Über einige zur Theorie der bestimmten Integrale gehörige Formeln und Methoden.

Von dem w. M. **Dr. Anton Winckler.**

Die Gegenstände, womit die nachstehenden Betrachtungen sich beschäftigen, gehören zumeist der Theorie der bestimmten Integrale an und lassen sich in Kürze wie folgt bezeichnen.

Zuerst werden auf elementare Art allgemeine Relationen hergeleitet, vermittelst welcher die Werthe einer großen Anzahl bestimmter Integrale mit Leichtigkeit gefunden werden können und welche sich jenen anschließen, die ich in einem 1856 erschienenen Aufsatz: „Neue Theoreme zur Lehre von den bestimmten Integralen" (Sitzungsberichte Bd. XXI, S. 389) angegeben habe.

Hierauf folgt die strenge Begründung des bekannten, in manchen Fällen nützlichen Satzes, wonach das bestimmte Integral des Productes einer beliebigen und einer zwischen den Grenzen der Integration entweder nur wachsenden oder nur abnehmenden Function auf das Integral der erstern zurückgeführt werden kann, dessen eine Grenze ein nicht näher bekannter Mittelwerth der beiden gegebenen Grenzen ist. Wie dieser Werth unter gewissen Voraussetzungen schärfer bestimmt werden könne, ist der Gegenstand einer weitern Auseinandersetzung. Endlich werden mit Hilfe des Satzes über die Umkehrung der Integrationsfolge doppelter Integrale mit constanten Grenzen, dann unter Anwendung des sogenannten discontinuirlichen Factors, sowie auch aus einer Formel, welche den Rest der n ersten Glieder der Maclaurin'schen Reihe durch ein $n$faches Integral darstellt, mehrere, zum Theil unstetige Quadraturen dem Werthe nach ermittelt.

Die meines Wissens bereits bekannten Resultate werde ich in jedem einzelnen Falle als solche bezeichnen, wo immer von ihnen die Rede sein wird.

1.

Zu allgemeinen Relationen zwischen bestimmten Integralen führen in manchen Fällen Gleichungen zwischen Functionen mehrerer Veränderlichen und ihren Differentialquotienten, wenn diese Functionen durch gewisse Eigenschaften definirt und jene Gleichungen von der Beschaffenheit sind, daß ihre einzelnen Glieder nach einer oder mehreren der unabhängigen Veränderlichen unbestimmt integrirt werden können. Die zwischen constanten Grenzen auf alle Variabeln sich erstreckende Integration der Gleichung liefert dann eine solche Relation.

Um zunächst einen sehr einfachen Fall dieser Art zu betrachten, denke man sich, es sei $F(u)$ eine für alle hier in Betracht kommenden Werthe von u endlich und stetig bleibende Function, auch nehme man an, es sei u eine gegebene Function zweier von einander unabhängiger Veränderlichen x und y. Man hat dann die beiden Gleichungen:

$$\frac{dF(u)}{dx} = F'(u)\,\frac{du}{dx}, \qquad \frac{dF(u)}{dy} = F'(u)\,.\,\frac{du}{dy}$$

aus welchen durch Elimination von $F'(u)$ sich ergibt:

$$\frac{dF(u)}{dy}\cdot\frac{du}{dx} = \frac{dF(u)}{dx}\cdot\frac{du}{dy} \tag{I}$$

und von dieser Gleichung wird zunächst ausgegangen werden. Offenbar läßt sich auf beiden Seiten Eine Integration und zwar jedesmal beim ersten Factor unmittelbar vollziehen, wenn u so beschaffen ist, daß der zweite Factor linker Hand nur x und rechter Hand nur y enthält.

Wird

$$u = \int_{x_0}^{x}\frac{dx}{X} + \int_{y}^{y}\frac{dy}{Y}$$

gesetzt, wobei x_0, y_0, im Allgemeinen beliebige Constanten, so beschaffen sein müssen, daß in gegebenen Fällen die Integrale endliche Werthe darstellen, so gelangt man zu der Gleichung:

$$\int_\alpha^\beta \frac{dx}{X}\left\{F\left(\int_{x_0}^x \frac{dx}{X}+\int_{y_0}^b \frac{dy}{Y}\right)-F\left(\int_{x_0}^x \frac{dx}{X}+\int_{y_0}^a \frac{dy}{Y}\right)\right\}$$

$$=\int_a^b \frac{dy}{Y}\left\{F\left(\int_{x_0}^\beta \frac{dx}{X}+\int_{y_0}^y \frac{dy}{Y}\right)-F\left(\int_{x_0}^\alpha \frac{dx}{X}+\int_{y_0}^y \frac{dy}{Y}\right)\right\}.$$

Ebenso allgemeine Gleichungen ergeben sich, wenn für u nach einander die Ausdrücke,

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{Y}\int_{y_0}^y \frac{dy}{Y}, \qquad X^Y,\ Y^X, \qquad e^{\int_{x_0}^x \frac{dx}{X}+\int_{y_0}^y \frac{dy}{Y}}$$

gesetzt werden.

Wenn specieller für u einer der Ausdrücke:

$$x+y, \qquad xy, \qquad x^y$$

angenommen wird, so folgt aus der Gleichung (I):

$$\frac{dF(x+y)}{dy}=\frac{dF(x+y)}{dx}$$

$$\frac{1}{x}\,\frac{dF(xy)}{dy}=\frac{1}{y}\cdot\frac{dF(xy)}{dx}$$

$$\frac{1}{x\log x}\cdot\frac{dF(x^y)}{dy}=\frac{1}{y}\cdot\frac{dF(x^y)}{dx}$$

Diese Gleichungen nun gehen, nach y zwischen den Grenzen a und b, und nach x zwischen α und β integrirt, über in die folgenden:

$$\int_\alpha^\beta dx[F(x+b)-F(x+a)]=\int_a^b dx[F(x+\beta)-F(x+\alpha)] \ldots (1)$$

$$\int_\alpha^\beta \frac{dx}{x}[F(bx)-F(ax)]=\int_a^b \frac{dx}{x}[F(\beta x)-F(\alpha x)] \qquad (2)$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{x \log x} [F(x^b) - F(x^a)] = \int_{a}^{b} \frac{dx}{x} [F(\beta^x) - F(\alpha^x)] \quad .(3)$$

wobei rechter Hand die Veränderliche y mit x vertauscht worden ist.

Wenn in der zweiten dieser Gleichungen $F(\beta x)$ und $F(\alpha x)$ für $\beta = \infty$, $\alpha = 0$ und in der dritten $F(\beta^x)$ und $F(\alpha^x)$ für $\beta = 1$, $\alpha = 0$ endliche und von x unabhängige Werthe erhalten, auch a und b positiv und von Null verschieden sind, so lassen sich jene Gleichungen durch die folgenden:

$$\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{x} [F(bx) - F(ax)] = [F(+\infty) - F(0)] \log \frac{b}{a}$$

$$\int_{0}^{1} \frac{dx}{x \log x} [F(x^b) - F(x^a)] = [F(+1) - F(0)] \log \frac{b}{a}$$

ersetzen.

2.

Um einige Anwendungen zu zeigen, sei in der Gleichung (1) des vorigen Art.:

$$F(u) = \log \Gamma(u)$$

und $\alpha = 0$, $\beta = 1$. Man findet dann:

$$\int_{0}^{1} \log \frac{\Gamma(x+b)}{\Gamma(x+a)} dx = \int_{a}^{b} \log \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x)} dx$$

oder, da $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ und

$$\int_{a}^{b} \log x dx = b \log b - a \log a - (b - a)$$

so ergibt sich das Resultat:

$$\int_{0}^{1} \log \frac{\Gamma(x+b)}{\Gamma(x+a)} dx = b \log b - a \log a - (b - a)$$

welches, weniger einfach, auch auf anderm Wege gefunden werden kann. Gelegentlich sei bemerkt, daß man mittelst desselben sehr leicht zu anderen bekannten Resultaten gelangt. Für $a=\frac{1}{2}$, $b=0$ folgt nämlich:

$$\int_0^1 \log \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+\frac{1}{2})}\, dx = \frac{1}{2}\log 2 + \frac{1}{2}$$

Da aber, wie bekannt:

$$\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+\frac{1}{2})} = \frac{2^{2x-1}}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\Gamma(x)^2}{\Gamma(2x)}$$

so erhält die vorige Gleichung die Form:

$$\int_0^1 \log \frac{\Gamma(x)}{\sqrt{\Gamma(2x)}}\, dx = \frac{1}{4}(1+\log 2\pi)$$

oder auch

$$\int_0^1 \log\Gamma(x)\, dx - \frac{1}{2}\int_0^1 \log\Gamma(2x)\, dx = \frac{1}{4}(1+\log 2\pi)$$

Nun ist

$$\int_0^1 \log\Gamma(2x)\, dx = \frac{1}{2}\int_0^2 \log\Gamma(x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \log\Gamma(x)\, dx + \frac{1}{2}\int_0^1 \log\Gamma(x+1)\, dx$$

daher, wie bekannt:

$$\int_0^1 \log\Gamma(x)\, dx = \frac{1}{2}\log 2\pi$$

Auch ergibt sich:

$$\int_0^1 \log\Gamma(2x)\,dx = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log 2\pi$$

Wenn man in der frühern Gleichung $a = 0$ setzt. so findet man sofort auch noch die folgende, ebenfalls bekannte Formel:

$$\int_0^1 \log\Gamma(x+b)\,dx = \frac{1}{2}\log 2\pi + b\log b - b, \qquad b > 0$$

Diese Herleitung ist von der üblichen in so fern verschieden, als bei ihr weder Reihenentwickelungen noch ein Übergang vom Endlichen in's Unendliche vorkommt.

Aus der Gleichung (2) des vorigen Art. ergibt sich, wenn $F(u) = e^{-u}\varphi(u)$ und $\alpha = 0$, $\beta = \infty$ gesetzt wird, und wenn $\varphi(u)$ von $u = 0$ bis $u = \infty$ stets endlich bleibt, auch a und b positiv sind, die Formel:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x}\left[e^{-bx}\varphi(bx) - e^{-ax}\varphi(ax)\right] = \varphi(0)\log\frac{a}{b}$$

woraus für $\varphi(u) = 1$ das bekannte von Euler gefundene Resultat erhalten wird.

Für $F(u) = f(e^u)$ folgt:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x}\left[f(e^{bx}) - f(e^{ax})\right] = \left[f(\infty) - f(1)\right]\log\frac{b}{a}$$

also z. B.

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x}\left[\left(\frac{pe^{bx}+q}{re^{bx}+s}\right)^n - \left(\frac{pe^{ax}+q}{re^{ax}+s}\right)^n\right] = \left\{\left(\frac{p+q}{r+s}\right)^n - \left(\frac{p}{r}\right)^n\right\}\log\frac{a}{b}$$

und daraus

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x}\left[\frac{1}{e^{bx}+1} - \frac{1}{e^{ax}+1}\right] = \frac{1}{2}\log\frac{a}{b} \qquad (1)$$

Mit Hilfe dieser letztern Gleichung läßt sich der Werth des Integrals

$$A = \int_0^\infty \frac{dx}{x}\left[\frac{1}{2x} - \frac{1}{e^x - e^{-x}}\right]$$

wovon später wieder die Rede sein wird und welches in der citirten Abhandlung auf zwei verschiedenen Wegen abgeleitet wurde, auch wie folgt finden.

Zunächst hat man, wenn $2x$ für x gesetzt wird, die Gleichung:

$$2A = \int_0^\infty \frac{dx}{x}\left[\frac{1}{2x} - \frac{2}{e^{2x} - e^{-2x}}\right]$$

folglich durch Subtraction:

$$A = \int_0^\infty \frac{dx}{x}\left[\frac{1}{e^x - e^{-x}} - \frac{2}{e^{2x} - e^{-2x}}\right] = \int_0^\infty \frac{dx}{x} \cdot \frac{(e^{\frac{1}{2}x} - e^{-\frac{1}{2}x})^2}{e^{2x} - e^{-2x}}$$

wofür offenbar auch:

$$A = \int_0^\infty \frac{dx}{x} \cdot \frac{e^{\frac{1}{2}x} - e^{-\frac{1}{2}x}}{(e^{\frac{1}{2}x} + e^{-\frac{1}{2}x})(e^x + e^{-x})}$$

und nach weiterer Reduction:

$$A = \int_0^\infty \frac{dx}{x} \cdot \frac{(e^x - 1)e^x}{(e^x + 1)(e^{2x} + 1)}$$

geschrieben werden kann. Durch Zerlegung des Bruches unter dem Zeichen erhält diese Gleichung die Form:

$$A = \int_0^\infty \frac{dx}{x}\left[\frac{1}{e^x + 1} - \frac{1}{e^{2x} + 1}\right].$$

Der Werth dieses Integrals ergibt sich für $a=2$, $b=1$ sofort aus der Gleichung (1); man hat daher:

$$A=\frac{1}{2}\log 2$$

wie auch a. a. O. gefunden wurde.

Für $F(u)=\frac{u\varphi(u)}{e^u-e^{-u}}$, $\alpha=0$, $\beta=\infty$ findet man aus der Gleichung (2) des vorigen Art. unter der Annahme, daß wieder $\varphi(u)$ von $u=0$ bis ∞ endliche Werthe behalte, die Gleichung:

$$\int_0^\infty dx\left[\frac{b\varphi(bx)}{e^{bx}-e^{-bx}}-\frac{a\varphi(ax)}{e^{ax}-e^{-ax}}\right]=\frac{1}{2}\varphi(0)\log\frac{a}{b}$$

und daraus z. B.

$$\int_0^\infty dx\left[\frac{b\cos bx}{e^{bx}-e^{-bx}}-\frac{a\cos ax}{e^{ax}-e^{-ax}}\right]=\frac{1}{2}\log\frac{a}{b}$$

Es sei k eine positive, von Null verschiedene Constante und es werde: $F(u)=\frac{\varphi(u)}{(1+ke^u)^n}$ und wie bisher $\alpha=0$, $\beta=\infty$ gesetzt. Man erhält hierfür aus (2) die Formel:

$$\int_0^\infty\frac{dx}{x}\left[\frac{\varphi(bx)}{(1+ke^{bx})^n}-\frac{\varphi(ax)}{(1+ke^{ax})^n}\right]=\frac{\varphi(0)}{(1+k)^n}\log\frac{a}{b}$$

wofür bezüglich $\varphi(u)$ die obige Bedingung gilt.

