Über die Lichtgeschwindigkeit im Quarze.

Von dem w. M. **Viktor v. Lang.**

Die Geschwindigkeit einer ebenen Lichtwelle in einem gewöhnlichen einaxigen Krystalle ist gegeben durch die Gleichung

$$(\mathfrak{a}^2 - \mathfrak{q}^2)\,(\mathfrak{a}^2 \cos\rho^2 + \mathfrak{c}^2 \sin\rho^2 - \mathfrak{q}^2) = 0 \qquad (1)$$

worin ρ den Winkel bedeutet, welchen die Normale der Lichtwelle mit der optischen Axe des Krystalles bildet. Nennen wir n den Brechungsquotienten der Welle für diese Richtung, so gibt Gleichung 1) durch Division mit der Geschwindigkeit V des Lichtes in Luft

$$\left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{n^2}\right)\left(\frac{\cos\rho^2}{\omega^2} + \frac{\sin\rho^2}{\varepsilon^2} - \frac{1}{n^2}\right) = 0 \qquad (2)$$

worin jetzt $\omega = \frac{V}{\mathfrak{a}}$ den ordentlichen, $\varepsilon = \frac{V}{\mathfrak{c}}$ aber den ausserordentlichen Brechungsquotienten bedeutet. Die Gleichung 2) ist nämlich in Bezug auf $\frac{1}{n^2}$ vom zweiten Grade und es gibt daher zwei Wellen, eine ordentliche mit dem constanten Brechungsquotienten

$$n = \omega \qquad (3)$$

und eine ausserordentliche Welle, deren Brechungsquotient gegeben ist durch

$$\frac{1}{n'^2} = \frac{\cos\rho^2}{\omega^2} + \frac{\sin\rho^2}{\varepsilon^2} \qquad (4)$$

Der ausserordentliche Brechungsquotient schwankt also zwischen den beiden Werthen ω und ε, indem er den ersteren Werth für die Richtung der optischen Axe annimmt, nach welcher Richtung somit keine Doppelbrechung stattfindet.

Das eben Gesagte gilt aber nicht mehr für einaxige Krystalle, welche die Erscheinungen der Circular-Polarisation zeigen. Solche

Krystalle, wie z. B. der Quarz, lassen längs ihrer optischen Axe zwei Wellen hindurch, die verschiedene Geschwindigkeit haben, sie zeigen also auch nach der Axe doppeltbrechende Eigenschaften.

Man hat dies dadurch zu erklären versucht, daß man der Constante ω in Gleichung 3) einen andern Werth beigelegt hat, wie in Gleichung 4); man erhält dann allerdings längs der Axe zwei Wellen mit verschiedener Geschwindigkeit, und hat für andere Richtungen noch immer eine Welle mit constanter Geschwindigkeit und eine Welle deren Geschwindigkeit, wie der Radius einer Ellipse variirt.

Diese Annahme ist jedoch nicht richtig, und man hat vielmehr zufolge von Differentialgleichungen, welche ich in Poggendorff's Annalen Bd. 119, 1863 mittheilte für circular polarisirende Krystalle den rechten Theil der Gleichung 1) durch eine Größe zu ersetzen, die nur senkrecht zur Axe, also für $\rho = 90^0$ verschwindet, wozu genügt, daß sie mit $\cos\rho$ multiplicirt ist. In der That wird diese Gleichung

$$(\mathfrak{a}^2 - \mathfrak{q}^2)(\mathfrak{a}^2 \cos\rho^2 + c^2 \sin\rho^2 - \mathfrak{q}^2) = \mathfrak{q}^2 f^2 \cos\rho^4 \tag{5}$$

wobei beide Theile homogen sind, wie man leicht einsieht, wenn man zu den von ρ freien Gliedern sich den Factor $\cos 0^2$ dazu denkt.

Durch f ist eine neue Constante bezeichnet, welche eben für die Circular-Polarisation charakteristisch ist, da Gleichung 5) in die Gleichung 1) übergeht, sobald wir $f = 0$ setzen. Nennen wir φ das Verhältniss von V zu f, so gibt die letzte Gleichung

$$\left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{n^2}\right)\left(\frac{\cos\rho^2}{\omega^2} - \frac{\sin\rho^2}{\varepsilon^2} - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{\cos\rho^4}{\varphi^2\, n^2} \tag{6}$$

welche Gleichung mit Bezug auf $\frac{1}{n^2}$ noch immer vom zweiten Grade ist. Es hat daher auch keine Schwierigkeit, die Brechungsquotienten der beiden Wellen in diesem Falle zu entwickeln; man kann aber hiebei das n^2 im rechten Theile der letzten Gleichung als constant betrachten, da ja das ganze Glied, wie die Erfahrung lehrt, sehr klein ist und mit wachsendem ρ rasch abnimmt. Da nun dies Glied hauptsächlich für $\rho = 0$ Bedeutung hat und in diesem Falle n nahezu gleich ω wird, so kann man im zweiten Theile der letzten Gleichung einfach $n = \omega$ setzen. Schreiben wir dann noch zur Abkürzung

$$\chi^2 = \varphi\omega \tag{7}$$

wo χ also eine constante Größe ist, so wird die letzte Gleichung

$$\left(\frac{1}{\omega^2}-\frac{1}{n^2}\right)\left(\frac{\cos\rho^2}{\omega^2}+\frac{\sin\rho^2}{\varepsilon^2}-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{\cos\rho^4}{\chi^4} \tag{8}$$

welche nach $\frac{1}{n^2}$ aufgelöst, hiefür gibt

$$\frac{1}{n^2}=\frac{1}{\omega^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\omega^2}-\frac{1}{\varepsilon^2}\right)\sin\rho^2 \mp \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\omega^2}-\frac{1}{\varepsilon^2}\right)\sin\rho^4+\frac{\cos\rho^4}{\chi^4}} \tag{9}$$

Das obere Zeichen entspricht hier der ordentlichen Welle, das untere der außerordentlichen, wenn wir diese Bezeichnung auch jetzt noch beibehalten, wo es wenigstens in der Nähe der Axe eigentlich keine ordentliche Welle mit constanter Geschwindigkeit mehr gibt.

Mit Hilfe der Gleichung 9) kann man die Differenz der Brechungsquotienten der beiden Wellen für jede beliebige Richtung ρ bestimmen. Die betreffende Gleichung wurde schon von Cauchy ohne Ableitung veröffentlicht und ihre Übereinstimmung mit der Beobachtung von Jamin durch sorgfältige Versuche am Quarze nachgewiesen. Von dieser Differenz hängt nämlich der Gangunterschied der beiden Wellen ab, welcher von Jamin mit Hilfe des von ihm wesentlich vervollkommten Compensators bestimmt wurde. Hiedurch ist wohl schon ein großer Beweis dafür gegeben, daß die Gleichung 9) wirklich die Erscheinung der Natur darstellt.

