2y_1-v) - a^2b^2\left(g^4 - \frac{z_1^2}{c^2}\right) = 0,$$

den Ort der Punkte (uv), welche durch die angegebene Construction mit den Punkten (xy) der Projectionsellipse verbunden sind. Diese Gleichung unterscheidet sich von jener (57) nur darin, daß u statt x und v statt y steht, folglich ist auch (uv) ein Punkt der Projectionsellipse und $(x_1\ y_1)$ ist der Mittelpunkt der letzteren. Der Punkt $(x_1\ y_1\ z_1)$ in der Ebene (50) ist der Mittelpunkt der Durchschnittsellipse.

§. 19.

Wird um den Ursprung der Coordinaten als Mittelpunkt ein drittes zweitheiliges gleichliegendes und ähnliches Hyperboloid beschrieben mit den Halbaxen ak, bk, ck, so ist die Gleichung desselben:

$$(58) \qquad -\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=k^2$$

und wenn der Werth von k zwischen 1 und g liegt, so liegt das neue Hyperboloid zwischen den beiden andern. Unter dieser Voraussetzung sind die Coordinaten des mit $(x'\ y'\ z')$ correspondirenden Punktes:

$$(20) \qquad x'_1 = kx', \quad y'_1 = ky', \quad z'_1 = kz'$$

die Berührungsebene dieses Punktes ist zu jenen (48) und (50) parallel und schneidet das erste Hyperboloid (45) in einer Ellipse, deren Flächeninhalt F offenbar aus der Gleichung (56) abgeleitet werden kann, wenn man k statt g setzt:

$$(59) \qquad \mathrm{F} = abc\,\pi\,\frac{k^2-1}{P}.$$

Der Abstand q dieser Ebene von der äußeren Berührungsebene (48) folgt ebenso aus der Gleichung (51), so daß man hat:

$$(60) \qquad q = (k-1)\,P.$$

§. 20.

Betrachten wir nun wieder k als unabhängige Variabele, welche nach und nach alle Werthe von 1 bis g durchschreitet, so entsprechen den stetig aufeinander folgenden Hyperboloiden (58) eine Reihe von parallelen tangirenden Ebenen, welche das zwischen den Ebenen (48) und (50) enthaltene hyperboloidische Segment in eine unendliche Anzahl von Schichten zerlegen von der Dicke dq; wobei nach (60):

$$dq = P.\,dk.$$

Der Inhalt einer solchen Schichte ist das Differenzial des Inhaltes des Segmentes. Bezeichnen wir das letztere mit S_2, so ist

$$dS_2 = \mathrm{F}\,dq = abc\,\pi\,(k^2-1)\,dk$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

oder wenn man zwischen den Grenzen 1 und g integrirt:

$$S_2 = \frac{1}{3} abc\pi (2 - 3g + g^3). \tag{61}$$

Es ist von Interesse zu bemerken, daß diese Formel vollkommen mit derjenigen übereinstimmt, welche wir oben in §. 10 unter (32) für das ellipsoidische Segment gefunden haben. Aber damals war die Giltigkeit der Formel an die Bedingung geknüpft, daß g zwischen 0 und 1 liegt und jetzt sind die Grenzen für g, 1 und ∞.

Die beiden Hyperboloide (45) und (46) haben zur gemeinschaftlichen Asymptotenfläche einen elliptischen Kegel, dessen Scheitel im Ursprung liegt und dessen Gleichung

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0. \tag{62}$$

Legt man durch einen Scheitel des Hyperboloides (45) eine tangirende Ebene, so schneidet diese von der Asymptotenfläche einen Kegel ab, welchen wir den Axenkegel nennen wollen und dessen Inhalt durch die Formel bestimmt wird:

$$K = \frac{1}{3} abc\pi. \tag{33}$$

Durch Einführung dieses Volumens in die Formel (61) erhält man:

$$S_2 = K(g-1)^2(2+g)\ ^{1)}. \tag{63}$$

Der Rauminhalt S_2 ist unabhängig von den Coordinaten x_1, y_1, z_1 des Berührungspunktes des Hyperboloides (46), folglich für alle Punkte desselben constant.

