©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Zur Vervollständigung der Involutionen höherer Ordnung.

Von Dr. **Emil Weyr** in Prag.

(Mit 2 Holzschnitten.)

1. Alle Curven dritter Ordnung, welche durch acht feste Punkte gehen, schneiden sich auch noch in einem neunten festen Punkte, und bilden ein Curvenbüschel dritter Ordnung. Das Tangentenbüschel der Curven in einem der neun Grundpunkte ist projectivisch zu dem Curvenbüschel selbst.

Ebenso bildet ein System von Curven dritter Ordnung, welche durch fünf feste Punkte gehen und in einem sechsten festen Punkte einen Doppelpunkt besitzen, ein Curvenbüschel. Doch haben zwei Curven des Büschels außer den aufgezählten Punkten keinen weiteren gemeinsam, da der Doppelpunkt für vier Schnittpunkte gilt.

Sei o der Doppelpunkt der Curven des Büschels und zugleich der Anfangspunkt eines Coordinatensystems, dann stellt sich die Gleichung einer Curve des Büschels dar durch

$$U_3 + U_2 = o$$

wobei U_3 und U_2 ganze homogene Functionen der Coordinaten, respective vom dritten und zweiten Grade sind. Wenn in derselben Weise

$$V_3 + V_2 = o$$

die Gleichung einer zweiten Curve des Büschels ist, so stellt

$$(U_3 + \lambda V_3) + (U_2 + \lambda V_2) = o$$

irgend eine Curve des Büschels vor, wobei λ ein veränderlicher Parameter ist, welcher alle Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ annehmen kann.

Die Gleichung

$$U_2 + \lambda V_2 = o$$

Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

stellt das Tangentenpaar der Curve im Doppelpunkte o vor, und aus der Form der Gleichung erkennt man sofort, daß die Tangentenpaare der sämmtlichen Curven des Büschels im Doppelpunkte eine quadratische Strahleninvolution bilden.

„Die Doppelpunktstangentenpaare aller Curven dritter Ordnung, welche einen gemeinschaftlichen Doppelpunkt besitzen und durch fünf feste Punkte gehen, bilden eine quadratische Involution".

Einen rein synthetischen Beweis dieses Satzes findet man im 42. Artikel des II. Theiles der „Theorie mehrdeutiger geometrischer Elementargebilde etc".

2. Die Doppelstrahlen der erwähnten Involution werden zwei solchen Curven des Büschels angehören, für welche der Doppelpunkt o ein Rückkehrpunkt wird. Es existiren somit unter den Curven eines Büschels dritter Ordnung mit gemeinschaftlichem Doppelpunkt zwei, für welche der letztere eine Spitze wird.

3. Der ausgesprochene Satz über die Involution der Doppelpunktstangenten läßt eine specielle Fassung zu, auf welche aufmerksam zu machen der Zweck dieses Artikels ist.

Betrachtet man nämlich die Curven dritter Ordnung, welche in einem festen Punkte o einen Doppelpunkt besitzen und durch weitere fünf Punkte 1, 2, 3, 4, 5 hindurchgehen, so bilden sie so ein Curvenbüschel, auf welches sich der ausgesprochene Satz bezieht. Unter den Curven dieses Büschels befinden sich fünf Grenzfälle, auf welche wir besonders unser Augenmerk richten wollen.

Legt man nämlich durch o und durch vier von den übrigen Punkten, etwa durch 2, 3, 4, 5 einen Kegelschnitt S_1 und zieht überdieß von o nach dem fünften Punkte 1 die Gerade G_1, so stellen die beiden Linien S_1 und G_1 zusammen eine Curve dritter Ordnung dar, welche in o einen Doppelpunkt besitzt. Die beiden Tangenten des Doppelpunktes sind: erstlich die Gerade G_1 und zweitens die Tangente T_1 des Kegelschnittes S_1 im Punkte o.

In derselben Weise erhält man vier weitere Gerade G_2, G_3, G_4, G_5 und vier weitere diesen entsprechende Kegelschnitte S_2, S_3, S_4, S_5, welche in O von vier Geraden T_2, T_3, T_4, T_5 respective tangirt werden.

Nach dem Satze des ersten Artikels müssen nun die fünf Strahlenpaare: $G_1\ T_1$; $G_2\ T_2$; $G_3\ T_3$; $G_4\ T_4$; $G_5\ T_5$ in Involution sein.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Das Ergebniß läßt sich folgendermaßen ausdrücken:

„Legt man durch einen festen Punkt und je vier Ecken eines Fünfeckes einen Kegelschnitt und an diesen in dem festen Punkte die Tangente, während man diesen festen Punkt auch mit der fünften Ecke durch eine Gerade verbindet, so erhält man fünf Strahlenpaare einer quadratischen Involution."

4. Die Curven eines Büschels bestimmen auf einer Transversalen eine Involution von Punkten, deren Ordnung gleich ist jener der Curven des Büschels. Behält man in dem von uns betrachteten Curvenbüschel nur die fünf Grenzfälle bei, so werden diese auf einer beliebigen Transversalen eine kubische Involution von fünf Punktetripeln bestimmen.

„Die durch einen festen Punkt nach den fünf Ecken eines Fünfeckes gehenden fünf Strahlen, und die durch den festen Punkt und je vier Ecken des Fünfeckes gehenden fünf Kegelschnitte bestimmen auf jeder Transversalen fünf Punktetripel in kubischer Involution."

Bei diesem so wie bei dem vorhergehenden Satze wird stillschweigend vorausgesetzt, daß das Fünfeck mit dem festen Punkte nicht ein Paskal'sches Sechseck bilde.

Durch specielle Annahme der fünf Ecken des Fünfeckes oder des Punktes o kann man theils zu bekannten Sätzen über quadratische Involutionen, theils auch zu neuen Sätzen gelangen. Wir wollen nur einer derartigen Sonderannahme Erwähnung thun, aus welcher sich eine bemerkenswerthe Vervollständigungsmethode der kubischen Involutionen ableiten läßt.