Aus der Annahme $F(u)=\log\Gamma(k+\varphi(u))$, $\varphi(u)>0$, $k>0$, $\alpha=0$, $\beta=\infty$ erhält man, wenn die Werthe von $\varphi(u)$ für $u=0$ mit A und für $u=\infty$ mit B bezeichnet werden, die Gleichung:

$$\int_0^\infty\frac{dx}{x}\log\frac{\Gamma(k+\varphi(bx))}{\Gamma(k+\varphi(ax))}=\log\frac{\Gamma(k+B)}{\Gamma(k+A)}\cdot\log\frac{b}{a}$$

Es sei ferner $F(u) = \dfrac{\Gamma(u+m)}{\Gamma(u+n)}$, $n > m$, $\alpha = 0$, $\beta = \infty$.
Da $F(u)$ verschwindet, wenn u in's Unendliche wächst[1]), so ergibt sich unmittelbar die Formel:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x}\left[\frac{\Gamma(bx+m)}{\Gamma(bx+n)} - \frac{\Gamma(ax+m)}{\Gamma(ax+n)}\right] = \frac{\Gamma(m)}{\Gamma(n)} \log\frac{a}{b}$$

welche auch in der früher erwähnten Abhandlung, auf anderm Wege abgeleitet, sich findet.

Wird in der Gleichung (3) des vorigen Artikels einmal $F(u) = \log(1+ku)$, $k > 0$, dann $F(u) = \arcsin u$, $F(u) = \sin ku$ und $F(u) = e^{ku}$, jedesmal aber $\alpha = 0$, $\beta = 1$ gesetzt, so gelangt man zu den Gleichungen:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x\log x}\log\frac{1+kx^b}{1+kx^a} = \log(1+k)\,.\log\frac{b}{a}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x\log x}\left[\arcsin(x^b) - \arcsin(x^a)\right] = \frac{\pi}{2}\log\frac{b}{a}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x\log x}\left[\sin(kx^b) - \sin(kx^a)\right] = \sin k\,.\log\frac{b}{a}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x\log x}\left[e^{kx^b} - e^{kx^a}\right] = (e^k - 1)\log\frac{b}{a}.$$

---

1) Es ist beinahe überflüssig zu bemerken, daß das Verhältniß zweier Functionswerthe $f(u+m)$ und $f(u+n)$, worin m und n von einander verschieden sind, nicht allen Fällen sich der Einheit als Grenze nähert, wenn u in's Unendliche wächst. Obgleich es nämlich den Anschein hat, daß es hierbei für $u = \infty$ werdend auf die endlichen Größen m und n nicht ankomme, so ist dies doch der Fall, wenn z. B. $f(u) = \Gamma(u)$ ist; denn wäre n nur um die Einheit von m verschieden, so würde man:

$$f(u+m) = \Gamma(u+m), \quad f(u+n) = (u+m)\Gamma(u+m)$$

haben und sich überzeugen, daß $f(u+m) : f(u+n)$ für $u = \infty$ in Null übergeht was offenbar um so mehr der Fall ist, wenn n mehr als die Einheit über m liegt.

Die Anwendung der Gleichungen des vorigen Artikels ist, wie man sieht, sehr einfach und um so leichter, als für die Werthe $\alpha = 0$, $\beta = 1$ und $\beta = \infty$ immer nur die Anfangs- und Endwerthe der Function $F(u)$ in die Resultate eingehen.

Da übrigens von den beiden Integrationen, welchen die Gleichung:

$$\frac{dF(u)}{dx} \cdot \frac{du}{dy} = \frac{dF(u)}{dy} \cdot \frac{du}{dx}$$

unterzogen wird, auf der rechten und linken Seite je eine, unabhängig von der nähern Beschaffenheit von F, sich unmittelbar ausführen läßt, wenn u die Summe zweier Functionen X und Y ist, wovon die erstere nur x, die letztere nur y enthält, so lassen sich, wie leicht einzusehen ist, alle vorhin betrachteten Fälle aus der Annahme $u = X + Y$ erhalten.

3.

Die Gleichung, von welcher im Art. 1 ausgegangen wurde, läßt sich in eine andere, bekannte Form bringen. Addirt man nämlich zu beiden Seiten den Ausdruck $F(u)\dfrac{d^2u}{dxdy}$, so geht sie über in die folgende:

$$\frac{d\left[\frac{du}{dy} F(u)\right]}{dx} = \frac{d\left[\frac{du}{dx} F(u)\right]}{dy} \qquad (1)$$

welche, wenn beide Seiten nach x und y zwischen constanten Grenzen integrirt werden, sofort eine Relation zwischen Quadraturen liefert.

Wird beispielsweise $u = xy$ gesetzt und dann nach x von α bis β, nach y von a bis b integrirt, und schließlich x für y geschrieben, so folgt:

$$\int_\alpha^\beta dx\,[bF(bx) - aF(ax)] = \int_a^b dx\,[\beta F(\beta x) - \alpha F(\alpha x)]$$

Erhalten $\beta x F(\beta x)$ und $\alpha x F(\alpha x)$ für $\beta = \infty$ und $\alpha = 0$ endliche, von x unabhängige Werthe, so ergibt sich hieraus:

$$\int_0^\infty dx\,[bF(bx)-aF(ax)] = [tF(t)]_0^\infty \log\frac{b}{a} \tag{2}$$

eine Gleichung, welche auf anderm Wege auch in der citirten Abhandlung hergeleitet ist und zu zahlreichen Resultaten führt.

Für $F(t)=\dfrac{1-k^t}{t^2}$; $tF(t)=\dfrac{1-k^t}{t}$, $k<1$ ergibt sich, wie leicht zu sehen, die Gleichung:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x}[a-b+bk^{ax}-ak^{bx}] = ab\log\frac{1}{k}\,.\log\frac{b}{a}$$

und wenn $k>1$ ist:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x}[a-b+bk^{-ax}-ak^{-bx}] = ab\log k\,.\,\log\frac{b}{a}$$

Für $F(t)=\left(1+\dfrac{k}{t}\right)^t\dfrac{\operatorname{arctg} t}{t}$; $tF(t)=\left(1+\dfrac{k}{t}\right)^t\operatorname{arctg} t$

erhält man in gleicher Weise:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x}\left[\left(1+\frac{k}{bx}\right)^{bx}\operatorname{arctg} bx-\left(1+\frac{k}{ax}\right)^{ax}\operatorname{arctg} ax\right] = \left(\frac{\pi}{2}e^k-1\right)\log\frac{b}{a}$$

Für $F(t)=\dfrac{1}{t}\Gamma\left(\dfrac{t+m}{t+n}\right)$ findet man:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x}\left[\Gamma\left(\frac{bx+m}{bx+n}\right)-\Gamma\left(\frac{ax+m}{ax+n}\right)\right] = \left(1-\Gamma\left(\frac{m}{n}\right)\right)\log\frac{b}{a}$$

u. s. w.

Alle diese Resultate, insbesondere die Gleichung (2) entsprechen dem Falle, daß in (1) die Annahme $u=xy$ gemacht werde. Für dieselbe Annahme aber läßt sich noch eine andere, von (2) verschiedene Gleichung erhalten. Da sich nämlich:

$$\frac{d\,[yF(xy)]}{dy} = \frac{d\,[xF(xy)]}{dx}$$

aus (1) ergibt, so kann man, wenn auf beiden Seiten mit $\frac{1}{x}dxdy$ multiplicirt und rechts u für xy geschrieben wird, diese Gleichung in die Form:

$$\frac{dx}{x}\cdot\frac{d[yF(xy)]}{dy}dy = \frac{1}{u}\,\frac{d\,[uF(u)]}{dx}dxdy = \frac{1}{u}\,\frac{d\,[uF(u)]}{du}\cdot\frac{du}{dx}\cdot dxdy$$

bringen und u als eine neue Veränderliche betrachten, welche an die Stelle von x tritt. Unter dieser Voraussetzung ist also:

$$\frac{dx}{x}\cdot\frac{d\,[yF(xy)]}{dy}dy = \frac{d\,[uF(u)]}{u}\cdot dy$$

und ergibt sich, wenn man nach y von a bis b, nach x von α bis β integrirt, auf der rechten Seite aber die Integration nach u zwischen den entsprechenden Grenzen αy und βy zur ersten macht, die folgende Gleichung:

$$\int_\alpha^\beta \frac{dx}{x}\,[bF(bx) - aF(ax)] = \int_a^b dy \int_{\alpha y}^{\beta y} \frac{d\,[uF(u)]}{u}$$

aus welcher sich für $\alpha = 0$, $\beta = \infty$ und wenn a und b positv sind, ergibt:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x}[bF(bx) - aF(ax)] = (b-a)\int_0^\infty \frac{d\,[uF(u)]}{u} \quad ..(3)$$

Angenommen, es erhalte $uF(u)$ für $u = 0$ einen endlichen von Null verschiedenen Werth U_0, es werde also $F(u)$ unendlich groß für $u = 0$, dagegen Null für $u = \infty$, so ist:

$$\int_0^\infty \frac{d\,[uF(u)]}{u} = \left[\frac{uF(u) - U_0}{u}\right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{du}{u^2}[uF(u) - U_0]$$

und wenn das erste Glied der rechten Seite verschwindet:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x}[bF(bx) - aF(ax)] = (b-a)\int_0^\infty \frac{du}{u^2}[uF(u) - U_0] \ldots (4)$$

Die Gleichungen (3) und (4) enthält, auf anderm Wege hergeleitet, auch die in der Einleitung bezeichnete Abhandlung.

Um einige besondere Fälle zu betrachten, nehme man an, es sei:

$$F(u) = \frac{1}{u}e^{-u^n}, \quad uF(u) = e^{-u^n}.$$

Dann ist:

$$\int_0^\infty \frac{d[uF(u)]}{u} = -n\int_0^\infty u^{n-2}e^{-u^n}du = -\Gamma\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

und erhält man die Gleichung:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2}\left[e^{-b^n x^n} - e^{-a^n x^n}\right] = (a-b)\Gamma\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

woraus z. B. für $n = 2$ folgt:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2}\left[e^{-b^2x^2} - e^{-a^2x^2}\right] = (a-b)\sqrt{\pi}$$

oder, was dasselbe ist

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x}}\left[e^{-bx} - e^{-ax}\right] = 2\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)\sqrt{\pi}$$

Setzt man ferner:

$$F(u) = \left(1 + \frac{1}{u}\right)e^{-u},$$

so ist

$$\int_0^\infty \frac{d[uF(u)]}{u} = -\int_0^\infty e^{-u}du = -1$$

folglich:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x}\left[\left(b+\frac{1}{x}\right)e^{-bx}-\left(a+\frac{1}{x}\right)e^{-ax}\right]=a-b$$

Der Annahme:

$$F(u)=\frac{e^{\gamma u}+e^{-\gamma u}}{e^{u}-e^{-u}}, \qquad \gamma<1$$

entsprechend erhält man

$$U_0=1$$

und ist $F(u)=0$ für $u=\infty$. Es ist also:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x}\left[b\cdot\frac{e^{\gamma bx}+e^{-\gamma bx}}{e^{bx}-e^{-bx}}-a\cdot\frac{e^{\gamma ax}+e^{-\gamma ax}}{e^{ax}-e^{-ax}}\right]$$

$$=(b-a)\int_0^\infty \frac{du}{u}\left[\frac{e^{\gamma u}+e^{-\gamma u}}{e^{u}-e^{-u}}-\frac{1}{u}\right]$$

Zu dem Werthe des letztern Integrals, welcher meines Wissens nicht bekannt ist, kann man auf zwei verschiedene Arten gelangen.

Aus der bekannten Gleichung:

$$\log\Gamma(k)=\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{x}\left[k-1-\frac{1-e^{-(k-1)x}}{1-e^{-x}}\right]dx$$

folgt nämlich, wenn man $1-k$ für k setzt:

$$\log\Gamma(1-k)=\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{x}\left[-k-\frac{1-e^{+kx}}{1-e^{-x}}\right]dx$$

und wenn man diese beiden Gleichungen addirt, nach einem bekannten Satze:

$$\log\frac{\pi}{\sin k\pi}=\int_0^\infty \frac{dx}{x}\left[-e^{-x}-\frac{2}{e^{x}-1}+\frac{e^{(k-1)x}+e^{-kx}}{1-e^{-x}}\right]\ldots(5)$$

Da aber für $k=\frac{1}{2}$ aus der ersten Gleichung

$$\log\pi=\int_0^\infty\frac{dx}{x}\left[-e^{-x}-\frac{2}{e^x-1}+\frac{2}{e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}}\right]$$

folgt, und, wie im Art. 2 nachgewiesen wurde:

$$\log 2=\int_0^\infty\frac{dx}{x}\left[\frac{2}{x}-\frac{2}{e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}}\right]$$

ist, so ergibt sich

$$\log 2\pi=\int_0^\infty\frac{dx}{x}\left[\frac{2}{x}-e^{-x}-\frac{2}{e^x-1}\right] \tag{6}$$

und durch Subtraction der Gleichungen (5) und (6):

$$-\log 2\sin k\pi=\int_0^\infty\frac{dx}{x}\left[-\frac{2}{x}+\frac{e^{(k-1)x}+e^{-kx}}{1+e^{-x}}\right].$$

Daraus nun erhält man, ~~wenn~~ $k=\frac{1+\gamma}{2}$ und $x=2u$ gesetzt wird, das in Frage stehende Integral

$$\int_0^\infty\frac{du}{u}\left[\frac{e^{\gamma u}+e^{-\gamma u}}{e^u-e^{-u}}-\frac{1}{u}\right]=-\log\left(2\cos\frac{\gamma\pi}{2}\right),\qquad \gamma<1$$

Zu demselben Resultate gelangt man auf folgende Art. In der Gleichung:

$$\int_0^\infty\frac{\cos k\beta\, dx}{k^2+x^2}=\frac{\pi}{2}\,\frac{\cos k\beta}{k}$$

setze man nach einander $k=1, 2, 3, \ldots$, nehme die Ergebnisse mit abwechselnden Zeichen und addire sie dann, so daß die Gleichung:

$$\int_0^\infty dx\left[\frac{\cos\beta}{1^2+x^2}-\frac{\cos 2\beta}{2^2+x^2}+\frac{\cos 3\beta}{3^2+x^2}-\ldots\right]$$

$$=\frac{\pi}{2}\left[\frac{\cos\beta}{1}-\frac{\cos 2\beta}{2}+\frac{\cos 3\beta}{3}-\ldots\right]$$

erhalten wird. Die Summen der beiden hierin vorkommenden Reihen sind bekannt, setzt man sie ein, so erfolgt:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x}\left[\frac{1}{2x}-\frac{\pi}{2}\cdot\frac{e^{\beta x}+e^{-\beta x}}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}}\right]=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\log(2+2\cos\beta)$$

Durch die Substitutionen $\pi x=u$, $\beta=\gamma\pi$ verwandelt sich diese Gleichung in die folgende:

$$\int_0^\infty \frac{du}{u}\left[\frac{e^{\gamma u}+e^{-\gamma u}}{e^u-e^{-u}}-\frac{1}{u}\right]=-\log\left(2\cos\frac{\gamma\pi}{2}\right)$$

die mit der früher gefundenen übereinstimmt.