---

[1]) Ist der Raum des Segmentes gleichförmig mit Masse erfüllt, so sind die Coordinaten des Schwerpunktes:

$$X = \frac{3}{4}\frac{(g+1)^2}{g+2}x',$$

$$Y = \frac{3}{4}\frac{(g+1)^2}{g+2}y',$$

$$Z = \frac{3}{4}\frac{(g+1)^2}{g+2}z'$$

Die Resultate dieser Untersuchung geben folgenden

2. Lehrsatz.

In concentrischen, gleichliegenden und ähnlichen zweitheiligen Hyperboloiden schneidet jede das innere Hyperboloid berührende Ebene von dem äußeren Hyperboloid Segmente von constantem Inhalt ab und der Berührungspunkt liegt stets im Mittelpunkt der Durchschnittsellipse.

§. 21.

Bezeichnen wir die Axen des inneren Hyperboloides (46) durch a, b, c, so daß

$$\mathrm{a} = ag, \quad \mathrm{b} = bg, \quad \mathrm{c} = cg,$$

und führen dieselben in die drei zusammengehörigen Gleichungen (45), (46) und (61) ein, so erhält man:

$$-\frac{x^2}{\mathrm{a}^2} - \frac{y^2}{\mathrm{b}^2} + \frac{z^2}{\mathrm{c}^2} = \frac{1}{g^2}$$

$$-\frac{x^2}{\mathrm{a}^2} - \frac{y^2}{\mathrm{b}^2} + \frac{z^2}{\mathrm{c}^2} = 1,$$

$$S_2 = \frac{1}{3}\,\mathrm{abc}\,\pi.\,\frac{2 - 3g + g^3}{g^3}.$$

Betrachtet man a, b, c, als unveränderliche Größen und setzt hierin $g = \infty$, so verwandeln sich dieselben in folgende:

$$(64) \qquad \begin{cases} -\dfrac{x^3}{\mathrm{a}^2} - \dfrac{y^2}{\mathrm{b}^2} + \dfrac{z^2}{\mathrm{c}^2} = 0, \\[2ex] -\dfrac{x^2}{\mathrm{a}^2} - \dfrac{y^2}{\mathrm{b}^2} + \dfrac{z^2}{\mathrm{c}^2} = 1, \\[2ex] S_2 = \dfrac{1}{3}\,\mathrm{abc}\,\pi. \end{cases}$$

Die erste Gleichung bezeichnet die Asymptotenfläche des durch die zweite dargestellten zweitheiligen Hyperboloides und die dritte Gleichung bezeichnet das Volumen desjenigen Kegels, welchen

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

irgend eine Berührungsebene des Hyperboloides von ihrer Assymptenfläche abschneidet.

Man hat daher auch folgenden:

3. Lehrsatz.

Jede ein zweitheiliges Hyperboloid berührende Ebene schneidet von deren Assymtotenfläche Kegel von constantem Inhalt ab und der Berührungspunkt ist der Mittelpunkt der Durchschnittsellipse.

§. 22.

Kehren wir wieder zum allgemeinen Fall der beiden Hyperboloide (45) und (46) zurück und bezeichnen durch Kg_2 den Rauminhalt des elliptischen Kegels, welcher die Durchschnittsellipse F (56) zur Basis und seinen Scheitel im Ursprung hat, so ist:

$$Kg_2 = \frac{1}{3} F . p$$

oder durch Substitution der Werthe für F und p aus (56) und (18):

$$Kg_2 = K(g^3 - g) \tag{65}$$

und wenn Sc_2 den Inhalt des hyperboloidischen Sectors bezeichnet, welcher von dem Mantel dieses Kegels und der hyperboloidischen Schale des Segmentes S_2 begrenzt wird, so ist:

$$Sc_2 = Kg_2 - S_2$$

oder durch Anwendung der Gleichungen (65) und (63):

$$Sc_2 = 2K(g - 1). \tag{66}$$

Diese Rauminhalte des Schnittkegels und des hyperboloidischen Sectors sind auch von den Coordinaten x_1, y_1, z_1 unabhängig, folglich für alle Punkte des Hyperboloides (46) constant.

§. 23.