Wir wollen nämlich festsetzen, daß die fünf Ecken des in dem Satze besprochenen Fünfeckes einem vollständigen Vierseit angehören. Seien also (Fig. 1) 1, 2, 3, 4, 5 die fünf festen Punkte, welche so gelegen sind, daß sich die Geraden $\overline{12}$ und $\overline{34}$ im Punkte 5 schneiden; ferner sei o der willkürlich in der Ebene angenommene feste Punkt, welcher als Doppelpunkt der Curven des Büschels auftrat.

Dann repräsentirt das von o nach dem Punktepaar 1, 2 gehende Strahlenpaar $0\overline{1}$, $0\overline{2}$ in Verbindung mit der Geraden $\overline{345}$ eine Curve des Büschels, deren Schnittpunkte mit einer beliebigen Transversalen T *a*, *a*, *a* heißen mögen. Ebenso stellt das Geradenpaar $0\overline{3}$, $0\overline{4}$ in

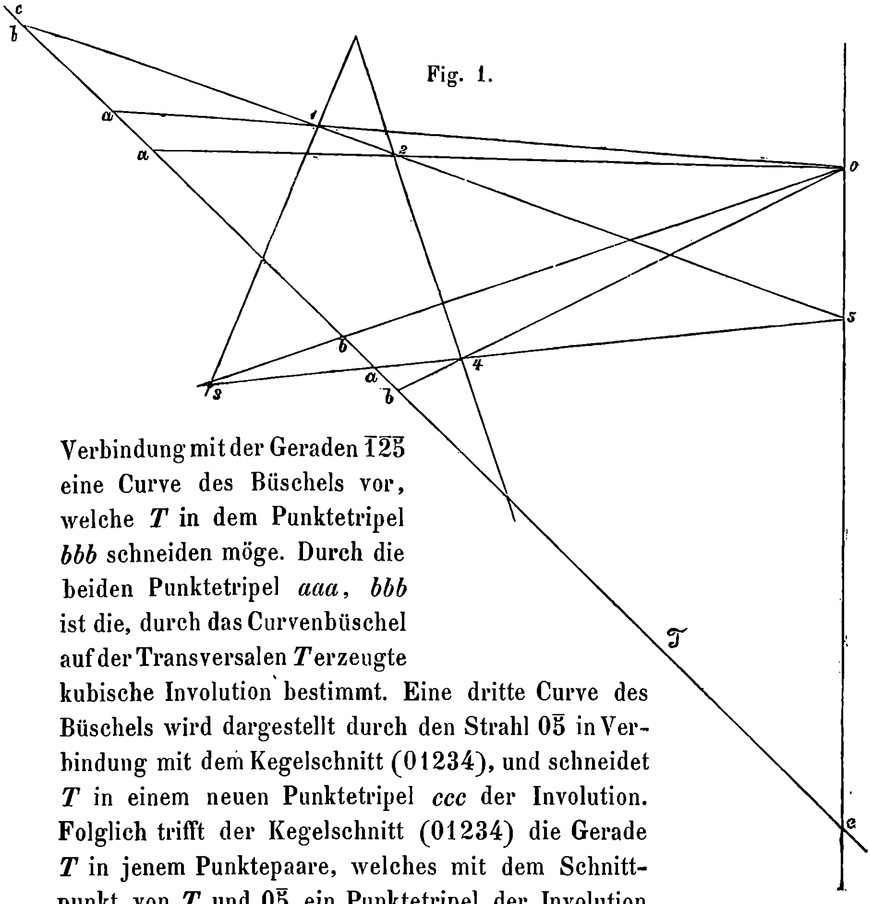


Fig. 1.

Verbindung mit der Geraden $\overline{125}$ eine Curve des Büschels vor, welche T in dem Punktetripel *bbb* schneiden möge. Durch die beiden Punktetripel *aaa*, *bbb* ist die, durch das Curvenbüschel auf der Transversalen T erzeugte kubische Involution bestimmt. Eine dritte Curve des Büschels wird dargestellt durch den Strahl $0\overline{5}$ in Verbindung mit dem Kegelschnitt (01234), und schneidet T in einem neuen Punktetripel *ccc* der Involution. Folglich trifft der Kegelschnitt (01234) die Gerade T in jenem Punktepaare, welches mit dem Schnittpunkt von T und $0\overline{5}$ ein Punktetripel der Involution bildet. Im Vorigen haben wir gleichzeitig die Lösung folgender wichtigen Aufgabe gefunden:

„Eine kubische Involution ist durch zwei Elemententripel gegeben, man soll sie vervollständigen", d. h. man soll zu irgend einem Elemente das mit ihm zur selben Gruppe gehörige Elementenpaar construiren.

Es genügt, sich auf Punktinvolutionen zu beschränken.

Seien also (in derselben Figur) auf der Geraden T zwei Punktgruppen *aaa*, *bbb* willkürlich, als einer kubischen Involution angehörig gegeben.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Hiedurch ist bekanntlich die Involution bestimmt. Um nun zu einem beliebigen Punkte c das entsprechende Punktepaar cc zu erhalten, gehe man folgendermaßen zu Werke.

Einen beliebigen Punkt o verbinde man mit zwei Punkten der Gruppe (a) und mit zwei Punkten der Gruppe (b) und schließlich auch mit dem angenommenen Punkte der Gruppe (c).

Durch einen beliebigen Punkt s der letzten Verbindungslinie ziehe man je eine Gerade nach dem mit o nicht verbundenen Punkte der Gruppe (a) und jenem der Gruppe (b). Die erste dieser beiden Verbindungsgeraden trifft die beiden Geraden (ob) in einem Punktepaar 3, 4 und die letztere trifft die beiden Geraden (oa) in einem Punktepaare 1, 2; dann schneidet der Kegelschnitt $(o\ 1\ 2\ 3\ 4)$ den Träger T in dem Punktepaare der Gruppe (c), nach welchem wir gefragt haben.

Dieses Schnittpunktepaar kann man für alle möglichen Lagen des angenommenen Punktes der Gruppe (c) mittelst eines ein für allemal gezeichneten, durch o gehenden Kreises in bekannter Weise construiren, wodurch die gestellte Aufgabe gelöst erscheint.

Man kann sich die Construction dadurch noch vereinfachen, daß man den Punkt 5 auf einer der beiden Geraden $b12$ oder $a34$ fortrücken läßt.

