Über die Bestimmung einer Kometenbahn.

(II. Abhandlung.)

Von dem c. M. **Dr. Theodor Ritter v. Oppolzer.**

Ich habe eine Abhandlung, die mit der vorliegenden gleich betitelt ist, im LVII. Bande (Februar-Heft 1868) der Sitzungsberichte veröffentlicht. Die daselbst gegebene Lösung des Problems, aus drei Beobachtungen eines Kometen die parabolischen Elemente seiner Bahn zu bestimmen, hatte den Endzweck, aus den gegebenen Beobachtungen die Elemente in der ersten Hypothese schon möglichst genau zu erhalten, so daß der nachtheilige Einfluß der Beobachtungsfehler auf ein Minimum herabgebracht wird; andererseits bietet die daselbst entwickelte Methode den Vortheil, daß dieselbe frei ist von dem bekannten Ausnahmefalle, welcher nicht zu selten die Anwendbarkeit und Brauchbarkeit der Olbers'schen Methode in Frage stellt. Es würde offenbar die von mir vorgeschlagene Rechnungsform jedenfalls stets vor der sonst üblichen Olbers'schen den Vorzug verdienen, wenn dieselbe auf eben so kurze Rechnungen führen würde, wie die letztere; da nun aber durch die Anwendung meiner Formeln eine Mehrarbeit in Bezug auf die auszuführenden Rechnungsoperationen entsteht, so wird man nur in den Fällen dieselben anzuwenden haben, wo die ungünstigen Verhältnisse die Olbers'sche Methode in Frage stellen. Ich habe nun in der letzten Zeit sehr zweckmäßige Abkürzungen für meine Methode gefunden, so daß eine ganz wesentliche Erleichterung in der Rechnung eintritt und die Kürze der Olbers'schen Rechnungsform fast erreicht ist. Die Mehrarbeit, die meine Methode nun erfordert, ist sehr gering, und ich meine, daß man dieselbe jetzt häufiger wird mit Vortheil anwenden, wenn die Verhältnisse nur halbwegs ungünstig für Olbers' Methode sind. Es wird daher vorerst die Frage herantreten, wie man vor Beginn der Rechnung mit Sicherheit entscheiden kann, ob Olbers' Methode mit Vortheil anwendbar ist oder nicht.

§. 1. Über die Grenzen der Anwendbarkeit der Olbers'schen Methode. Ich habe in meiner ersten Abhandlung gezeigt, daß im Allgemeinen bei der Bestimmung parabolischer Elemente der mittleren Beobachtung nicht völlig genügt werden kann, indem das Problem nur fünf willkürliche Constante enthält, während drei Beobachtungen sechs völlig unabhängige Bedingungsgleichungen aufstellen; ich habe diesen nachtheiligen Umstand dadurch beseitigt, indem ich anstatt der zweiten Beobachtung als Bedingung eingeführt habe, daß der Komet zur Zeit der zweiten Beobachtung bloß in einem größten Kreise steht, der durch die mittlere Beobachtung hindurchgelegt ist. Die Lage dieses größten Kreises ist sonst willkürlich, er braucht nur durch die mittlere Beobachtung hindurchzugehen. Ich habe ferner in der ersten Abhandlung gezeigt, daß die Fixirung der Lage dieses größten Kreises durch die weitere Bedingung, daß er außerdem durch den mittleren Sonnenort hindurchgelegt wird, auf die Olbers'sche Lösung des Problems hinführt; man kann aber auch den größten Kreis so wählen, daß der nachtheilige Einfluß der Beobachtungsfehler auf die Bestimmung der Elemente möglichst herabgedrückt wird und diese Wahl hat die in der ersten Abhandlung entwickelte Methode bedingt; ich habe daselbst einen Beweis gegeben für die Rechtfertigung der Wahl des größten Kreises; seitdem habe ich einen neuen schärferen Beweis gefunden, und ich werde denselben hier entwickeln. Bezeichnet man mit Π die Länge des aufsteigenden Knotens des zu wählenden größten Kreises und mit J die Neigung, so ist die Bedingung, daß der größte Kreis durch die mittlere Beobachtung hindurchgeht, ausgedrückt durch

$$tg\, J = \frac{tg\, \beta_{,,}}{\sin(\lambda_{,,} - \Pi)}$$

wobei $\lambda_{,,}$ und $\beta_{,,}$ die durch die mittlere Beobachtung gegebene Länge und Breite des Kometen vorstellt; diese Bedingung muß daher unter allen Umständen völlig scharf erfüllt werden. Um nun aber die sonst willkürliche Lage des größten Kreises in das Problem aufnehmen zu können, werde ich eine neue Größe einführen, nämlich den Winkel i, den der zu wählende größte Kreis am mittleren Kometenorte mit dem zugehörigen Breitenkreise bildet. Für denselben lassen sich nach dem bisherigen sofort die folgenden Relationen aufstellen:

$$\begin{aligned} \sin J \cos(\lambda_{,,} - \Pi) &= \cos i \\ \sin J \sin(\lambda_{,,} - \Pi) &= \sin i \sin \beta_{,,} \\ \cos J &= \sin i \cos \beta_{,,}. \end{aligned}$$

Es ist klar, dass der Winkel i völlig willkürlich gewählt werden kann.

Die zwischen der ersten und dritten geocentrischen Distanz ($\rho_{,}$ und $\rho_{,,,}$) bestehende Relation habe ich in meiner ersten Abhandlung auf die folgende Form gebracht.

Bezeichnet man die Verhältnisse der Dreiecksflächen durch

$$\frac{[r_{,} r_{,,}]}{[r_{,} r_{,,,}]} = n'', \quad \frac{[r_{,,} r_{,,,}]}{[r_{,} r_{,,,}]} = n$$

und ferner mit der Beibehaltung der Bezeichnung der ersten Abhandlung

$$\left.\begin{aligned} \odot_{,} &= R_{,} \sin(L_{,} - \Pi) \\ \odot_{,,} &= R_{,,} \sin(L_{,,} - \Pi) \\ \odot_{,,,} &= R_{,,,} \sin(L_{,,,} - \Pi) \\ \eth_{,} &= \sin\beta_{,} \cos J - \sin(\lambda_{,} - \Pi) \cos\beta_{,} \sin J \\ \eth_{,,,} &= \sin(\lambda_{,,,} - \Pi) \cos\beta_{,,,} \sin J - \sin\beta_{,,,} \cos J \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

so wird diese Relation

$$\rho_{,,,} n'' \eth_{,,,} = \sin J \{ n \odot_{,} - \odot_{,,} + n'' \odot_{,,,} \} + \rho_{,} n \eth_{,} \qquad (2)$$

Führt man nun in diese Relation den willkürlichen Winkel i ein und setzt, um zusammenziehen zu können

$$\begin{aligned} nR_{,} \sin(L_{,} - \lambda_{,,}) - R_{,,} \sin(L_{,,} - \lambda_{,,}) &+ \\ + n'' R_{,,,} \sin(L_{,,,} - \lambda_{,,}) &= f \sin F \\ \sin\beta_{,,} \{ nR_{,} \cos(L_{,} - \lambda_{,,}) - R_{,,} \cos(L_{,,} - \lambda_{,,}) &+ \\ + n'' R_{,,,} \cos(L_{,,,} - \lambda_{,,}) \} &= f \cos F \\ \sin\beta_{,} \cos\beta_{,,} - \cos(\lambda_{,,} - \lambda_{,}) \cos\beta_{,} \sin\beta_{,,} &= \sin\Delta_{,,,} \cos w_{,} \\ \sin(\lambda_{,,} - \lambda_{,}) \cos\beta_{,} &= \sin\Delta_{,,,} \sin w_{,} \\ \sin\beta_{,,,} \cos\beta_{,,} - \cos(\lambda_{,,,} - \lambda_{,,}) \cos\beta_{,,,} \sin\beta_{,,} &= \sin\Delta_{,} \cos w_{,,,} \\ \sin(\lambda_{,,,} - \lambda_{,,}) \cos\beta_{,,,} &= \sin\Delta_{,} \sin w_{,,,} \end{aligned}$$

so wird statt der obigen Gleichung die folgende geschrieben werden können:

$$\rho_{,,,}\, n'' \sin\Delta_{,} \sin(w_{,,,} - i) = f \sin(F + i) + \rho_{,}\, n \sin\Delta_{,,,} \sin(w_{,} + i) \,..(3)$$

welche die sehr merkwürdige Eigenschaft besitzt, daß dieselbe stets richtig bleibt, gleichviel, welche Annahme man über i macht.

Einige der eben eingeführten Hilfsgrößen lassen eine sehr einfache geometrische Deutung zu, so wird sein: $\mathfrak{A}_{,}$ der Sinus des Perpendikels vom ersten Ort auf den gewählten größten Kreis, $\mathfrak{A}_{,,,}$ der Sinus des Perpendikels vom dritten Ort auf den gewählten größten Kreis, der durch die mittlere Beobachtung hindurchgelegt ist. $\Delta_{,,,}$ ist offenbar die scheinbare Distanz des ersten und zweiten Ortes und $\Delta_{,}$ die des zweiten und dritten Ortes, $w_{,}$ ist der Winkel, den $\Delta_{,,,}$ mit dem mittleren Breitenkreise, $w_{,,,}$ der Winkel, den $\Delta_{,}$ mit demselben Breitenkreise einschließt.