Um das Volumen des Segmentes zu bestimmen, welches irgend eine Ebene, deren Gleichung:

$$z = Ax + By + C \tag{9}$$

von dem Hyperboloid (45) abschneidet, ist nur nothwendig, an diese Fläche eine parallele tangirende Ebene zu legen und im Sinne der Gleichung (18) das Verhältniß g der Entfernungen p und P des Ursprungs von diesen parallelen Ebenen zu bestimmen.

Die Gleichung der letzteren Ebene ist:

$$(67) \qquad z = Ax + By \pm \sqrt{c^2 - a^2A^2 - b^2B^2},$$

worin das Vorzeichen entsprechend den correspondirenden Punkten in §. 15 übereinstimmend mit jenem von C zu wählen ist.

Hiernach ist:

$$(68) \qquad g = \frac{p}{P} = \pm \frac{C}{\sqrt{c^2 - a^2A^2 - b^2B^2}}$$

und mit diesem Werth von g giebt (63) den Inhalt des Segments.

Die Gleichungen (65) und (66) geben nun ebenso die Inhalte des Schnittskegels und des Sectors.

Damit der Werth von g reell wird, muß

$$(69) \qquad c^2 - a^2A^2 - b^2B^2 > 0$$

sein und dieß ist auch bekanntlich das analytische Kennzeichen, daß die Ebene (9) das Hyperboloid (45) in einer Ellipse schneidet. Außerdem muß noch

$$(70) \qquad C^2 > c^2 - a^2A^2 - b^2B^2$$

sein, was der Bedingung $g > 1$ entspricht.

§. 24.

Der Inhalt Sch_2 einer hyperboloidischen Schichte, welche zwischen zwei gegebenen Ebenen:

$$(9) \qquad z = Ax + By + C,$$

$$(41) \qquad z = A'x + B'y + C'$$

enthalten ist, kann nun auf folgende Art gefunden werden: Damit die Ebenen diejenige Richtung haben, welche elliptische Schnitte erzeugen, muß gleichzeitig:

$$(69) \qquad c^2 - a^2A^2 - b^2B^2 > 0,$$

$$(71) \qquad c^2 - a^2A'^2 - b^2B'^2 > 0$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

sein. Damit die Ebenen das Hyperboloid schneiden, muß noch:

$$C^2 > c^2 - a^2 A^2 - b^2 B^2, \tag{70}$$

$$C'^2 > c^2 - a^2 A^2 - b^2 B^2 \tag{72}$$

sein. Sind diese Bedingungen erfüllt, so berechnet man die Verhältnißzahlen g und g' nach den Formeln:

$$g = \pm \frac{C}{\sqrt{c^2 - a^2 A^2 - b^2 B^2}}, \tag{68}$$

$$g' = \pm \frac{C'}{\sqrt{c^2 - a^2 A'^2 - b^2 B'^2}}, \tag{73}$$

wobei die Vorzeichen so zu wählen sind, daß beide positiv werden. Hiermit gibt die Gleichung (63):

$$S_2 = K(2 - 3g + g^3),$$
$$S_2' = K(2 - 3g' + g'^3)$$

die Inhalte der entsprechenden Segmente, deren Grenzebenen auf derselben oder auf entgegengesetzten Seiten die Axe der z durchschneiden, je nachdem C und C' gleiche oder ungleiche Vorzeichen haben. Indem wir nur den ersteren Fall betrachten, wollen wir noch voraussetzen, es sei $g > g'$, dann ist auch $S_2 > S_2'$ und:

$$Sch_2 = S_2 - S_2'$$

oder

$$Sch_2 = K\{(g^3 - g'^3) - 3(g - g')\}. \tag{74}$$

§. 25.

