©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Über die Dispersion der optischen Axen bei rhombischen Krystallen.

Von L. Ditscheiner.

Ein unmittelbarer Zusammenhang zwischen der Größe des Winkels der optischen Axen für eine bestimmte Farbe und der ihr entsprechenden Wellenlänge bei rhombischen Krystallen ist bis nun nicht in Betracht gezogen worden. Der Grund hiefür mag wohl darin liegen, daß eben ein solcher gesetzmäßiger Zusammenhang an den aus den drei Hauptbrechungsquotienten gerechneten Axenwinkel an den wenigen genauer untersuchten und einem Vergleiche zu Grunde zu legenden Substanzen sich nicht ergibt. So ist an den von Rudberg aus seinen Brechungsquotienten berechneten Axenwinkel für Arragonit und Topas nicht einmal ein continuirliches Größer- und Kleinerwerden derselben bei einem Abnehmen der entsprechenden Wellenlänge zu bemerken. Im Gegentheile ist das Spiel dieser Winkel ein so unregelmäßiges, daß man etwa vom rothen Ende des Spectrums gegen das violette fortschreitend anfangs ein Wachsen dann wieder ein Abnehmen und abermals ein Wachsen der optischen Axenwinkel u. s. w. oder auch umgekehrt findet. Eine solche Unregelmäßigkeit kann nun in der Natur nicht gut angenommen werden. Aber auch die directen Beobachtungen an den scheinbaren Axenwinkel lassen eine solche Veränderlichkeit des wahren Axenwinkels nicht erwarten, denn sie müßte sich auch an ihnen zeigen. Wenn man nämlich nach der von Kirchhoff (Pogg. Ann. 108, 167) angegebenen Methode das Axenbild durch das Spectrum, sei es nun unter Anwendung einer Arragonit- oder Topasplatte, oder irgend einer andern, wandern läßt, so bemerkt man ein ganz gleichmäßiges Fortschreiten desselben in stets gleicher Richtung bei stets im gleichen Sinne eingeleiteten Drehen der Krystallplatte und keine wiederholte oder nur einfache Umkehr desselben, wie dies nothwendig der Fall sein müßte, wären die oben angeführten Axenwinkel der Natur entsprechend.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Besser als bei den Rudberg'schen Zahlen stellt sich das Wachsen der optischen Axenwinkel beim Fortschreiten von Roth gegen Violett an den von Heusser (Pogg. Ann. 87, 454.) für den Schwerspath gegebenen Daten. Aber auch hier zeigt sich dasselbe keineswegs so gesetzmäßig, daß auf einen einfachen Zusammenhang geschlossen werden könnte. So ist der Unterschied in den optischen Axenwinkel für die Fraunhofer'schen Linien *B* und *C* 0° 17′ 46″, während er für jene *C* und *D* nur 4′ 22″, für *F* und *G* nur 24′ 9″ beträgt.

Wenn man bedenkt, daß die vielleicht allerdings nur kleinen aber jedenfalls schon in der fünften, vielleicht schon in der vierten Decimale auftretenden Fehler in den angegebenen Hauptbrechungsquotienten die Ursache dieses Schwankens der optischen Axenwinkel ist, wenn man ferner bedenkt, daß diese Hauptbrechungsquotienten in erster Annäherung dem Cauchy'schen Dispersionsgesetz folgen müssen und auch thatsächlich folgen, so läßt sich erwarten, daß durch Anwendung eben solcher nach der Cauchy'schen Formel corrigirten Brechungsquotienten Axenwinkel erhalten werden, welche ein viel klareres Bild über die Abhängigkeit des optischen Axenwinkels von der Wellenlänge geben als die aus den unmittelbaren Beobachtungswerthen erhaltenen.

Nach der Cauchy'schen Formel lassen sich die Hauptbrechungsquotienten in folgender Weise darstellen.

$$\mu_\alpha = a_\alpha + b_\alpha \frac{1}{\lambda^2}$$

$$\mu_\beta = a_\beta + b_\beta \frac{1}{\lambda^2}$$

$$\mu_\gamma = a_\gamma + b_\gamma \frac{1}{\lambda^2}.$$

Bezeichnet man mit φ den wahren, mit φ_1 aber den scheinbaren optischen Axenwinkel, so hat man bekanntlich:

$$\cos\frac{\varphi}{2} = \frac{\mu_\alpha}{\mu_\beta}\sqrt{\frac{\mu_\beta^2 - \mu_\gamma^2}{\mu_\alpha^2 - \mu_\gamma^2}}$$

$$\cos\frac{\varphi_1}{2} = \mu_\alpha\sqrt{\frac{\mu_\beta^2 - \mu_\gamma^2}{\mu_\alpha^2 - \mu_\gamma^2}},$$

wobei voraus gesetzt ist, daß $\mu_\alpha > \mu_\beta > \mu_\gamma$ ist.