5. Man kann den für Curven dritter Ordnung bewiesenen Satz leicht auf Curven beliebiger Ordnung ausdehnen und dann auf eine ähnliche Weise zur Vervollständigung der Involutionen höherer Grade anwenden.

Eine Curve $n$ter Ordnung mit einem $(n-1)$fachen Punkte o ist bestimmt, sobald man diesen und weitere $2n$-Punkte der Curve kennt. Es bilden somit alle Curven $n$ter Ordnung, welche in einem festen Punkte o einen $(n-1)$fachen Punkt besitzen und überdieß durch weitere $(2n-1)$ feste Punkte gehen, ein Curvenbüschel $n$ter Ordnung.

Wenn man also den Punkt o zum Anfangspunkt eines Coordinatensystems nimmt, so stellt sich, unter λ einen veränderlichen Parameter verstanden, die Gleichung irgend einer Curve des Büschels durch

$$(U_n + \lambda V_n) + (U_{n-1} + \lambda V_{n-1}) = o$$

dar. Hierbei sind U_n und V_n zwei ganze homogene Functionen der

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Coordinaten vom $n$ten Grade und U_{n-1}, V_{n-1} zwei eben solche Functionen vom $(n-1)$ten Grade.

Die $(n-1)$ Tangenten der Curve im Punkte o werden dargestellt durch

$$U_{n-1} + \lambda V_{n-1} = o,$$

woraus sofort der Satz fließt:

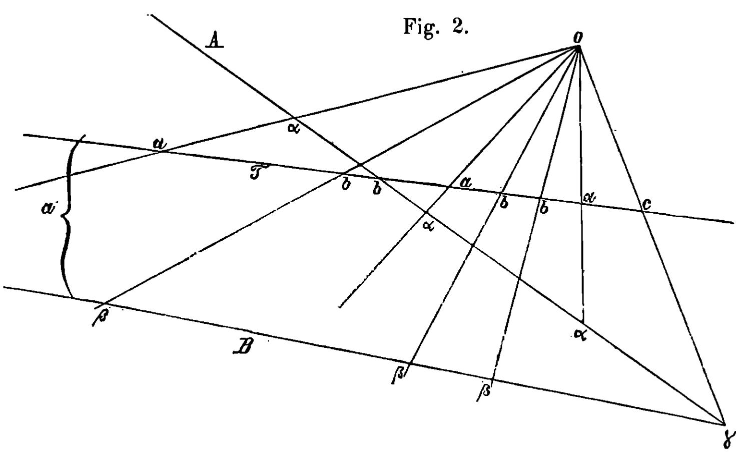
„Die Tangentengruppen der Curven eines Büschels $n$ter Ordnung, welche einen gemeinschaftlichen $(n-1)$ fachen Punkt besitzen, bilden in diesem eine Strahleninvolution $(n-1)$ter Ordnung."

6. Die Curven eines solchen Büschels bestimmen auf irgend einer Transversalen T ihrer Ebene eine Punktinvolution $n$ter Ordnung.

Wir wollen die $(2n-1)$fachen Punkte, durch welche die Curven des Büschels gehen, so annehmen, daß auf zwei durch einen von ihnen gehenden Geraden je $(n-1)$ derselben liegen.

Sei o (Fig. 2) der $(n-1)$fache Punkt des Büschels, ferner γ ein einfacher Punkt, durch welchen zwei Gerade A, B hindurchgehen; auf der ersten mögen $(n-1)$-Punkte α und auf der zweiten

Fig. 2.



$(n-1)$-Punkte β liegen, und es seien die Punkte (α), (β) und γ die $(2n-1)$-Scheitel des Büschels. Die $(n-1)$ von o nach den Punkten (α) gehenden Strahlen stellen in Verbindung mit der Geraden B eine Curve des Büschels vor, welche eine beliebige Transversale T in einer n-punktigen Gruppe (a) schneidet. Ebenso repräsentiren die

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$(n-1)$ von o nach den $(n-1)$ Punkten (β) gehenden Strahlen mit der Geraden A eine zweite Curve des Büschels, welche T in der n-punktigen Gruppe (b) schneiden möge. Schließlich wird durch die Gerade $o\gamma$ in Gemeinschaft mit der durch die 2 $(n-1)$-Punkte (α), (β) gehenden Curve $(n-1)$ter Ordnung, welche in o einen $(n-2)$fachen Punkt besitzt, eine dritte Curve des Büschels dargestellt. Die erwähnte Curve $(n-1)$ter Ordnung wird dann die Transversale T in $(n-1)$ Punkten schneiden, welche mit dem Schnitte c von T und $o\gamma$ eine dritte Gruppe von Punkten der Involution $n$ter Ordnung bilden, in welcher das Curvenbüschel die Transversale T schneidet.

Umgekehrt bietet uns diese Betrachtung ein Mittel zur Lösung der folgenden Aufgabe:

„Von einer Punktinvolution $n$ten Grades auf einer Transversale sind zwei Punktgruppen gegeben, man soll die Involution vervollständigen“, d. h. zu irgend einem Punkte jene $(n-1)$-Punkte construiren, welche mit ihm eine Gruppe der Involution bilden.

Sei T (dieselbe Figur) die Transversale und (a) und (b) die beiden n-punktigen Gruppen. Man verbinde $(n-1)$-Punkte der ersten und ebenso viele der zweiten Gruppe mit einem beliebig gewählten Punkte o durch zwei $(n-1)$strahlige Gruppen (oa), (ob) und die beiden übrig gebliebenen Punkte a, b verbinde man mit einem beliebigen Punkte γ des von o nach jenem Punkte e gehenden Strahles, zu welchem man die $(n-1)$ mit ihm eine Gruppe bildenden Punkte construiren will. Seien, resp. B und A, diese beiden Verbindungslinien. Die Gerade A schneidet die $(n-1)$strahlige Gruppe (oa) in einer $(n-1)$-punktigen Gruppe (α), und die Gerade B schneidet die $(n-1)$-Strahlen (ob) in $(n-1)$-Punkten (β). Legt man nun durch die 2 $(n-1)$-Punkte (α) und (β) eine Curve $(n-1)$ter Ordnung, welche in o einen $(n-2)$fachen Punkt besitzt, so schneidet diese die Transversale T in $(n-1)$-Punkten, welche mit c eine Gruppe der fraglichen Involution bilden.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Construction eines Kegelschnittes, wenn derselbe durch imaginäre Punkte und Tangenten bestimmt wird.