Wird der elliptische Kegel, dessen Scheitel im Ursprung und dessen Axe mit der Axe der z zusammenfällt, durch die Gleichung:

$$z^2 = \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} \tag{75}$$

dargestellt, so bezeichnen α und β die Verhältnißzahlen der Axen eines zur Ebene der xy parallelen elliptischen Schnittes und der Rauminhalt desjenigen Theiles dieses Kegels, welcher zwischen zwei gegebenen Ebenen, deren Gleichungen

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$(9) \qquad z = Ax + By + C$$

$$(41) \qquad z = A'x + B'y + C'$$

enthalten ist, kann durch Anwendung des 3. Lehrsatzes §. 21 leicht auf folgende Art bestimmt werden:

Sind a, b, c die Halbaxen eines solchen zweitheiligen Hyperboloides, welches den Kegel (75) zur Assymptotenfläche hat und die Ebene (9) berührt, so muß

$$\mathrm{a} = \alpha\mathrm{c}, \quad \mathrm{b} = \beta\mathrm{c}, \quad C^2 = \mathrm{c}^2 - \mathrm{a}^2 A^2 - \mathrm{b}^2 B$$

sein, wodurch a, b, c bestimmt werden; so wird:

$$(76) \qquad \mathrm{c} = \pm \frac{C}{\sqrt{1 - \alpha^2 A^2 - \beta^2 B^2}},$$

wobei das Vorzeichen so zu nehmen ist, daß c positiv wird.

Der Inhalt K des Kegels, welchen die Ebene (9) von der Fläche (75) abschneidet, wird nun nach (64) durch die Formel bestimmt:

$$(77) \qquad \mathrm{K} = \frac{1}{3}\alpha\beta\mathrm{c}^3\pi;$$

ebenso findet man, wenn

$$(78) \qquad \mathrm{c}' = \pm \frac{C'}{\sqrt{1 - \alpha^2 A'^2 - \beta^2 B'^2}},$$

für den Inhalt des Kegels, welcher der Ebene (41) entspricht:

$$(79) \qquad \mathrm{K}' = \frac{1}{3}\alpha\beta\mathrm{c}'^3\pi.$$

Haben C, C' ungleiche Vorzeichen, so schneiden die Grenzebenen (9) und (41) die Axe der z auf entgegengesetzten Seiten des Ursprungs und das zwischen ihnen enthaltene Volumen ist $\mathrm{K} + \mathrm{K}'$. Haben C und C' gleiche Vorzeichen und ist etwa $\mathrm{c} > \mathrm{c}'$, so ist das zwischen den gegebenen Ebenen enthaltene Volumen des elliptischen Kegels:

$$(80) \qquad \mathrm{K} - \mathrm{K}' = \frac{1}{3}\alpha\beta\pi(\mathrm{c}^3 - \mathrm{c}'^3).$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Damit c und c′ reell werden, müssen gleichzeitig die Bedingungen erfüllt sein:

$$(81)\qquad \begin{cases} 1-\alpha^2 A^2-\beta^2 B^2>0, \\ 1-\alpha^2 A'^2-\beta^2 B'^2>0 \end{cases}$$

und diese sind auch die analytischen Kennzeichen, daß die Ebenen (9) und (41) die Kegelfläche (75) in Ellipsen schneiden.

III. Das eintheilige Hyperboloid.

§. 26.

Das durch die Gleichung:

$$(82)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

dargestellte eintheilige Hyperboloid hat seine imaginäre Axe in der Axe der z, die Kehlellipse mit den Halbaxen a und b liegt in der Ebene der xy und die Assymptotenfläche desselben:

$$(62)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

entspricht auch dem zweitheiligen Hyperboloid, mit den Halbaxen ag, bg, cg:

$$(46)\qquad -\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=g^2,$$

dessen reelle Axe in der Axe der z liegt, $0<g<\infty$.

Sind x_1, y_1, z_1 die Coordinaten eines bestimmten Punktes des zweitheiligen Hyperboloides (46), welches von dem eintheiligen umschlossen wird, so ist:

$$(83)\qquad -\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}+\frac{z_1^2}{c^2}=g^2$$

und die Gleichung der tangirenden Ebene lautet:

$$(49)\qquad z=\frac{c^2 x_1}{a^2 z_1}x+\frac{c^2 y_1}{b^2 z_1}y+\frac{c^2 g^2}{z_1}.$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Wird aus dieser Gleichung und jener (82) z eliminirt, so folgt:

$$c^2\{a^2b^2g^2 + b^2x_1x + a^2y_1y\}^2 = a^2b^2z_1^2(b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2)$$

als Gleichung der Projection der Durchschnittslinie der Berührungsebene (49) mit dem eintheiligen Hyperboloid (82). Wird dieselbe entwickelt nach x und y geordnet und aus den Coefficienten von x^2 und y^2 mit Hilfe der Gleichung (83) z_1 eliminirt, endlich durch $a^2b^2c^2$ abgekürzt, so erhält sie die Form:

(84)

$$(b^2g^2+y_1^2)x^2+(a^2g^2+x_1^2)y^2-2x_1y_1\,.\,xy-2b^2g^2x_1x-2a^2g^2y_1y-a^2b^2\left(g^4+\frac{z_1^2}{c^2}\right)=0.$$

§. 27.