Die gegenseitige Bestimmung von $\rho_{,}$ und $\rho_{,,,}$ aus der Gleichung (3) wird um so sicherer sein, je größer die zugehörigen Coefficienten werden, denn die Structur der Gleichung zeigt, daß der Fall $\frac{\infty}{\infty}$ nicht eintreten kann. Es wird demnach zu setzen sein:

$$\{n \sin\Delta_{,,,} \sin(w_{,} + i)\}^2 + \{n'' \sin\Delta_{,} \sin(w_{,,,} - i)\}^2 = \text{Maximum},$$

oder

$$n^2 \sin\Delta_{,,,}{}^2 \sin 2(w_{,} + i) - n''^2 \sin\Delta_{,}{}^2 \sin 2(w_{,,,} - i) = 0.$$

Zunächst wird man bemerken, daß die Größen n und n'' vor Auflösung des Problems nicht genau bekannt sind; dies wird aber für die Lösung der vorgelegten Aufgabe ganz ohne Bedeutung sein, da man im Stande ist, hinreichend genaue Näherungen zu geben für diese Werthe, und es wird auch stets genügen, nur ganz beiläufig die günstigste Lage des größten Kreises festzulegen, da die Bahnbestimmung nicht wesentlich an Sicherheit verlieren kann, wenn nur genähert der Bedingung des Maximums genügt wird. Es ist aber mit Beibehaltung der allgemein angenommenen Bezeichnungsweise

$$\frac{n}{n''} = \frac{\tau_{,}}{\tau_{,,,}} \left\{ 1 - \frac{1}{6} \frac{2 - \tau_{,,,}{}^2}{r_{,,}{}^3} + \qquad \right\}$$

in welchem Ausdrucke die Glieder zweiter Ordnung schon dem eben Gesagten zu Folge übergangen werden können; dieselben werden aber um so einflußloser sein, je gleicher die Zwischenzeiten gewählt wurden, einer Bedingung, der man sich aus anderweitig bekannten Gründen ohnedies möglichst zu nähern bestrebt sein muß. Setzt man zur Abkürzung

$$\frac{\tau_{,} \sin \Delta_{,,,}}{\tau_{,,,} \sin \Delta_{,}} = g$$

so wird für's Maximum:

$$g^2 \sin 2(w_{,} + i) - \sin 2(w_{,,,} - i) = 0$$

woraus man ohne Schwierigkeit bestimmt

$$tg\,2i = \frac{\sin 2w_{,,,} - g^2 \sin 2w_{,}}{g^2 \cos 2w_{,} + \cos 2w_{,,}}.$$

Die Zweideutigkeit, die in der Bestimmung durch die Tangente liegt, ist dadurch zu erklären, daß die durchgeführte Bestimmungsart ebenfalls für die Bestimmung des Minimums gilt; der eine Werth gehört zum Maximum, der andere zum Minimum. Die Entscheidung, welchen Werth man zu nehmen hat, wird nicht schwer und meist auf den ersten Blick zu erhalten sein; sollte je ein Zweifel entstehen, so wird die Rückkehr zur Gleichung

$$g^2 \sin(w_{,} + i)^2 + \sin(w_{,,,} - i)^2 = \text{Maximum}$$

und die Substitution der gefundenen Werthe für i sofort den zu wählenden Winkel finden lassen. Es wäre gewiß dieses eben angegebene Verfahren zur Bestimmung von i im Allgemeinen wenig empfehlenswerth, da aus der Anwendung desselben eine nicht unbeträchtliche Mehrarbeit in der Rechnung entsteht; ist aber die Bewegung des Kometen nicht allzu unregelmäßig und abweichend von einem größten Kreise, so wird sich leicht eine hinreichend genaue Näherung für i beschaffen lassen. Nennt man den Winkel, den der auf der scheinbaren Bewegungsrichtung des Kometen senkrechte größte Kreis mit dem Breitenkreise einschließt: γ, so wird näherungsweise sein:

$$w_{,} = 90^\circ - \gamma$$
$$w_{,,,} = 90^\circ + \gamma$$

und bei nicht zu unregelmäßiger geocentrischer Bewegung

$$g = 1.$$

Es wird dann:

$$tg\, 2i = tg\, 2\gamma$$

und für

$$i = \gamma \text{ das Maximum}$$
$$i = \gamma - 90^\circ \text{ das Minimum.}$$

Die Bestimmung des größten Kreises ist so getroffen, daß derselbe senkrecht auf der scheinbaren Bewegung des Kometen steht, eine Wahl, die a priori viel für sich hat. Ist ein bestimmter Werth für i angenommen, so bestimmt sich daraus J und Π nach

$$\left.\begin{aligned} \sin(\lambda_{,,} - \Pi)\, tg\, J &= tg\, \beta_{,,} \\ \cos(\lambda_{,,} - \Pi)\, tg\, J &= cotg\, i \sec \beta_{,,} \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

wobei J stets kleiner als 90° angenommen werden kann. Für $cotg\, i$ wird man, wenn es gestattet ist, die eben angedeuteten Näherungen einzuführen, mit ausreichender Genauigkeit setzen dürfen:

$$cotg\, i = -\frac{\lambda_{,,,} - \lambda_{,}}{\beta_{,,,} - \beta_{,}} \cos \beta_{,,}$$

und man hat demnach zur unmittelbaren Bestimmung von J und Π die höchst einfachen Gleichungen:

$$\sin(\lambda_{,,} - \Pi)\, tg\, J = tg\, \beta_{,,}$$
$$\cos(\lambda_{,,} - \Pi)\, tg\, J = -\frac{\lambda_{,,,} - \lambda_{,}}{\beta_{,,,} - \beta_{,}}$$

welche Form identisch ist mit dem in der ersten Abhandlung gegebenen Ausdrucke und welche ich für erste Bahnbestimmungen, falls Olbers' Methode verlassen werden muß, stets vorschlagen möchte, wenn nicht außerordentliche Verhältnisse die Rückkehr auf die strengen Formeln gerathen erscheinen lassen. Da es meist nur auf eine beiläufige Bestimmung von i ankommt, so könnte in diesem letzteren Falle auch mit Hilfe eines Globus leicht dieser Werth auf constructivem Wege erlangt werden; will man aber ganz streng vorgehen, so sind nach den bisherigen Entwicklungen die folgenden

Formeln zu benützen, bei denen man sich wohl mit einer vierstelligen logarithmischen Rechnung begnügen kann.

$$\sin\beta_{,}\ \cos\beta_{,,} - \cos(\lambda_{,,} - \lambda_{,})\cos\beta_{,}\ \sin\beta_{,,} = \sin\Delta_{,,,}\cos w_{,}$$
$$\sin(\lambda_{,,} - \lambda_{,})\cos\beta_{,} = \sin\Delta_{,,,}\sin w_{,}$$
$$\sin\beta_{,,,}\cos\beta_{,,} - \cos(\lambda_{,,,} - \lambda_{,,})\cos\beta_{,,,}\ \sin\beta_{,,} = \sin\Delta_{,}\ \cos w_{,,,}$$
$$\sin(\lambda_{,,,} - \lambda_{,,})\cos\beta_{,,,} = \sin\Delta_{,}\ \sin w_{,,,}$$
$$g = \frac{T_{,,,} - T_{,,}}{T_{,,} - T_{,}}\ \frac{\sin\Delta_{,,,}}{\sin\Delta_{,}}$$
$$tg\,2i = \frac{\sin 2w_{,,,} - g^2\sin 2w_{,}}{\cos 2w_{,,,} + g^2\cos 2w_{,}}.$$

Der Quadrant, in dem $2i$ zu nehmen ist, bestimmt sich daraus, daß der Ausdruck

$$g^2\sin(w_{,} + i)^2 + \sin(w_{,,,} - i)^2$$

zu einem Maximum wird. Ist i bestimmt, so ermittelt man nach (4) die Werthe für J und Π.

Nach diesen Vorbereitungen wird es nicht schwer sein, von Fall zu Fall zu entscheiden, in wie weit sich Olbers' Methode von der günstigsten Auswahl des größten Kreises entfernt, und in welchem Maße im ersteren Falle die Beobachtungsfehler nachtheiliger einwirken.

Vor Allem wird es nöthig werden, den Werth des Winkels i zu ermitteln, wie derselbe in Olbers' Methode bestimmt wird; nenne ich denselben i_0 so wird dieser Winkel, wenn man bedenkt, daß nun der größte Kreis durch den zweiten Sonnenort $(L_{,,})$ hindurchgeht:

$$tg\,i_0 = tg(\lambda_{,,} - L_{,,})\,cosec\,\beta_{,,}$$

Die günstigste Bestimmung ist aber:

$$tg\,i = -\frac{\beta_{,,,} - \beta_{,}}{\lambda_{,,,} - \lambda_{,}}\,sec\beta_{,,}.$$

Die Unsicherheit, in welchem Quadrante i_0 und i zu nehmen sind, ist für den vorliegenden Fall bedeutungslos, wie dies eine einfache Überlegung zeigt. Wird $i = i_0 \pm 180$, so ist die Olbers'sche Annahme identisch mit der bestmöglichsten Wahl, ist aber $i = i_0 \pm 90^\circ$, so ist Olbers' Methode nicht verwendbar, indem Beobachtungsfehler einen allzu nachtheiligen Einfluß ausüben und selbst theoretisch unbrauchbar, wenn die zwei äußeren Orte in dem durch den zweiten Kometen und Sonnenort gelegten Kreise liegen; es wird dann die Relation zwischen den geocentrischen Distanzen die unbestimmte Form

$$\rho_{,,,} = \frac{0}{0}\,\rho.$$

erhalten. Je mehr sich also i_0 der ungünstigen Annahme annähert, um so mehr gehen die Beobachtungsfehler vergrößert auf das Resultat über; anfänglich wird aber der Unterschied, so lange nahe $i = i_0 \pm 180$ ist, ganz ohne Bedeutung sein.