Wenn man nun in diese letzteren Formeln die obigen Werthe für μ_α, μ_β und μ_γ substituirt und bei der weiteren Entwicklung berücksichtigt, daß die Glieder, welche höhere als die ersten Potenzen von $\frac{1}{\lambda^2}$ enthalten, nur sehr klein, also zu vernachlässigen sind, namentlich bei denjenigen unter dem Wurzelzeichen, da die Coëfficienten dieser Potenzen nur verhältnißmäßig kleine Differenzen sind, so erhält man schließlich Werthe von der Form:

$$\cos\frac{\varphi}{2} = M + N.\frac{1}{\lambda^2}$$

$$\cos\frac{\varphi_1}{2} = M_1 + N_1.\frac{1}{\lambda^2}$$

oder auch:

$$\frac{\varphi}{2} = A + B.\frac{1}{\lambda^2}$$

$$\frac{\varphi_1}{2} = A_1 + B_1.\frac{1}{\lambda^2}.$$

Es läßt sich also, in erster Annäherung wenigstens und wie zu erwarten auch in den meisten Fällen, der wahre wie der scheinbare optische Axenwinkel durch eine ähnliche Dispersionsformel darstellen, wie der Brechungsquotient und der Winkel, um welchen die Polarisationsebene bei gewissen Substanzen gedreht wird. Es wird diese Dispersionsformel namentlich bestätigt durch die besten, weil directen Beobachtungen Kirchhoff's (a. a. O.) am Arragonite.

Im Folgenden sind diejenigen Daten zusammengestellt, aus welchen hervorgehen soll, daß dieses Dispersionsgesetz bei den genauer untersuchten Krystallen Anwendung finden kann. Ich bemerke hier nur, daß die Dispersionsformel für die Hauptbrechungsquotienten bis auf die siebente Decimale gerechnet sind und in den mit ihnen berechneten Werthen derselben noch die sechste Decimale beibehalten wurde. Es mußte in diesem letzteren Falle bis zur sechsten Stelle gegangen werden, weil die durch Correction der fünften Decimale eintretenden Fehler in den berechneten Axenwinkel sich schon so merklich äußern, daß sie das Dispersionsgesetz beinahe völlig verdecken. Ja in vielen Fällen bringt schon eine Correction an der sechsten nach der siebenten Decimale Fehler in die Axenwinkel, welche eine halbe Minute betragen, also schon einen merklich ungün-

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

stigen Einfluß nehmen können, wenn gleichzeitig die Dispersion eine geringe, wie dies ja auch meistens in der Natur der Fall ist.

Für den Schwerspath fand Heusser (Pogg. Ann. 87) folgende Werthe:

	μ_α	μ_β	μ_γ	φ
B	1·64415	1·63370	1·63258	36°25′29″
C	1·64521	1·63476	1·63362	36 43 15
D	1·64797	1·63745	1·63630	36 47 37
E	1·65167	1·64093	1·63972	37 19 11
F	1·65484	1·64393	1·64266	37 51 36
G	1·66060	1·64960	1·64829	38 15 47
H	1·66560	1·65436	1·65301	38 25 44

Die aus allen diesen Werthen gerechneten Dispersionsformeln sind:

$$\mu_\alpha = 1\cdot6333849 + 5087\cdot07\,\frac{1}{\lambda^2}$$

$$\mu_\beta = 1\cdot6233030 + 4910\cdot33\,\frac{1}{\lambda^2}\ ^{1)}$$

$$\mu_\gamma = 1\cdot6222990 + 4853\cdot72\,\frac{1}{\lambda^2}$$

und aus ihnen ergibt sich:

	μ_α	μ_β	μ_γ	$\frac{\varphi}{2}$
B	1·644122	1·633667	1·632543	18°14′37″
C	1·645166	1·634675	1·633540	18 17 51
D	1·647988	1·637399	1·636233	18 26 59
E	1·651644	1·640928	1·639721	18 38 47
F	1·654846	1·644018	1·642775	18 48 46
G	1·660681	1·649651	1·648343	19 6 2
H	1·665593	1·654392	1·653030	19 19 31

Mit Zugrundelegung aller dieser Werthe von $\frac{\varphi}{2}$ erhält man folgende Formel:

$$\frac{\varphi}{2} = 17^\circ\!\cdot\!7019 + 259702\cdot0\,\frac{1}{\lambda^2}.$$

---

[1]) Bei diesen Dispersionsformeln sind folgende Werthe für die Wellenlänge λ zu Grunde gelegt: *B* 688·33, *C* 657·11, *D* 590·21, *E* 527·83, *F* 486·87, *G* 431·70 und *H* 397·42 in Millionstel des Millimeters (Sitzb 52. Bd.).