Im Nachfolgenden habe ich nun eine directe Bestätigung der Formel 9) versucht, indem ich die Brechungsquotienten im Quarze für verschiedene Werthe von ρ wirklich gemessen habe. Ursprünglich hatte ich diese Versuche schon vor Jahren mit der Absicht begonnen, wenigstens experimentell etwas über die Änderung der Brechungsquotienten in der Nähe der Axe zu erfahren, da theoretisch nur jene Formel für deren Differenz bekannt war. Nachdem es mir jedoch gelungen war, die allgemeinen Differentialgleichungen für die Lichtbewegung in circular polarisirenden einaxigen Medien aufzufinden und daraus die Formel 9) für die Geschwindigkeit der beiden Wellen abzuleiten, handelte es sich nur mehr darum, diese Formel auch zu verificiren.

Ich benützte dazu ein Quarzprisma von Soleil, dessen beide Seiten nahezu gleich geneigt zur optischen Axe sind. Die Höhe des ganzen Prisma beträgt 39 Millim. Die Breite der brechenden Fläche 8 Millim. Letztere Flächen erwiesen sich aber bei starker Vergrösserung nicht eben genug, ich ließ diese Flächen daher von Herrn Steinheil erst eben schleifen, was derselbe auch in ausgezeichneter Weise ausführte.

Zur Winkelmessung diente der Horizontalkreis eines geodätischen Repetitionstheodoliten, welcher von Herrn Director C. v. Littrow mir gütigst zur Verfügung gestellt wurde. Um den Kreis zu dem gedachten Zwecke benützen zu können, wurde mit dem außerhalb befindlichen Limbus ein Beobachtungs-Fernrohr, dagegen mit dem Dreifuße des Instrumentes ein Collimator verbunden. Letzterer enthält wie das Fernrohr eine achromatische Objectivlinse von 25 Millim. Durchmesser und 170 Millim. Brennweite, in deren Brennpunkt sich ein Fadenkreuz befindet, das von außen noch durch ein mattes Glas geschützt ist. Das Fernrohr vergrößert ungefähr 11mal. Die Axe der Alhidade, welche durch die des Limbus hindurch geht, wurde an ihrem unteren Ende mit einer Klemmvorrichtung versehen, welche gestattet die Alhidade gegen den Dreifuß fest zu stellen; eine schon vorhandene Klemme gestattet dasselbe für das Beobachtungsfernrohr. Beide Klemmen sind mit Mikrometerschrauben versehen. Oben trägt die Axe der Alhidade ein kleines Tischchen, welches mittelst einer Klemmschraube höher und niedriger gestellt werden kann; dann aber ist auf diesem Tischchen eine Platte angebracht, die auf einen fixen Punkt und auf zwei Stellschrauben ruht, wodurch das auf die Platte gestellte Prisma mit seiner Kante parallel der Drehungsaxe gemacht werden kann.

Der Limbus, welcher 12 Zoll Durchmesser hat, ist von 5 zu 5 Minuten getheilt; die vier Nonien der Alhidade sind offenbar mit der Absicht verfertigt, daß 75 Theilstriche derselben gleich 74 Strichen des Limbus seien, so daß man am Nonius 4 Secunden ablesen könnte. Dies ist aber nicht genau der Fall, sondern man muß, wie aus den folgenden Versuchen hervorgeht, die Ablesung am Nonius statt mit 4 mit 3·93344 multipliciren, um die richtige Anzahl von Secunden zu erhalten.

Die mit diesem Instrumente angestellten Beobachtungen zerfallen in zwei Classen, in solche, die angestellt wurden, um die

Größe des Prismenwinkels zu finden und in solche, welche für verschiedene Einfallswinkel, die Ablenkung des Lichtes gaben.

Bestimmung des brechenden Winkels.

Da die Seiten des benutzten Prisma nicht parallel der optischen Axe sind, so ist der Winkel desselben abhängig von der Temperatur und es ist daher nicht nur bei der Bestimmung des brechenden Winkels selbst, sondern auch bei der Messung der Ablenkung des Lichtes die Temperatur zu berücksichtigen.

Hiezu genügt es nicht die Temperatur bei jeder Messung zu notiren, da ein solches Quarzprisma bei der Änderung der Zimmertemperatur sicherlich Stunden braucht, um die geänderte Temperatur anzunehmen. Es bleibt daher nur übrig die Temperatur des Zimmers selbst möglichst constant zu erhalten. Zu dem Zwecke wurden für's Erste die Beobachtungen nur bei Tage gemacht, um zur Ablesung keiner künstlichen Lichtquelle zu bedürfen, welche die Temperatur des Zimmers beeinflussen würde. Dann wurden die Läden des Zimmers immer geschlossen gehalten und nur geöffnet, wenn es sich eben um die Ablesung handelte. So gelang es die Temperatur durch eine Reihe trüber Tage im Monat Juni dieses Jahres fast bis auf Zehntelgrade constant auf 16° R. zu erhalten; als später heitere Tage kamen, stieg die Temperatur des Zimmers, welches für einige Stunden der Sonne ausgesetzt ist. Diese Tage wurden benutzt, um den brechenden Winkel auch bei etwas höherer Temperatur zu bestimmen und so die Änderungen desselben in der Nähe von 16° genauer angeben zu können. Bei den Anfangs October angestellten Versuchen konnte die Zimmertemperatur nur dadurch auf nahezu 16° erhalten werden, daß eine Gasflamme Tag und Nacht brennen gelassen wurde. Diese Methode erwies sich aber als ganz zweckmäßig, um die Zimmertemperatur constant zu erhalten, besonders wenn man nicht die Mühe scheut, zu verschiedenen Zeiten den Gaszutritt nach dem Stande der Temperatur zu reguliren.

Die Messung des brechenden Winkels geschah nun auf folgende Art. Das Beobachtungs-Fernrohr wurde entweder links oder rechts unter einem Winkel von beiläufig 90° gegen den Collimator festgestellt, das Fadenkreuz des letzteren aber durch eine Linse beleuchtet, welche Licht von einer Öffnung im gegenüber liegenden Fensterladen erhielt. Es versteht sich, daß das Fernrohr auf unendlich eingestellt und seine Axe mit Hilfe einer planparallelen Glasplatte senkrecht zur Drehungsaxe gerichtet wurde. Es ist dann leicht, auch das Fadenkreuz des Collimator in den Brennpunkt seines Objectives zu bringen und die Axe des Collimators senkrecht zur Drehungsaxe zu machen. Nachdem das Quarzprisma mit Wachs auf dem Tischchen befestigt war, wurden seine beiden Seiten ebenfalls parallel der Drehungsaxe gemacht, indem man abwechselnd für beide Flächen das Spiegelbild des Collimator-Fadenkreuzes mit dem im Fernrohr durch die Stellschrauben des Tischchens zur Coincidenz brachte. Ist dies geschehen, so besteht die Messung darin, daß man diese Übereinstimmung der Fadenkreuze für beide Flächen nacheinander mit Hilfe der Alhidaden-Mikrometerschraube bewerkstelligt. Die Differenz der Ablesungen in beiden Stellungen gibt das Supplement des brechenden Winkels.