Es wird sich also die Aufgabe stellen, die Genauigkeit der beiden Methoden in eine solche Relation zu bringen, daß man entscheiden kann, um wievielmal vergrößert die Beobachtungsfehler nach Olbers' Methode in das Resultat übergehen; es wird dann von Fall zu Fall dem Ermessen des Rechners überlassen bleiben müssen, ob diese Vergrößerung hinlänglich mäßig ist, um nicht allzu ungenaue Resultate zu erhalten.

Vor Allem kann hervorgehoben werden, daß das Glied: $f \sin(F+i)$ in der Gleichung (3) außer Acht gelassen werden kann, indem in demselben die Beobachtungsfehler mit Größen zweiter Ordnung in Bezug auf die Zwischenzeiten multiplicirt erscheinen, also auf das Resultat ohne irgendwie erheblichen Einfluß sein können; bezeichnet man also das Verhältniß: $\frac{n \sin\Delta_{,,,} \sin(w_{,} + i)}{n'' \sin\Delta_{,} \sin(w_{,,,} - i)}$ mit M, so wird ausschließlich die Unsicherheit der Bestimmung mit der fehlerhaften Annahme über M im Zusammenhange stehen; es ist aber

$$\frac{n}{n''} \quad \frac{\vartheta_{,}}{\vartheta_{,,,}} = M.$$

Daraus wird erhalten:

$$dM = \left\{\frac{n}{n''}\, d\vartheta_{,} - M\, d\vartheta_{,,,}\right\} \frac{1}{\vartheta_{,,,}} \quad (5)$$

$\frac{n}{n''}$ und M sind im Allgemeinen nahe constante Größen; mag man i wie immer wählen, im Allgemeinen werden die Beobachtungsfehler die gleichen $d\delta_{,}$ und $d\delta_{,,,}$ hervorbringen, daraus erschließt man unmittelbar, daß die Unsicherheit ganz wesentlich von dem Factor $\frac{1}{\delta_{,,,}}$ abhängt; nenne ich $\delta_{,,,}$ den Sinus des Perpendikels auf den größten Kreis, der der günstigsten Bestimmung entspricht, so wird die Unsicherheit von M nach Olbers' Annahme zunehmen, im Verhältniß:

$$\frac{\delta_{,,,}}{\delta_{,,,}^{\circ}}$$

wo unter der Größe $\delta_{,,,}^{\circ}$ jetzt der zu Olbers' Bestimmung gehörige Sinus des Perpendikels verstanden wird; man kann aber für diesen Quotienten schreiben, wenn man mit i die günstigste Lage des Kreises bezeichnet, mit i_0 die Lage, welche nach Olbers' Methode getroffen werden muß:

$$\frac{\delta_{,,,}}{\delta_{,,,}^{\circ}} = \frac{\sin(w_{,,,}-i)}{\sin(w_{,,,}-i_0)} = \frac{\sin(w_{,,,}-i)}{\sin\{(w_{,,,}-i)+(i-i_0)\}} =$$
$$\frac{1}{\cos(i-i_0)+\operatorname{cotg}(w_{,,,}-i)\sin(i-i_0)}.$$

Nun zeigen aber die vorausgehenden Entwickelungen, daß stets sehr nahe

$$w_{,,,} = 90 + i$$

ist, daher $\operatorname{cotg}(w_{,,,}-i)$ verschwindend klein betrachtet werden darf. Daraus kann man schließen, daß die Unsicherheit von M sehr nahe im Verhältnisse von $\sec(i-i_0)$ zunimmt. Will man also nicht, daß die Beobachtungsfehler einen mehr als doppelt so großen Einfluß auf das Resultat nehmen, als dies nothwendig ist, so wird man Olbers' Methode verlassen zu haben, wenn

$$\cos(i-i_0) < \pm\frac{1}{2}.$$

Es mag hier am Platze sein, zu erinnern, daß alle Fehler in M, um eine Ordnung vergrößert auf die Elemente übergehen, wie dies zuerst von Clausen nachgewiesen wurde.

An die Gleichung (5) läßt sich auch eine nicht unwichtige Bemerkung knüpfen; die Fehler $d\delta_{,}$ und $d\delta_{,,,}$ können von verschiedener Größe und von verschiedenem Zeichen sein, und es kann recht wohl der in der Klammer stehende Ausdruck durch die Wahl von i dahin gebracht werden, daß derselbe verschwindet, also den Fehler in M aufhebt; man kennt aber kein Hilfsmittel, welches leiten könnte, um i dieser Bedingung gemäß zu bestimmen, da die Beobachtungsfehler als solche unbekannt sind. Es kann daher wohl leicht der Fall eintreten, daß in einem gewissen Falle, wo Olbers' Methode in ihrer Anwendung an sich nicht günstig ist, die Beobachtungsfehler so vertheilt sind, daß dM verschwindet, und man demnach ein besseres Resultat erhält, als nach der umständlicheren Methode; aber auf solche Zufälligkeiten, die wohl auch leicht im entgegengesetzten Sinne wirken können, darf man niemals rechnen, und der Vorzug der Genauigkeit wird im Allgemeinen der letzteren Methode gesichert bleiben. Der eben erwähnte Fall trifft mit dem in der Praxis nicht selten auftretenden Falle überein, daß eine Beobachtung mit sehr geringem Gewichte oft dem thatsächlichen Werthe näher kommt, als eine solche mit sehr hohem Gewicht; es wird wohl aber Niemand beifallen, der Beobachtung mit geringem Gewicht aus dem Umstande des Stimmens mit dem wahren Werthe ein hohes Gewicht zuschreiben zu wollen.

§. 2. Die Ersetzung der Verhältnisse der Dreiecksflächen in der Fundamentalgleichung. Die Gleichung (2), welche die Relation zwischen $\rho_{,}$ und $\rho_{,,,}$ darstellt, enthält die unbekannten Verhältnisse der Dreiecksflächen, die man aber wenigstens der Hauptsache nach durch die Zwischenzeiten auszudrücken vermag und ich habe in meiner ersten Abhandlung Reihen gegeben, die bis zu Größen vierter Ordnung (exclusive) vorschreiten und in den Gliedern zweiter und dritter Ordnung die Größen $(r_{,}+r_{,,,})$ und $(r_{,,,}-r_{,})$ enthalten, ich habe dadurch eine durch die bisherigen Methoden noch nicht erreichte Genauigkeit sofort in der ersten Hypothese erzielt, meine aber durch diese weitgehende Genauigkeit meiner Methode geschadet zu haben, indem nothwendig die Formeln complicirter werden und zur Anwendung sich auf den ersten Blick nicht sehr empfehlen. Ich habe mir daher vorgesetzt, in der Substitution der Verhältnisse der Dreiecksflächen durch die Zwischenzeiten nur so weit zu gehen, wie Olbers in seiner Methode, nämlich bis zu Gliedern zweiter Ordnung; die Annäherung wird sofort dritter Ordnung bei gleichen Zwischenzeiten. Es ist mir nun in der That gelungen, die Rechnungsoperationen wesentlich zu vereinfachen, und ich meine, daß nun kein Zweifel mehr obwalten kann, daß meine Methode nächst Olbers' Methode die kürzeste ist, und daß bei dem Eintritte des Ausnahmefalles die vorliegende Methode die bei Weitem bequemste und sicherste der bisher bekannten Methoden ist, sie steht an Kürze sogar kaum der Olbers'schen Methode nach.

Bringt man die Gleichung (2) auf die Form:

$$\rho_{,,,} = \frac{\sin J}{n'' \delta_{,,,}} \{ n \odot_{,} - \odot_{,,} + n'' \odot_{,,,} \} + \frac{n}{n''} \quad \frac{\delta_{,}}{\delta_{,,,}} \rho_{,} \qquad (6)$$

so sieht man sofort, daß in dem in der Klammer stehenden Ausdrucke die Verhältnisse der Dreiecksflächen durch die Zwischenzeiten um eine Ordnung genauer ausgedrückt werden müssen, als in dem mit $\rho_{,}$ multiplicirten Verhältnisse, weil der erstere Ausdruck durch den Sinus des Perpendikels des dritten Ortes auf den gewählten größten Kreis ($\delta_{,,,}$) dividirt erscheint, welche Größe nothwendig von der ersten Ordnung ist, während im zweiten Gliede im Zähler der Factor $\delta_{,}$ erscheint, also $\frac{\delta_{,}}{\delta_{,,,}}$ sofort nullter Ordnung wird. Es ist deßhalb theoretisch ungenügend, in der ersten Annäherung in den in der Klammer stehenden Ausdrücken die Verhältnisse der Dreiecksflächen unmittelbar den Zwischenzeiten proportional zu setzen; man begeht dadurch nach der eben hervorgehobenen Auseinandersetzung einen Fehler erster Ordnung, welcher Fehler auf die Elemente abermals um eine Ordnung vergrößert übergeht, also Fehler 0^{ter} Ordnung hervorbringt; die erhaltenen Resultate könnten daher unter Umständen nicht einmal als Näherungen gelten, und es ist daher meine Behauptung gerechtfertigt, daß meine Methode die sicherste ist, da sich die anderen Methoden, die man in diesem Falle anwenden könnte, durchaus diese Vernachlässigung erlauben. Ich werde später darauf aufmerksam machen, welchen Umständen man es zu verdanken hat, daß die Methoden doch meistens zu einem praktisch brauchbaren Resultate führten; vor Allem kann gleich hier hervorgehoben werden, daß die Kometen meist in der Erdnähe entdeckt werden und häufig daher eine starke geocentrische Bewegung zeigen, dadurch aber erhält sofort $\delta_{,,,}$ einen größeren Werth und kann allenfalls auch dem Werthe nach bisweilen als eine Größe 0^{ter} Ordnung angesehen werden; wäre $\delta_{,,,}$ thatsächlich 0^{ter} Ordnung, so wäre die einfache Einsetzung der Zwischenzeiten eine hinreichende Annäherung. Man könnte nun meinen, daß, da man füglich $\vartheta_{,,,}$ als erster Ordnung ansehen muß, der von mir hervorgehobene Fehler auch Olbers' Methode trifft; doch ist dies nicht der Fall, denn nach Olbers' Annahme über die Lage des größten Kreises, nämlich:

$$L_{,,} = \Pi$$

wird sofort:

$$\begin{aligned} \odot_{,} &= R_{,} \sin(L_{,} - L_{,,}) \\ \odot_{,,} &= 0 \\ \odot_{,,,} &= R_{,,,} \sin(L_{,,,} - L_{,,}) \end{aligned}$$

also $\odot_{,}$ und $\odot_{,,,}$ selbst erster Ordnung, wodurch der Fehler innerhalb der Klammer dritter Ordnung wird.