Von **Rudolf Staudigl**,

Adjunct der Lehrkanzel für darstellende und Docent für neuere Geometrie am k. k. polytechnischen Institute in Wien.

(Mit 1 Tafel.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 21. April 1870.)

Wie bekannt ist ein Kegelschnitt durch fünf Punkte oder fünf Tangenten auch dann vollkommen bestimmt, wenn zwei oder vier dieser Bestimmungsstücke imaginär sind. Die Aufgaben einen Kegelschnitt in diesen Fällen zu construiren, wurden bereits von Seydewitz, Staudt und Paulus unter der Voraussetzung gelöst, daß die imaginären Bestimmungsstücke als Doppelelemente involutorischer Grundgebilde gegeben erscheinen [1]).

Wir wollen nun zunächst zeigen, wie man die in Rede stehenden Constructionen durchführen kann, wenn die imaginären Bestimmungsstücke des Kegelschnittes nicht als Doppelelemente involutorischer Gebilde, sondern allgemein aufgefaßt, als Doppelelemente projectivischer Grundgebilde gegeben sind und werden dann auch jene Aufgaben lösen, bei welchen der Kegelschnitt nicht bloß durch Punkte oder bloß durch Tangenten, sondern durch reelle und imaginäre Punkte und Tangenten zugleich bestimmt wird. Dabei machen wir von der Analysis keinen Gebrauch und benützen zur Ausführung unserer Constructionen keine andere Curve zweiter Ordnung als den Kreis. Von den Aufgaben, welche sich reciprok gegenüberstehen, wird immer jene, die wir zur linken Seite stellen, gelöst; die Auflösung der rechts befindlichen ist mit Hilfe der Reciprocitätsgesetze leicht zu finden.

---

1) Seydewitz: Grunerts Archiv für Mathematik, 5. Band, Seite 331. Staudt: „Geometrie der Lage", Seite 185. Paulus: „Grundlinien der neueren ebenen Geometrie", Seite 335.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

1. Gegeben: Drei reelle und zwei imaginäre Punkte.	Drei reelle und zwei imaginäre Tangenten.

Die drei reellen Punkte nennen wir M, N, O (Fig. 1), die zwei imaginären Punkte seien Doppelpunkte von zwei auf derselben Geraden g befindlichen projectivischen Punktreihen R und R_1, welche durch die drei Paare sich entsprechender Punkte AA_1, BB_1, CC_1 gegeben erscheinen. Die Schnittpunkte der Geraden OM und ON mit g bezeichnen wir beziehungsweise durch D, E und jene Punkte von R_1, welche den Punkten D, E von R entsprechen, seien D_1 und E_1. Der Schnittpunkt P der Geraden MD_1 und NE_1 ist diesen Voraussetzungen zufolge ein Punkt des verlangten Kegelschnittes K. Denn verbindet man alle Punkte von R mit O und alle Punkte von R_1 mit P, so erhält man zwei projectivische Strahlenbüschel S und S_1 mit den Mittelpunkten O und P, welche Büschel einen Kegelschnitt erzeugen, der durch die Punkte M, N, O, P geht, und welchem auch die Doppelpunkte der conjectivischen Reihen R und R_1 angehören.

Betrachtet man D und E als Punkte von R_1, bestimmt die ihnen entsprechenden Punkte in R und verfährt im übrigen, wie eben angegeben wurde, so erhält man einen durch M, N und O gehenden Kegelschnitt, der mit K identisch ist. Selbstverständlich ergibt sich dann statt des Punktes P im allgemeinen ein anderer Mittelpunkt des einen der zwei erzeugenden Strahlenbüschel.

Bilden R und R_1 eine Involution, so kann die Aufgabe in derselben Weise gelöst werden. Die eben erklärte Construction wird dadurch nicht wesentlich vereinfacht. Bei den folgenden Aufgaben jedoch erfährt die Construction meist eine bedeutende Vereinfachung, wenn statt conjectivischer Punktreihen, durch welche die imaginären Punkte bestimmt werden, involutorisch liegende gegeben sind. Daher wollen wir nun zeigen, wie man statt conjectivischer Reihen involutorisch liegende substituiren kann, deren reelle oder imaginäre Doppelpunkte dieselben sind, wie jene der ersteren.

R und R_1 seien irgend zwei conjectivische Punktreihen und D, D' ihre Doppelpunkte. Durch M, N bezeichnen wir jene Punkte in R, welche gleiche Abstände vom Gegenpunkte G dieser Reihe haben und solchen Punkten M_1, N_1 in R_1 entsprechen, deren Abstände vom Gegenpunkte G' der Reihe R_1 eben so groß ist, als die Entfernung der Punkte M und G oder, was dasselbe ist, der Punkte N und G. Wir setzen also voraus, daß die Gleichungen bestehen

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$MG = NG = M_1G' = N_1G'$. Zwei solcher Paare sich entsprechender Punkte MM_1, NN_1, aber auch nicht mehr, sind bekanntlich in conjectivischen Reihen immer vorhanden und lassen sich durch eine einfache Construction ermitteln. — Nachdem das Doppelverhältniß von beliebigen vier Punkten der Reihe R gleich dem Doppelverhältnisse der diesen Punkten entsprechenden in R_1 ist, so besteht die Gleichung:

$$(DD'MN) = (DD'M_1N_1),$$

oder

$$\frac{DM}{D'M} : \frac{DN}{D'N} = \frac{DM_1}{D'M_1} : \frac{DN_1}{D'N_1}.$$

Da nun $DG = D'G'$ ist, so muß bei einstimmig verlaufenden Reihen $DM = -D'M_1$, $D'M = -DM_1$, $DN = -D'N_1$ und $D'N = -DN_1$ sein, woraus mit Rücksicht auf obige Gleichung folgt:

$$\left(\frac{DM}{D'M}\right)^2 : \left(\frac{DN}{D'N}\right)^2 = 1,$$

$$\frac{DM}{D'M} : \frac{DN}{D'N} = -1.$$

Von den beiden Zeichen, welche der Quadratwurzel zukommen, gilt im Allgemeinen nur das negative, denn wäre

$$\frac{DM}{D'M} = \frac{DN}{D'N},$$

so müßten entweder M und N, oder D und D' zusammenfallen. Betrachtet man nämlich D und D' als Fixpunkte, so wird durch den Werth des Verhältnisses

$$\frac{DM}{D'M}$$

die Lage des Punktes M vollkommen bestimmt, wäre also dieser Werth gleich

$$\frac{DN}{D'N},$$

so müßten M und N coincidiren. Nimmt man M und N als Fixpunkte an, so ist leicht einzusehen, daß unter der Voraussetzung