Aus ihr berechnen sich folgende Werthe:

	$\frac{\varphi}{2}$
B	18° 15′ 7″
C	18 18 13
D	18 26 51
E	18 38 35
F	18 47 52
G	19 5 44
H	19 20 44

welche genügend mit den aus dem corrigirten Brechungsquotienten gerechneten Werthen übereinstimmen. Die auftretenden Differenzen sind nicht sehr groß und finden ihre Erklärung wohl zum größten Theile in den den Brechungsquotienten durch Correction der sechsten Decimale noch anhaftenden Fehlern.

Für den Topas gibt Rudberg folgende Werthe:

	μ_α	μ_β	μ_γ	$\frac{\varphi}{2}$
B	1·61791	1·61049	1·60840	56° 7′ 20″
C	1·61880	1·61144	1·60935	56 18 52
D	1·62109	1·61375	1·61161	56 58 44
E	1·62408	1·61668	1·61452	56 58 28
F	1·62652	1·61914	1·61701	56 42 10
G	1·63123	1·62365	1·62154	55 50 40
H	1·63506	1·62745	1·62539	55 11 0

Ihnen entsprechen folgende Dispersionsformeln:

$$\mu_\alpha = 1\cdot6092748 + 4095\cdot397\,\frac{1}{\lambda^2}$$

$$\mu_\beta = 1\cdot6019170 + 4107\cdot262\,\frac{1}{\lambda^2}$$

$$\mu_\gamma = 1\cdot5996771 + 4107\cdot075\,\frac{1}{\lambda^2},$$

aus welchen sich ergibt:

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

	μ_α	μ_β	μ_γ	$\frac{\varphi}{2}$
B	1·617919	1·610586	1·608346	60°57′58″
C	1·618759	1·611429	1·609189	60 57 30
D	1·621031	1·613708	1·611467	60 56 28
E	1·623975	1·616659	1·614419	60 56 9
F	1·626552	1·619244	1·617003	60 55 0
G	1·631250	1·623956	1·621715	60 53 38
H	1·635204	1·627922	1·625681	60 52 27

Aus den beiden Grenzwerthen von $\frac{\varphi}{2}$ für die Fraunhoferschen Linien *B* und *H* ist die folgende Dispersionsformel gerechnet:

$$\varphi = 61^\circ 00791 - 21123 \cdot 6 \frac{1}{\lambda^2},$$

welche, in genügender Übereinstimmung mit obigen Werthen, gibt:

	$\frac{\varphi}{2}$
C	60° 57′ 22″
D	60 56 50
E	60 55 55
F	60 55 8
G	60 53 40

Für den Arragonit hat man nach Rudberg's Messungen:

	μ_α	μ_β	μ_γ	φ
B	1·68061	1·67631	1·52749	17°58′22″
C	1·68203	1·67779	1·52820	17 47 58
D	1·68589	1·68157	1·53013	17 50 26
E	1·69084	1·68634	1·53264	18 3 14
F	1·69515	1·69053	1·53479	18 9 20
G	1·70318	1·69836	1·53882	18 17 24
H	1·71011	1·70509	1·54226	18 26 52

Diesen Angaben entsprechen folgende Dispersionsformeln:

$$\mu_\alpha = 1 \cdot 6658778 + 6964 \cdot 481 . \frac{1}{\lambda^2}$$

$$\mu_\beta = 1 \cdot 6617620 + 6852 \cdot 050 . \frac{1}{\lambda^2}$$

$$\mu_\gamma = 1 \cdot 5202397 + 3456 \cdot 855 . \frac{1}{\lambda^2} .$$

Mit Zugrundelegung dieser Dispersionsformel erhält man folgende Werthe:

	μ_α	μ_β	μ_γ	$\frac{\varphi}{2}$
B	1·680577	1·676225	1·527536	9° 3′ 21″
C	1·682007	1·677631	1·528246	9 3 18
D	1·685871	1·681433	1·530163	9 3 19
E	1·690876	1·686357	1·532648	9 3 17
F	1·695259	1·690669	1·534823	9 3 18
G	1·703248	1·698530	1·538789	3 3 20
H	1·709973	1·705146	1·542127	9 3 21