Aus ihr erhält man noch die beiden folgenden Formeln:

$$\int_0^\infty \frac{e^{\gamma u}-e^{-\gamma u}}{e^u-e^{-u}}du=\frac{\pi}{2}\operatorname{tang}\frac{\gamma\pi}{2}$$

$$\int_0^\infty \frac{du}{u^2}\left[\frac{e^{\gamma u}-e^{-\gamma u}}{e^u-e^{-u}}-\gamma\right]=-\int_0^\gamma \log\left(2\cos\frac{\gamma\pi}{2}\right)d\gamma$$

welche gelten, wenn γ zwischen 0 und 1 liegt.

Auch ergibt sich die Gleichung:

$$\int_0^\infty \frac{du}{u}\,\frac{(e^{bu}-e^{-bu})^2}{e^u-e^{-u}}=-\log(\cos b\pi)$$

Dies vorausgesetzt hat man nun das Resultat:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x}\left[b\cdot\frac{e^{\gamma bx}+e^{-\gamma bx}}{e^{bx}-e^{-bx}}-a\cdot\frac{e^{\gamma ax}+e^{-\gamma ax}}{e^{ax}-e^{-ax}}\right]$$

$$=(a-b)\log\left(2\cos\frac{\gamma\pi}{2}\right),\quad a>0,\quad b>0,\quad \gamma<1$$

4.

Die Relation, von welcher im vorigen Artikel ausgegangen wurde, läßt sich noch in einer andern Form betrachten. So geht die daselbst hergeleitete Gleichung:

$$\frac{dx}{x}\frac{d[yF(xy)]}{dy}dy=\frac{d[uF(u)]}{u}dy$$

nachdem dieselbe beiderseits mit $x\varphi(x)$ multiplicirt, auf der rechten Seite aber $\frac{u}{y}$ für x geschrieben worden ist, und wenn a und b als positiv vorausgesetzt werden, durch Integration über in die folgende:

$$\int_0^\infty \varphi(x)[bF(bx)-aF(ax)]\,dx=\int_0^\infty d[uF(u)]\int_a^b\frac{dy}{y}\varphi\left(\frac{u}{y}\right) \qquad .(1)$$

aus welcher sich u. a. die folgenden Resultate finden lassen.

Es sei

$$\varphi(x)=\frac{1}{x^{n-1}},\quad F(u)=\frac{1}{u}e^{-u},\quad n<2$$

dann folgt:

$$\int_0^\infty\frac{dx}{x^n}[e^{-bx}-e^{-ax}]=\frac{a^{n-1}-b^{n-1}}{n-1}.\Gamma(2-n)$$

eine Gleichung, welche (soviel mir bekannt, zuerst von Cauchy gefunden) auch aus einer Formel des vorigen Art. erhalten werden kann.

Setzt man

$$\varphi(x) = \frac{1}{x^{n-1}}, \quad F(u) = \frac{1}{u(1+u)^m},$$

so ergibt sich, wenn $n < 2$:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^n}\left[\frac{1}{(1+bx)^m} - \frac{1}{(1+ax)^m}\right]$$

$$= m \cdot \frac{a^{n-1} - b^{n-1}}{n-1} \cdot \frac{\Gamma(2-n)\,\Gamma(m+n-1)}{\Gamma(1+m)}$$

oder auch, wenn man $\frac{1}{x}$ für x und $m+n-2=r$, also $n=r-m+2$ setzt:

$$\int_0^\infty dx\left[\frac{x^r}{(b+x)^m} - \frac{x^r}{(a+x)^m}\right]$$

$$= \frac{1}{r-m+1}\left[a^{r-m+1} - b^{r-m+1}\right] \cdot \frac{\Gamma(1+r)\,\Gamma(m-r)}{\Gamma(m)}.$$

Diese Gleichung stimmt für $b=0$, $a=1$ mit einer von Legendre (Exerc. T. II, p. 107) gefundenen überein.

Für $r = m - \frac{3}{2}$ folgt:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x}}\left[\left(\frac{x}{b+x}\right)^m - \left(\frac{x}{a+x}\right)^m\right] = \sqrt{\pi} \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{b}} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right] \frac{\Gamma(m-\frac{1}{2})}{\Gamma(m)}.$$

Für die Annahme $\varphi(x) = \log x$, $F(u) = \frac{1}{u}\operatorname{arctg} u$ ergibt sich die Gleichung:

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{x}\left[\operatorname{arctg} bx - \operatorname{arctg} ax\right] dx =$$

$$\int_0^\infty \frac{du}{1+u^2}\left[\log\frac{b}{a}\log u - \frac{1}{2}(\log b)^2 + \frac{1}{2}(\log a)^2\right]$$

oder, da

$$\int_0^\infty \frac{\log u}{1+u^2}\,du = 0$$

ist, das Resultat:

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{x}\left[\operatorname{arctg} bx - \operatorname{arctg} ax\right] dx = \frac{\pi}{4}\left[(\log a)^2 - (\log b)^2\right].$$

Es sei wieder $\varphi(x) = \log x$, dagegen $F(u) = \frac{1}{u} e^{-u}$. Dann erhält man für die rechte Seite der Gleichung (1) den Ausdruck:

$$-\int_0^\infty e^{-u}\left[\log\frac{b}{a}\log u - \frac{1}{2}(\log b)^2 + \frac{1}{2}(\log a)^2\right] du$$

worin sich der erste Theil durch die Constante des Integrallogarithmus ausdrücken läßt. Es ist daher:

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{x}\left[e^{-bx} - e^{-ax}\right] dx$$

$$= 0{,}57721566 . \log\frac{b}{a} + \frac{1}{2}\left[(\log b)^2 - (\log a)^2\right].$$

Wenn $\varphi(x) = \log x$, $F(u) = \frac{1}{u(1+u)^m}$ gesetzt wird, so geht die rechte Seite der Gleichung (1) über in:

$$-\int_0^\infty \frac{m\,du}{(1+u)^{m+1}}\left[\log\frac{b}{a}\log u - \frac{1}{2}(\log b)^2 + \frac{1}{2}(\log a)^2\right]$$

$$= -m\log\frac{b}{a}\int_0^\infty \frac{\log u}{(1+u)^{m+1}}\,du + \frac{1}{2}\left[(\log b)^2 - (\log a)^2\right]$$

Da nun:

$$\int_0^\infty \frac{u^{n-1}\,du}{(1+u)^{m+1}} = \frac{\Gamma(n)\,\Gamma(m-n+1)}{\Gamma(m+1)},$$

so folgt, wenn nach n differentiirt wird:

$$\int_0^\infty \frac{u^{n-1}\log u}{(1+u)^{m+1}}\,du = \frac{\Gamma'(n)\Gamma(m-n+1)-\Gamma(n)\Gamma'(m-n+1)}{\Gamma(m+1)},$$

daher für $n=1$

$$\int_0^\infty \frac{\log u}{(1+u)^{m-1}}\,du = \frac{\Gamma'(1)\Gamma(m)-\Gamma'(m)}{\Gamma(m+1)}$$

oder, da $\Gamma'(1)$ wieder die Constante des Integrallogarithmus, negativ genommen, und $\Gamma(m+1)=m\Gamma(m)$ ist, so ist wie bekannt:

$$\int_0^\infty \frac{\log u}{(1+u)^{m+1}}\,du = -\frac{1}{m}\left[0{,}57721566+\frac{d\log\Gamma(m)}{dm}\right].$$

Man erhält daher die Gleichung:

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{x}\left[\frac{1}{(1+bx)^m}-\frac{1}{(1+ax)^m}\right]dx =$$

$$\left[0{,}57721566+\frac{d\log\Gamma(m)}{dm}\right]\log\frac{b}{a}+\frac{1}{2}\left[(\log b)^2-(\log a)^2\right].$$

In dem Falle, wenn m eine positive ganze Zahl bezeichnet, läßt sich bekanntlich der Factor in der Klammer vor $\log\frac{b}{a}$ durch die harmonische Reihe ausdrücken und erhält man also:

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{x}\left[\frac{1}{(1+bx)^m}-\frac{1}{(1+ax)^m}\right]dx =$$

$$\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdot\quad+\frac{1}{m-1}\right)\log\frac{b}{a}+\frac{1}{2}\left[(\log b)^2-(\log a)^2\right].$$

Für $m = 1$ ergibt sich insbesondere:

$$\int_0^{\infty} \frac{\log x}{x} \left[\frac{1}{1+bx} - \frac{1}{1+ax}\right] dx = \frac{1}{2}\left[(\log b)^2 - (\log a)^2\right]$$

oder, was offenbar dasselbe ist:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x dx \left[\frac{1}{1+e^{x+b}} - \frac{1}{1+e^{x+a}}\right] = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$$

5.

Den allgemeinen Formeln, von welchen im Vorhergehenden Gebrauch gemacht wurde, lassen sich andere zwischen doppelten Integralen mit veränderlichen Grenzen bestehende Relationen an die Seite stellen, welche sich einfach auf die Vertauschung der Veränderlichen beziehen und verschiedener Anwendungen fähig sind. Zu denselben gehört, vermöge ihrer großen Einfachheit, zunächst die folgende von Dirichlet (Journal von Crelle Bd. 4) durch geometrische Betrachtung abgeleitete Gleichung:

$$\int_0^a dx \int_0^x f(x,y)\, dy = \int_0^a dy \int_y^a f(x,y)\, dx$$

welche ein besonderer Fall einer Formel ist, die ich auf analytischem Wege (Denkschriften, Bd. 20, S. 141) bewiesen habe. Vielleicht ist es von einigem Interesse, die etwas allgemeinere Gleichung:

$$\int_a^b dx \int_a^x f(x,y)\, dy = \int_a^b dy \int_y^b f x,y)\, (dx \qquad (1)$$

direct und ebenfalls rein analytisch zu begründen.

Nimmt man, der Allgemeinheit unbeschadet $a < b$ an, so sind die Grenzen des linker Hand stehenden Integrals offenbar durch die beiden Ungleichheiten:

$$a < x < b, \qquad a < y < x$$

bestimmt, die sich, wie man sieht, durch die folgende:

$$a < y < x < b$$

ersetzen lassen. Letztere, von der Linken zur Rechten gelesen, gibt sofort die Grenzen des doppelten Integrals, wenn zuerst nach y und dann nach x integrirt wird. Faßt man dagegen zuerst die drei letzten Glieder jener Ungleichheit und dann das erste, zweite und vierte derselben zusammen, so ergeben sich die Grenzen des in genau demselben Umfang genommenen Doppelintegrals, in welchem jetzt umgekehrt, zuerst nach x und dann nach y integrirt wird. Hieraus aber erkennt man unmittelbar die Richtigkeit der Gleichung (1).

Dieser Beweis erfordert, was bemerkt zu werden verdient, weder eine Differentiation, noch eine Integration, sondern besteht einfach in der Umstellung der Grenzen.

Übrigens kann man zu der Gleichung (1) auch auf ganz anderm Wege gelangen. Das Integral

$$\int_a^t dy \int_b^t f(x,y)dx,$$

worin t eine von x und y unabhängige Veränderliche bezeichnet, führt, nach t differentiirt, zu der Gleichung:

$$\int_b^t f(x,t)dx + \int_a^t f(t,y)\,dy = D_t \int_a^t dy \int_b^t f(x,y)\,dx$$

welche, wieder nach t zwischen den Grenzen a und b integrirt, die Relation:

$$\int_a^b dt \int_b^t f(x,t)\,dx + \int_a^b dt \int_a^t f(t,y)\,dy = 0$$

liefert. Schreibt man im erstern Integral y und im letzten x für die Veränderliche t, so ergibt sich:

$$\int_a^b dy \int_b^y f(x,y)\,dx + \int_a^b dx \int_a^x f(x,y)\,dy = 0,$$

was mit (1) übereinstimmt.

Nicht minder bemerkenswerth als (1) ist die Relation, welche sich aus der nähern Betrachtung des Integrals:

$$\int_a^b dx \int_a^{a+b-x} f(x,y)\,dy$$

ergibt. Die Grenzen desselben sind durch die Ungleichheiten

$$a < x < b, \qquad a < y < a+b-x$$

bestimmt, die sich bei umgekehrter Folge der Veränderlichen durch:

$$a < y < b, \qquad a < x < a+b-y$$

von genau demselben Umfange ersetzen lassen.

Man hat daher die Gleichung:

$$\int_a^b dx \int_a^{a+b-x} f(x,y)\,dy = \int_a^b dy \int_a^{a+b-y} f(x,y)\,dx. \tag{2}$$

Diese ergibt sich auch dadurch, daß man das Integral

$$\int_a^t dx \int_a^{a+b-t} f(x,y)\,dy$$

nach t differentiirt, wodurch:

$$\int_a^{a+b-t} f(t,y)\,dy - \int_a^t f(x,a+b-t)\,dx = D_t \int_a^t dx \int_a^{a+b-t} f(x,y)\,dy$$

erhalten wird, und daß man nun diese Gleichung nach t zwischen den Grenzen a und b integrirt. Wie leicht zu sehen findet man:

$$\int_a^b dt \int_a^{a+b-t} f(t,y)\,dy - \int_a^b dt \int_a^t f(x, a+b-t)\,dx = 0$$

oder, wenn im ersten Integral x für t, im zweiten dagegen y für $a+b-t$ gesetzt wird:

$$\int_a^b dx \int_a^{a+b-x} f(x,y)\,dy = \int_a^b dy \int_a^{a+b-y} f(x,y)\,dx$$

was mit (2) übereinstimmt.

Die Gleichungen (1) und (2) führen in manchen Fällen zu Relationen zwischen einfachen bestimmten Integralen, wie einige Beispiele zeigen werden.

Man kann zu dem Ende jene Gleichungen in der Form:

$$\int_a^b dx \int_a^x [f(x,y) + f(y,x)]\,dy = \int_a^b dx \int_a^b f(x,y)\,dy$$

und

$$\int_a^b dx \int_a^{a+b-x} [f(x,y) - f(y,x)]\,dy = 0$$

schreiben, von deren Richtigkeit man sich leicht überzeugt.