Um aber die Reductionszahl für die Ablesungen der Nonien zu finden, wurde folgender Weg eingeschlagen: Da das Supplement des brechenden Winkels beiläufig $110^\circ\ 6'\ 44''$ beträgt, so ist die Differenz für die beiden Stellungen des Nullpunktes eines Nonius entweder $110^\circ\ 5'$ oder $110^\circ\ 10'$. Im ersteren Falle ist noch die Differenz D der Nonius-Ablesungen zu der Ablesung am Limbus hinzu zu addiren, im zweiten Falle ist die Differenz D' der Angaben des Nonius zu subtrahiren. Natürlich ist in beiden Fällen die Differenz der Nonius-Ablesungen erst mit der Reductionszahl K zu multipliciren; man hat daher die Gleichung

$$110^\circ\ 5' + KD = 110^\circ\ 10' - KD'$$

woraus

$$K = \frac{300''}{D + D'}$$

folgt. Es kommt also nur darauf an, die Stellung des Prisma so zu wählen, daß einmal die Differenz der Ablesungen des Nonius positiv, das andere Mal negativ wird. Man braucht zu diesem Zwecke nur einmal die erste Fläche so zu stellen, daß bei der richtigen Einstellung die Ablesung am Anfange des Nonius stattfindet, dann bei einer zweiten Winkelmessung bringt man die zweite Fläche in eine eben solche Position.

Es folgen nun die zur Bestimmung des brechenden Winkels ausgeführten Beobachtungen. Die angegebenen Zahlen sind die Summe der Ablesungen aller vier Nonien bei jeder Einstellung. Die beiden Flächen wurden in der Regel mehreremale, und zwar immer abwechselnd in der angegebenen Ordnung eingestellt. Bei solchen wiederholten Beobachtungen sind in der letzten Reihe die Mittel der Ablesungen für beide Flächen angegeben und die Differenz dieser Mittel ist schließlich noch durch vier getheilt, um den einem Nonius entsprechenden Werth zu erhalten.

Was die angegebenen Temperaturen betrifft, so sind sie bis zum 25. Juli an einem Thermometer nach Réaumur gemessen, an dem genannten Tage wurde das Thermometer zerschlagen; die folgenden Temperaturen sind an einem Thermometer nach Celsius bestimmt und wurden auf das erste Thermometer umgerechnet. Es waren nämlich früher zufällig gleichzeitig einige Ablesungen an beiden Thermometern gemacht worden. Da aber diese gleichzeitigen Temperatur-Bestimmungen nicht mit der gehörigen Sorgfalt gemacht worden waren, so ist es immerhin möglich, daß die späteren Temperaturen durch die Umrechnung etwa um $^1/_{10}$ Grad unrichtig wurden; es sind aber überhaupt die Zehntelgrade nur geschätzt.

16. Juni, 9 Uhr, 17·2° R., Fernrohr rechts:

I.	36					
	143·5					
	107·5					
	26·88					
II.	204·5	207	205·5			205·67
	13	12	13·5	12		12·63
						193·04
						48·26
III.	209·5	211		210·25		
	17·5	16·5		17·0		
				193·25		
				48·31		
IV.	26·5	25	27		26·17	
	134	136	134·5		134·83	
					108·66	
					27·17	

17. Juni, 9 Uhr, 16·7° R., Fernrohr links:

I.	27	28			27·5
	226	228			227·0
					199·5
					49·88
II.	11	9	7·5	9·5	9·25
	121	118	120·5		119·83
					110·58
					27·65

18. Juni, 9 Uhr, 16·3° R., Fernrohr rechts:

I.	15·5	16		15·75
	215	214		214·50
				198·75
				49·69
II.	27	26		26·50
	132·5	135·5	133	133·67
				107·17
				26·79

5 Uhr, 16·7° R., Fernrohr links:

III.	1·5	1·5	1·50
	199	197·5	198.25
			196·75
			49·19
IV.	9	11	10·0
	115	116	115·5
			105·5
			26·38

19. Juni, 9 Uhr, 16·2° R., Fernrohr links:

I.	35	35	35
	237	237	237
			202
			50·50
II.	23	23	23
	138	138	138
			105
			26·25
III.	15	16	15·50
	214·5	213	213·75
			198·25
			49·56

IV.	11	11·5	12·5	11·67
	116·5	117·5		117·00
				105·33
				26·33
V.	13	12	13	12·67
	210·5	212		211·25
				198·58
				49·65
VI.	36	35·5	36	35·83
	234	236	237	235·67
				199·84
				49·98

21. Juni, 11 Uhr, 16·2° R., Fernrohr rechts:

I.	8	3·5	5	7	5·88
	207·5	207·5	206·5		207·17
					201·29
					50·32
II.	11·5	11·5	10	11·5	11·13
		119	119·5	120·5	119·67
					108·54
					27·14

25. Juli, 9 Uhr, 18·8° R.:

I.	25	24·5	24·5		24·67
		141	140		140·50
					115·83
					28·96
II.	26	28·5	27·5		27·33
	220·5	220·5	219		220·00
					192·67
					48·17
III.	38·5	36·5	37	35	36·75
	232	233·5	230	232·5	232·00
					195·25
					48·81
IV.	20	19	19		19·33
	131	129·5	130		130·17
					110·84
					27·71
V.	41·5	42			41·75
	233	236	233·5		234·12
					192·37
					48·09

VI.	33·5	32	32·75
	143	144·5	143·75
			111·00
			27·75

28. Juli, 9 Uhr, 19·2° R.:

I.	4	2	2·5	2·83
	114	113·5	113	113·50
				110·67
				27·67
II.	18	20·5	19·5	19·33
	211·5	213·5	212	212·33
				193·00
				48·25

29. Juli, 8 Uhr, 20·0° R.:

I.	16·5	18·5	16	17·00
	208	208·5	208	120·17
				191·17
				47·79
II.	28	28·5	27·5	28·00
	143	140	141	141·33
				113·33
				28·33

30. Juli, 8 Uhr, 26·5° R.:

I.	18·5	16·5	17·5	17·5
	211	211		211·0
				193·5
				48·38
II.	22	22		22·0
	134·5	134·5		134·5
				112·5
				28·13
III.	222	222·5	222	222·17
	33	32·5	32	32·50
				189·67
				47·42
IV.	19·5	18		18·75
	133	131·5		132·25
				113·50
				28·38

31. Juli, 8 Uhr, 20·7° R.:

I.	22	22	22
	138·5	138	138·25
			116·25
			29·06
II.	22	22	22
	214	214	214
			192
			48·00.

Ordnet man diese Beobachtungen nach der Temperatur, so erhält man folgende Übersicht:

t	D	D'
16·2	26·25	50·50
	26·33	50·32
	27·14	49·98
		49·65
		49·56
16·3	26·79	49·69
16·7	26·38	49·88
	27·65	49·19
17·2	26·88	48·26
	27·17	48·01
18·8	27·71	48·81
	27·75	48·17
	28·96	48·09
19·2	27·67	48·25
20·0	28·33	47·79
20·5	28·13	47·42
	28·38	48·38
20·7	29·06	48·00.