Die Dispersionsformel für die optischen Axenwinkel wäre somit:

$$\varphi = 9^\circ \; 3' \; 20'' .$$

Es würde sich sonach ergeben, daß beim Arragonit gar keine Dispersion der optischen Axen anzunehmen ist, da die geringen Differenzen in den Axenwinkel gegenüber den Fehlern der zur Berechnung verwendeten Daten verschwinden. Das ist nun, wie andere Beobachtungen Heusser's (Pogg. Ann. 87. 454.) und Kirchhoff's (a. a. O.) lehren, keineswegs der Fall. Da nicht gut anzunehmen ist, daß die von Rudberg einerseits, Kirchhoff und Heusser andererseits untersuchten Arragonite solche Verschiedenheiten in ihrem optischen Verhalten zeigen, so liegt aller Wahrscheinlichkeit der Grund des fehlerhaften Rechnungsresultates in den auf dasselbe großen Einfluß nehmenden, vielleicht nur geringen Fehlern der Rudberg-schen Hauptbrechungsquotienten. Keineswegs widerspricht dieses Resultat jedoch dem aufgestellten Dispersionsgesetz.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Glücklicherweise sind wir jedoch durch die directen Beobachtungen von Kirchhoff über den scheinbaren Axenwinkel in der Lage, auch für den Arragonit die Stichhaltigkeit der Dispersionsformel, fast in noch schärferer Weise, darlegen zu können, als dies beim Schwerspath und Topas der Fall war.

Für die eine Seite der von Kirchhoff verwendeten Arragonitplatte gibt derselbe folgende Werthe für den scheinbaren und wahren optischen Axenwinkel

	$\frac{\varphi_1}{2}$	$\frac{\varphi}{2}$
B	15°17′55″	9° 2′42″
C	15 20 5	9 3 28
D	15 25 50	9 5 34
E	15 33 25	9 8 23
F	15 40 30	9 11 7
G	15 53 10	9 15 45
H	16 4 45	9 20 10

Allerdings ist auch hier bei Berechnung des wahren Axenwinkels $\frac{\varphi}{2}$ der Rudberg'sche Brechungsquotient μ_β in Anwendung gebracht worden, aber es ist hier ersichtlich der in ihm etwa liegende Fehler von weit geringerem Einfluß als dies bei der Berechnung des Axenwinkels aus allen drei Hauptbrechungsquotienten der Fall ist.

Aus diesen Zahlen ergeben sich folgende Dispersionsformeln:

$$\frac{\varphi_1}{2} = 14^\circ 90389 + 184019 \cdot 5 \frac{1}{\lambda^2}$$

$$\frac{\varphi}{2} = 8^\circ 89476 + 69228 \cdot 50 \frac{1}{\lambda^2}.$$

Die folgenden mit Hilfe dieser Dispersionsformeln gerechneten Winkel ergeben auch hier die Übereinstimmung zwischen Beobachtung und Rechnung.

	$\frac{\varphi_1}{2}$	$\frac{\varphi}{2}$
B	15°17′33″	9° 2′27″
C	15 19 48	9 3 16
D	15 25 56	9 5 36
E	15 33 52	9 8 35
F	15 40 49	9 11 12
G	15 53 29	9 15 59
H	16 5 20	9 19 59

Eine eben solche Übereinstimmung ergibt sich für die zweite Seite der Platte. Für diese gibt Kirchhoff folgende Zahlen:

	$\frac{\varphi_1}{2}$	$\frac{\varphi}{2}$
B	15°18′50″	9° 2′41″
C	15 21 15	9 3 35
D	15 27 10	9 5 36
E	15 34 45	9 8 28
F	15 41 30	9 11 5
G	15 54 25	9 15 54
H	16 7 0	9 20 52

Wenn man mit Zugrundelegung aller Werthe von $\frac{\varphi_1}{2}$ und $\frac{\varphi}{2}$, mit Ausnahme jener für *H*, denen höchst wahrscheinlich, wie Kirchhoff selbst angibt, ein etwas größerer Beobachtungsfehler anhaftet, die Dispersionsformeln rechnet, so erhält man:

$$\frac{\varphi_1}{2} = 14^\circ 92132 + 183760 \cdot 2 \frac{1}{\lambda^2}$$

$$\frac{\varphi}{2} = 8^\circ 89985 + 67881 \cdot 02 \frac{1}{\lambda^2}$$

und aus ihnen:

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

	$\frac{\varphi_1}{2}$	$\frac{\varphi}{2}$
B	15° 18′ 33″	9° 2′ 35″
C	15 20 49	9 3 25
D	15 26 55	9 5 47
E	15 34 51	9 8 37
F	15 41 47	9 11 10
G	15 54 26	9 15 51
H	16 5 5	9 19 47.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1869

Band/Volume: 60_2

Autor(en)/Author(s): Ditscheiner Leander

Artikel/Article: Über die Dispersion der optischen Axen bei rhombischen Krystallen. 795-804