Setzt man in der erstern $a = \infty$, $b = 0$ und einmal:

$$f(x,y) = e^{-\alpha(x+y)-\beta xy} \cos xy, \text{ dann } f(x,y) = e^{-\alpha(x+y)-\beta xy} \sin xy,$$

so ergeben sich, wenn α, β positiv sind, die beiden folgenden Formeln:

$$\int_0^\infty \frac{(\beta x + \alpha)\cos(x^2) - x\sin(x^2)}{x^2 + (\beta x + \alpha)^2} e^{-\beta x^2 - 2\alpha x}\,dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{(\beta x + \alpha)e^{-\alpha x}}{x^2 + (\beta x + \alpha)^2}\,dx$$

$$\int_0^\infty \frac{(\beta x+\alpha)\sin(x^2)+x\cos(x^2)}{x^2+(\beta x+\alpha)^2} e^{-\beta x^2-2\alpha x}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{xe^{-\alpha x}}{x^2+(\beta x+\alpha)^2}\,dx.$$

Für $f(x,y)=e^{-(x^2+y^2)}$, $a=0$, $b=\infty$ erhält man die Gleichung:

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx \int_0^x e^{-y^2}\,dy=\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx\int_0^\infty e^{-y^2}\,dy,$$

woraus, wie leicht zu sehen, sich ergibt:

$$\left[\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx\right]^2=$$

$$2\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx\left[x-\frac{x^3}{1!\,3}+\frac{x^5}{2!\,5}-\ldots+(-1)^n\,\frac{x^{2n+1}}{n!\,(2n+1)}+\qquad\right]$$

Da nun, wenn $x^2=z$ gesetzt wird:

$$\int_0^\infty x^{2n+1}\,e^{-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^\infty z^n\,e^{-z}\,dz=\frac{n!}{2}$$

folgt, so geht die rechte Seite der vorigen Gleichung über in:

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdot\quad\cdot=\frac{\pi}{4}$$

und ergibt sich hieraus die Formel:

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

welche, wie man sieht, in sehr einfacher Weise durch Entwickelung des Integrals in eine unendliche Reihe erhalten werden kann.

6.

Die Gleichung (1) des vorigen Art.

$$\int_a^b dx \int_a^x f(x,y)\,dy = \int_a^b dy \int_y^b f(x,y)\,dx$$

welche durch bloße Umstellung der Grenzbedingungen erhalten wurde, läßt sich zur Herleitung einer andern bemerkenswerthen Formel benützen. Wird darin $\varphi(x) f(y)$ für $f(x,y)$ gesetzt, so erhält man:

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx \int_a^x f(y)\,dy = \int_a^b [f(y) . \int_y^b \varphi(x)\,dx]\,dy \qquad (1)$$

Bedeutet nun $f(y)$ eine endlich bleibende Function, welche für keinen zwischen den Grenzen a und b liegenden Werth von y ihr Zeichen ändert, so ist

$$\int_a^x f(y)\,dy = \psi(x)$$

eine stetige Function von x, welche für $x = a$ verschwindet und welche, wenn x die Werthe von a bis b durchläuft, nicht vom Wachsen in's Abnehmen, oder umgekehrt, übergeht. Ist aber dies der Fall, so kann man nach einem bekannten Satz einen mittlern Werth des Factors $\int_y^b \varphi(x)\,dx$ vor das Integral rechter Hand in (1) heraus treten lassen, folglich, wenn ξ einen zwischen a und b liegenden, sonst nicht näher bekannten Werth bezeichnet:

$$\int_a^b [f(y) \int_y^b \varphi(x)\,dx]\,dy = \int_\xi^b \varphi(x)\,dx . \int_a^b f(y)\,dy = \psi(b) \int_\xi^b \varphi(x) dx$$

setzen. Die Gleichung (1) geht hiernach über in die folgende:

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx = \psi(b)\int_\xi^b \varphi(x)\,dx \tag{2}$$

Setzt man $\psi(x) - \psi(a)$ an die Stelle von $\psi(x)$, so wird die Bedingung, daß die Function für $x = a$ verschwinde, von selbst erfüllt. Es ergibt sich dann die Gleichung:

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx = \psi(a)\int_a^b \varphi(x)\,dx + [\psi(b) - \psi(a)]\int_\xi^b \varphi(x)\,dx \ldots (3)$$

worin nun $\psi(x)$ wieder eine stetige Function sein muß, welche nicht vom Wachsen in's Abnehmen, oder umgekehrt, übergeht, wenn x die Werthe a bis b durchläuft, und wobei ξ einen zwischen a und b liegenden Werth bezeichnet. Daß $\varphi(x)$ zwischen diesen beiden Grenzen von x durchaus endliche Werthe behalten müsse, braucht kaum bemerkt zu werden.

Nach einer im 69. Bande des Journals von Crelle (S. 82) vorkommenden Bemerkung ist der durch die Gleichung (3) ausgedrückte Satz zuerst von Herrn Weierstraß gefunden und benutzt worden. — Zu jener Gleichung kann man auch mittelst geometrischer Betrachtungen gelangen.

7.

Die vorige Herleitung des Satzes gilt auch dann, wenn die darin vorkommenden Functionen keine analytisch bestimmten sind, denn es kommen in ihr nur solche Operationen zur Anwendung, welche bei Functionen jeder Art ihren Sinn behalten. Aber der Satz läßt den Werth von ξ innerhalb des ganzen Intervalles von a bis b unbestimmt, während doch in manchen Fällen eine nähere Eingrenzung desselben wünschenswerth sein mag. Um nun für ξ engere Grenzen zu erhalten, wird außer einer nähern Charakterisirung von $\varphi(x)$ auch noch die Betrachtung des Differentialquotienten dieser Function und jener $\psi(x)$ erforderlich und treten insoferne allerdings gewisse Beschränkungen ein.

Geht man wieder von der Gleichung (1) des vorigen Art. aus setzt darin:

$$\int_y^b \varphi(x)\,dx = F(y)$$

und wendet die Entwickelung:

$$F(y) = F(h) + (y-h)\,F'(h) + \frac{(y-h)^2}{2}\,F''(h+\varepsilon(y-h))$$

an, worin $0 < \varepsilon < 1$ ist, so ergibt sich:

$$\int_y^b \varphi(x)\,dx =$$

$$\int_h^b \varphi(x)\,dx - (y-h)\,\varphi(h) - \frac{(y-h)^2}{2}\,\varphi'(h+\varepsilon(y-h))$$

Diese Gleichung multiplicire man mit $f(y)\,dy$ und integrire sie dann zwischen den Grenzen a und b; hierdurch geht die linke Seite über in das Integral, welches die rechte Seite der Gleichung (1) des vorigen Art. bildet. Man hat daher:

$$\begin{aligned}\int_a^b \varphi(x)\,dx \int_a^x f(y)\,dy = \int_a^b f(y)\left[\int_h^b \varphi(x)\,dx - (y-h)\,\varphi(h)\right]dy \\ -\frac{1}{2}\int_a^b (y-h)^2 f(y)\,\varphi'(h+\varepsilon(y-h))\,dy.\end{aligned} \qquad (1)$$

Die Größe h ist hierin willkürlich und kann also in der Weise bestimmt werden, daß der erste Theil

$$H = \int_a^b \varphi(y)\left[\int_h^b \varphi(x)\,dx - (y-h)\,\varphi(h)\right]dy$$

entweder ein Maximum oder ein Minimum wird. Nun ist:

$$\frac{dH}{dh} = \varphi'(h)\int_a^b (y-h)f(y)\,dy$$

und es wird $\frac{dH}{dh} = 0$, wenn, abgesehen von dem Falle, daß auch $\varphi'(h)$ Null werden könne, die Größe h durch die Gleichung:

$$h = \frac{\int_a^b y f(y)\, dy}{\int_a^b f(y)\, dy}$$

bestimmt wird, wofür man:

$$H = \int_a^b f(y)\, dy \int_h^b \varphi(x)\, dx$$

erhält. Dies vorausgesetzt, sei nun wieder:

$$\int_a^x f(y)\, dy = \psi(x)$$

woraus:

$$f(x) = \psi'(x), \qquad \psi(a) = 0$$

und

$$h = \int_a^b y \frac{\psi'(y)}{\psi(b)} dy, \qquad H = \psi(b) \int_h^b \varphi(x)\, dx$$

folgt.

Die Gleichung (1) geht dann über in:

$$\int_a^b \varphi(x)\, \psi(x)\, dx = \tag{2}$$
$$\psi(b) \int_h^b \varphi(x)\, dx - \frac{1}{2} \int_a^b (x - h)^2 \psi'(x)\, \varphi'(h + \varepsilon(x - h))\, dx$$

wobei unter dem letztern Integral x für y geschrieben wurde. Durch theilweise Integration ergibt sich für h der Ausdruck:

$$h = b - \int_a^b \frac{\psi(x)}{\psi(b)} dx \tag{3}$$

Was nun zunächst diesen Werth von h betrifft, so ist klar, daß er stets zwischen a und b liegt, wenn die für $x = a$ verschwindende Function $\psi(x)$ von $x = a$ bis $x = b$ entweder nur wächst oder nur abnimmt, weil in beiden Fällen der Ausdruck unter dem Integralzeichen ein positiver echter Bruch ist.

Unter der die Allgemeinheit nicht beeinträchtigenden Annahme, daß $a < b$ sei, ist daher $a < h < b$.

Ferner ergibt sich, daß wenn, wie angenommen wurde, $\psi(x)$ von $x = a$ bis b entweder nur wächst, oder nur abnimmt, und $\psi(a) = 0$ ist, $\psi(x)$ und $\psi'(x)$ innerhalb jenes Intervalles immer gleiches Zeichen haben und daß es daher bei Betrachtung der Gleichung (2) hinreicht, dieses Zeichen als positiv vorauszusetzen.

In Hinsicht der andern Function $\varphi(x)$, welche in dem Satze des vorigen Art. bezüglich ihres Wachsens und Abnehmens keiner Beschränkung unterliegt, müssen in der vorliegenden Frage die beiden Fälle unterschieden werden, ob $\varphi(x)$ innerhalb der Grenzen der Integration beständig wächst oder beständig abnimmt.

Wird zunächst vorausgesetzt, es sei $\varphi(x)$ von $x = a$ bis b eine stets wachsende Function, also $\varphi'(x)$ positiv, so enthält das zweite Integral rechter Hand in (2) nur positive Elemente, folglich ist

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx < \psi(b)\int_h^b \varphi(x)\,dx.$$

Um nun zu bestimmen, welcher Werth an die Stelle der untern Grenze h zu setzen sei, damit diese Ungleichheit in eine Gleichung übergehe, muß man beachten, daß dem vorhergehenden Art. gemäß, selbst wenn $\varphi(x)$ irgend eine continuirliche Function vorstellt, die Gleichung:

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx = \psi(b)\int_\xi^b \varphi(x)\,dx, \qquad a < \xi < b$$

stattfindet, welche unmittelbar zu dem Schlusse führt, daß jene untere Grenze größer als h zu nehmen ist, wenn der Anfangswerth $\varphi(h)$ positiv oder Null, dagegen kleiner als h, wenn $\varphi(h)$ negativ ist, weil dann in beiden Fällen das rechts stehende Integral der Ungleichheit verkleinert wird.

Nimmt man nun ferner an, es sei $\varphi'(x)$ von $x=a$ bis b eine stets abnehmende Function, also $\varphi'(x)$ negativ, so enthält das zweite Integral auf der rechten Seite in (2) nur negative Elemente und ist selbst negativ, daher:

$$\int_a^c \varphi(x)\psi(x)\,dx > \psi(b)\int_h^b \varphi(x)\,dx.$$

Um diese Ungleichheit in eine Gleichheit zu verwandeln, muß ebenfalls mit Rücksicht auf die angeführte Gleichung des vorigen Art., wenn der Anfangswerth $\varphi(h)$ positiv, ein kleinerer, und wenn $\psi(h)$ negativ oder Null ist, ein größerer Werth an die Stelle der untern Grenze h gesetzt werden, wodurch in beiden Fällen das rechts stehende Integral einen größern Werth erhält.

Daß in allen hier unterschiedenen Fällen der an die Stelle der untern Grenze h tretende Werth nicht unter a und nicht über b liegen kann, geht, wie kaum bemerkt zu werden braucht, daraus hervor, daß ξ immer zwischen a und b liegt.

Man kann diese Ergebnisse in den folgenden Satz zusammenfassen. Bezeichnet $\psi(x)$ eine von $x=a$ bis $x=b$ entweder nur wachsende oder nur abnehmende Function, welche für $x=a$ verschwindet, und wird

$$h = b - \int_a^b \frac{\psi(x)}{\psi(b)}\,dx$$

gesetzt, so hat man:

I. Wenn $\varphi(x)$ von $x=a$ bis $x=b$ stets wächst und $\varphi(h)$ positiv oder Null, oder, wenn $\varphi(x)$ stets abnimmt und $\varphi(h)$ negativ oder Null ist:

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx = \psi(b)\int_{b+\varepsilon(h-b)}^b \varphi(x)\,dx$$

II. Wenn $\varphi(x)$ von $x=a$ bis $x=b$ stets wächst und $\varphi(h)$ negativ, oder, wenn $\varphi(x)$ stets abnimmt und $\varphi(h)$ positiv ist:

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx = \psi(b)\int_{a+\varepsilon(h-a)}^b \varphi(x)\,dx,$$

wobei ε nur durch die Bedingung $0<\varepsilon<1$ gegeben ist.

Wird $\psi(x)-\psi(a)$ für $\psi(x)$ gesetzt, so wird die Bedingung, daß $\psi(x)$ für $x=a$ verschwinde, von selbst erfüllt, und ist blos noch erforderlich, daß $\psi(x)$ innerhalb der Grenzen der Integration entweder beständig wachse oder beständig abnehme. Dann ist:

$$h = b - \int_a^b \frac{\psi(x)-\psi(a)}{\psi(b)-\psi(a)}\,dx$$

und man hat im Fall (I) die Gleichung:

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx = \psi(a)\int_a^b \varphi(x)\,dx + [\psi(b)-\psi(a)]\int_{b+\varepsilon(h-b)}^b \varphi(x)\,dx$$

dagegen im Fall (II):

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx = \psi(a)\int_a^b \varphi(x)\,dx + [\psi(b)-\psi(a)]\int_{a+\varepsilon(h-a)}^b \varphi(x)\,dx$$

Wird beispielsweise: $\varphi(x)=x$ gesetzt, so ergibt sich

$$h = \frac{a+b}{2}$$

und es ist daher, wenn die Voraussetzung (I) stattfindet:

$$\int_a^b x\varphi(x)\,dx = a\int_a^b \varphi(x)\,dx + (b-a)\int_{b-\varepsilon\frac{b-a}{2}}^b \varphi(x)\,dx$$

und wenn den Voraussetzungen (II) entsprochen wird:

$$\int_a^b x\varphi(x)\,dx = a\int_a^b \varphi(x)\,dx + (b-a)\int_{a+\varepsilon\frac{b-a}{2}}^b \varphi(x)\,dx$$

Die nähere Präcisirung, welche in der Formel:

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx = \psi(b)\int_\xi^b \varphi(x)\,dx, \quad a < \xi < b$$

die Größe ξ wenigstens in einigen Fällen durch den vorigen Satz erhält, ist jener analog, welche in der ebenfalls bekannten Formel:

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx = \varphi(\xi)\int_a^b \psi(x)\,dx, \quad a < \xi < b$$

die Größe ξ in gewissen Fällen zuläßt, und welche ich im 28. Bande der Denkschriften (S. 274) nachgewiesen habe.