Die Gestalt und Abmessungen dieses Kegelschnittes ermitteln wir wieder nach den in §. 6 mitgetheilten Gleichungen, indem wir die Coefficienten in (84) kurz durch a, b, 2c, 2d, 2e, f bezeichnen.

Nach einiger Rechnung findet man:

$$\mathrm{ab} - \mathrm{c}^2 = \left\{\frac{abgz_1}{c}\right\}^2$$

$$\mathrm{ae}^2 + \mathrm{bd}^2 + \mathrm{fc}^2 - \mathrm{abf} - 2\,\mathrm{cde} = \left\{\frac{abgz_1}{c}\right\}^4 \frac{1+g^2}{g^2}$$

und da diese beiden Ausdrücke stets positiv sind, so bezeichnet die Gleichung (84) eine Ellipse; das Product ihrer Halbaxen ist:

(83) $$\mathrm{AB} = \frac{ab}{c}\,.\,\frac{1+g^2}{g}\,z_1.$$

Bezeichnet f die Fläche der Projectionsellipse, so folgt hiernach:

$$f = \frac{ab\pi}{c}\,.\,\frac{1+g^2}{g}\,z_1$$

und die Fläche F der Durchschnittsellipse in der Ebene (49):

$$F = \frac{ab\pi}{c}\,.\,\frac{1+g^2}{g}\,\frac{z_1}{\cos\gamma},$$

wobei γ den Winkel bezeichnet, welchen das aus dem Ursprung auf die Berührungsebene (49) gefällte Perpendikel p mit der Axe der z einschließt.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Nach (49) ist aber auch:

$$\frac{p}{\cos\gamma} = \frac{c^2 g^2}{z_1} \text{ oder } \frac{z_1}{\cos\gamma} = \frac{c^2 g^2}{p},$$

mithin:

$$F = abc\pi \frac{g + g^3}{p} \tag{86}$$

Durch eine ähnliche Betrachtung wie in §. 8 und §. 18 überzeugt man sich auch, daß der Berührungspunkt $(x_1\ y_1\ z_1)$ der Mittelpunkt der Durchschnittsellipse ist.

§. 28.

Diejenige Ebene, welche das durch die Gleichung:

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = k^2 \tag{87}$$

dargestellte zweitheilige Hyperboloid in dem mit $(x_1\ y_1\ z_1)$ correspondirenden Punkte berührt, ist zu jener (49) parallel und die Fläche F der Durchschnittsellipse mit dem eintheiligen Hyperboloid (82) wird offenbar durch die Formel (86) bestimmt, wenn man k an die Stelle von g setzt und gleichzeitig für p die Entfernung q des Ursprungs von der neuen Berührungsebene substituirt. Da die beiden tangirenden Ebenen zu correspondirenden Punkten gehören, so verhalten sich die Perpendikel p und q wie die Halbaxen oder es ist:

$$\frac{p}{q} = \frac{g}{k}, \quad q = \frac{kp}{g},$$

mithin:

$$\mathrm{F} = abc\pi \frac{k + k^3}{q} = abc\pi \frac{1 + k^2}{p} g. \tag{88}$$

§. 29.

Durch den Ursprung der Coordinaten legen wir eine zur (49) parallele Ebene und suchen den Rauminhalt derjenigen Schichte des eintheiligen Hyperboloides (82) zu bestimmen, welche zwischen diesen zwei Ebenen vom Abstande p enthalten ist.