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$\frac{DM}{DN} \text{ sei gleich } \frac{D'M}{D'N}$$

die Punkte D und D' zusammenfallen müßten. Wir sind also berechtigt anzunehmen, das obige Doppelverhältniß habe im Allgemeinen den Werth -1, woraus man schließen kann, daß bei einstimmig verlaufenden Reihen die Punkte M und N, sowie auch M_1 und N_1 durch die Doppelpunkte D und D' harmonisch getrennt werden. M_1 und N_1 werden nämlich durch D und D' ebenfalls harmonisch getrennt, nachdem die Gleichung besteht:

$$\frac{DM_1}{D'M_1} : \frac{DN_1}{D'N_1} = -1.$$

Die Punkte M und N sowohl, als auch M_1 und N_1 bilden daher sich entsprechende Elemente einer involutorischen Punktreihe, deren Doppelpunkte D, D' mit jenen der einstimmig verlaufenden conjectivischen Reihen R und R_1 coincidiren.

Will man also R und R_1 durch eine involutorische Reihe, welche dieselben imaginären Doppelpunkte hat, ersetzen, so braucht man nur in R und R_1 die Punkte M, N und M_1, N_1 zu ermitteln. Jene involutorische Reihe, welche durch die zwei Paare sich entsprechender Punkte MN, M_1N_1 bestimmt wird, ist dann die gesuchte. — Bekanntlich besteht die Gleichung

$$MG \,.\, M_1G' = MG^2 = AG \,.\, A_1G'.$$

Es ist also

$$MG = \sqrt{AG \,.\, A_1G'},$$

welcher Werth sich leicht durch Construction ermitteln läßt.

Wie man zwei concentrisch liegende projectivische Strahlenbüschel S und S_1 durch einen involutorischen Büschel ersetzen kann, dessen imaginäre Doppelstrahlen mit jenen von S und S_1 zusammenfallen, bedarf nun keiner besonderen Erklärung mehr. Man schneidet S und S_1 durch irgend eine Gerade, wodurch sich zwei conjectivische Punktreihen ergeben, welche auf die angegebene Art durch eine involutorische Reihe R ersetzt werden können, und verbindet den gemeinschaftlichen Mittelpunkt von S und S_1 mit den Punkten der Reihe R. Die so erhaltenen Verbindungslinien bilden dann den verlangten involutorischen Strahlenbüschel.

Bei den folgenden Aufgaben setzen wir der größeren Einfachheit wegen stets voraus, die imaginären Elemente seien durch involutorische Grundgebilde gegeben. Wären diese Elemente durch Gebilde bestimmt, welche nicht involutorisch liegen, so kann man ja immer, wie wir eben gezeigt haben, diese Gebilde durch involutorische ersetzen.

2. Gegeben: Ein reeller Punkt und vier imaginäre Punkte.	Eine reelle Tangente und vier imaginäre Tangenten[1]).

Der gegebene reelle Punkt sei M, die Träger der zwei involutorischen Reihen R und R', welche die vier imaginären Punkte bestimmen, nennen wir beziehungsweise g und g', der Schnittpunkt von g und g' heiße A, und die Punkte in R und R', welche dem Punkte A entsprechen, seien beziehungsweise A_1 und a_1. Verbindet man M mit allen Punkten von R, sowie auch mit allen Punkten von R', so erhält man zwei involutorische, concentrisch liegende Strahlenbüschel, welche im Allgemeinen nicht projectivisch verwandt sind. Jeder dieser Büschel verläuft entgegengesetzt, nachdem jeder ein Schein einer involutorischen Punktreihe ist, welche keine reellen Doppelpunkte besitzt, daher gibt es in diesen zwei Büscheln zwei reelle Strahlen x und x_1, die sich entsprechen, ob man sie als Elemente des einen oder des anderen Büschels betrachtet[2]). Die Schnittpunkte von x und x_1 mit der Geraden $A_1\, a_1$ nennen wir P und Q. Werden diese Punkte mit sämmtlichen Punkten von R (oder R') verbunden, so erhält man zwei projectivische Strahlenbüschel, welche, wie leicht einzusehen, den verlangten Kegelschnitt erzeugen, vorausgesetzt, daß je zwei Strahlen derselben als entsprechende betrachtet werden, die durch entsprechende Punkte von R (oder R') gehen.

3. Gegeben: Zwei reelle, zwei imaginäre Punkte und eine reelle Tangente.	Zwei reelle, zwei imaginäre Tangenten und ein reeller Punkt.

Die gegebenen zwei reellen Punkte nennen wir A, B (Fig. 2), die involutorische Reihe, durch welche die zwei imaginären Punkte

[1]) Diese Aufgaben führen wir nur der Vollständigkeit wegen an. Die Auflösung derselben rührt von Seydewitz her.

[2]) Siehe Schröter: „Theorie der Kegelschnitte", Seite 59.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

bestimmt werden, sei R, ihr Träger g, die gegebene reelle Tangente bezeichnen wir durch t, die Schnittpunkte von AB mit g und t seien beziehungsweise P und M, endlich heiße N der Schnittpunkt von g und t.

Alle Kegelschnitte, welche durch A, B und die imaginären Doppelpunkte von R gehen, bilden einen Kegelschnittbüschel, welcher von t in einer involutorischen Punktreihe geschnitten wird. Jeder von den zwei Doppelpunkten T und T' dieser Reihe ist ein Berührungspunkt eines die Bedingungen der Aufgabe erfüllenden Kegelschnittes. Sind T und T' imaginär, so gibt es keinen reellen Kegelschnitt, der den gestellten Anforderungen Genüge leistet; sind aber T und T' reell, so gibt es zwei Auflösungen der Aufgabe.