Aus diesen Beobachtungen wurden zunächst 4 Normalbeobachtungen gebildet, indem aus solchen Beobachtungen, die sich nur wenig in der Temperatur unterscheiden, das Mittel genommen wurde. Faßt man nun die Beobachtungen so zusammen, wie es durch die Klammern in der Übersicht angegeben ist, so erhält man folgendes System zusammen gehöriger Werthe:

t	D	D'
16·22	26·63	49·95
16·95	27·02	48·91
18·90	28·02	48·17
20·43	28·48	47·90

Betrachtet man D und D' als lineare Functionen der Temperatur, also von der Form

$$A + Bt$$

und berechnet die Constanten nach der Methode der kleinsten Quadrate aus den vorstehenden Normalbeobachtungen, so wird

$$D' = 56{\cdot}834 - 0{\cdot}4470\ t$$
$$D = 19{\cdot}435 + 0{\cdot}4470\ t.$$

Diese Formeln geben aber

t	D	D' gerechnet
16·22	26·69	49.58
16·95	27·02	49·26
18·90	27·89	48·39
20·43	28·57	47·70.

Das Resultat der Rechnung ist auch insoferne befriedigend, als der Factor von t in beiden Formeln bis auf vier Decimalstellen gleich wird, indem nur so die Länge der Nonien, welche durch die Summe von D und D' repräsentirt wird, für jede Temperatur gleich ausfällt. Man hat für diese Summe

$$D + D' = 76{\cdot}269$$

und folglich für die Reductionszahl der Nonien auf Secunden

$$K = \frac{300}{76{\cdot}269} = 3{\cdot}93344.$$

Für das Supplement des brechenden Winkels erhält man jetzt

$$110^\circ\ 10' - 3{\cdot}9334\ (56{\cdot}834 - 0{\cdot}447\ t),$$

für den Winkel selbst aber

$$A = 69^\circ\ 53'\ 43''553 - 1''7583\,t.$$

Hieraus erhält man für die nachstehenden bei den späteren Messungen beobachteten Temperaturen folgende Werthe des brechenden Winkels

t	A
15·7	69°53'15"95
15·8	15·77
15·9	15·60
16·0	69 53 15·42
16·1	15·24
16·2	15·07
16·3	69 53 14·89
16·4	14·72
16·5	14·54.

Da die Neigungen der beiden Prismenflächen zur morphologischen Axe des Quarzes wenigstens nahezu bekannt sind, so läßt sich leicht aus der Änderung des Prismenwinkel durch die Temperatur die Änderung berechnen, welche das Längenverhältniß zweier Linien erfährt, die beziehungsweise senkrecht und parallel der optischen Axe sind, da nämlich jede Seite zur Axe gleich geneigt ist, so bildet sie mit derselben einen Winkel gleich $90° - \frac{A}{2}$, so daß, wenn wir

$$a = c \cot\left(90° - \frac{A}{2}\right) = c \tan\frac{A}{2}$$

setzen, die Linie a parallel der Axe, c jedoch senkrecht dazu ist. Für das Verhältniß dieser zwei Linien haben wir somit

$$\frac{a}{c} = \tan\,(39°\; 56'\; 51''78 - 0''87915\, t),$$

hieraus erhält man für $t = 0°$

$$\frac{a}{c} = \tan 39°\; 56'\; 51''78 = 0\cdot8375412$$

für $t = 80°$ R. aber

$$\frac{a}{c} = \tan 39°\; 55'\; 41''23 = 0\cdot8369684.$$

Die absolute Änderung des Verhältnisses $\frac{a}{c}$ für einen Temperatur-Unterschied von 80° R. oder 100° C. beträgt somit $-\,0\cdot0005728$, die relative daher

$$-\frac{0\cdot0005728}{0\cdot8375412} = -\,0\cdot0006839.$$

Nach den Messungen von **Pfaff**, welcher die lineare Ausdehnung des Quarzes parallel und senkrecht zur Axe direct bestimmte, hat man für die letzte Grösse

$$\left(\frac{1\cdot0008073}{1\cdot0015147} - 1\right) = -\,0\cdot0007063,$$

während nach Fizeau's Messungen diese Größe gleich

$$\left(\frac{1\cdot000781}{1\cdot001419} - 1\right) = -0\cdot0006303$$

ist. Die Übereinstimmung der von mir gefundenen Zahl mit den Zahlen von Pfaff und Fizeau ist gewiß sehr befriedigend, zumal meine Beobachtungen sich nur auf ein Temperatur-Intervall von 4°5 R. erstrecken.

Messung der Ablenkung bei verschiedenen Einfallswinkeln.

Das Prisma blieb bei diesen Versuchen in derselben Stellung wie bei den vorhergehenden, auch wurde immer dieselbe Fläche als Einfallsfläche benützt. Die Beleuchtung des Fadenkreuzes geschah in diesem Falle durch eine nicht leuchtende Gasflamme, in welche Chlornatrium gehalten wurde. Auf diese Weise bestand das durch das Prisma entworfene Spectrum nur aus einer homogenen Lichtscheibe mit einem Fadenkreuze, welches das Bild des Collimator-Fadenkreuzes mit seiner Blendung ist. Auf diese Weise läßt sich die Ablenkung viel schärfer beobachten als mit einer homogen beleuchteten Spalte, welche letztere Methode auch noch viel unbequemer ist, da man das schmale Bild der Spalte viel schwerer mit dem Fernrohre findet, als das der breiten Blendung. Natürlich geht aber die von mir befolgte Methode nur bei homogener Beleuchtung.