Zu dem Ende betrachten wir k als veränderliche Größe, welche nach und nach alle Werthe von 0 bis g annimmt; die den stetig aufeinander folgenden Hyperboloiden (87) entsprechenden Berührungsebenen, welche alle parallel sind zu (49), theilen das bezeichnete Volumen in eine unendliche Anzahl von Schichten von der Dicke dq und zwar ist:

$$dq = \frac{p}{g}\, dk.$$

Bezeichnen wir das zu bestimmende Volumen mit V, so ist also:

$$dV = \mathrm{F}.dq = abc\pi.(1 + k^2)\, dk$$

und wenn man zwischen den Grenzen 0 und g integrirt:

$$V = \frac{1}{3}\, abc\pi\,(3g + g^3) \tag{89}$$

oder wenn man wieder den Axenkegel (33) einführt:

$$V = K.g\,(3 + g^2). \tag{90}$$

Dieser Ausdruck für V ist unabhängig von den Coordinaten x_1, y_1, z_1, also ist das Volumen V für alle Punkte des Hyperboloides (82) von gleicher Größe.

Die durch den Ursprung gehende, zur (49) parallele Grenzebene, die Ebene der Kehlellipse und das eintheilige Hyperboloid (82) schließen zwei keilförmige Körperräume ein, welche einander gleich sind, so daß das Volumen V unverändert bleibt, wenn an die Stelle der gedachten Grenzebene, die Ebene der Kehlellipse oder irgend eine andere durch den Ursprung gehende das Hyperboloid (82) in einer Ellipse schneidende Ebene tritt.

Die Ergebnisse dieser Untersuchung vereinigen wir in folgendem

4. Lehrsatz.

Haben ein eintheiliges und ein zweitheiliges Hyperboloid eine gemeinschaftliche Assymptotenfläche, sind alle begrenzten Schichten des ersten zwischen tangirenden Ebenen des zweiten Hyperboloides und einer beliebigen durch den Mittelpunkt der Flächen

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

gehenden Ebene von constantem Inhalt und der Berührungspunkt der ersteren Ebene ist der Mittelpunkt der Durchschnittsellipse.

Ist $g = 1$, so bezieht sich die Formel (90) auf das zu (82) conjugirte zweitheilige Hyperboloid, dessen Gleichung ist:

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{45}$$

und es wird:

$$V = 4K = \frac{4}{3} abc\pi; \tag{91}$$

der Inhalt der Schichte ist dann immer gleich dem Inhalt des Ellipsoides von denselben Halbaxen.

§. 30.

Der Inhalt Kg_1 des Kegels, welcher die Durchschnittsellipse (86) zur Basis und den Ursprung zum Scheitel hat, wird durch die Gleichung bestimmt:

$$Kg_1 = \frac{1}{3} F \cdot p$$

oder wenn man für F den Werth aus (86) substituirt:

$$Kg_1 = K(g + g^3). \tag{92}$$

Bezeichnet Kg_s den Inhalt des durch die Ebene (49) von der Assymptotenfläche abgeschnittenen Kegels, so hat man nach (64) im Sinne des dritten Lehrsatzes, da jetzt ag, bg, cg die Halbaxen des zweitheiligen Hyperboloides sind:

$$Kg_s = Kg^3, \tag{93}$$

also ist der ringförmige Raum R_1 zwischen dem eintheiligen Hyperboloid, der Assymptotenfläche und den beiden Grenzebenen:

$$R_1 = 3K \cdot g, \tag{94}$$

hingegen der ringförmige Raum R_1 zwischen dem eintheiligen Hyperboloid, dem Schnittkegel und den beiden Grenzebenen:

$$R_1 = 2K \cdot g. \tag{95}$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Alle diese Volumen sind von der Lage des Punktes $(x_1\ y_1\ z_1)$ auf dem Hyperboloid (46) unabhängig, also für alle Berührungspunkte constant.

§. 31.