Ich werde nun die Gleichung (6) zur weiteren Transformation vornehmen. Sieht man von den höchst unbeträchtlichen Breitenstörungen, die die Erde erleidet, ab, so wird man nach der bekannten symbolischen Bezeichnung für die Verhältnisse der Dreiecksflächen setzen können:

$$\frac{[R_{,,} R_{,,,}]}{[R_{,} R_{,,,}]} \odot_{,} - \odot_{,,} + \frac{[R_{,} R_{,,}]}{[R_{,} R_{,,,}]} \odot_{,,,} = 0.$$

Zieht man diesen Ausdruck von der Gleichung (6) ab, nachdem derselbe mit $\frac{\sin J}{n'' \vartheta_{,,,}}$ multiplicirt wurde, so wird erhalten:

$$\rho_{,,,} = \frac{\sin J}{n'' \vartheta_{,,,}} \left\{ \odot_{,} \left(n - \frac{[R_{,,} R_{,,,}]}{[R_{,} R_{,,,}]}\right) + \right.$$

$$\left. + \odot_{,,,} \left(n'' - \frac{[R_{,} R_{,,}]}{[R_{,} R_{,,,}]}\right) \right\} + \frac{n}{n''} \frac{\vartheta_{,}}{\vartheta_{,,,}} \rho_{,}.$$

Da sich nun die Erde und der Komet, wenn man wieder von den sehr unbedeutenden Störungen absieht, in Kegelschnittslinien um die Sonne bewegen, so gelten die folgenden Reihen, deren Ableitung in der ersten Abhandlung um eine Ordnung weiter fortgeführt erscheint

$$n = \frac{\tau_{,}}{\tau_{,,}} + \frac{4}{3} \quad \frac{\tau_{,}}{\tau_{,,}} \quad \frac{\tau_{,,}^2 - \tau_{,}^2}{(r_{,} + r_{,,,})^3} +$$

$$n'' = \frac{\tau_{,,,}}{\tau_{,,}} + \frac{4}{3} \quad \frac{\tau_{,,,}}{\tau_{,,}} \quad \frac{\tau_{,,}^2 - \tau_{,,,}^2}{(r_{,} + r_{,,,})^3} + .$$

$$\frac{[R_{,,} R_{,,,}]}{[R_{,} R_{,,,}]} = \frac{\tau_{,}}{\tau_{,,}} + \frac{4}{3} \quad \frac{\tau_{,}}{\tau_{,,}} \quad \frac{\tau_{,,}^2 - \tau_{,}^2}{(R_{,} + R_{,,,})^3} + \cdot\cdot$$

$$\frac{[R_{,} R_{,,}]}{[R_{,} R_{,,,}]} = \frac{\tau_{,,,}}{\tau_{,,}} + \frac{4}{3} \quad \frac{\tau_{,,,}}{\tau_{,,}} \quad \frac{\tau_{,,}^2 - \tau_{,,,}^2}{(R_{,} + R_{,,,})^3} +$$

Damit erhält man zunächst, wenn man den vorgesetzten Grenzen entsprechend substituirt:

$$\rho_{,,,} = \frac{4}{3} \frac{\sin J}{\mathfrak{H}_{,,,}} \left\{ \frac{1}{(r_{,} + r_{,,,})^3} - \frac{1}{(R_{,} + R_{,,,})^3} \right\} \times$$
$$\times \left\{ \frac{\tau_{,}}{\tau_{,,,}} \odot_{,} (\tau_{,,}^2 - \tau_{,}^2) + \odot_{,,,} (\tau_{,,}^2 - \tau_{,,,}^2) \right\} + \frac{\mathfrak{H}_{,}}{\mathfrak{H}_{,,,}} \frac{\tau_{,}}{\tau_{,,,}} \rho_{,}.$$

Es wird sich aber für die Ausdrücke $\odot_{,}$, und $\odot_{,,,}$ offenbar eine Entwicklung nach steigenden Potenzen der Zwischenzeiten geben lassen, und man wird, ohne sich mit der Entwicklung der speciellen Coefficienten aufzuhalten, die Reihen haben:

$$\odot_{,} \;\; = \odot_{,,} - \alpha \tau_{,,,} + \beta \tau_{,,,}^2 - .$$
$$\odot_{,,,} = \odot_{,,} + \alpha \tau_{,} \;\; + \beta \tau_{,}^2 \; +$$

Läßt man die Glieder zweiter Ordnung in diesen Reihen sofort weg, da daraus nur Fehler vierter Ordnung innerhalb des zweiten Klammerausdruckes entstehen, so wird für denselben geschrieben werden können:

$$3 \tau_{,,} \tau_{,} \odot_{,,} + \alpha \tau_{,} \tau_{,,} (\tau_{,} - \tau_{,,,}).$$

Das zweite Glied dieses Transformationsresultates ist dritter Ordnung und kann übergangen werden, dasselbe wird aber um so unbedeutender sein, da es bei Gleichheit der Zwischenzeiten, die man stets anstreben wird, völlig verschwindet; es ist die oben gemachte Äußerung, daß diese Methode, wie bei Olbers, bei Gleichheit der Zwischenzeiten um eine Ordnung genauer wird, gerechtfertigt, da in dem mit $\rho_{,}$ multiplicirten Factor auch die Glieder zweiter Ordnung verschwinden. Setzt man also

$$4 \sin J \tau_{,} \tau_{,,} \frac{\odot_{,,}}{\mathfrak{H}_{,,,}} = F$$

$$G = -\frac{F}{(R_{,} + R_{,,,})^3}$$

$$M = \frac{\mathfrak{H}_{,}}{\mathfrak{H}_{,,,}} \quad \frac{{}_{,}\tau}{\tau_{,,,}}$$

so wird die höchst einfache und theoretisch gerechtfertigte Relation zwischen den geocentrischen Distanzen sein:

$$\rho_{,,,} = G + \frac{F}{(r_{,} + r_{,,,})^3} + M\rho_{,}$$

oder indem ich, um mit kleinen Zahlen zu operiren, setze $M - 1 = N$, so wird:

$$\rho_{,,,} - \rho_{,} = G + \frac{F}{(r_{,} + r_{,,,})^3} + N\rho_{,}.$$

Wenn man die vorstehende Relation mit derjenigen vergleicht. welche in der ersten Abhandlung gegeben wurde, so sieht man sofort die erlangte Vereinfachung in den Rechnungsoperationen.

Da in den meisten Fällen zur Zeit der Entdeckung der Komet der Erde nahe steht, so muß fast nothwendig R nahezu gleich r sein; die Folge davon ist, daß sehr nahe

$$G + \frac{F}{(r_{,} + r_{,,,})^3} = 0$$

ist. Dies ist der zweite Grund (vergl. p. 928), weßhalb die theoretisch unvollkommenen Methoden, die bei dem Eintreten des Ausnahmefalles bisher angewendet wurden, in der Regel der Hauptsache nach brauchbare Resultate geliefert haben.

§. 3. Auflösung der Gleichung. Um nun die bei der Lösung des Problems auftretende höhere Gleichung lösen zu können, ist es nöthig, sowohl die Radienvectoren des Kometen $r_{,}$ und $r_{,,,}$ zur Zeit der ersten und dritten Beobachtung als auch die zwischen denselben gelegene Sehne s, als Function der geocentrischen Distanzen darzustellen; ich habe zur Berechnung der letzteren Größen in meiner ersten Abhandlung die Hilfsgrößen A, B, C, D und E eingeführt, deren Berechnung einfach genug sich gestaltet hat; ich habe aber für dieselben noch wesentlich kürzere und bequemere Formen gefunden. Berechnet man nämlich:

$$D = 4\left\{\sin^2\tfrac{1}{2}(\beta_{,,,} - \beta_{,}) + \cos\beta_{,}\cos\beta_{,,,}\sin^2\tfrac{1}{2}(\lambda_{,,,} - \lambda_{,})\right\}$$
$$R_{,,,}\cos(L_{,,,} - L_{,}) - R_{,} = g\cos(\Gamma - L_{,})$$
$$R_{,,,}\sin(L_{,,,} - L_{,}) = g\sin(\Gamma - L_{,})$$

und setzt weiter:

$$A = g^2$$
$$B = -g \cos\beta_{,,,} \cos(\lambda_{,,,} - \Gamma)$$
$$C = \frac{2g}{D} \{\cos\beta_{,} \cos(\lambda_{,} - \Gamma) - \cos\beta_{,,,} \cos(\lambda_{,,,} - \Gamma)\}$$

so ist

$$s_1{}^2 = A + (C + \rho_{,,,}) D \rho_{,} + (\rho_{,,,} - \rho_{,})(B + \rho_{,,,} - \rho_{,}).$$

Die Euler'sche Gleichung gibt aber für dieselbe Sehne den Werth

$$s_2 = \frac{2\tau_{,,}}{\sqrt{r_{,} + r_{,,,}}} \quad \mu$$

wobei μ die bekannte, von Encke entwickelte Hilfsgröße ist, deren Logarithmus sich in der von Encke berechneten Tafel mit dem Argumente

$$\eta = \frac{2\tau_{,,}}{(r_{,} + r_{,,,})^{\frac{3}{2}}}$$

findet.