Im Spectrum erschien der Verticalfaden des Kreuzes doppelt entsprechend der ordentlichen und der ausserordentlichen Welle. Für die Intensität dieser beiden Fadenbilder ist der Umstand hinderlich, daß die Lichtscheiben für die ordentliche und außerordentliche Welle sich fast ganz decken. Dadurch ist an der Stelle des Fadenbildes der ordentlichen Welle Licht von der außerordentlichen Welle und umgekehrt. Es ist also zweckmäßig immer eine Welle wegzubringen, um das Fadenbild der anderen dunkler zu haben. Zu dem Zwecke wurde zwischen die Flamme und den Collimator ein Nicol'sches Prisma und ein Viertel-Undulations-Glimmerplättchen gestellt, dessen Hauptschnitte unter 45° gegen die Hauptschnitte des Nicol's standen. Auf diese Weise gelangt nur circular polarisirtes

Licht in den Collimator, und es erscheint im Spectrum nur eine Welle und das ihr entsprechende Fadenbild. Man braucht dann das Glimmerplättchen nur um 90° zu drehen, so wird das auffallende Licht im entgegengesetzten Sinne circular polarisirt und die andere Welle verschwindet.

Bei der Messung wurde zunächst das Prisma mit der Alhidadenklemme festgestellt, dann das Fernrohr nach einander eingestellt auf das abgelenkte Fadenkreuz der ordentlichen, dann der ausserordentlichen Welle, auf das Fadenkreuz des Collimator und auf das von der Einfallsfläche reflectirte Bild des Collimatorkreuzes. Die Differenzen der zwei ersten Beobachtungen gegen die dritte geben die Ablenkungen D, D' der ordentlichen und ausserordentlichen Welle, während die halbe Differenz der dritten und vierten Beobachtung den zugehörigen Einfallswinkel i repräsentirt. Aus diesen Winkeln und aus der Größe A der brechenden Karte, findet man den Brechungswinkel r, welchen die gebrochene Wellennormale mit dem Loth auf die Einfallsfläche macht, aus der Gleichung

$$\tan\left(\frac{A}{2}-r\right)=\tan\frac{A}{2}\tan\left(i-\frac{A+D}{2}\right)\cot\frac{A+D}{2}$$

für den der Richtung r entsprechenden Brechungsquotienten aber ist dann

$$n=\frac{\sin i}{\sin r}.$$

Die Beobachtungen geschahen bei fünf bestimmten Stellungen des Prisma, abgesehen von den kleinen Änderungen, welche nach jeder Messung in der Stellung des Prisma gegen den Limbus vorgenommen wurden, um zufällige Fehler der Theilung und ähnliche Einflüsse zu eliminiren. Von diesen fünf Stellungen entspricht eine dem Minimum der Ablenkung, zwei aber den größten Ablenkungen, die sich noch zu beiden Seiten des Minimums beobachten ließen. Zwischen diesen drei Stellungen wurden noch zwei intermediäre gewählt. Für die beiden extremen Stellungen habe ich die Messung unzählige Male wiederholt, aber immer sehr widersprechende Angaben enthalten. Zuletzt kam ich auf den wahrscheinlichen Grund dieser Erscheinung. Ich hatte nämlich das Prisma so auf das Tischchen befestigt, daß beim Minimum der Ablenkung das Spectrum möglichst deutlich war und wollte nun das Prisma in dieser Lage befestigt lassen. Allein in den beiden extremen Stellungen gingen dann durch das Prisma nur mehr die Randstrahlen des aus dem Collimator tretenden Lichtes. Ich versah also nach der Kirchhoff'schen Methode die beiden Objective mit Deckel, die in der Mitte einen verticalen Spalt hatten und befestigte das Prisma so, daß das Spectrum möglichst gut war. Dann wurden die Deckel wieder fortgenommen und jetzt gaben die Messungen auch für die beiden extremen Fälle ziemlich übereinstimmende Resultate, so daß von da an in die nachfolgende Aufzählung nur drei Messungen nicht aufgenommen wurden, bei denen offenbare Fehler vorgefallen sind. In Betreff der drei anderen Stellungen sind sämmtliche angestellte Beobachtungen im nachfolgenden angeführt. In dieser Aufzählung sind für jede Beobachtung der Einfallswinkel und die beiden Ablenkungswinkel angegeben. Zur Seite stehen die daraus berechneten Größen des Winkels $\left(\frac{A}{2} - r\right)$ und des Brechungsquotienten. Bei diesen Beobachtungen konnten nur immer zwei gegenüberliegende Nonien abgelesen werden, da die andern zwei durch Fernrohr oder Collimator verdeckt waren.

In Betreff der Temperatur-Angaben wurde schon bei den Versuchen zur Bestimmung des brechenden Winkels das Nöthige gesagt.

22. Juni, 9 Uhr, 16°0 R.:

I.	62°21'18"67		
	54 29 3·96	+0°3'44"37	1·544176
	39·36	37·79	246
II.	62 26 36·37		
	54 29 12·80	+0 5 39·95	1·544189
	51·15	32·84	265

12 Uhr, 16°1 R.:

III.	62 27 37·87		
	54 29 13·71	+0 6 2·51	1·544190
	45·08	5 56·67	252
IV.	62 27 21·64		
	54 29 10·76	+0 5 57·08	1·544184
	53·12	49·17	268

6 Uhr. 16°2 R.:

V.	56°45'45"24		
	55 30 39·34	—2° 8'52"13	1·544189
	31 32·43	59·35	270
VI.	56 39 40·33		
	55 33 17·73	—2 11 26·35	1·544186
	55·10	31·45	245
VII.	68 47 5·38		
	55 33 24·54	+2 11 29·55	1·544192
	59·94	21·41	276
VIII.	68 51 31·46		
	55 34 42·31	+2 12 48·49	1·544184
	35 18·69	40·15	266

23. Juni, 11 Uhr, 15°9 R.:

I.	62 14 22·14		
	54 29 5·92	+0 1 10·54	1·544188
	51·15	1·40	277
II.	62 16 33·42		
	54 29 5·90	+0 1 58·97	1·544187
	44·27	51·90	262

4 Uhr, 16°2 R.:

III.	62 20 17·25		
	54 29 12·80	+0 3 20·27	1·544199
	44·27	14·49	261
IV.	62 15 0·00		
	54 29 11·81	+0 1 23·59	1·544200
	46·23	17.09	269

24. Juni, 9 Uhr, 16°0 R.:

I.	56 10 39·33		
	55 46 59·97	—2 23 47·97	1·544195
	47 43·24	53·57	261
II.	56 13 39·36		
	55 45 29·51	—2 22 30·86	1·544194
	46 13·83	36·64	261
III.	69 24 8.86		
	55 45 17·70	+2 22 13·02	1·544209
	42·28	7·29	369
IV.	69 22 34.92		
	55 44 35·34	+2 21 48·76	1·544183
	45 12·78	40·07	268