Verbindet man sowohl A, als auch B mit den Punkten von R, so erhält man zwei projectivische Strahlenbüschel S und S_1, in welchen wir je zwei Strahlen als entsprechende betrachten wollen, die durch entsprechende Punkte von R gehen. Diese beiden Büschel erzeugen einen Kegelschnitt K, welcher dem eben erwähnten Kegelschnittbüschel angehört. Die Schnittpunkte von K mit der Geraden t sind die Doppelpunkte D, D' jener zwei auf der Geraden t befindlichen Reihen, welche sich als Schnitte von t mit S und S_1 ergeben. Demselben Kegelschnittbüschel gehören auch die Geraden g und AB an, folglich sind M, N und D, D' zwei Paare sich entsprechender Punkte der involutorischen Reihe, in der die Gerade t den Kegelschnittbüschel schneidet. Sind D und D' reell, so hat man nur in der durch M, N und D, D' bestimmten involutorischen Reihe die Doppelpunkte zu ermitteln. Diese Punkte sind T und T' Werden D und D' imaginär, so substituirt man statt der auf t befindlichen conjectivischen Reihen eine involutorische Reihe r, in welcher D und D' Doppelpunkte sind, und ermittelt dann die zwei Punkte, welche einander sowohl in r, als auch in jener involutorischen Reihe entsprechen, deren Doppelpunkte M und N bilden. Dass die so erhaltenen zwei Punkte mit T, T' identisch sein müssen, ist leicht einzusehen, wenn man berücksichtigt, daß sie sowohl M und N, als auch D und D' harmonisch trennen.

Ist der Berührungspunkt T bestimmt, so ergibt sich eine zweite Tangente des gesuchten Kegelschnittes k wie folgt: Man bestimmt zunächst den Punkt P_1, welcher dem Punkte P entspricht und verbindet P_1 durch eine Gerade d mit jenem Punkte O, der von P durch

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

A und B harmonisch getrennt wird. Der Schnittpunkt Q der Geraden p und t wird dann mit P verbunden und jene durch Q gehende Gerade QC bestimmt, welche von t durch die Geraden QP und p harmonisch getrennt wird. QC ist eine zweite Tangente von k; ihr Berührungspunkt C befindet sich in der Geraden PT. — Um dies einzusehen, hat man nur zu berücksichtigen, daß p die Polare des Punktes P in Bezug auf den Kegelschnitt k ist und daß QP und p einander in Bezug auf k conjugirt sind.

Hat man den Berührungspunkt T und die zweite Tangente mit ihrem Berührungspunkte C ermittelt, so läßt sich die verlangte Curve mit Benützung des Pascal'schen Satzes in bekannter Weise construiren.

Wenn einer der gegebenen reellen Punkte in der Tangente t liegt, so hat die Aufgabe nur eine Auflösung, denn dieser Punkt bildet den Berührungspunkt (T oder T') von t. Die Construction von k für diesen speciellen Fall ist dieselbe, welche man in dem allgemeinen Falle durchzuführen hat, wenn einmal T und T' bestimmt sind.

4. Gegeben: Vier imaginäre Punkte und eine reelle Tangente.	Vier imaginäre Tangenten und ein reeller Punkt.

g und g' (Fig. 3) seien die Träger der zwei involutorischen Reihen R und R', durch welche die vier imaginären Punkte bestimmt werden, t nennen wir die gegebene reelle Tangente, P den Durchschnittspunkt von g und g' und M, N seien die Schnittpunkte der Geraden t beziehungsweise mit g und g'.

Bestimmt man sowohl in R, als auch in R' den Punkt, welcher dem Schnittpunkte P entspricht, und verbindet die sich ergebenden zwei Punkte durch eine Gerade p, so ist p die Polare von P in Bezug auf den verlangten Kegelschnitt k, nachdem p durch zwei dem Punkte P in Bezug auf k conjugirte Punkte geht.

Sind r' und r_1' die zwei projectivischen Punktreihen, welche die involutorische Reihe R' bilden, und verbindet man irgend einen Punkt A der Reihe R mit den Punkten von r', sowie auch den Punkt A_1, welcher dem Punkte A entspricht, mit den Elementen von r_1', so ergeben sich zwei projectivische Strahlenbüschel S und S_1 mit den Mittelpunkten A und A_1. Diese Büschel werden von p in zwei con-

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

jectivischen Punktreihen geschnitten, welche entgegengesetzt verlaufen, also reelle Doppelpunkte DD' haben; denn r' und r_1' verlaufen einstimmig, nachdem ihre Doppelpunkte imaginär sind, und A, A_1 liegen zu verschiedenen Seiten der Geraden p, weil R ebenfalls einstimmig verläuft, woraus folgt, daß A und A_1 durch P und p getrennt werden. — Verbindet man D mit allen Punkten von R, so erhält man einen involutorischen Strahlenbüschel s, welcher mit jenem s_1 identisch ist, der aus den Verbindungslinien des Punktes D mit sämmtlichen Punkten von R' besteht. Denn s und s_1 haben die zwei Paare sich entsprechender Strahlen DP, p und DA, DA_1 gemein. Dasselbe gilt bezüglich der zwei Strahlenbüschel, welche aus den Verbindungslinien des Punktes D' mit den Elementen von R und R' bestehen. Im Punkte D sowohl, als auch in D' schneiden sich somit zwei imaginäre Verbindungslinien der imaginären Doppelpunkte von R und R'. Man kann also D als Durchschnittspunkt zweier gegenüberliegender Seiten und D' als Schnittpunkt der Diagonalen jenes dem Kegelschnitte k eingeschriebenen Viereckes betrachten, dessen Eckpunkte die imaginären Doppelpunkte von R und R_1 sind.