Um nun weiter $\rho_{,}$ und $\rho_{,,,}$ mit $r_{,}$ und $r_{,,,}$ zu verbinden, habe ich in meiner ersten Abhandlung die Formeln angesetzt:

$$\cos\beta_{,} \cos(\lambda_{,} - L_{,}) = \cos\psi_{,}, \qquad \cos\beta_{,,,} \cos(\lambda_{,,,} - L_{,,,}) = \cos\psi_{,,,}$$
$$R_{,} \sin\psi_{,} = B_{,}, \qquad R_{,,,} \sin\psi_{,,,} = B_{,,,}$$
$$R_{,} \cos\psi_{,} = F_{,}, \qquad R_{,,,} \cos\psi_{,,,} = F_{,,,}$$

wobei $\sin\psi_{,}$ und $\sin\psi_{,,,}$ aus $\cos\psi_{,}$ und $\cos\psi_{,,,}$ abgeleitet werden müssen, eine Ableitung, die unter Umständen ($\cos\psi$ nahe gleich der Einheit) mißlich sein kann; man kann aber in diesem Falle zur Berechnung von $\sin\psi_{,}$ und $\sin\psi_{,,,}$ benützen:

$$\sin\psi_{,}{}^2 = \cos\beta_{,}{}^2 \sin(\lambda_{,} - L_{,})^2 + \sin\beta_{,}{}^2$$
$$\sin\psi_{,,,}{}^2 = \cos\beta_{,,,}{}^2 \sin(\lambda_{,,,} - L_{,,,})^2 + \sin\beta_{,,,}{}^2.$$

In Bezug auf die Auflösung möchte ich Folgendes hinzufügen. Ich führe die ersten Versuche nach der Näherungsform

$$\rho_{,,,} - \rho_{,} = G + \frac{F}{8 r_{,}{}^3} + N\rho_{,}$$

$$s_2 = \frac{2\tau_{,,}}{\sqrt{2r_{,}}}$$

vierstellig durch, so daß die Berechnung von $r_{,,,}$ entfällt und nehme gewöhnlich gleichzeitig die drei Werthe $\rho_{,} = 0{\cdot}2, = 0{\cdot}6, = 1{\cdot}0$ vor, da in der Regel innerhalb dieser Grenzen die Entfernung des Kometen eingeschlossen ist, und die Kenntniß dreier Werthe sofort die Interpolation mit Rücksicht auf die zweiten Differenzen gestattet.

Nenne ich für den

$$\begin{array}{ll} \text{ersten Versuch:} & s_2 - s_1 = w_1 \\ \text{zweiten} & s_2 - s_1 = w_2 \\ \text{dritten} & s_2 - s_1 = w_3 \end{array}$$

so ist die Correction (x) von 0·6, welcher Werth dem $\rho_{,}$ des zweiten Versuches entspricht, in Einheiten des Intervalls (0·4) bestimmt durch:

$$-2w_2 = (w_3 - w_1)x + (w_1 + w_3 - 2w_2)x^2$$

welche Gleichung rasch (am besten auf indirecte Weise) gelöst wird, indem der Coefficient von x^2 meist im Verhältniß zum Coefficienten von x sehr klein sein wird. Ist man so zu einem nahe richtigen Werth von $\rho_{,}$ gelangt, so muß jetzt Alles genauer gerechnet werden; hierbei tritt gleichsam als Schwierigkeit hervor, daß $r_{,,,}$ zur Ermittlung von $\rho_{,,,}$ bekannt sein muß, ohne daß man noch in der Lage ist, aus den vorhandenen Werthen eine sichere Interpolation für $(r_{,} + r_{,,,})$ auszuführen. Ich rechne deßhalb diesen ersten genauern Versuch vorerst nach der Form:

$$\rho_{,,,}{}^{\circ} - \rho_{,} = G + \frac{F}{8r_{,}^{3}} + N\rho_{,}$$

corrigire aber dann $\rho_{,,,}{}^{\circ}$ und den aus diesem Werthe folgenden Radiusvector des Kometen $r_{,,,}{}^{\circ}$ mit Rücksicht auf die ersten Potenzen der Differenz $(\log r_{,,,} - \log r_{,})$ nach den leicht zu erhaltenden Formeln:

$$d\rho_{,,,}{}^{\circ} = \frac{F}{r_{,}^{3}} \quad \frac{3}{16} \frac{(\lg r_{,} - \lg r_{,,,})}{\text{Mod.}}, \quad \log \frac{3}{16.\ \text{Mod.}} = 9{\cdot}6352$$

$$d\log r_{,,,} = \text{Mod.} \frac{\sin\theta_{,,,}}{r_{,,,}} d\rho_{,,,}{}^{\circ}, \quad \log \text{Mod.} = 9{\cdot}6378.$$

Dann ist mit genügender Genauigkeit:

$$\rho_{,,,} = \rho_{,,,}{}^{\circ} + d\rho_{,,,} \qquad \log r_{,,,} = \log r_{,,,}{}^{\circ} + d\log r_{,,,}{}^{\circ}$$

Die Durchführung dieses ersten genaueren Versuches wird sich im Allgemeinen gewiß noch nicht als genügend erweisen und es wird, zwischen s_2 und s_1 sich noch eine Differenz herausstellen; bezeichnet man analog wie früher für diesen Versuch:

$$s_2 - s_1 = w_4$$

so wird die Correction (y) des eben angenommenen Werthes in Einheiten des Intervalles $(0{\cdot}4)$ gefunden, mit Rücksicht auf die obigen Vorversuche:

$$y = \frac{-2\,w_4}{w_3 - w_1 + 2\,(w_3 + w_1 - 2\,w_2)\,x.}$$

Es wird nun der Werth

$$\rho_, = 0{\cdot}6 + 0{\cdot}4\,(x + y)$$

eine ziemliche Annäherung an die Wahrheit sein, und mit diesem Werth wird der zweite Versuch nach dem oben angegebenen Schema durchgeführt. Die Interpolation nach diesen genauen Versuchen wird in der Regel den wahren Werth schon finden lassen, und für den dritten und meist letzten Versuch wird man leicht aus den beiden vorausgehenden Versuchen den Werth von $\log(r_, + r_{,,,})$ interpoliren können, so daß die Anwendung der oben vorgeschlagenen Differentialformeln nicht mehr nöthig wird. Jedenfalls muß im letzten Versuche $r_{,,,}$ direct nach $\rho_{,,,}$ berechnet werden, mit Umgehung der Differentialformeln.

Sollten die Vorversuche zeigen, daß der Werth von $\rho_,$ weit über die Grenze 1 hinausfällt, so wird man den vorhandenen Versuchen weitere Vorversuche anfügen, etwa mit den Werthen 1·4 und 1·8.

Verfährt man auf die eben auseinandergesetzte Weise, so wird man selten nöthig haben, mehr als drei genaue Versuche über $\rho_,$ anzustellen, und die Auflösung der Gleichung wird bei einiger Übung gewiß weniger als eine Stunde in Anspruch nehmen, meist wird man viel weniger Zeit in Anspruch zu nehmen brauchen. Ist einmal $\rho_,$ und $\rho_{,,,}$ bekannt, dann ermitteln sich nach den hinreichend bekannten Methoden, die übrigens in meiner ersten Abhandlung aufgenommen sind, die Elemente.

§. 4. Zusammenstellung der Formeln und Beispiel. Ich gebe jetzt, um eine allfällige Anwendung der eben gegebenen

Formeln zu erleichtern, eine kurze Übersicht der nothwendigen Rechnungsoperationen und füge, um die außerordentliche Kürze der Methode zu zeigen, in extenso ein Beispiel bei.

Vorbereitungs-Rechnungen.

$$tgJ\sin(\lambda_{,,}-\Pi)=\mathrm{tg}\,\beta_{,,}\,,\qquad \text{☄}_{,}=\sin\beta_{,}\cos J-\sin(\lambda_{,}-\Pi)\cos\beta_{,}\sin J$$

$$tgJ\cos(\lambda_{,,}-\Pi)=-\frac{\lambda_{,,,}-\lambda_{,}}{\beta_{,,,}-\beta_{,}},\quad \text{☄}_{,,,}=\sin(\lambda_{,,,}-\Pi)\cos\beta_{,,,}\sin J-\sin\beta_{,,,}\cos J$$

$$\odot_{,,}=R_{,,}\sin(L_{,,}-\Pi)$$

$$\cos\beta_{,}\cos(\lambda_{,}-L_{,})=\cos\psi_{,}\qquad \cos\beta_{,,,}\cos(\lambda_{,,,}-L_{,,,})=\cos\psi_{,,,}$$

$$R_{,}\sin\psi_{,}\ {}^{*})=B_{,}\qquad\qquad B_{,,,}\sin\psi_{,,,}\ {}^{1})=B_{,,,}$$

$$R_{,}\cos\psi_{,}=f_{,}\qquad\qquad R_{,,,}\cos\psi_{,,,}=f_{,,,}$$

$$D=4\left\{\sin^2\tfrac{1}{2}(\beta_{,,,}-\beta_{,})+\cos\beta_{,}\cos\beta_{,,,}\sin^2\tfrac{1}{2}(\lambda_{,,,}-\lambda_{,})\right\}$$

$$R_{,,,}\cos(L_{,,,}-L_{,})-R_{,}=g\cos(\Gamma-L_{,})$$

$$R_{,,,}\sin(L_{,,,}-L_{,})=g\sin(\Gamma-L_{,})$$

$$A=g^2$$

$$B=-2g\cos\beta_{,,,}\cos(\lambda_{,,,}-\Gamma)$$

$$C=\frac{2g}{D}\left\{\cos\beta_{,}\cos(\lambda_{,}-\Gamma)-\cos\beta_{,,,}\cos(\lambda_{,,,}-\Gamma)\right\}$$

$$(T_{,,}-T_{,})k=\tau_{,,,}\qquad\qquad F=4\sin J\tau_{,}\tau_{,,}\frac{\odot_{,,}}{\text{☄}_{,,,}}$$

$$(T_{,,,}-T_{,})k=\tau_{,,}\qquad\qquad G=-\frac{F}{(R_{,}+R_{,,,})^3}$$

$$(T_{,,,}-T_{,,})k=\tau_{,}\qquad\qquad M=\frac{\text{☄}_{,}}{\text{☄}_{,,,}}\frac{\tau_{,}}{\tau_{,,,}}$$

$$\log k=8{\cdot}235581\qquad\qquad N=M-1$$

Auflösung der Gleichungen.