12 Uhr, 16°1 R.:

V.	62 2 16·23		
	54 29 7·81	—0 3 17·36	1·544189
	42·30	23·69	257

VI.	62°11'14"76		
	54 29 7·93	+0° 0' 1" 2	1·544196
	39·40	—0 0 4· 6	256
VII.	62 12 40·82		
	54 28 57·97	+0 0 34·69	1·544174
	29 35·34	27·78	249
VIII.	61 55 49·17		
	54 29 12·80	—0 5 40·91	1·544190
	29 46·23	47·03	255

5 Uhr, 16°2 R.:

IX.	61 58 20·08		
	54 29 7·71	—0 4 42·13	1·544185
	50·16	50·04	170
X.	62 2 2·92		
	54 29 14·76	—0 3 23·52	1·544204
	49·18	29·77	271

25. Juni, 11 Uhr, 15°9 R.:

I.	61 6 51·61		
	54 31 12·78	—0 24 5·03	1·544198
	48·18	11·28	266
II.	61 6 46·37		
	54 31 6·88	—0 24 5·92	1·544186
	47·20	13·00	263
III.	63 16 7·85		
	54 30 59·00	+0 23 34·92	1·544180
	31 32·44	28·47	249
IV.	63 18 43·72		
	54 31 8·91	+0 24 30·46	1·544181
	44·31	23·64	253

1 Uhr, 16°0 R.:

V.	70 16 25·56		
	56 3 15·69	+2 36 56·27	1·544194
	59·04	45·99	294
VI.	70 11 9·82		
	56 1 21·62	+2 35 29·01	1·544195
	1 54·07	21·42	269
VII.	55 43 56·08		
	56 1 9·90	—2 35 17·19	1·544200
	2 6·93	24·33	285
VIII.	55 34 33·94		
	56 6 18·67	—2 39 18·82	1·544183
	7 12·83	25·50	262

26. Juni, 11 Uhr, 16°1 R.:

I.	56°22'21"65		
	55 41 19·65	—2°18'48"39	1·544197
	42 5·87	54·53	269
II.	56 16 45·71		
	55 44 0·02	—2 21 11·48	1·544196
	45·25	17.40	266
III.	69 20 21·63		
	55 43 57·06	+2 21 9·29	1·544196
	44 40·33	20 59·26	294
IV.	69 14 59·01		
	55 42 14·79	+2 19 35·85	1·544201
	48·22	28·17	277

7. October, 10 Uhr, 16°2 R.:

I.	49 54 55·08		
	65 12 6·93	—5 14 36·71	1·544201
	16 24·64	44·06	298
II.	49 55 23·60		
	65 9 16·73	—5 14 22·79	1·544199
	13 25·60	29·97	293

8. October, 4 Uhr, 15°9 R.:

I.	80 0 34·42		
	61 13 5·85	+4 40 54·46	1·544193
	50·18	42·22	303
II.	79 55 6·89		
	61 9 21·65	+4 40 6·01	1·544196
	10 3·94	39 54·43	300
III.	79 49 39·84		
	61 5 44·26	+4 39 15·85	1·544212
	6 19·67	6·08	300

9. October, 10 Uhr, 16°1 R.:

I.	79 56 51·12		
	61 10 35·40	+4 40 20·91	1·544201
	11 14·73	9·99	299
II.	79 55 58·02		
	61 10 0·00	+4 40 12·79	1·544204
	39·34	1·94	302
III.	79 57 35·90		
	61 11 3·92	+4 40 28·11	1·544195
	43·25	17·26	294

10. October, 10 Uhr, 16°5 R.:

I.	78°39'52"63		
	60 19 15·75	+4°28'20"24	1·544216
	52·13	10·39	305
II.	79 34 29·02		
	60 55 19·67	+4 37 0·56	1·544201
	59·01	36 49·74	301

11. October, 9 Uhr, 15°7 R.:

I.	79 34 28·04		
	60 55 20·75	+4 36 59·67	1·544204
	56 1·97	48·60	203
II.	79 51 29·52		
	61 7 1·03	4 39 31·68	1·544215
	36·43	21·83	303

4 Uhr, 16°0 R.:

III.	79 51 25·59		
	61 6 56·11	+4 39 31·72	1·544211
	7 29·55	22·49	295
IV.	79 51 30·51		
	61 7 0·04	+4 39 32·28	1·544212
	34·47	22·80	298

12. October, 9 Uhr, 15°8 R.:

I.	79 51 28·54		
	61 7 2·01	+4 39 31·00	1·544220
	39·38	20·69	313
II.	80 27 30·99		
	61 32 2·01	+4 44 42·58	1·544214
	40·36	31·98	309

4 Uhr, 15°9 R.:

III.	50 25 46·71		
	63 1 3·92	—4 59 52·00	1·544205
	3 45·19	59·25	299
IV.	50 17 51·64		
	63 28 39·37	—5 3 38·46	1·544205
	31 47·26	46·22	306

13. October, 9 Uhr, 15°9 R.:

I.	50 17 47·21		
	63 28 56·09	—5 3 40·58	1·544205
	59·06	48·15	304
II.	50 14 40·33		
	43 40 22·62	—5 5 9·17	1·544196
	43 42·31	17·02	299

4 Uhr, 16°1 R.:

III.	50°14'38"37		
	63 40 23·57	—5° 5' 9"81	1·544196
	43 43·30	17·63	298
IV.	50 17 40·33		
	63 29 24·93	—5 3 43·97	1·544209
	32 4·96	50·57	295

14. October, 9 Uhr. 15°8 R.:

I.	50 17 41·31		
	63 29 20·67	—5 3 43·54	1·544206
	32 36·43	51·61	311
II.	50 15 25·57		
	63 37 53·07	—5 4 48·48	1·544208
	46 56·06	55·82	303

4 Uhr, 16°1 R.:

III.	50 15 26·06		
	63 37 55·03	—5 4 48·29	1·544214
	40 39·33	54·97	298
IV.	50 13 7·40		
	63 46 41·36	—5 5 54·08	1·544207
	49 59·02	6 1·79	307

17. October, 9 Uhr, 15°9 R.:

I.	79 22 42·78		
	60 47 31·51	+4 35 10·02	1·544219
	48 9·87	34 59·42	315
II.	79 37 7·38		
	60 57 10·86	+4 37 23·25	1·544210
	50·20	12·47	308

11 Uhr, 15°9 R.:

III.	79 37 5·91		
	60 57 10·76	+4 37 22·82	1·544212
	47·25	12·79	303
IV.	80 10 57·04		
	61 20 27·53	+4 42 21·68	1·544217
	21 7·85	10·53	317