8.

Zu dem Thema dieses Aufsatzes zurückkehrend, werde ich im Folgenden einige weitere Relationen zwischen bestimmten Integralen entwickeln.

Der Ausdruck

$$\frac{x^{a-1}e^{-bx}y^{n-1}}{(1+y)^{x+c}}$$

welcher zunächst betrachtet werden mag, führt, wenn er zwischen den Grenzen 0 und ∞ zuerst nach y integrirt wird, zu dem Euler-sehen Integral erster Gattung, und wenn man ihn zwischen denselben Grenzen zuerst nach x integrirt, zur Gammafunction. Wie leicht einzusehen, erhält man daraus die folgende Gleichung:

$$\Gamma(n)\int_0^\infty x^{a-1}e^{-bx}\frac{\Gamma(x+c-n)}{\Gamma(x+c)}dx=\Gamma(a)\int_0^\infty\frac{y^{n-1}\,dy}{(1+y)^c[b+\log(1+y)]^a}\,..(1)$$

welche immer besteht, wenn a, b, c, n positiv sind und $c>n$ ist.

Bedeutet darin n eine positive ganze Zahl, so ist:

$$\Gamma(x+c)=(x+c-1)\,(x+c-2)\ldots(x+c-n)\Gamma(x+c-n)$$

und lässt sich die Gleichung wie folgt schreiben:

$$\int_0^\infty\frac{x^{a-1}\,e^{-bx}\,dx}{(x+c-1)\,(x+c-2)\ldots(x-c-n)}$$

$$=\frac{\Gamma(a)}{\Gamma(n)}\int_0^\infty\frac{x^{n-1}\,dx}{(1+x)^c\,[b+\log(1+x)]^a}$$

Für $n=1$ ergibt sich hinaus:

$$\int_0^\infty\frac{dx}{(1+x)^c[b+\log(1+x)]^a}=\frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^\infty\frac{x^{a-1}\,e^{-bx}}{x+c-1}\,dx$$

Für $b=0$ findet man:

$$\int_0^\infty\frac{x^{n-1}\,dx}{(1+x)^c\,[\log(1+x)]^a}=$$

$$\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(a)}\int_0^\infty\frac{x^{a-1}\,dx}{(x+c-1)(x+c-2)\ldots(x+c-n)}.$$

Das Integral der zweiten Seite dieser Gleichung lässt sich unter der Voraussetzung daß a ein positiver echter Bruch sei, näher ausführen. Man kann nämlich den Ausdruck unter dem Integralzeichen in n Brüche zerlegen und erhält für das Integral des ν. dieser Brüche den Ausdruck:

$$\frac{(-1)^{n-\nu}}{(\nu-1)!\,(n-\nu)!}\int_0^\infty\frac{x^{a-1}\,dx}{x+c-\nu}=\frac{(-1)^{n-\nu}\,(c-\nu)^{a-1}}{(\nu-1)!\,(n-\nu)!}\cdot\frac{\pi}{\sin a\pi}$$

woraus sich, wenn man nach einander $\nu = 1, 2, \ldots n$ setzt und die Resultate addirt, nach einigen einfachen Reductionen die folgende Gleichung ergibt:

$$\int_0^\infty \frac{x^{n-1}\,dx}{(1+x)^c[\log(1+x)]^a} =$$

$$\frac{(-1)^{n-1}}{\Gamma(a)} \cdot \frac{\pi}{\sin a\pi}\Big\{(c-1)^{a-1} - \frac{n-1}{1}(c-2)^{a-1}$$

$$+ \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}(c-3)^{a-1} - . \quad . + (-1)^{n-1}(c-n)^{a-1}\Big\}$$

welche gilt, wenn n eine positive ganze Zahl und $c > n$, sodann $0 < a < 1$ ist.

Für $a = \frac{1}{2}$, $n = 1$, $c > 1$ findet man beispielsweise die Formel:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)^c \sqrt{\log(1+x)}} = \sqrt{\frac{\pi}{c-1}}$$

welche sich leicht verificiren läßt.

Es sei noch bemerkt, daß die Gleichung (1) wenn man rechter Hand $1 + y = e^x$, $dy = e^x\,dx$ und durchgehend $n = c - l$ setzt, in die Form:

$$\int_0^\infty x^{a-1}\,e^{-bx} \cdot \frac{\Gamma(x+l)}{\Gamma(x+c)}\,dx = \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(c-l)} \int_0^\infty \frac{(e^x-1)^{c-l-1}\,dx}{(x+b)^a\,e^{(c-1)x}}$$

gebracht werden kann, worin nun $c > l$ sein muß.

In analoger Weise werde nunmehr der Ausdruck:

$$\frac{x^b\,y}{(x^2 + 2xy\cos\alpha + y^2)(y^2 + 2y\cos\alpha + 1)}$$

unter der Voraussetzung, daß b zwischen -1 und $+1$, und α zwischen $-\pi$ und $+\pi$ liege, der Integration nach x und y

zwischen den Grenzen 0 und ∞ unterzogen. Betrachtet man das hierdurch entstehende doppelte Integral zunächst in der Anordnung:

$$\int_0^\infty \frac{y\,dy}{y^2+2y\cos\alpha+1}\int_0^\infty \frac{x^b\,dx}{x^2+2xy\cos\alpha+y^2}$$

und setzt man darin $x=yz$, $dx=ydz$, so verwandelt es sich in das folgende:

$$\int_0^\infty \frac{y^b\,dy}{y^2+2y\cos\alpha+1}\int_0^\infty \frac{z^b\,dz}{z^2+2z\cos\alpha+1}$$

worin die Veränderlichen getrennt sind. Nun fand Legendre (Exerc. T. II, p. 101) die Formel:

$$\int_0^\infty \frac{z^b\,dz}{1+2z\cos\alpha+z^2}=\frac{\pi}{\sin b\pi}\cdot\frac{\sin b\alpha}{\sin\alpha}$$

und man erhält daher, wenn das Doppelintegral auch in der umgekehrten Anordnung geschrieben wird, die Gleichung:

$$\int_0^\infty x^b\,dx\int_0^\infty \frac{y\,dy}{(y^2+2y\cos\alpha+1)(y^2+2xy\cos\alpha+x^2)}=\left(\frac{\pi}{\sin b\pi}\cdot\frac{\sin b\alpha}{\sin\alpha}\right)^2$$

Der Bruch unter dem Zeichen lässt sich in die Form:

$$\frac{1}{(x-1)\,[x^2-2x\cos 2\alpha+1]}\left\{\frac{(x+1)y+2\cos\alpha}{y^2+2y\cos\alpha+1}-\frac{(x+1)\,y+2x^2\cos\alpha}{y^2+2xy\cos\alpha+x^2}\right\}$$

bringen und dann leicht integriren. Das unbestimmte Integral des Klammerausdrucks ist:

$$\frac{x+1}{2}\log\frac{y^2+2y\cos\alpha+1}{y^2+2xy\cos\alpha+x^2}$$
$$+(1-x)\operatorname{cotg}\alpha\left\{\operatorname{arctg}\frac{y+\cos\alpha}{\sin\alpha}+\operatorname{arctg}\frac{y+x\cos\alpha}{x\sin\alpha}\right\}+C$$

und dieses zwischen den Grenzen 0 und ∞ genommen:

$$(x+1)\log x + 2(1-x)\,\alpha \operatorname{cotg} \alpha.$$

Man hat daher die Gleichung:

$$\int_0^\infty \frac{x^b\left[(x+1)\log x + 2(1-x)\,\alpha \operatorname{cotg}\alpha\right]}{(x-1)\left[x^2 - 2x\cos 2\alpha + 1\right]}\,dx = \left(\frac{\pi}{\sin b\pi}\cdot\frac{\sin b\alpha}{\sin\alpha}\right)^2 \tag{2}$$

worin nun $-1 < b < +1$, $-\pi < \alpha < +\pi$ sein muß.

Für $\alpha = 0$ folgt daraus wie leicht zu sehen:

$$\int_0^\infty \frac{x^b\,dx}{(x-1)^3}\left[(1+x)\log x + 2(1-x)\right] = \left(\frac{b\pi}{\sin b\pi}\right)^2$$

Das Integral ändert sich nicht, wenn man $-b$ für b setzt, was nicht nur aus seinem rechts stehenden Werthe, sondern auch direct aus der linken Seite folgt, wenn $\frac{1}{x}$ für x geschrieben wird.

Für $b = 0$ ergibt sich aus (2) ferner noch die Gleichung:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x-1}\cdot\frac{(x+1)\log x + 2(1-x)\,\alpha\operatorname{cotg}\alpha}{x^2 - 2x\cos 2\alpha - 1} = \left(\frac{\alpha}{\sin\alpha}\right)^2$$

und wenn gleichzeitig $\alpha = 0$ und $b = 0$ gesetzt wird:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x-1)^3}\left[(1+x)\log x + 2(1-x)\right] = 1$$

9.

Wie bekannt haben Poisson (Journ. de l'école polytechn. T. X, p. 612) uud später Delaunay u. A. auf verschiedenen Wegen gezeigt, daß das Integral

$$\int_0^\pi dx \log(a^2 + 2a\cos x + 1)$$

eine Function von a ist, welche entweder 0 oder $\pi \log(a^2)$ zum Werthe hat, je nachdem a innerhalb oder außerhalb des Intervalls von -1 bis $+1$ liegt. Alle mir bekannten Herleitungen dieses Resultates beruhen entweder auf der Benützung unendlicher Reihen oder dem Übergang vom Endlichen ins Unendliche; das folgende Verfahren nimmt blos die einfachsten Hilfsmittel der Integralrechnung in Anspruch.

Der Ausdruck

$$\frac{2y + 2\cos x}{y^2 + 2y\cos x + 1}$$

nach x zwischen den Grenzen 0 und π, nach y zwischen den Grenzen 0 und a, zuerst nach y und dann nach x, sowie auch in umgekehrter Ordnung integrirt, führt zu der Gleichung:

$$\int_0^\pi dx \log(a^2 + 2a\cos x + 1) = \int_0^a dy \int_0^\pi \frac{2y + 2\cos x}{y^2 + 2y\cos x + 1}\, dx$$

Das Doppelintegral kann in der Form:

$$\int_0^a \frac{dy}{y} \int_0^\pi dx \left(1 - \frac{1 - y^2}{y^2 + 2y\cos x + 1}\right)$$

geschrieben werden, und da

$$\int \frac{dx}{y^2 + 2y\cos x + 1} = \frac{2}{1 - y^2} \operatorname{arctg}\left(\frac{1-y}{1+y} \operatorname{tang}\frac{x}{2}\right) + C$$

so hat man:

$$\int_0^\pi dx \log(a^2 + 2a\cos x + 1) = \int_0^a \frac{dy}{y}\left[\pi - 2\operatorname{arctg}\left(\frac{1-y}{1+y}\operatorname{tang}\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

Wird nun zunächst angenommen, es sei $-1 \leqq a \leqq +1$, so ist stets sowohl $1 - y$ als $1 + y$ positiv, daher der Ausdruck in der eckigen Klammer $= 0$. In diesem Falle verschwindet also das in Frage stehende Integral.

Nimmt man dagegen an, es sei $a > +1$, so zerlege man das Integral rechter Hand in zwei Integrale, wovon das eine 0 und $+1$, das andere $+1$ und a zu seinen Grenzen hat. Man erhält dann:

$$\int_0^{+1} \frac{dy}{y}\left[\pi - 2\operatorname{arctg}\left(\frac{1-y}{1+y}\operatorname{tang}\frac{\pi}{2}\right)\right] + \int_{+1}^{a} \frac{dy}{y}\left[\pi - 2\operatorname{artcg}\left(\frac{1-y}{1+y}\operatorname{tang}\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

Das erste Integral ist, wie vorhin gezeigt wurde, gleich Null; in dem zweiten aber bleibt für alle zwischen 1 und a liegenden Werthe von y der Zähler $1 - y$ stets negativ, der Nenner $1 + y$ stets positiv, folglich ist in diesem Falle der Ausdruck in der eckigen Klammer $= \pi - 2\operatorname{arctg}(-\infty) = 2\pi$, also der Gesammtwerth der beiden Integrale

$$= \int_1^{a} \frac{dy}{y} . 2\pi = 2\pi \log a = \pi \log(a^2).$$

Derselbe Werth wird erhalten, wenn $a < -1$ ist; denn zerlegt man in diesem Falle das Integral in zwei andere, deren Grenzen 0 und -1, sodann -1 und a sind, so verschwindet wieder, dem Vorhergehenden gemäß, das erste dieser Integrale und ist $1 - y$ positiv, dagegen $1 + y$ negativ und reducirt sich somit das zweite Integral auf:

$$\int_{-1}^{a} \frac{dy}{y} . 2\pi = 2\pi \int_{+1}^{-a} \frac{dx}{x} = 2\pi \log(-a)$$

wofür wieder $\pi \log(a^2)$ geschrieben werden kann.

Hieraus folgt nun das vorhin erwähnte Resultat, daß

$$\int_0^{\pi} dx \log(a^2 + 2a\cos x + 1) = 0 \quad \text{wenn} \quad -1 \leqq a \leqq +1$$
$$= \pi \log(a^2) \text{ wenn } a < -1 \text{ oder } a > +1.$$

Dieses Integral ist, wie man sieht, eine Function von a, welche, ohne discontinuirlich zu werden, für ein endliches Intervall der Werthe von a unveränderlich bleibt und erst außerhalb dieses Intervalls mit a sich ändert. Offenbar lassen sich Functionen dieser Art durch doppelte Integrale darstellen, wovon das auf die eine Veränderliche bezogene Integral für ein Intervall von Werthen der andern beständig Null bleibt und wovon das andere Integral sich auf eine endlich bleibende Function seiner Veränderlichen bezieht.