$$\rho_{,,,}-\rho_{,}=G+\frac{F}{(r_{,}+r_{,,,})^3}+N\rho_{,}$$

$$\frac{\rho_{,}-f_{,}}{B_{,}}=tg\theta_{,}\qquad \frac{\rho_{,,,}-f_{,,,}}{B_{,,,}}=tg\,\theta_{,,,}$$

$$r_{,}=B_{,}\sec\theta_{,}\qquad r_{,,,}=B_{,,,}\sec\theta_{,,,}$$

$$s_1{}^2=A+(C+\rho_{,,,})D\rho_{,}+(\rho_{,,,}-\rho_{,})(B+\rho_{,,,}-\rho_{,})$$

$$s_2=\frac{2\tau_{,,}}{\sqrt{r_{,}+r_{,,,}}}\mu,\qquad \eta=\frac{2\tau_{,,}}{(r_{,}+r_{,,,})}{}^{3}/_{2}$$

---

1) Ist die Bestimmung von sin ψ aus cos ψ zu unsicher, so ist auch

$$\sin\psi_{,}{}^2=\cos\beta_{,}{}^2\sin(\lambda_{,}-L_{,})^2+\sin\beta_{,}{}^2$$

$$\sin\psi_{,,,}{}^2=\cos\beta_{,,,}{}^2\sin(\lambda_{,,,}-L_{,,,})^2+\sin\beta_{,,,}{}^2$$

Bei der Auflösung wird man von den früher erläuterten Hilfsmitteln Gebrauch machen, und man wird mit Vortheil aus den folgenden Formeln, deren Anwendung oben auseinandergesetzt ist, Nutzen ziehen.

$$-2w_2 = (w_3 - w_1)x + (w_1 + w_3 - 2w_2)x^2$$

$$d\rho_{,,,}{}^{\circ} = a\frac{F}{r_{,}{}^{3}}(\log r_{,} - \log r_{,,,}), \quad \log a = 9\cdot 6352$$

$$d\log r_{,,,}{}^{\circ} = b\frac{\sin\theta_{,,,}{}^{\circ}}{r_{,,,}}d\rho_{,,,}{}^{\circ}\ {}^{1)}, \qquad \log b = 9\cdot 6378$$

$$y = \frac{-2w_4}{w_3 - w_1 + 2(w_1 + w_3 - w_2)x.}$$

Durch die Auflösung dieser Gleichungen gelangt man zur Kenntniß von $\rho_{,}$ und $\rho_{,,,}$, aus welchen beiden Größen die Elemente zu ermitteln sein werden.

Als Beispiel wähle ich den eben jetzt sichtbaren Kometen, den der eifrige Kometenentdecker Tempel in Marseille am 27. November 1869 entdeckt hat; die scheinbare Bahn war anfänglich fast völlig zusammenfallend mit dem durch den zweiten Kometen- und Sonnenort gelegten größten Kreis, so daß eine Bahnbestimmung nach der gewöhnlich üblichen Methode fast völlig unthunlich, war und eine außerordentliche, nicht zu erreichende Genauigkeit der Beobachtungen nothwendig gewesen wäre, um annehmbare Resultate zu erreichen; bei nur viertägiger Zwischenzeit, auf welche ich meine ersten Elemente gründete, die sich im Circular, welches am 4. December (1869) von der Akademie ausgegeben wurde, vorfinden, und bei nicht ganz genügender Schärfe der Beobachtungen (Tempel's Ort war nur eine beiläufige Schätzung) habe ich doch sehr brauchbare Näherungen nach meiner Methode erhalten, während das sonst übliche Rechnungsschema bei der Vereinigung so ungünstiger Umstände mich zu völlig unbrauchbaren Werthen geführt hätte; ja selbst der zweite Versuch, den ich mit genaueren Beobachtungen aus 10tägiger Zwischenzeit nach meiner Methode durchführte, hätte, wie ich unten dies zeigen werde, zu keinem annehmbaren Resultate

---

1) Im letzten Versuche muß, falls die Rechnung mit Hilfe von $d\rho_{,,}{}^{\circ}$ geführt wurde, $r_{,,}$ direct aus $\rho_{,,}$ berechnet werden.

nach Olber's Methode geführt. Der Rechnung legte ich bei dieser zweiten Bahnbestimmung die weiter unten folgenden, für Aberration und Parallaxe genähert corrigirten Orte zu Grunde, welche ich aus den Beobachtungen Wien Nov. 29, Bonn Decemb. 4, und Krakau Decemb. 9, ermittelt habe; nebenbei setze ich die Sonnenlängen und die Logarithmen der geocentrischen Entfernungen derselben an; Alles bezieht sich auf das mittlere Äquinoctium 1869, 0; die Zeiten sind auf den Berliner Meridian reducirt.

	T	λ	β	L	$\log R$
I. 1869.	333·41600	351°46'47"2	+20°25'26"1	247°44'30"3	9.993 819
II.	338·42221	0 41 44·1	+19 48 54·3	252 49 24·5	9·993 502
III.	343·42722	10 9 7·7	+18 39 14·6	257 54 38·1	9·993 222

Vorerst habe ich untersucht, ob Olbers' Methode anwendbar ist, und ich fand nach pag. 7:

$$i_0 = 96^\circ 14'$$
$$i = 5\ 61$$

es gehen also die Beobachtungsfehler um das 150fache vergrößert auf M über; Olbers' Methode ist also unbrauchbar, und umsomehr deßhalb, da der Komet ein für die genaue Beobachtung wenig geeignetes Object war, so daß beträchtliche Beobachtungsfehler zu befürchten sind. Ich habe des Interesses halber das M berechnet, welches ich nach Olbers' Methode bekommen hätte, und finde so:

$$\log \frac{\rho_{III}}{\rho_I} = 0 \cdot 1005$$

während dasselbe thatsächlich sein sollte:

$$\log \frac{\rho_{III}}{\rho_I} = 9 \cdot 9908$$

so, daß also aus dem ersteren Werthe keine brauchbare Lösung resultiren würde.

Ich setze nun die weitere Rechnung, wie ich dieselbe geführt habe, in extenso an, um die Kürze der Rechnungsoperationen zu zeigen:

$\frac{1}{2}(\lambda_{,,,}-\lambda_{,})$	$=9^\circ 11' 10''25$	$\sin\beta_{,}$	$= 9{\cdot}542\ 780$
$\frac{1}{2}(\beta_{,,,}-\beta_{,})$	$=-0{\cdot}53\ 575$	$\cos\beta_{,}$	$= 9{\cdot}971\ 803$
$\log(\lambda_{,,,}-\lambda_{,})$ [1]	$= 2{\cdot}741\ 286$	$\sin(\lambda_{,}-\Pi)$	$= 9_{n}081\ 416$
$\log(\beta_{,,,}-\beta_{,})$ [1]	$= 1_{n}725\ 061$	$\lg \Pi$	$= 9_{n}051\ 216$
$\mathrm{tg}\,J\sin(\lambda_{,,}-\Pi)$	$= 9{\cdot}556\ 687$	$\lg \mathrm{I}$	$= 8{\cdot}524\ 290$
$\cos(\lambda_{,,}-\Pi)$	$= 9{\cdot}999\ 738$	Gauß' log [2]	$= 0{\cdot}113\ 013$
$\mathrm{tg}\,J\cos(\lambda_{,,}-\Pi)$	$= 1{\cdot}016\ 225$	$\lg ☊_{,}$	$= 9\ 164\ 229$
$\lambda_{,,}-\Pi$	$= 1^\circ 59' 16''7$	$\sin\beta_{,,,}$	$= 9.504\ 951$
$-\Pi$	$= 1\ 17\ 32{\cdot}6$	$\cos\beta_{,,,}$	$= 9{\cdot}976\ 564$
$\mathrm{tg}\,J$	$= 1{\cdot}016\ 487$	$\sin(\lambda_{,,,}-\Pi)$	$= 9{\cdot}297\ 583$
$\sin J$	$= 9{\cdot}997\ 997$	$\lg \mathrm{I}$	$= 9{\cdot}272\ 144$
$\cos J$	$= 8{\cdot}981\ 510$	$\lg \Pi$	$= 8{\cdot}486\ 461$
$\lambda_{,}-\Pi$	$=353^\circ 4' 19''8$	Gauß' log	$= 9{\cdot}922\ 310$
$\lambda_{,,,}-\Pi$	$=11\ 26\ 40{\cdot}3$	$\lg ☊_{,,,}$	$= 9{\cdot}194\ 454$
$L_{,,}-\Pi$	$=254\ 6\ 57''1$		
$\sin(L_{,,}\ \ \Pi)$	$= 9_{n}983\ 092$	$\lg \odot_{,,}$	$= 9_{n}976\ 594$