4 Uhr, 15°9 R.:

V.	80 18 30·51		
	61 25 43·27	4 43 26·48	1·544216
	26 22·60	15·60	314.

In den vorstehenden Beobachtungen sind die Winkel $\left(\frac{A}{2}-r\right)$ bis auf Hunderttheile einer Secunde berechnet, um die Brechungsquotienten bis auf sechs Decimalstellen genau zu bekommen. Diese Genauigkeit ist aber vollkommen überflüssig, wenn wir Brechungsquotienten mit einander vergleichen, die zu verschiedenen Werthen von $\left(\frac{A}{2}-r\right)$ gehören. Die vorstehenden Beobachtungen zerfallen nämlich, wie schon gesagt in fünf Gruppen, innerhalb welcher kein Zusammenhang zwischen den Brechungsquotienten und den Winkeln $\left(\frac{A}{2}-r\right)$ zu entdecken ist, so daß wir für eine solche Gruppe annehmen können, das Mittel der Brechungsquotienten gehöre auch zum Mittel der Winkel $\left(\frac{A}{2}-r\right)$. Und zwar wollen wir, um für die ordentlichen und ausserordentlichen Brechungsquotienten keine verschiedenen Winkel $\left(\frac{A}{2}-r\right)$ zu erhalten, aus den Winkeln $\left(\frac{A}{2}-r\right)$ zweier zusammengehöriger Brechungsquotienten immer das Mittel nehmen. Hiernach haben wir also folgende fünf Gruppen von Beobachtungen:

I. Gruppe.

$\frac{A}{2}-r$		n'	t
+4°28'3	1.544216	1·544305	16°5 R.
35·1	219	315	15·9
36·9	204	303	15·7
36·9	201	301	16·5
37·3	212	303	15·9
37·3	210	308	15·9
39·2	212	300	15·9
39·4	220	313	15·8
39·4	215	303	15·7
39·5	211	295	16·0
39·6	212	298	16·0
40·0	196	300	15·9
40·1	204	302	16·1
40·2	201	299	16·1
40·4	195	294	16·1
40·8	193	303	15·9
42·3	217	317	15·9
43·4	216	314	15·9
44·6	214	309	15·8
+4°39'0	1·5442088	1·5443043	16°0

II. Gruppe.

+2°11'4	1·544192	1·544276	16°2
12·7	184	266	16·2
19·5	201	277	16·1
21·1	196	294	16·1
21·7	183	268	16·0
22·2	209	269	16·0
35·4	195	269	16·0
36·9	194	294	16·0
+2°22'6	1·5441942	1·5442766	16·1

III. Gruppe.

+0°24'5	1·544181	1·544253	15°9
23·5	180	249	15·9
5·0	190	252	16·1
5·9	185	269	16·1
5·7	190	255	16·1
5·6	189	265	16·0
3·7	176	246	16·0
3·6	199	261	16·2
1·9	187	262	15·9
1·3	200	269	16·2
1·1	188	277	15·9
0·5	174	249	16·1
—0° 0·1	196	255	16·1
3·3	189	257	16·1
3·4	204	271	16·2
4·8	185	170	16·2
24·1	198	266	15·9
24·2	186	263	15·9
+0° 1'2	1·5441887	1·5442605	16·1

IV. Gruppe.

—2° 8·9	1·544189	1·544270	16°2
1·5	186	245	16·2
18·9	197	269	16·1
17·2	196	266	16·1
22·8	194	261	16·0
23·8	195	261	16·0
35·3	200	285	16·0
25·4	183	262	16·0
—2°20·5	1·5441925	1·5442649	16·1

V. Gruppe.

—4°59'9	1·544205	1·544299	15°9
5 3·7	205	306	15·9
3·7	205	304	15·9
3·8	206	311	15·8
3·8	209	295	16·1
4·9	214	298	16·1
4·9	208	303	15·8
5·2	196	299	15·9
5·2	196	298	16·1
5·9	207	307	16·1
14·7	201	298	16·2
14·4	199	293	16·2
—5° 5'8	1·5442043	1·5443009	16·0.

Demzufolge haben wir also folgende fünf Normalbeobachtungen, deren Temperaturen wohl als gleich betrachtet werden können:

$\frac{A}{2}-r$		
+4°39'0	1·5442088	1·5443043
+2 22·6	1942	2766
+0 1·2	1887	2605
—2 20·5	1925	2649
—5 5·8	2043	3009.

Statt dieser Winkel $\left(\frac{A}{2}-r\right)$ wurden vorerst fünf andere gewählt, die gleichweit von einander abstehen, doch so nahe an den vorstehenden Werthen liegen, dass die zugehörigen Brechungsquotienten durch einfache Proportionalität gefunden werden können. Man erhält so

$\frac{A}{2}-r$		
+4°44'2	1·5442094	1·5443054
+2 22·7	1942	2766
+0 1·2	1887	2605
—2 20·3	1925	2649
—4 41·8	2026	2957.

Man kann jetzt leicht die Brechungsquotienten als eine Reihe berechnen, die nach steigenden Potenzen des Winkels $\left(\frac{A}{2}-r\right)$ fortschreitet. Am leichtesten stellt sich die Rechnung, wenn man statt des Winkels $\frac{A}{2}-r$ einen Winkel x wählt, für welchen

$$x = \frac{\left(\frac{A}{2} - r\right) - 1'2}{141'5}$$

ist, indem die Werthe von x für die letzten fünf Beobachtungen alsdann $+2$, $+1$, 0, -1, -2 werden. So findet man für den außerordentlichen Brechungsquotienten den Ausdruck

$$n' = 1\cdot5442605 + \frac{1}{24.10^7}\left[1678\,x + 2479\,x^2 - 274\,x^3 - 19\,x^4\right].$$

Den Werth von x, für welchen der ausserordentliche Brechungsquotient ein Minimum wird, erhält man nach den Regeln der Differentialrechnung aus der Gleichung

$$0 = 1678 + 4958\,x - 822\,x^2 - 76\,x^3,$$

welche $x = -0\cdot321$ gibt. Diesem Werth von x entspricht ein Winkel $\frac{A}{2} - r = -141'5\,x + 1'2 = -44'2$. Da aber der Brechungsquotient nur dann ein Minimum wird, wenn die Wellennormale mit der optischen Axe zusammenfällt, so sollte der letzte Winkel die Lage der optischen Axe in dem benützten Quarzprisma bestimmen.