Um dies an einem besondern Falle näher zu zeigen, will ich von dem Integral

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{dx}{x}\cos bx \sin xy &= \frac{\pi}{2}, \quad -y < b < +y \\ &= \frac{\pi}{4}, \quad b = \pm y \\ &= 0, \quad b > +y \text{ oder } b < -y\end{aligned}$$

ausgehen, welches, gewöhnlich als Function von b betrachtet, benützt und auf bekannte Art geometrisch dargestellt wird. Aber nichts hindert, umgekehrt das Integral als Function von y zu betrachten, denn es ergibt sich dann leicht, daß das Integral

$$\begin{aligned}&= +\frac{\pi}{2} \text{ so lange } b < y < +\infty, \qquad &&= -\frac{\pi}{2} \text{ so lange } -\infty < y < -b \\ &= +\frac{\pi}{4} \text{ für } y = b &&= -\frac{\pi}{4} \text{ für } y = -b \\ &= \quad 0 \text{ so lange } -b < y < +b\end{aligned}$$

ist und daß dasselbe geometrisch, wenn y zwischen $-b$ und $+b$ liegt, ein Stück der Abscissenaxe, und für alle über $+b$ liegenden positiven Werthe von y in der Entfernung $+\frac{\pi}{2}$, dagegen für alle unter $-b$ liegenden y in der Entfernung $-\frac{\pi}{2}$ eine parallele Gerade zu jener Axe liefert.

Gelegentlich sei bemerkt, daß wenn man sowohl y als b sich unabhängig ändern läßt und als Abscissen auf zwei rechtwinklichte Axen trägt, den Integralwerth dagegen als die entsprechende Ordinate einer Fläche betrachtet, für diese letztere zwei ebene Flächenstücke erhalten werden, welche, resp. in der Entfernung $+\frac{\pi}{2}$

und $\frac{\pi}{2}$ von der by Ebene, dieser parallel sind und welche von zwei, durch die dritte Axe gehenden Ebenen begrenzt werden, die mit den beiden anderen Axen einen halben rechten Winkel bilden, daß daher jedes dieser Flächenstücke in dem unbegrenzten Raume eines rechten Winkels besteht und beide von entgegengesetzter Richtung sind.

Dies vorausgesetzt, hat man also, wenn $f(y)$ eine zwischen $y=0$ bis a endliche Function bezeichnet, die Gleichung:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x} \cos bx \int_0^a f(y) \sin xy\, dy = 0 \qquad \text{wenn } a<b$$
$$= \frac{\pi}{2}\int_b^a f(y)\, dy \quad \text{wenn } a>b \qquad \ldots(1)$$

woraus hervorgeht, daß das Integral linker Hand in der That für alle unter b liegenden Werthe von a Null wird und erst von $a=b$ an, ohne unstetig zu werden, einen von Null verschiedenen Werth erhält, wie dies bei dem im Eingange dieses Art. betrachteten Integral der Fall ist.

Es sei, um ein Beispiel zu betrachten $f(y)=e^{ky}$, wofür

$$\int_0^a f(y) \sin xy\, dy = \frac{x + e^{ak}(k \sin ax - x \cos ax)}{k^2+x^2}$$

erhalten wird. Hiernach ist also:

$$\int_0^\infty \frac{\cos bx\, dx}{x(k^2+x^2)}\left[x+e^{ak}(k \sin ax - x\cos ax)\right]=0 \qquad a<b$$
$$=\frac{\pi}{2k}(e^{ak}-e^{bk}), \qquad a>b$$

Für $k=0$ ergibt sich insbesondere noch:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2} \cos bx (1-\cos ax) = 0 \qquad a<b$$
$$= \frac{\pi}{2}(a-b), \qquad a>b$$

was mit einem zuerst von Herrn Bierens de Haan (Nouv. Tables d'intégrales définies, T. 157, Nr. 5) gefundenen Resultate übereinstimmt.

Wird ferner $f(y) = \sin \gamma y$ gesetzt, so erhält man:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x} \cos bx \,.\left[\frac{\sin a(\gamma - x)}{\gamma - x} - \frac{\sin a(\gamma + x)}{\gamma + x}\right] = 0 \qquad , a < b$$
$$= \frac{\pi}{\gamma}(\cos b\gamma - \cos a\gamma),\ a > b.$$

Ein analoges Resultat ergibt sich für $f(y) = \cos \gamma y$.

Der Gleichung (1) kann man diejenige an die Seite stellen, welche aus dem vorhin angeführten Integral:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x} \sin bx \cos xy = \frac{\pi}{2}, \quad -b < y < +b$$
$$= 0, \quad y > +b \text{ oder } y < -b$$

erhalten wird. Sie ist, wie leicht zu sehen, wenn a und b positiv sind, die folgende:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x} \sin bx \int_0^a f(y) \cos xy\, dy = \frac{\pi}{2}\int_0^a f(y)\, dy \quad \text{wenn } a < b$$
$$\ldots (2)$$
$$= \frac{\pi}{2}\int_0^b f(y)\, dy \quad \text{wenn } a > b$$

Das Integral linker Hand ist also im ersten Falle von b und im zweiten Falle von a unabhängig.

Für $f(y) = e^{ky}$ ergibt sich

$$\int_0^\infty \frac{\sin bx \,.\, dx}{x(k^2 + x^2)}\left[-k + e^{ak}(k \cos ax + x \sin ax)\right] = \frac{\pi}{2k}(e^{ak} - 1),\ a < b$$
$$= \frac{\pi}{2k}(e^{bk} - 1),\ a > b.$$

Ferner folgt für $f(y) = \cos\gamma y$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x} \sin bx . \left[\frac{\sin a(\gamma - x)}{\gamma - x} + \frac{\sin a(\gamma + x)}{\gamma + x}\right] = \frac{\pi}{\gamma} \sin a\gamma, \quad a < b$$

$$= \frac{\pi}{\gamma} \sin b\gamma, \quad a > b.$$

Ein analoges Resultat findet man, wenn $f(y) = \sin\gamma y$ gesetzt wird.

10.

Die Gleichungen (1) und (2) gehen für $a = \infty$ über in die folgenden:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x} \cos bx \int_0^\infty f(y) \sin xy\, dy = \frac{\pi}{2} \int_b^\infty f(y)\, dy \tag{1}$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x} \sin bx \int_0^\infty f(y) \cos xy\, dy = \frac{\pi}{2} \int_0^b f(y)\, dy \tag{2}$$

wenn darin b als positiv betrachtet wird. Wodurch sich diese Gleichungen von jenen der Fourier'schen Doppelintegrale unterscheiden ist klar; letztere ergeben sich, wenigstens für den Fall daß $f(y)$ stetig bleibt, aus (1) und (2) durch Differentiation nach b. Auch umgekehrt kann man (2) aus einer der Fourier'schen Gleichungen erhalten, die Gleichung (1) dagegen nicht.

Zu einigen bemerkenswerthen, theils bekannten, theils neuen Resultaten führt die Annahme $f(y) = e^{-\alpha y} y^{a-1}$. Dieselben aber setzen die Werthe zweier vielfach erörterten Integrale voraus, über welche, des Zusammenhanges wegen, das Folgende angeführt werden mag. Diese Integrale sind:

$$A = \int_0^\infty e^{-\alpha x} x^{a-1} \cos\beta x . dx, \quad B = \int_0^\infty e^{-\alpha x} x^{a-1} \sin\beta x . dx$$

die man, wie zuerst Euler gethan hat, aus der Formel:

$$\int_0^\infty e^{-(\alpha+\beta\sqrt{-1})x}\, x^{a-1}\, dx = \frac{\Gamma(a)}{(\alpha+\beta\sqrt{-1})^a}, \quad a > 0, \quad \alpha > 0$$

durch Trennung des Reellen vom Imaginären, oder aber nach dem Vorgange von Poisson direct durch Integration zweier simultanen Differentialgleichungen ermitteln kann.

Die Begründung dieser letztern Formel hat, wie bekannt, zu weitläufigen Betrachtungen Anlaß gegeben, die jedoch später durch ein sehr einfaches Verfahren von Herrn Minding umgangen worden sind. Bezeichnet man nämlich das in Frage stehende Integral mit u, so folgt einmal

$$\frac{du}{d\beta} = -\sqrt{-1}\int_0^\infty e^{-(\alpha+\beta\sqrt{-1})x}\, x^a\, dx$$

und dann, wenn u theilweise integrirt wird:

$$u = \frac{\alpha+\beta\sqrt{-1}}{a}\int_0^\infty e^{-(\alpha+\beta\sqrt{-1})x}\, x^a\, dx$$

Es ist daher

$$\frac{du}{d\beta} = -\frac{a\sqrt{-1}}{\alpha+\beta\sqrt{-1}}.u, \qquad u = \frac{\text{Const}}{(\alpha+\beta\sqrt{-1})^a}$$

Da $u = \dfrac{\Gamma(a)}{\alpha^a}$ für $\beta = 0$, so folgt $\text{Const} = \Gamma(a)$, womit die oben bemerkte Formel gefunden ist.

Die directe Bestimmung von A und B, welche Poisson (Journ. de l'école polytechn. T. IX, p. 215) gezeigt hat, wird nicht selten für sehr umständlich gehalten; die folgende Darstellung derselben ist beträchtlich kürzer.

Da

$$\frac{dA}{d\beta} = -\int_0^\infty e^{-\alpha x}\, x^a \sin\beta x\,.\,dx, \qquad \frac{dB}{d\beta} = \int_0^\infty e^{-\alpha x}\, x^a \cos\beta x\,.\,dx$$

oder, wenn man auf jedes dieser Integrale die theilweise Integration anwendet:

$$\frac{dA}{d\beta} = -a\int_0^\infty e^{-\alpha x} x^{a-1} \cdot \frac{\beta\cos\beta x + \alpha\sin\beta x}{\alpha^2+\beta^2}\,dx$$

$$\frac{dB}{d\beta} = -a\int_0^\infty e^{-\alpha x} x^{a-1} \frac{\beta\sin\beta x - \alpha\cos\beta x}{\alpha^2+\beta^2}\,dx,$$

so ergeben sich die Gleichungen:

$$(\alpha^2+\beta^2)\frac{dA}{d\beta} = -a\beta A - a\alpha B$$

$$(\alpha^2+\beta^2)\frac{dB}{d\beta} = -a\beta B + a\alpha A$$

oder, was dasselbe ist:

$$(\alpha^2+\beta^2)\frac{d\log A}{d\beta} = -a\beta - a\alpha\frac{B}{A}$$

$$(\alpha^2+\beta^2)\frac{d\log B}{d\beta} = -a\beta + a\alpha\frac{A}{B}$$

Zieht man diese Gleichungen von einander ab und setzt der Kürze wegen $\frac{A}{B}=z$, so ergibt sich:

$$\frac{dz}{1+z^2} = -a\cdot\frac{\alpha d\beta}{\alpha^2+\beta^2}, \qquad z=\operatorname{tang}\left(C-a\,.\operatorname{arctg}\frac{\beta}{\alpha}\right)$$

Für $\beta=0$ wird $B=0$, $z=\infty$, also $C=\frac{\pi}{2}$, folglich ist:

$$\frac{A}{B} = \operatorname{cotg}\left(a\,.\operatorname{arctg}\frac{\beta}{\alpha}\right)$$

und wenn man diesen Werth in die Gleichung für $\frac{d\log A}{d\beta}$ einsetzt und integrirt:

$$\log A = -a\int\frac{\beta d\beta}{\alpha^2+\beta^2} - a\alpha\int\frac{\operatorname{tang}\left(a\,.\operatorname{arctg}\frac{\beta}{\alpha}\right)}{\alpha^2+\beta^2}\,d\beta$$

Daraus findet man nun:

$$\log A = -\frac{a}{2}\log(\alpha^2+\beta^2) + \log\cos\left(a\,.\operatorname{arctg}\frac{\beta}{\alpha}\right) + \log\mathrm{Const}$$

oder also:

$$A = \frac{\cos\left(a \,.\, \operatorname{arctg}\frac{\beta}{\alpha}\right)}{(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{a}{2}}} \,.\, \text{Const.}$$

Für $\beta = 0$ geht A über in:

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x} x^{a-1}\, dx = \frac{\Gamma(a)}{\alpha^a} = \frac{\text{Const}}{\alpha^a}$$

Es ist daher:

$$\text{Const} = \Gamma(a)$$

und man hat sofort die Gleichungen:

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x} x^{a-1} \cos\beta x \,.\, dx = \frac{\Gamma(a)}{(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{a}{2}}} \cos\left(a \,.\, \operatorname{arctg}\frac{\beta}{\alpha}\right)$$

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x} x^{a-1} \sin\beta x \,.\, dx = \frac{\Gamma(a)}{(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{a}{2}}} \sin\left(a \,.\, \operatorname{arctg}\frac{\beta}{\alpha}\right)$$

Diese gelegentlichen Bemerkungen vorausgeschickt, kehre ich zurück zu den Gleichungen (1) und (2) um dieselben, wie erwähnt, auf den Fall

$$f(y) = e^{-\alpha y} y^{a-1}$$

anzuwenden, wofür man aus ihnen erhält:

$$\int_0^\infty \frac{\cos bx \,.\, dx}{x\,(\alpha^2+x^2)^{\frac{a}{2}}} \sin\left(a \,.\, \operatorname{arctg}\frac{x}{\alpha}\right) = \frac{\pi}{2\,\Gamma(a)} \int_b^\infty e^{-\alpha y} y^{a-1}\, dy \quad \ldots (3)$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin bx \,.\, dx}{x\,(\alpha^2+x^2)^{\frac{a}{2}}} \cos\left(a \,.\, \operatorname{arctg}\frac{x}{\alpha}\right) = \frac{\pi}{2\,\Gamma(a)} \int_0^b e^{-\alpha y} y^{a-1}\, dy \quad \ldots (4)$$

Die Gleichungen (1) und (2) dürfen, wie gezeigt wurde, nach b differentiirt werden, weil sie, wenn b als positiv vorausgesetzt wird, in die Fourier'schen Gleichungen übergehen; man kann also beifügen, daß:

$$\int_0^\infty \frac{\sin bx\,.\,dx}{(\alpha^2+x^2)^{\frac{a}{2}}} \sin\left(a\,.\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{\alpha}\right) = \frac{\pi}{2\Gamma(a)}\,.\,e^{-\alpha b}\, b^{a-1} \qquad (5)$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos bx\,.\,dx}{(\alpha^2+x^2)^{\frac{a}{2}}} \cos\left(a\,.\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{\alpha}\right) = \frac{\pi}{2\Gamma(a)}\,.\,e^{-\alpha b}\, b^{a-1} \;\ldots (6)$$

Aus (3) ergibt sich nun für $b=0$, $\alpha=1$ und wenn man x für $\mathrm{arctg}\,x$ setzt, die Gleichung:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx\,.\,\frac{\sin ax}{\sin x} \cos^{a-1} x = \frac{\pi}{2}, \qquad a > 0$$

$$= \infty, \qquad a \leqq 0$$

wobei die letztere Bestimmung aus dem Integral selbst hervorgeht.