$\lambda_{,}-L_{,}$	$= 104^\circ 2' 16''9$	$\lambda_{,,,}-L_{,,,}$	$= 112^\circ 14' 29''6$
$\cos(\lambda_{,}-L_{,})$	$= 9_{n}384\ 830$	$\cos(\lambda_{,,,}-L_{,,,})$	$= 9_{n}578\ 080$
$\cos\psi_{,}$	$= 9_{n}356\ 633$	$\cos\psi_{,,,}$	$= 9_{n}554\ 644$
$\sin\psi_{,}$	$= 9.988\ 479$	$\sin\psi_{,,,}$	$= 9{\cdot}970\ 105$
$\lg B_{,}$	$= 9{\cdot}982\ 298$	$\lg B_{,,,}$	$= 9{\cdot}963\ 327$
$\lg f_{,}$	$= 9_{n}350\ 452$	$\lg f_{,,,}$	$= 9_{n}547\ 866$
$f_{,}$	$=-0{\cdot}224\ 105$	$f_{,,,}$	$=-0{\cdot}353\ 074$

$\sin^2\frac{1}{2}(\lambda_{,,,}-\lambda_{,})$	$= 8.406\ 300$	$\lambda_{,}-\Gamma$	$= 8^\circ 30' 39''1$
$\cos\beta_{,}\cos\beta_{,,,}$	$= 9{\cdot}948\ 367$	$\lambda_{,,,}-\Gamma$	$= 26\ 52\ 59{\cdot}6$
$\log \Pi$	$= 8{\cdot}354\ 667$	$\cos(\lambda_{,}-\Gamma)$	$= 9{\cdot}995\ 191$
$\log \mathrm{I}$	$= 6{\cdot}377\ 538$	$\cos(\lambda_{,,,}-\Gamma)$	$= 0{\cdot}950\ 330$
Gauß log	$= 0{\cdot}004\ 555$	$\cos\beta_{,}\cos(\lambda_{,}-\Gamma)$	$= 9{\cdot}966\ 994$
$\lg D:4$	$= 8{\cdot}359\ 222$	$-\cos\beta_{,,,}\cos(\lambda_{,,,}-\Gamma)$	$= 9_{n}926\ 894$
$L_{,,,}-L_{,}$	$= 10^\circ 10' 7''8$	$\lg 2g$	$= 9{\cdot}543\ 142$
$\sin(L_{,,,}-L_{,}$	$= 9{\cdot}246\ 866$	log Subt.	$= 8.985\ 567$
$\cos(L_{,,,}-L_{,})$	$= 9{\cdot}993\ 124$	$\log\frac{C.\,D.}{2\,g}$	$= 8{\cdot}912\ 461$
$R_{,,,}\cos(L_{,,,}-L_{,})$	$= 9.986\ 346$	$\log C.D$	$= 8{\cdot}455\ 603$
log Subt.	$= 8{\cdot}239\ 471$	$\log B$	$= 9_{n}470\ 036$
$g\cos(\Gamma-L_{,})$	$= 8_{n}225\ 817$	$\lg C$	$= 9{\cdot}494\ 321$
$\sin(\Gamma-L_{,})$	$= 9{\cdot}997\ 976$	$\lg A$	$= 8{\cdot}484\ 224$
$g\sin(\Gamma-L_{,})$	$= 9{\cdot}240\ 088$	A	$=+0{\cdot}030\ 494{\cdot}7$
$\Gamma-L_{,}$	$= 95^\circ 31' 37''8$	B	$=-0{\cdot}295\ 145$
Γ	$= 343\ 16\ 8{\cdot}1$	C	$=+0{\cdot}312\ 119$
$\log g$	$= 9{\cdot}242\ 112$	$\log D$	$= 8{\cdot}961\ 282$

Nun sind nur noch die von den Zwischenzeiten abhängigen Größen zu berechnen.

---

[1] In Bogenminuten verwandelt.

[2] Nach Bremiker's Tafeln.

$\log T_{,,}-T_{,}$	=	0.699 509	$\log 4\sin J$	=	0·600 057
$\log T_{,,,}-T_{,}$	=	1·000 487	$\log \tau_{,}\tau_{,,}$	=	8·171 054
$\log T_{,,,}-T_{,,}$	=	0·699 405	$\log \odot_{,,} :$ ☄$_{,,,}$	=	0_n782 140
$\log \tau_{,,,}$	=	8·935 090	$\log F$	=	9_n553 251
$\log \tau_{,,}$	=	9·236 068	Gauß L.	=	0·300 731
$\log \tau_{,}$	=	8·934 986	$\log (R_{,}+R_{,,,})$	=	0·294 550
$\log \tau_{,}:\tau_{,,,}$	=	9·999 896	$\log (R_{,}+R_{,,,})^3$	=	0·883 650
$\log$ ☄$_{,}$: ☄$_{,,,}$	=	9·969 775	$\log G$	=	8·669 601
$\log M$	=	9·969 671	G	=	+0·046 731
$\log N$	=	8_n829 00.			

Hiemit sind die vorbereitenden Rechnungen beendet; dieselben nehmen im Ganzen 98 Zeilen in Anspruch; hätte man nach Olbers' Methode in der bekannten Gauß'schen Umformung gerechnet, so hätte man etwa 80 Zeilen gebraucht, so daß nicht einmal ein Viertheil Mehrarbeit durch die Anwendung der obigen Methode entsteht. Ich werde nun ebenfalls die gemachten Versuche ausführlich mittheilen, um zu zeigen, daß die Durchführung derselben nicht allzu beschwerlich ist. Die Vorversuche wurden nach dem oben mitgetheilten Näherungsschema (pag. 15 ff) wie folgt durchgeführt, und ich löse die Gleichungen ganz so auf, als ob Nichts über den Werth von $\rho_{,}$ vor Abschluß der Rechung bekannt wäre.

Vorversuche.

$\rho_{,}$	0·2000	0·6000	1·0000
$\rho_{,}-f_{,}$	0·4241	0·8241	1·2241
$\log(\rho_{,}-f_{,})$	9·6275	9·9160	0·0878
$\mathrm{tg}\,\theta_{,}$	9·6452	9.9337	0·1055
$\cos\theta_{,}$	9·9613	9·8802	9·7904
$\log r_{,}$	0·0210	0·1021	0·1919
$\log 2r_{,}$	0·3220	0·4031	0·4929
$\log (2r_{,})^3$	0·9660	1·2093	1·4787
$\log \mathrm{II}$	8_n5873	8_n3440	8_n0746
II	—0·0387	—0·0221	—0·0119
$\log \rho_{,}$	9·3010	9·7782	0·0000
$\log N\rho_{,}$	8_n1300	8_n6072	8_n8290
$N\rho_{,}$	—0·0135	—0·0405	—0·0674
$G+\mathrm{II}$	+0·0080	+0·0246	0·0348
$\rho_{,,,}-\rho_{,}$	—0·0055	—0·0159	—0·0326
$\rho_{,,,}$	0·1945	0·5841	0·9674
$\log \sqrt{2r_{,}}$	0·1610	0.2015	0·2464
$\log s_2$	9·3761	9·3356	9·2907
s_2	+0·2377	+0·2165	+0·1953

$C+\rho_{,,,}$	$+0\cdot5066$	$+0\cdot8962$	$+1\cdot2795$
$\log(C+\rho_{,,,})$	$9\cdot7047$	$9\cdot9524$	$0\cdot1070$
$\log D\rho_{,}$	$8\cdot2623$	$8\cdot7395$	$8\cdot9613$
$\log \mathrm{II}$	$7\cdot9670$	$8\cdot6919$	$9\cdot0683$
$B+\rho_{,,,}-\rho_{,}$	$-0\cdot3006$	$-0\cdot3110$	$-0\cdot3277$
$\log(B+\rho_{,,,}-\rho_{,})$	9_n4780	9_n4928	9_n5155
$\log(\rho_{,,,}-\rho_{,})$	7_n7404	8_n2014	8_n5132
$\log \mathrm{III}$	$7\cdot2184$	$7\cdot6942$	$8\cdot0287$
II	$+0\cdot00927$	$+0\cdot04919$	$+0\cdot11703$
III	$+0\cdot00165$	$+0\cdot00495$	$+0\cdot01068$
s_1^2	$+0\cdot04141$	$+0.08463$	$+0\cdot15820$
$\log s_1^2$	$8\cdot6171$	$8\cdot9275$	$9\cdot1992$
s_1	$+0\cdot2035$	$+0\cdot2909$	$+0\cdot3977$

Ich erhalte also:

$$0\cdot1488 = -0\cdot2366\,x - 0\cdot0194\,x^2$$

also:

$$\rho_{,} = 0\cdot334$$

mit welchem Werthe der erste genauere Versuch durchgeführt wird, und bei welchem Versuche von den obigen Differentialformeln Gebrauch gemacht wurde. Die Durchführung des Versuches ergab $w_4 = +0\cdot001171$. Es fand sich der neue genauere Werth von $\rho_{,}$ mit Hilfe des Werthes y

$$\rho_{,} = 0\cdot338444$$

womit der zweite Versuch unternommen wurde ganz nach dem Schema des ersteren; und es fand sich $w_5 = -0\cdot000004$. Beiden Versuchen haftet der Mangel an, daß der Werth: $r_{,}-r_{,,,}$ als differentielle Größe aufgefaßt wurde, deren höhere Potenzen man vernachlässigen kann, ohne der Genauigkeit irgendwie zu schaden; es wurde deßhalb für den dritten Versuch nach den vorhandenen Größen zur Ermittlung des Werthes $\frac{F}{(r_{,}+r_{,,,})^3}$ der Logarithmus von $r_{,}+r_{,,,}$ im Voraus interpolirt, und demnach das Rechnungsschema entsprechend abgeändert, da nun nicht mehr die Werthe $d\rho_{,,,}{}^\circ$ und $d\log r_{,,,}{}^\circ$ berechnet werden; ich habe aber, um nicht zu viel Raum in Anspruch zu nehmen, diesen dritten Versuch, der vermöge der Interpolation mit dem Werthe $\rho_{,} = 0\cdot338429$ begonnen wurde, neben den vorausgehenden angesetzt, mit dem Vorbehalte, daß die in dieser dritten