Berechnet man auf dieselbe Weise die ordentlichen Brechungsquotienten, so erhält man für dieselben die Formel

$$n = 1\cdot544187 + \frac{1}{12.10^7}\left[68\,x + 571\,x^2 + 34x^2 - 13x^4\right]$$

welche ihr Minimum für $x = -0\cdot06$ erreicht. In diesem Falle erhält man also für die Lage der optischen Axe $\frac{A}{2} - r = -141'5\,x + 1'2$ $= -7'3$, welcher Werth allerdings ziemlich von dem früher gefundenen abweicht. Dies ist freilich sehr begreiflich, da die Brechungsquotienten in der Nähe des Minimums sich sehr wenig ändern, die Brechungsquotienten für entferntere Lagen sich aber nicht mehr so gut bestimmen lassen. Unter diesen Umständen bleibt wohl nichts anderes übrig, als aus den beiden Winkeln $-44'2$ und $-7'3$ das Mittel zu nehmen, so daß der Winkel $\frac{A}{2} - r$ für die Richtung der optischen Axe gleich $-25'8$ wird.

Für den Winkel ρ, welchen die Wellennormale des durchgehenden Lichtes mit der optischen Axe bildet, hat man jetzt

$$\rho = \left(\frac{A}{2} - r\right) - (-25'8) = \left(\frac{A}{2} - r\right) + 25'8$$

und die fünf Normalbeobachtungen geben nach der Größe des Winkels ρ geordnet

ρ	n	n'
0°27'0	1·5441887	1·5442605
1 54·7	1925	2649
2 48·4	1942	2766
4 40·0	2043	3043
5 4·8	2088	3009

das Zeichen von ρ ist hiebei gleichgiltig, da der Brechungsquotient in beiden Fällen denselben Werth haben soll.

Zur Vergleichung dieser Zahlen mit der Theorie muß man die Größen ω, ε und χ kennen; von diesen wurden die Größen ω und χ aus der ersten Beobachtung berechnet, für die Größe ε aber, welche für Beobachtungen nahe an der Axe von geringem Einflusse ist, wurden die Beobachtungen Rudberg's insoferne benützt, als nach denselben für die Fraunhofer'sche Linie D $\varepsilon - \omega = 0·00910$ ist. Die Berechnung von ω und χ geschah aber auf folgende Weise. Nach Gleichung 9) hat man

$$(10) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n'^2}\right) &= \frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{\varepsilon^2}\right) \sin \rho^2 \\ \frac{1}{4}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2}\right)^2 &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{\varepsilon^2}\right)^2 \sin \rho^4 + \frac{\cos \rho^4}{\chi^4} \end{aligned} \right.$$

setzt man nun näherungsweise für $\rho = 0°27'0$, $\omega = \frac{n + n'}{2} = 1·5442246$, so wird $\varepsilon = 1·5442246 + 0·0091 = 1·5533246$ und

$$\text{somit } \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon^2} - \frac{1}{\omega^2}\right) \sin \rho^2 = \frac{0·15}{10^6}$$

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\varepsilon^2} - \frac{1}{\omega^2}\right)^2 \sin \rho^4 = \frac{0·02317}{10^{12}}.$$

Dem zufolge geben die zwei Gleichungen 10)

$$\omega = 1·5442243$$

$$\chi = 226·495$$

wozu dann noch $\varepsilon = 1·5433243$

kommt. Diesen Größen entsprechen die zur Rechnung nöthigen Daten

$$\frac{1}{\omega^2} = 0\cdot41935249$$

$$\log \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{\varepsilon^2}\right) = 0\cdot38908365-3$$

$$\log \frac{1}{\chi^4} = 0\cdot57976565-10,$$

welche für die früheren Winkel ρ nachstehende Werthe geben.

Ordentlicher Brechungsquotient:

ρ	Rechnung	Beob.-Rechn.
0°27'0	1·5441887	
1 54·7	1936	—0·0000011
2 48·4	1977	—0·0000035
4 40·0	2075	—0·0000032
5 4·8	2094	—0·0000006.

Aussserordentlicher Brechungsquotient:

ρ	Rechnung	Beob.-Rechn.
0°27'0	1·5442605	
1 54·7	2656	—0·0000007
2 48·4	2726	+0·0000040
4 40·0	3007	+0·0000002
5 4·8	3100	—0·0000057.

Die Übereinstimmung zwischen Beobachtung und Theorie ist wohl im Ganzen ziemlich befriedigend. Es wäre leicht, die Fehlersummen noch kleiner zu machen, indem man die Fehler auf alle Beobachtungen vertheilt, ich habe aber vorgezogen, die Rechnung bloß auf die erste Beobachtung zu basiren, da dieselbe bei weitem das größte Vertrauen verdient. Unwiderleglich ist jedenfalls bewiesen, daß es in der Nähe der Axe beim Quarze keine Welle mit constanter Geschwindigkeit mehr gibt, auch die außerordentliche Welle ändert sich nach einem anderen Gesetze als wie bei den gewöhnlichen einaxigen Körpern. Es ergibt sich dies aus der nachfolgenden Tabelle, welche die berechneten Brechungsquotienten von fünf zu fünf Grade enthält und zwar auch für den Fall, daß $\chi = \infty$ gesetzt wird, wodurch das charakteristische der Circularpolarisation verschwindet.

ρ	n	n'	n' für $\chi = \infty$
0°	1·5441884	1·5442602	1·5442243
5	2093	43081	42929
10	2200	45009	44965
15	2225	48309	48290
20	2234	52816	52806
25	2242	58382	58380.

Für $\chi = \infty$ müßte natürlich n immer gleich $\omega = 1{\cdot}5442243$ sein. Man sieht aus dieser Tabelle ferner, daß bei einer Neigung von 25° zur optischen Axe die Wirkung der Circularpolarisation auch schon bis in die siebente Decimalstelle der Brechungsquotienten verschwindet.

Die Differenz der Brechungsquotienten in der Richtung der optischen Axe beträgt nach den vorhergehenden Zahlen

$$n_0' - n_0 = 0{\cdot}0000718.$$

Man kann diese Größe auch aus dem Drehungswinkel δ bestimmen, welchen die Polarisationsebene eines Lichtstrahles erfährt, der parallel der Axe durch eine Quarzplatte von bekannter Dicke d hindurchgeht. Man hat nämlich für den Drehungswinkel

$$\delta = \frac{d}{\lambda}(n_0' - n_0)\,180^0,$$

wo λ die Wellenlänge des Lichtes in der Luft bedeutet. Für $d = 1$ Millim. und für die Fraunhofer'sche Linie D hat man nach Stefan $\delta = 21{^\circ}79$, so daß, da nach Fraunhofer für die genannte Linie $\lambda = 0{\cdot}0005888$ Millim. ist, die letzte Gleichung

$$n_0' - n_0 = 0{\cdot}0000713$$

gibt. Broch gibt für denselben Winkel 21°67, woraus

$$n_0' - n_0 = 0{\cdot}0000709$$

folgt, was mit meinen Beobachtungen weniger gut stimmt, als der von Stefan gefundene Werth.