Nach dem Satze von Desargues bilden die Schnittpunkte der Tangente t mit den Seiten dieses Viereckes eine Involution, deren entsprechende Elemente sich in den gegenüberliegenden Vierecksseiten befinden und welche einen ihrer Doppelpunkte im Berührungspunkte von t hat. Der Berührungspunkt T von t ergibt sich daher wie folgt: Man bestimmt (durch zwei Paare entsprechender Punkte) die involutorische Reihe ρ, in welcher s von der Tangente t geschnitten wird, und ermittelt die zwei Punkte T und T', welche sich sowohl in ρ, als auch in jener involutorischen Reihe entsprechen, deren Doppelpunkte M und N sind. Jeder der Punkte T und T' kann als Berührungspunkt von t betrachtet werden; es gibt somit zwei Auflösungen der Aufgabe, und zwar sind diese Auflösungen immer reell, nachdem T und T' den Bedingungen der Aufgabe zufolge stets reell sein müssen.

Die Bestimmung einer zweiten Tangente QC des Kegelschnittes k und des Berührungspunktes C dieser Tangente kann in derselben Weise geschehen, wie im Falle 3.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Hat man T und T' ermittelt, so ist die Aufgabe auf den Fall 2 zurückgeführt.

5. Gegeben: Zwei imaginäre Punkte, ein reeller Punkt und zwei reelle Tangenten.	Zwei imaginäre Tangenten, eine reelle Tangente und zwei reelle Punkte.

In Fig. 4 sei A der gegebene reelle Punkt, R sei jene involutorische Punktreihe, deren imaginäre Doppelpunkte dem verlangten Kegelschnitte k angehören sollen, g heiße der Träger von R, t und t' nennen wir die zwei gegebenen reellen Tangenten und M den Schnittpunkt derselben.

Wird M mit den Punkten von R verbunden, so erhält man einen involutorischen Strahlenbüschel, welchen wir durch S bezeichnen wollen. Der involutorische Büschel, dessen Doppelstrahlen t und t' bilden, heiße S'. In S und S' bestimmen wir jene zwei Strahlen p und p_1, welche sich sowohl in S, als auch in S_1 entsprechen, und nennen die Schnittpunkte von p und p_1 mit g beziehungsweise P und P_1. — Um unsere Aufgabe zu lösen, wenden wir nun eine Specialität des Satzes von Desargues an: „Wenn ein Winkel einem Kegelschnitte umschrieben ist, so bilden die Durchschnittspunkte irgend einer in der Ebene des Kegelschnittes gelegenen Geraden mit den Schenkeln des Winkels, mit der Verbindungslinie der Berührungspunkte der Schenkel und mit dem Kegelschnitte eine involutorische Punktreihe. Entsprechende Punkte der letzteren sind die Schnittpunkte mit der Curve und die in den Schenkeln gelegenen, während der Durchschnitt mit der erwähnten Verbindungslinie einen Doppelpunkt bildet [1].“

Heißen die Berührungspunkte der gegebenen Tangenten T und T', so muß der Punkt P diesem Satze zufolge für eine Auflösung der Aufgabe in der Verbindungslinie der Punkte T und T' liegen. Nachdem TT' die Polare von M ist und P in TT' liegt, so fällt die Polare von P in Bezug auf einen Kegelschnitt, welcher die Bedingungen der Aufgabe erfüllt, mit p zusammen. — Verbindet man A mit P und sucht jenen Punkt B, welcher durch P und p von A harmonisch getrennt wird, so ergibt sich ein zweiter Punkt B des Kegelschnittes. Die Aufgabe ist dann auf den Fall 3 zurückgeführt.

---

[1]) Siehe Chasles: „Traité des sections coniques“, Seite 41.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Betrachtet man P_1 als einen Punkt der Berührungssehne TT', so bildet p_1 die Polare von P_1 und es kann auf die eben erklärte Weise gleichfalls ein zweiter reeller Punkt des verlangten Kegelschnittes bestimmt werden.

Nimmt man an, P liege in TT', so ergeben sich zwei Auflösungen (s. Fall 3) und ebenso wenn P_1 als ein Punkt von TT' betrachtet wird. Es gibt also im Allgemeinen vier Auflösungen. In dem speciellen Falle, wenn A in t oder t' gelegen ist, sind jedoch nur zwei Auflösungen möglich, wie man sich leicht überzeugen kann.

6. Gegeben: Drei reelle Punkte und zwei imaginäre Tangenten.	Drei reelle Tangenten und zwei imaginäre Punkte.

Die drei gegebenen reellen Punkte nennen wir A, B, C (Fig. 5), der involutorische Strahlenbüschel, dessen imaginäre Doppelstrahlen den verlangten Kegelschnitt tangiren sollen, heiße S und der Mittelpunkt von S sei M. Die Gerade BC schneidet S in einer involutorischen Reihe, welche wir R nennen, während jene involutorische Reihe, deren Doppelpunkte B und C sind, durch R' bezeichnet werden soll.

Auf der Geraden BC gibt es unter den gemachten Voraussetzungen immer zwei reelle Punkte P, P_1, welche sich sowohl in R, als auch in R' entsprechen. Heißt k irgend ein Kegelschnitt, der die Bedingungen der Aufgabe erfüllt, so sind P und P_1 in Bezug auf k conjugirte Punkte und die Geraden MP, MP_1, welche wir der Kürze wegen beziehungsweise durch p und p_1 bezeichnen, müssen einander ebenfalls in Bezug auf k conjugirt sein.

Dem oben citirten Satze zufolge, geht die Verbindungslinie der Berührungspunkte der gegebenen imaginären Tangenten, nämlich die Polare von M entweder durch P oder durch P_1. Nimmt man an, die Polare von M gehe durch P, so ist p die Polare von P, nachdem P dieser Annahme zufolge sowohl dem Punkte P_1 als auch dem Punkte M conjugirt ist. Betrachtet man P_1 als Schnittpunkt der Polaren von M mit BC, so ist, wie leicht einzusehen, p_1 die Polare von P_1. Wir nehmen vorläufig an, die Polare von M gehe durch P.

Ein vierter Punkt D des zu construirenden Kegelschnittes k wird dann erhalten, indem man A mit P verbindet und in AP jenen

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Punkt D bestimmt, welcher von A durch P und p harmonisch getrennt wird.