Columne aufgenommenen Größen theilweise eine andere Bedeutung haben. Man wird jetzt auch nicht erwarten dürfen, daß $w_6 = s_2 - s_1 = 0$ wird, da in der That die zweiten Potenzen der Größe $(r_, - r_{,,,})$ ganz merkbar sind; es fanden sich $w_6 = + 0 \cdot 000007$. Die Durchführung eines weiteren Versuches ist aber zwecklos, da man durch eine einfache Interpolation zwischen den Werthen des ersten und zweiten Versuches, die noch nothwendigen Änderungen findet, um w_6 der Null gleich zu machen. Ich fand so:

$$
\begin{aligned}
d\rho_, &= + 0 \cdot 000026 \\
d\rho_{,,,} &= + 0 \cdot 000026 \\
d\log r_, &= + 0 \cdot 000005 \\
d\log r_{,,,} &= + 0 \cdot 000006 \\
ds_2 &= - 0 \cdot 000001
\end{aligned}
$$

und die drei Versuche selbst waren:

Versuche:

	I.	II.	III.
$\rho_,$	+0·334 000	+0·338 444	+0·338 429
$\rho_, - f_,$	+0·558 105	+0·562 549	+0·562 534
$\log(\rho_, - f_,)$	9·746 716	9·750 160	9·750 150
$\operatorname{tg}\theta_,$	9·764 418	9·767 862	9·767 852
$\cos\theta_,$	9·936 782	9·935 907	9·935 910
$\log r_,$	0·045 516	0·046 391	0·046 388
$\log r_,^3$	0·136 548	0·139 173	1·061 499
$\log \mathrm{II}$	8_n 513 613	8_n 510 988	8_n 491 752
II	−0·032 630	−0·032 433	−0·031 028
$\log \rho_,$	9·523 746	9·529 487	9·529 468
$\log N\rho_,$	8_n 352 75.	8_n 358 49.	8_n 358 47.
$N\rho_,$	−0·022 529	−0·022 829	−0·022 828
$G + \mathrm{II}$	+0·014 101	+0·014 298	+0·015 703
$\rho_{,,,}^{\circ} - \rho_,$	−0·008 428	−0·008 531	−0·007 125
$\rho_{,,,}^{\circ}$	+0·325 572	+0·329 913	+0·331 304
$\rho_{,,}^{\circ} - f_{,,,}$	+0·678 646	+0.682 987	+0·684 378
$\log(\rho_{,,,}^{\circ} - f_{,,,})$	9·831 643	9·834 412	9·835 296
$\operatorname{tg}\theta_{,,,}$	9·868 316	9·871 085	9·871 969
$\cos\theta_{,,,}$	9·905 494	9·904 513	9·904 198
$\log r_{,,,}^{\circ}$	0·057 833	0·058 814	0·059 129
$d\rho_{,,,}^{\circ}$	+0 001 388	+0.001 392	
$d\log r_{,,,}^{\circ}$	+0·000 313	+0·000 315	
$\rho_{,,,}$	+0·326 960	+0.331 305	

$\rho_{,,,}-\rho_{,}$	—0·007 040	—0·007 139	
$\log r_{,,,}$	0·058 146	0.059 129	
Gauß log	0·294 761	0·294 707	0·294 706
$\log(r_{,}+r_{,,,})$	0·352 907	0.353 836	0.353 835
$\frac{1}{2}\log(r_{,}+r_{,,,})$	0·176 453	0·176 918	0.176 917
$\frac{3}{2}\log(r_{,}+r_{,,,})$	0.529 360	0·530 754	
$\log\eta$	9.007 74.	9.006 34.	
η	0·101 8..	0·101 5..	
μ	0·000 188	0·000 187	0·000 187
$2\tau_{,,}\mu$	9·537 286	9·537 285	9·537 285
$\log s_2$	9·360 833	9.360 367	9.360 368
s_2	+0 229 527	+0·229 281	+0·229 281
$C+\rho_{,,,}$	+0·639 079	+0·643 424	+0·643 423
$\log(C+\rho_{,,,})$	9·805 554	9·808 497	9·808 497
$\log D\rho_{,}$	8·485 028	8·490 769	8·490 750
log II	8·290 582	8·299 266	8·299 247
$B+\rho_{,,,}-\rho_{,}$	—0·302 185	—0·302 284	—0·302 270
$\log(B+\rho_{,,,}-\rho_{,})$	9_n480 273	9_n480 415	9_n480 395
$\log(\rho_{,,,}-\rho_{,})$	7_n847 573	7_n853 637	7_n852 785
log III	7·327 846	7·334 052	7·333 180
II	+0·019 5246	+0·019 9189	+0.019 9180
III	+0·002 1274	+0·002 1580	+0·002 1537
s_1^2	+0·052 1467	+0.052 5716	+0·052 5664
$\log s_1^2$	8·717 227	8·720 751	8·720 708
s_1	+0·228 356	+0·229 285	+0·229 274

Man hat also für die Berechnung der Elemente anzunehmen:

$$\rho_{,} = 0{\cdot}338\ 455$$
$$\rho_{,,,} = 0{\cdot}331\ 330$$

Um aber zweckmäßige Prüfungen in Verlaufe dieser Rechnung zu haben, wird man weiter interpoliren, nämlich:

$$\log r_{,} = 0{\cdot}046\ 393$$
$$\log r_{,,,} = 0{\cdot}059\ 135$$
$$s = 0.229\ 280$$

Aus den obigen geocentrischen Distanzen habe ich durch fünfstellige Rechnung die Elemente ermittelt; dieselben finden sich im akademischen Anzeiger (in der Perihelzeit hat sich ein Druckfehler eingeschlichen) vom 16. December 1869, und dienten zur raschen Beischaffung einer Ephemeride; dieselben sind:

Komet III. 1869.

$T =$ Nov. 20·3821 m. Berliner Zeit

$$\left.\begin{array}{l}\Pi = 40^\circ 36' 37'' \\ \Omega = 292\ 55\ 57 \\ i = 6\ 56\ 10\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{m. Aeq.} \\ 1869{,}0\end{array}$$

$\log q = 0{\cdot}04252$

und die mittlere Beobachtung wird dargestellt im Sinne Beobachtung-Rechnung:

$$d\lambda = +2'', \qquad d\beta = +32''.$$

Dieser für die mittlere Beobachtung berechnete Ort steht innerhalb der Unsicherheit der logarithmischen Rechnung in dem für die mittlere Beobachtung substituirten größten Kreise; bei einer Zwischenzeit von zehn Tagen also ist die oben vorgeschlagene Ersetzung der Verhältnisse der Dreiecksflächen durch die Zwischenzeiten als völlig befriedigend zu betrachten. Der nicht unbeträchtliche Fehler in Breite, welcher wohl ausschließlich den unvermeidlichen Beobachtungsfehlern zugeschrieben werden muß, trägt dazu ganz wesentlich bei, daß der oben nach Olbers' Methode gefundene Werth für M so gar ungenau ausgefallen ist.

Es kann noch vom Interesse sein, zu untersuchen, wie genau man $\rho_{,}$ erhalten würde, wenn man sich die bei den bisherigen Methoden für die Behandlung des Ausnahmefalles in der ersten Lösung als erlaubt angesehenen Vernachlässigungen gestattet hätte ($m = 0$); man wird vorerst bemerken, daß in diesem Falle in der That der begangene Fehler nicht allzu nachtheilig einwirken wird, da der Radiusvector des Kometen so nahe der Einheit gleich ist, also die Größe:

$$\frac{1}{(R_{,} + R_{,,,})^3} - \frac{1}{(r_{,} + r_{,,,})^3}$$

jedenfalls viel kleiner wird, als es im Allgemeinen zu erwarten steht.

Man hat also für die erste Lösung die Relation:

$$\log \rho_{,,,} = \log \rho_{,} + 9{\cdot}9697,$$

woraus sich nach einer flüchtigen Rechnung in Verbindung mit der Euler'schen Gleichung findet.

$$\rho_{,} = 0{\cdot}303$$
$$\lg(r_{,} + r_{,,,}) = 0{\cdot}347$$

so daß immerhin brauchbare Werthe hiemit erhalten werden, die um so vortheilhafter für die zweite Näherung sind, da in derselben (nach Encke) zur genaueren Bestimmung nur der Werth von $(r_{,} + r_{,,,})$ in Betracht kommt, auf welchen zufälliger Weise der Fehler in $\rho_{,}$ sehr verringert übergeht, da der Winkel am Kometen im Dreiecke Sonne, Komet, Erde ganz beiläufig ein Rechter ist. Man wird erhalten als neue Relation zwischen $\rho_{,,,}$ und $\rho_{,}$

$$\log \rho_{,,,} = \log \rho_{,} + 9{\cdot}9910,$$

welcher Werth mit dem hier gefundenen (9·9908) sehr nahe übereinstimmt. Es kann aber kaum bezweifelt werden, daß die hier vorgetragene Methode sehr wesentlich kürzer ist und sicherer zum Ziele führt, denn wäre nicht zufällig r so nahe der Einheit gleich, so hätte man beträchtlich ungenauere Werthe erhalten können, die eine Annäherung überhaupt in Frage gestellt hätten.