Aus (6) folgt unter denselben Voraussetzungen

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos ax\,.\,\cos^{a-2} x\, dx \qquad = 0 \qquad a > 1$$

$$= \frac{\pi}{2}, \quad a = 1$$

$$= \infty, \quad a < 1.$$

(Über die beiden letzteren Formeln siehe Bierens de Haan, Nouv. Tables. T. 45 und 41.)

Aus (5) erhält man, wenn nach der Division mit b letzteres $=0$ und dann $\alpha=1$, x für $\mathrm{arctg}\,x$ gesetzt wird, die Gleichung:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx\,.\,\sin x\,.\,\sin ax \cos^{a-3} x \;= 0\,, \quad a > 2$$

$$= \frac{\pi}{2}, \quad a = 2$$

$$= \infty, \quad a < 2.$$

Die drei letzteren Integrale stellen, wie man sieht, unstetige Functionen dar, worauf besonders aufmerksam zu machen, der Zweck dieser Auseinandersetzungen war.

Aus (3) und (4) ergeben sich mit Leichtigkeit für $a=1$, 2, 3, die Werthe einiger bestimmten Integrale.

Für $a=2$ erhält man z. B.:

$$\int_0^\infty \frac{\cos bx \,.\, dx}{(\alpha^2+x^2)^2} = \frac{\pi}{4\alpha^3}(\alpha b+1)e^{-\alpha b}$$

$$\int_0^\infty \frac{(\alpha^2-x^2)\sin bx\, dx}{x(\alpha^2+x^2)^2} = \frac{\pi}{2\alpha^2}\left[1-(\alpha b+1)e^{-\alpha b}\right]$$

und hieraus:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x}\cdot\frac{2\alpha x\cos bx+(\alpha^2-x^2)\sin bx}{(\alpha^2+x^2)^2} = \frac{\pi}{2\alpha^2}$$

Da die Integrale rechter Hand in (3) und (4) sich immer angeben, und $\sin\left(a.\operatorname{arctg}\frac{x}{\alpha}\right)$, $\cos\left(a.\operatorname{arctg}\frac{x}{\alpha}\right)$ sich immer algebraisch ausdrücken lassen, wenn a eine positive ganze Zahl bezeichnet, so sieht man wie sich aus jenen Gleichungen weitere Resultate ziehen lassen.

Es sei noch bemerkt, daß wenn man in der aus (1) und (2) sich ergebenden Gleichung:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x}\int_0^\infty f(y)\sin x(b+y)\,dy = \frac{\pi}{2}\int_0^\infty f(y)\,dy$$

für $f(y)$ die Ausdrücke: $e^{-\alpha y}y^{a-1}\sin\beta y$ und $e^{-\alpha y}y^{a-1}\cos\beta y$ setzt, die Formeln:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x}\left[\frac{\cos\left(bx-a.\operatorname{arctg}\frac{\beta-x}{\alpha}\right)}{[\alpha^2+(\beta-x)^2]^{\frac{a}{2}}} - \frac{\cos\left(bx+a.\operatorname{arctg}\frac{\beta+x}{\alpha}\right)}{[\alpha^2+(\beta+x)^2]^{\frac{a}{2}}}\right]$$

$$= \pi\,.\,\frac{\sin\left(a.\operatorname{arctg}\frac{\beta}{\alpha}\right)}{(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{a}{2}}}$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x}\left[\frac{\sin\left(bx + a\,.\,\mathrm{arctg}\,\frac{\beta+x}{\alpha}\right)}{[\alpha^2+(\beta+x)^2]^{\frac{a}{2}}} + \frac{\sin\left(bx - a\,.\,\mathrm{arctg}\,\frac{\beta-x}{\alpha}\right)}{[\alpha^2+(\beta-x)^2]^{\frac{a}{2}}}\right]$$

$$= \pi\,.\,\frac{\cos\left(a\,.\,\mathrm{arctg}\,\frac{\beta}{\alpha}\right)}{(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{a}{2}}}$$

erhalten werden.

Für $\beta = 0$ folgt aus der letztern, sowie auch durch Addition der Gleichungen (3) und (4) die Formel:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x}\,.\,\frac{\sin\left(bx + a\,.\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{\alpha}\right)}{(\alpha^2+x^2)^{\frac{a}{2}}} = \frac{\pi}{2\,\alpha^a}$$

oder, wenn x für $\mathrm{tang}\,\frac{x}{\alpha}$ und b für αb gesetzt wird:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x}\,.\,\sin(ax + b\,\mathrm{tang}\,x)\cos^{a-1} x = \frac{\pi}{2}, \qquad a > 0,\ b > 0.$$

Der Fall $b = 0$ wurde vorhin schon besprochen.

11.

Mehrere der Integrale, von welchen bisher die Rede war, lassen insofern eine allgemeinere Gestaltung zu, als an die Stelle der unendlichen Reihen, in welche die unter dem Integralzeichen vorkommende Function sich entwickeln läßt, deren, die Summe der n ersten Glieder ergänzender Rest tritt. Nun kann der Rest der Maclaurin'schen Reihe allerdings in Form eines einfachen bestimmten Integrals dargestellt werden, aber diese ist für den vorliegenden Zweck nicht wohl geeignet; dienlicher ist jene eines vielfachen Integrals, zu welcher man auf dem folgenden Wege gelangt.

Bezeichnen x, x_1, x_2, . . . x_n von einander unabhängige Veränderliche, so finden offenbar die Gleichungen statt:

$$f(x) = f(0) + \int_0^1 x f'(xx_1) dx_1$$

$$f'(xx_1) = f'(0) + \int_0^1 xx_1 f''(xx_1x_2) dx_2$$

$$f''(xx_1x_2) = f''(0) + \int_0^1 xx_1x_2 f'''(xx_1x_2x_3) dx_3$$

$$f^{(n-1)}(xx_1x_2 \ldots x_{n-1}) = f^{(n-1)}(0) + \int_0^1 xx_1x_2 \ldots x_{n-1} f^{(n)}(xx_1x_2 \ldots x_n) dx_n$$

aus welchen man alle Integrale, mit Ausnahme des letzten, nach einander eliminiren kann, so daß sich die Gleichung ergibt:

$$f(x) - \left[f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \qquad + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0)\right] =$$
$$x^n \int_0^1 x_1^{n-1} dx_1 \int_0^1 x_2^{n-2} dx_2 . \quad \int_0^1 x_{n-1} dx_{n-1} \int_0^1 f^{(n)}(xx_1x_2 \ldots x_n) dx_n \quad \ldots (1)$$

aus der sich zwei andere ableiten lassen. — Es ist nämlich, wenn X eine endlich bleibende Function von x bezeichnet, offenbar auch

$$\int_a^b X\left[f(x) - \left\{f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0)\right\}\right] dx =$$
$$\int_0^1 dx_n \int_0^1 x_{n-1} dx_{n-1} \int_0^1 x_{n-2}^2 dx_{n-2} \ldots \int_0^1 x_1^{n-1} dx_1 \int_a^b x^n X f^{(n)}(xx_1x_2 \ldots x_n)\, dx \quad \ldots (2)$$

Wenn man dagegen in (1) für die linke Seite den Rest:

$$\frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n\pm 1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(0) + \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} f^{(n+2)}(0) + \ldots$$

setzt, dann mit x^n beiderseits dividirt und mit Xdx multiplicirt, $f(x)$ für $f^{(n)}(x)$ ferner $n-1$ für n schreibt und wie vorhin nach x von a bis b integrirt:

$$\int_a^b X[f(0)+\frac{x}{n}f'(0)+\frac{x^2}{n(n+1)}f''(0)+\frac{x^3}{n(n+1)(n+2)}f'''(0)+\dots]dx= \quad \dots(3)$$

$$(n-1)!\int_0^1 x_1^{n-2}dx_1\int_0^1 x_2^{n-3}dx_2\int_0^1 x_3^{n-4}dx_3\dots\int_0^1 dx_{n-1}\int_a^b Xf(xx_1x_2\dots x_{n-1})dx$$

In (2) kann die Reihe linker Hand auch durch das bekannte Restintegral ausgedrückt werden.

12.

Um einige Anwendungen dieser Formeln zu zeigen werde in (3):

$$f(x)=e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}, \quad X=\frac{1}{x}, \quad a=0, \quad b=\infty$$

gesetzt, wofür man

$$f^{(m)}(x)=(-1)^m[\alpha^m e^{-\alpha x}-\beta^m e^{-\beta x}]$$

und

$$\int_a^b Xf(xx_1x_2 \,.\quad .\, x_{n-1})\,dx=\int_0^\infty \frac{dx}{x}[e^{-\alpha\xi x}-e^{-\beta\xi x}]$$

erhält, wenn der Kürze wegen $\xi=x_1\,x_2\,x_3\dots x_{n-1}$ gesetzt wird. Der Werth des letztern Integrals ist $\log\frac{\beta}{\alpha}$; setzt man der Kürze wegen:

$$\varphi(\alpha x)=1-\frac{\alpha x}{n}+\frac{\alpha^2x^2}{n(n+1)}-\frac{\alpha^3x^3}{n(n+1)(n+2)}+\dots$$

$$\varphi(\beta x)=1-\frac{\beta x}{n}+\frac{\beta^2x^2}{n(n+1)}-\frac{\beta^3x^3}{n(n+1)(n+2)}+\dots$$

so ist also

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x}[\varphi(\alpha x)-\varphi(\beta x)]=\log\frac{\beta}{\alpha}, \quad \alpha>0, \quad \beta>0$$

Diese Gleichung zeigt den bemerkenswerthen Umstand, daß der Werth des Integrals von n ganz unabhängig ist; sie kann zugleich auch als die Verallgemeinerung der Euler'schen Formel

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x}\left[e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}\right]=\log\frac{\beta}{\alpha}$$

betrachtet werden, in welche sie für $n=1$ übergeht.

Dem hier betrachteten Beispiele der Gleichung (3) correspondirt in der Gleichung (2) die Annahme:

$$f(x)=\beta^n e^{-\alpha x}-\alpha^n e^{-\beta x},\quad X=\frac{1}{x^{n+1}}$$

wofür

$$f^{(m)}(x)=(-1)^m\left[\alpha^m\beta^n e^{-\alpha x}-\beta^m\alpha^n e^{-\beta x}\right]$$

und

$$\int_a^b x^n X f^{(n)}(xx_1 x_n)\,dx=(-1)^n\alpha^n\beta^n\int_0^\infty\frac{dx}{x}\left[e^{-\alpha\xi x}-e^{-\beta\xi x}\right]$$

wenn

$$\xi=x_1x_2\ldots x_n$$

ist, erhalten wird. Es ergibt sich die Formel:

$$\int_0^\infty\frac{dx}{x^{n+1}}\Big\{\beta^n e^{-\alpha x}-\alpha^n e^{-\beta x}-(\beta^n-\alpha^n)+\frac{\alpha\beta x}{1}(\beta^{n-1}-\alpha^{n-1})-\frac{\alpha^2\beta^2x^2}{1\,.\,2}(\beta^{n-2}-\alpha^{n-2})$$
$$+\ldots+(-1)^n.\frac{\alpha^{n-1}\beta^{n-1}x^{n-1}}{1\,.\,2\ldots(n-1)}(\beta-\alpha)\Big\}$$
$$=(-1)^n.\frac{\alpha^n\beta^n}{1\,.\,2\,.\,3..n}\log\frac{\beta}{\alpha}.$$

Es sei ferner

$$f(x)=\sin\alpha x,\quad X=\frac{1}{x},\quad a=0,\quad b=\infty,$$

wofür

$$f^{(m)}(x)=\alpha^m\sin\left(\alpha x+\frac{m\pi}{2}\right)$$

und

$$\int_a^b X f(xx_1 \ldots x_{n-1})\, dx = \int_0^\infty \frac{dx}{x} \sin \alpha\xi x$$

gefunden wird. Der Werth des letztern Integrals ist $\frac{\pi}{2}$, wenn $\alpha > 0$; setzt man daher:

$$\varphi(x) = \frac{\alpha x}{n} - \frac{\alpha^3 x^3}{n(n+1)(n+2)} + \frac{\alpha^5 x^5}{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} - \ldots$$

so ergibt sich uns (3) die Gleichung

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x} \varphi(x) = \frac{\pi}{2}, \qquad \alpha > 0,$$

worin das Integral ebenfalls unabhängig von n ist und woraus für $n = 1$ die Formel

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x} \sin \alpha x = \frac{\pi}{2}, \qquad \alpha > 0$$

als specieller Fall wieder erhalten wird.

Ich füge die entsprechende Anwendung der Gleichung (2) hinzu. Es sei

$$f(x) = \sin\left(\alpha x + \frac{n\pi}{2}\right), \qquad X = \frac{1}{x^{n+1}}, \qquad \alpha > 0$$

also

$$f^{(m)}(x) = \alpha^m \sin\left(\alpha x + \frac{(m+n)\pi}{2}\right)$$

und

$$\int_a^b x^n X f^{(n)}(xx_1 \ldots x_n)\, dx = \alpha^n \int_0^\infty \frac{dx}{x} \sin(\alpha\xi x + n\pi)$$

wofür, wenn α positiv ist, $(-1)^n \alpha^n \frac{\pi}{2}$ gesetzt werden kann.

Es findet daher die Gleichung statt:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^{n+1}} \Big\{ \sin\left(\alpha x + \frac{n\pi}{2}\right) - \sin\frac{n\pi}{2} - \alpha x \sin\frac{(n+1)\pi}{2} - \frac{\alpha^2 x^2}{1.2} \sin\frac{(n+2)\pi}{2}$$

$$- \ldots - \frac{\alpha^{n-1} x^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} \sin\frac{(2n-1)\pi}{2} \Big\}$$

$$= (-1)^n . \frac{\alpha^n}{1.2\ldots n} . \frac{\pi}{2}, \qquad \alpha > 0$$

Nimmt man an, es sei

$$f(x) = \cos\alpha x, \quad X = \frac{\sin\beta x}{x}, \quad a = 0, \quad b = \infty$$

so ist

$$f^{(m)}(x) = \alpha^m \cos\left(\alpha x + \frac{m\pi}{2}\right)$$

und

$$\int_a^b X f(xx_1 \ldots x_{n-1})\, dx = \int_0^\infty \frac{dx}{x} \cos\alpha\xi x . \sin\beta x$$

Da nun ξ stets zwischen 0 und 1 liegt, so bleibt $\alpha\xi$ immer innerhalb der Grenzen $-\beta$ und $+\beta$, wenn vorausgesetzt wird, es sei $-\beta < \alpha < +\beta$.