Um den Rauminhalt V der Schichte zu bestimmen, welche von einer beliebigen Mittelpunktsebene und einer gegebenen Ebene, deren Gleichung:

$$z = Ax + By + C \tag{9}$$

begrenzt wird, ist die Größe g so zu bestimmen, daß das zweitheilige Hyperboloid (46) die Ebene (9) berührt. Dieses ist der Fall, wenn:

$$g = \pm \frac{C}{\sqrt{c^2 - a^2 A^2 - b^2 B^2}}, \tag{68}$$

wobei das Vorzeichen so zu wählen ist, daß g positiv wird. Die Realität von g stellt die Bedingung

$$c^2 - a^2 A^2 - b^2 B^2 > 0, \tag{69}$$

deren geometrischen Sinn wir bereits in §. 23 kennen gelernt haben. Die zweite der dort aufgestellten Bedingungen ist hier nicht nothwendig da, wie aus den obigen Entwickelungen hervorgeht, für die Schichten am eintheiligen Hyperboloid g größer oder kleiner als die Einheit sein kann.

Mit diesem Werth von g gibt (90) den gesuchten Inhalt der Schichte und auch die übrigen Körperräume Kg_1, Kg_3, R_1, R_1, welche dieser Ebene (9) entsprechen, können nun nach den Formeln in §. 30 berechnet werden.

§. 32.

Der Inhalt Sch_1 einer Schichte des eintheiligen Hyperboloides, welche zwischen zwei gegebenen Ebenen

$$z = Ax + By + C, \tag{9}$$

$$z = A'x + B'y + C' \tag{41}$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

enthalten ist, kann nach dem Vorhergehenden auf folgende Art berechnet werden: Wenn die beiden Bedingungen:

$$c^2 - a^2A^2 - b^2B^2 > 0, \tag{69}$$

$$c^2 - a^2A'^2 - b^2B'^2 > 0 \tag{71}$$

erfüllt sind, so schneiden beide Ebenen das eintheilige Hyperboloid in Ellipsen. Werden nun in:

$$g = \pm \frac{C}{\sqrt{c^2 - a^2A^2 - b^2B^2}}, \tag{68}$$

$$g' = \pm \frac{C'}{\sqrt{c^2 - a^2A'^2 - b^2B'^2}}, \tag{73}$$

die Vorzeichen so gewählt, daß g und g' positiv werden, so geben die beiden Gleichungen:

$$V = K(3g + g^3), \tag{90}$$

$$V' = K(3g' + g'^3) \tag{96}$$

die Inhalte der diesen Werthen entsprechenden Schichten, welche sich beide auf dieselbe willkürliche Mittelpunktsebene beziehen.

Haben C und C' ungleiche Vorzeichen, so liegen beide Ebenen nach der Axe der z genommen auf derselben Seite des Ursprungs und es ist, wenn $g > g'$

$$Sch_1 = V - V'$$

oder

$$Sch_1 = K\{3(g - g') + (g^3 - g'^3)\}. \tag{97}$$

Haben C und C' ungleiche Vorzeichen, so schneiden die beiden Ebenen die z-Axe auf entgegengesetzten Seiten des Ursprungs und es ist:

$$Sch_1 = V + V'$$

oder

$$Sch_1 = K\{3(g + g') + (g^3 + g'^3)\}. \tag{98}$$

IV. Das elliptische Paraboloid.

§. 33.

Ist der Ursprung der Coordinaten der Scheitel des elliptischen Paraboloides, liegt die eine Hauptaxe der Fläche in der positiven Halbaxe der z und hat der zur Ebene der xy parallele elliptische Schnitt im Abstand c die Halbaxen a und b, so ist die Gleichung desselben:

$$\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}. \tag{99}$$

Wird diese Fläche im Sinne der positiven z so verschoben, daß alle Punkte derselben Parallele zur Axe der z beschreiben, bis der Scheitel den Abstand $e = cg$ vom Ursprung hat, wobei also g eine positive Zahl bezeichnet, so ist die Gleichung dieses zweiten Paraboloides, welches von dem ersten umschlossen wird:

$$\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + g. \tag{100}$$

Durch eine den vorhergehenden ähnliche Untersuchung gelangt man in Bezug auf diese zwei Flächen zu folgendem

5. Lehrsatz.

Haben zwei gleichliegende elliptische Paraboloide dieselben Parameter, so schneidet jede das innere Paraboloid berührende Ebene von dem äußeren Paraboloid Segmente von constantem Inhalt ab und der Berührungspunkt liegt im Mittelpunkt der Durchschnittsellipse.