Dann ist (Art. 9) das Integral $= +\frac{\pi}{2}$. Wird also der Kürze wegen

$$\varphi(x) = 1 - \frac{\alpha^2 x^2}{n(n+1)} + \frac{\alpha^4 x^4}{n(n+1)(n+2)(n+3)} - .$$

gesetzt, so ergibt sich aus (3) die Gleichung:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x} \varphi(x) \sin\beta x = \frac{\pi}{2}, \quad -\beta < \alpha < +\beta, \quad \beta > 0$$

welche für $n = 1$ mit dem bekannten Resultat übereinstimmt.

Um auch hierbei die entsprechende Anwendung der Gleichung (2) zu machen, setze man:

$$f(x) = \cos\left(\alpha x + \frac{n\pi}{2}\right), \qquad X = \frac{\sin\beta x}{x^{n+1}}, \qquad \beta > 0$$

so ist

$$f^{(m)}(x) = \alpha^m \cos\left(\alpha x + \frac{(m+n)\pi}{2}\right)$$

und

$$\int_a^b x^n X f^{(n)}(xx_1 \ldots x_n)\, dx = \alpha^n \int_0^\infty \frac{dx}{x} \cos(\alpha\xi x + n\pi) \sin\beta x$$

Der Werth dieses Integrals ist unter der Voraussetzung, daß wieder α zwischen $-\beta$ und $+\beta$ liege, $(-1)^n \frac{\pi}{2}$. Man findet daher aus (2) die Gleichung:

$$\int_0^\infty \frac{\sin\beta x dx}{x^{n+1}} \left\{ \cos\left(\alpha x + \frac{n\pi}{2}\right) - \cos\frac{n\pi}{2} - \alpha x \cos\frac{(n+1)\pi}{2} - \frac{\alpha^2 x^2}{1.2} \cos\frac{(n+2)\pi}{2} \right.$$
$$\left. - \ldots - \frac{\alpha^{n-1} x^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} \cos\frac{(2n-1)\pi}{2} \right\}$$
$$= (-1)^n \cdot \frac{\alpha^n}{12\ldots n} \cdot \frac{\pi}{2}, \quad -\beta < \alpha < \beta, \quad \beta > 0$$

In der Gleichung (3) werde $f(x) = e^{-\alpha x}$, $X = x^{\beta-1}$ gesetzt, wofür

$$\int_a^b X f(xx_1 \ldots x_{n-1})\, dx = \int_0^\infty x^{\beta-1} e^{-\alpha\xi x} dx = \frac{\Gamma(\beta)}{(\alpha\xi)^\beta}$$

ist. Die rechte Seite jener Gleichung ist somit:

$$(n-1)!\, \frac{\Gamma(\beta)}{\alpha^\beta} \int_0^1 x_1^{n-\beta-2} dx_1 \int_0^1 x_2^{n-\beta-3} dx_2 \ldots \int_0^1 x_{n-1}^{-\beta} dx_{n-1}$$

wofür, wenn β ein positiver echter Bruch ist, ein endlicher Werth erhalten wird. Unter dieser Voraussetzung und wenn:

$$\varphi(x) = 1 - \frac{\alpha x}{n} + \frac{\alpha^2 x^2}{n(n+1)} - \frac{\alpha^3 x^3}{n(n+1)(n+2)} + \cdot$$

gesetzt wird, folgt aus (3) die Gleichung:

$$\int_0^\infty x^{\beta-1}\varphi(x)dx = \frac{1 \quad . \quad 2 \quad \ldots \quad (n-1)}{(1-\beta)(2-\beta)\ldots(n-1-\beta)} \cdot \frac{\Gamma(\beta)}{\alpha^\beta}$$

Für $n = 1$ erhält man eine bekannte Gleichung.

In (2) sei entsprechend dem vorigen:

$$f(x) = e^{-\alpha x}, \quad X = \frac{1}{x^{n-\beta+1}}, \quad \alpha > 0.$$

Dann ist

$$f^{(m)}(x) = (-1)^m \alpha^m e^{-\alpha x}$$

und

$$\int_a^b x^n X f^{(n)}(xx_1\ldots x_n)dx = (-1)^n \alpha^n \int_0^\infty x^{\beta-1} e^{-\alpha\xi x} dx = (-1)^n \cdot \frac{\alpha^{n-\beta}}{\xi^\beta} \cdot \Gamma(\beta)$$

Man findet daher die Gleichung:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^{n-\beta+1}} \left\{ e^{-\alpha x} - 1 + \alpha x - \frac{\alpha^2 x^2}{1\,.\,2} + \frac{\alpha^3 x^3}{1.2.3} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{a^{n-1} x^{n-1}}{1\,.\,2\ldots(n-1)} \right\}$$

$$= (-1)^n \frac{1 \quad . \quad 2 \quad \ldots \quad (n-1)}{(1-\beta)(2-\beta)\ldots(n-1-\beta)} . \alpha^{n-\beta} . \Gamma(\beta), \quad \alpha > 0, \; 0 < \beta < 1,$$

deren Zusammenhang mit der vorhergehenden leicht zu ersehen ist.

Für $n = 1, 2, 3$ ergeben sich daraus die Formeln, welche Herr Liouville in der Abhandlung „sur le calcul des différentielles à indices quelconques" entwickelt hat.

In der Gleichung (3) des Art. 11 sei

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^{\alpha+\beta}}, \quad X = x^{\alpha-1}$$

und wie bisher $a = 0$, $b = \infty$. Es ist dann

$$\int_a^b X f(xx_1 \ldots x_{n-1})\,dx = \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}\,dx}{(1+\xi x)^{\alpha+\beta}} = \frac{1}{\xi^\alpha} \cdot \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

und man erhält die Gleichung:

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1}\Big\{1-\frac{\alpha+\beta}{n}x+\frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-1)}{n(n+1)}x^2$$
$$-\frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-1)(\alpha+\beta-2)}{n(n+1)(n+2)}x^3+\ldots\Big\}\,dx$$
$$=\frac{1\quad.\quad 2\quad\ldots\;(n-1)}{(1-\alpha)(2-\alpha)\quad.\,(n-1-\alpha)}\cdot\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)},\qquad 0<\alpha<1$$

Dieser entspricht eine andere, welche uns (2) folgt, wenn man darin

$$f(x)=(1+x)^{n-\beta},\quad X=x^{\alpha-n-1}$$

setzt, wofür

$$\int_a^b x^n X f^{(n)}(xx_1\ldots x_n)\,dx=\int_0^\infty x^{\alpha-1}.\frac{(n-\beta)(n-\beta-1)\ldots(1-\beta)}{(1+\xi x)^\beta}\,dx$$

oder also

$$(1-\beta)(2-\beta)\ldots(n-\beta).\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta-\alpha)}{\xi^\alpha\Gamma(\beta)}$$

erhalten wird.

Man findet, wie leicht zu sehen ist, die folgende Gleichung:

$$\int_0^\infty\frac{dx}{x^{n-\alpha+1}}\Big\{(1+x)^{n-\beta}-1-(n-\beta)x-\frac{(n-\beta)(n-\beta-1)}{1\quad 2}x^2$$
$$-\ldots-\frac{(n-\beta)(n-\beta-1)\ldots(1-\beta)}{1\quad 2\quad 3\quad\ldots(n-1)}x^{n-1}\Big\}$$
$$=\frac{(1-\beta)(2-\beta)\ldots(n-\beta)}{(1-\alpha)(2-\alpha)\ldots(n-\alpha)}\cdot\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta)},\quad 0<\alpha<1,\quad \beta>\alpha$$

Für $n=1$ ergibt sich hieraus:

$$\int_0^\infty\frac{dx}{x^{2-\alpha}}[(1+x)^{1-\beta}-1]=\frac{1-\beta}{1-\alpha}\cdot\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta)}.$$

Diese Gleichung wurde, in etwas anderer Form (Art. 4) zuerst von Legendre gefunden. (Exerc. T. II, p. 107.)

13.

Die Gleichung (2) des Art. 11 führt, auch in anderer Weise als vorhin angewendet, zur Kenntniß des Werthes einer Anzahl neuer Integrale. Aus (2) folgt nämlich die Gleichung:

$$\int_a^b X[f(x)-f(0)]\,dx = \int_0^1 dx_1 \int_a^b x\,X f'(xx_1)\,dx$$

die sich in besonderen Fällen wie folgt benutzen läßt.

Es sei

$$f(x)=\log(1+x), \qquad X=\frac{1}{1+x}, \qquad a=0$$

Man findet:

$$\frac{1}{2}[\log(1+b)]^2 = \int_0^1 \frac{dx_1}{x_1-1}\left[\log(1+b)-\frac{1}{x_1}\log(1+bx_1)\right]$$

oder, was dasselbe ist:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x(x-1)}[x\log(1+b)-\log(1+bx)] = \frac{1}{2}[\log(1+b)]^2$$

Es sei

$$f(x)=\log(1+x), \qquad X=\frac{1}{1+x^2}, \qquad a=0$$

Dann ist

$$\int_0^b \frac{dx}{1+x^2}\log(1+x) = \int_0^1 dx_1 \int_0^b \frac{x\,dx}{(1+x^2)(1+xx_1)}$$

$$= \int_0^1 \frac{dx}{1+x_1^2}\left[-\log(1+bx_1)+\frac{1}{2}\log(1+b^2)+x_1\operatorname{arctg} b\right]$$

Man erhält daher nach einigen Reductionen die Gleichung:

$$\int_0^b \frac{(b+x^2)\log(1+x)}{(b^2+x^2)(1+x^2)}\,dx = \frac{1}{2(1+b)}\left[\frac{\pi}{4}\log(1+b^2)+\operatorname{arctg} b\,.\log 2\right]$$

woraus für $b=1$ das von Bertrand gefundene Integral

$$\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{8}\log 2$$

sich ergibt.

Es sei ferner

$$f(x) = \log(1+x^2), \quad X = \frac{1}{1+x}, \quad a = 0.$$

Hier ergibt sich die Gleichung:

$$\int_0^b \frac{dx}{1+x}\log(1+x^2) = 2\int_0^1 x_1 dx_1 \int_0^b \frac{x^2\,dx}{(1+x)(1+x^2x_1^2)}$$

$$= 2\int_0^1 \frac{x_1 dx_1}{1+x_1^2}\left[\log(1+b) + \frac{1}{2x_1^2}\log(1+b^2x_1^2) - \frac{1}{x_1}\operatorname{arctg} bx_1\right]$$

Auch hier gelangt man nach einigen Reductionen zu dem Resultate

$$\int_0^b \frac{(b^2-x^3)\log(1+x^2)}{x(1+x)(b^2+x^2)}\,dx = -\log(1+b).\log 2 + 2\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}\operatorname{arctg} bx$$

woraus für $b=1$ sich ergibt

$$\int_0^1 \frac{(1-x^3)\log(1+x^2)}{x(1+x)(1+x^2)}\,dx = \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 - (\log 2)^2$$

Man kann übrigens für $b=1$ noch ein anderes Integral finden. Da nämlich die zuerst erhaltene Gleichung in der Form:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x}\log(1+x^2) = (\log 2)^2 - \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 + \int_0^1 \frac{dx}{x(1+x^2)}\log(1+x^2)$$

geschrieben und das Integral rechter Hand durch

$$\int_0^1 \frac{dx}{x}\log(1+x^2) - \int_0^1 \frac{x\,dx}{1+x^2}\log(1+x^2)$$

ausgedrückt werden kann, wobei der erste Theil $\frac{\pi^2}{24}$, der letzte $\frac{1}{4}(\log 2)^2$ zum Werthe hat, so ergibt sich

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} \log(1+x^2) = \frac{3}{4}(\log 2)^2 - \frac{\pi^2}{48}$$

Man erhält daraus durch partielle Integration noch die Gleichung

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{1+x^2} \log(1+x) = \frac{1}{8}(\log 2)^2 + \frac{\pi^2}{96}$$

Einem weitern hierher gehörigen Falle entsprechen die Annahmen

$$f(x) = \operatorname{arctg} x \qquad X = \frac{1}{1+x}, \quad a = -b, \quad 0 < b < 1,$$

für welche man die Gleichung erhält:

$$\int_{-b}^{+b} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x} dx = \int_0^1 dx_1 \int_{-b}^{+b} \frac{x\,dx}{(1+x)(1+x^2 x_1^2)}$$

Die rechte Seite näher entwickelt gibt

$$\int_0^1 \frac{dx_1}{1+x_1^2} \left\{\log \frac{1-b}{1+b} + \frac{2}{x_1} \operatorname{arctg} b x_1\right\}$$

oder

$$\frac{\pi}{4} \log \frac{1-b}{1+b} + \int_{-b}^{+b} \frac{b^2 \operatorname{arctg} x}{x(b^2+x^2)} dx$$

Es ist daher:

$$\int_{-b}^{+b} \frac{(b^2-x^3) \operatorname{arctg} x}{x(1+x)(b^2+x^2)} dx = \frac{\pi}{4} \log \frac{1+b}{1-b}$$

Auch mag bemerkt werden, daß die Gleichung stattfindet:

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} bx}{x(1+x^2)}\,dx = \frac{\pi}{8}\log\frac{1+b}{1-b} + \frac{1}{2}\int_{-b}^{+b}\frac{\operatorname{arctg} x}{1+x}\,dx$$

Wird endlich

$$f(x) = \log(1+x), \quad X = \frac{1}{x(1+x^2)}, \quad a = 0, \quad b > 0$$

gesetzt, so ergibt sich zunächst die Gleichung

$$\int_0^b \frac{\log(1+x)}{x(\alpha^2+x^2)}\,dx = \int_0^1 dx_1 \int_0^b \frac{dx}{(\alpha^2+x^2)(1+xx_1)}$$

deren rechte Seite

$$\int_0^1 \frac{dx_1}{1+\alpha^2 x_1^2}\left[\frac{1}{\alpha}\operatorname{arctg}\frac{b}{\alpha} - \frac{x_1}{2}\log\left(1+\frac{b^2}{\alpha^2}\right) + x_1\log(1+bx_1)\right]$$

ist. Nach einigen Umformungen gelangt man zu dem Resultat

$$\int_0^b \frac{(b^2-x^4)\log(1+x)}{x(\alpha^2+x^2)(b^2+\alpha^2x^2)}\,dx$$

$$= \frac{1}{\alpha^2}\left[\operatorname{arctg}\alpha\,.\operatorname{arctg}\frac{b}{\alpha} - \frac{1}{4}\log(1+\alpha^2)\,.\log\left(1+\frac{b^2}{\alpha^2}\right)\right]$$

Für $\alpha = b = 1$ folgt hieraus:

$$\int_0^1 \frac{(1-x^2)\log(1+x)}{x(1+x^2)}\,dx = \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{1}{4}(\log 2)^2.$$

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1869

Band/Volume: 60_2

Autor(en)/Author(s): Winckler Anton

Artikel/Article: Über einige zur Theorie der bestimmten Integrale gehörige Formeln und Methoden. 857-917