Bezeichnet S_p den Rauminhalt eines solchen Segmentes, so findet man:

$$S_p = \frac{1}{2} abc\pi . g^2 \tag{101}$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

oder wenn K die Bedeutung (33) hat:

$$S_p = \frac{3}{2} K . g^2 \text{ [1]}. \tag{102}$$

§. 34.

Durch dieselbe Formel wird der Inhalt eines Segmentes bestimmt, welches eine durch die Gleichung:

$$z = Ax + By + C \tag{9}$$

gegebene Ebene von der Fläche (99) abschneidet, wenn:

$$g = \frac{1}{4c^2}(a^2A^2 + b^2B^2 + 4cC); \tag{103}$$

hierbei ist wegen $g > 0$ nur die Bedingung nothwendig:

$$a^2A^2 + b^2B^2 + 4cC > 0, \tag{104}$$

welche Relation zugleich das analytische Kennzeichen ist, daß die Ebene (9) das Paraboloid (99) elliptisch schneidet.

Eine das Paraboloid (99) berührende Ebene, welche zu jener (9) parallel ist, hat die Gleichung:

$$z = Ax + By - \frac{a^2A^2 + b^2B^2}{4c}; \tag{105}$$

bezeichnet nun e die Entfernung der Durchschnitte der Ebenen (9) und (105) mit der Axe der z, so ist offenbar:

$$e = \frac{a^2A^2 + b^2B^2}{4c} + C,$$

mithin ist auch:

$$g = \frac{e}{c}, \tag{106}$$

womit die geometrische Bedeutung von g auch für diesen Fall gegeben ist und mit der früheren übereinstimmt.

[1]) Sind x', y', z' die Coordinaten des Berührungspunktes einer das äußere Paraboloid tangirenden Ebene, welche parallel zur schneidenden Ebene ist, so sind die Coordinaten des Schwerpunktes dieses Segmentes:

$$X = x', \quad Y = y', \quad Z = z' + \frac{2}{3} cg.$$

§. 35.

Sind die beiden Bedingungen zugleich erfüllt:

(104) $$a^2A^2 + b^2B^2 + 4cC > 0,$$

(107) $$a^2A'^2 + b^2B'^2 + 4cC' > 0,$$

so schneiden die beiden Ebenen, deren Gleichungen

(9) $$z = Ax + By + C,$$

(41) $$z = A'x + B'y + C'$$

sind, zugleich das Paraboloid (99) elliptisch und wenn gesetzt wird:

(103) $$g = \frac{1}{4c^2}(a^2A^2 + b^2B^2 + 4cC),$$

(108) $$g' = \frac{1}{4c^2}(a^2A'^2 + b^2B'^2 + 4cC'),$$

so sind die Rauminhalte der diesen Ebenen entsprechenden paraboloidischen Segmente beziehungsweise:

(102) $$S_p = \frac{3}{2}Kg^2,$$

(109) $$S'_p = \frac{3}{2}Kg'^2$$

und der Inhalt der zwischen diesen Ebenen enthaltenen Schichte, wenn $g > g'$ wird durch die Formel bestimmt:

(110) $$Sch_p = \frac{3}{2}K(g^2 - g'^2)$$

oder durch jene:

(111) $$Sch_p = \frac{1}{2}abc\pi(g^2 - g'^2)$$

wenn sich die Ebenen (9) und (41) außerhalb des Paraboloides durchschneiden.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Errata.

Sinnstörende Druckfehler in Unferdinger's Abhandlungen, Sitzungsberichte Bd. LX, II. Abth. Octoberheft 1869.

(Die eingeschlossene Seitenzahl bezieht sich auf die Separatabdrücke.)

Seite 618 (28), Zeile 2 u. 4 von oben lies $(\alpha+\beta x)^{n-s}$ statt $(\alpha+\beta x)^{n-s}$.
653 (63), 6 von unten lies x^2 statt x^3.
664 (74), 12 gleiche statt ungleiche.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1869

Band/Volume: 60_2

Autor(en)/Author(s): Unferdinger Franz

Artikel/Article: Kubatur der Segmente und Schichtenräuine in Flächen der zweiten Ordnung. 631-667