Um die Polare des Punktes M zu erhalten, bestimmen wir noch einen in AB gelegenen Punkt derselben. Dieß geschieht, indem man in jener involutorischen Punktreihe r, welche sich als Schnitt von AB mit dem Büschel S ergibt und in der involutorischen Reihe r', deren Doppelpunkte A und B sind, die zwei Punkte Q, Q' ermittelt, welche sich sowohl in r, als auch in r' entsprechen. Jeder dieser Punkte kann als ein Punkt der Polaren von M betrachtet werden. Für den Fall, als die in Rede stehende Polare durch P geht, gibt es nämlich zwei Auflösungen der Aufgabe. Bei der einen Auflösung ist PQ, bei der andern PQ' die gesuchte Polare. Daß entweder Q oder Q' in der Polaren von M liegen muß, folgt aus dem Umstande, daß diese beiden Punkte die Doppelpunkte jener involutorischen Reihe bilden, welche nach dem Satze von Desargues durch A, B und die imaginären Schnittpunkte von AB mit den Doppelstrahlen des Büschels S bestimmt wird.

Hat man Q ermittelt und PQ, nämlich die Polare m des Punktes M gezogen, so läßt sich in jedem der vier Punkte A, B, C und D leicht die Tangente des verlangten Kegelschnittes construiren. Um z. B. die Tangente in A zu erhalten, zieht man den Strahl a_1 des Büschels S, welcher durch A geht, bestimmt in S den Strahl a, welchem a_1 entspricht und verbindet den Schnittpunkt E der Geraden m und a mit dem Punkte A. Diese Verbindungslinie tangirt den Kegelschnitt k in A, denn E ist der Pol von a_1, nachdem E den Schnittpunkt der Geraden m und a bildet, welche beide der Geraden a_1 conjugirt sind.

Kennt man A, B, C, D und die Tangente in einem dieser Punkte, so läßt sich der Kegelschnitt k mit Hilfe des Pascal'schen Satzes construiren.

Da man sowohl für den Fall als die Polare von M durch P, als auch dann, wenn sie durch P_1 geht, im Allgemeinen zwei Auflösungen erhält, so gibt es vier Auflösungen der Aufgabe, welche immer reell sind.

Auf eine andere Art die Aufgabe zu lösen, machen wir bei der Untersuchung des folgenden Falles aufmerksam:

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

7. Gegeben: Zwei imaginäre Punkte, ein reeller Punkt und zwei imaginäre Tangenten. | Zwei imaginäre Tangenten, eine reelle Tangente und zwei imaginäre Punkte[1]).

Der gegebene reelle Punkt heiße A (Fig. 6), die involutorische Reihe, deren imaginäre Doppelpunkte dem verlangten Kegelschnitte k angehören sollen, nennen wir R und ihren Träger g. Die imaginären Tangenten von k seien ferner die Doppelstrahlen eines involutorischen Strahlenbüschels S und der Mittelpunkt von S befinde sich in M.

Die Gerade g schneidet den Büschel S in einer involutorischen Punktreihe, welche wir durch R' bezeichnen wollen, P und P_1 seien jene Punkte, die einander sowohl in R, als auch in R' entsprechen. Dann sind P und P_1 conjugirte Punkte und MP, MP_1 conjugirte Gerade in Bezug auf k. — Letztere zwei Geraden nennen wir p und p_1. — Sowie im Falle 6 muß die Polare von M entweder durch P oder P_1 gehen. Wenn sie durch P geht, so ist p die Polare von P, geht sie durch P_1, so ist p_1 die Polare von P_1. Wir betrachten zunächst den Fall, in welchem p die Polare von P ist. Ein zweiter Punkt B des verlangten Kegelschnittes wird in diesem Falle erhalten, indem man A mit P verbindet und jenen Punkt B bestimmt, welcher von A durch P und p harmonisch getrennt wird.

Unter allen Kegelschnitten, welche durch A, B und die imaginären Doppelpunkte der Reihe R gehen, gibt es einige, die von den imaginären Doppelstrahlen des Büschels S berührt werden, also den Bedingungen der Aufgabe vollständig entsprechen.

Alle diese Kegelschnitte bilden einen Kegelschnittbüschel. Um eine Curve des letzteren zu erhalten, welche die Forderungen der Aufgabe erfüllt, ziehen wir den Strahl a_1 des Büschels S, der durch A geht, und bestimmen jenen Strahl a von S, welchem a_1 entspricht. Die Pole der Geraden a_1 in Bezug auf sämmtliche Curven des Kegelschnittbüschels liegen bekanntlich auf einem Kegelschnitte, den wir K nennen wollen. Heißen die Punkte, in welchen a von K

[1]) Auf anderen Principien beruhende, minder einfache Lösungen der Aufgaben 3—7 finden sich in dem bereits erwähnten Werke von Chasles (Seite 47, 226, 236). Eine Lösung der Aufgabe 6 hat auch Staudt bekannt gegeben („Geometrie der Lage", Seite 187).

geschnitten wird, Q und Q', so kann sowohl die Gerade PQ als auch PQ' die Polare des Punktes M in Bezug auf den verlangten Kegelschnitt k sein. Daß z. B. PQ unter den gemachten Voraussetzungen die Polare von M ist, ergibt sich aus Folgendem: Der Pol von a_1 in Bezug auf k liegt in a, weil a und a_1 einander conjugirt sind; der Pol von a_1 in Bezug auf k muß aber auch in K liegen, daher ist Q dieser Pol. Nachdem nun P der Pol von p und Q der Pol von a_1 ist, so muß die Gerade PQ, welche wir m nennen wollen, die Polare des Schnittpunktes M von p und a_1 sein.

Die Gerade AQ ist die Tangente der Curve k im Punkte A. Eine zweite durch Q gehende Tangente wird erhalten, indem man jene Gerade bestimmt, welche von AQ durch a und m harmonisch getrennt wird. Diese Tangente schneidet a_1 in ihrem Berührungspunkte C. — Man kennt nun drei Punkte A, B, C und die Tangenten in A und C; es läßt sich also der verlangte Kegelschnitt mit Benützung des Pascal'schen Satzes construiren.

Setzt man voraus, die Polare von M gehe durch P, so erhält man zwei Auflösungen und ebenso viele, wenn man annimmt, diese Polare gehe durch P_1; daher gibt es im Allgemeinen vier Auflösungen der in Rede stehenden Aufgabe.

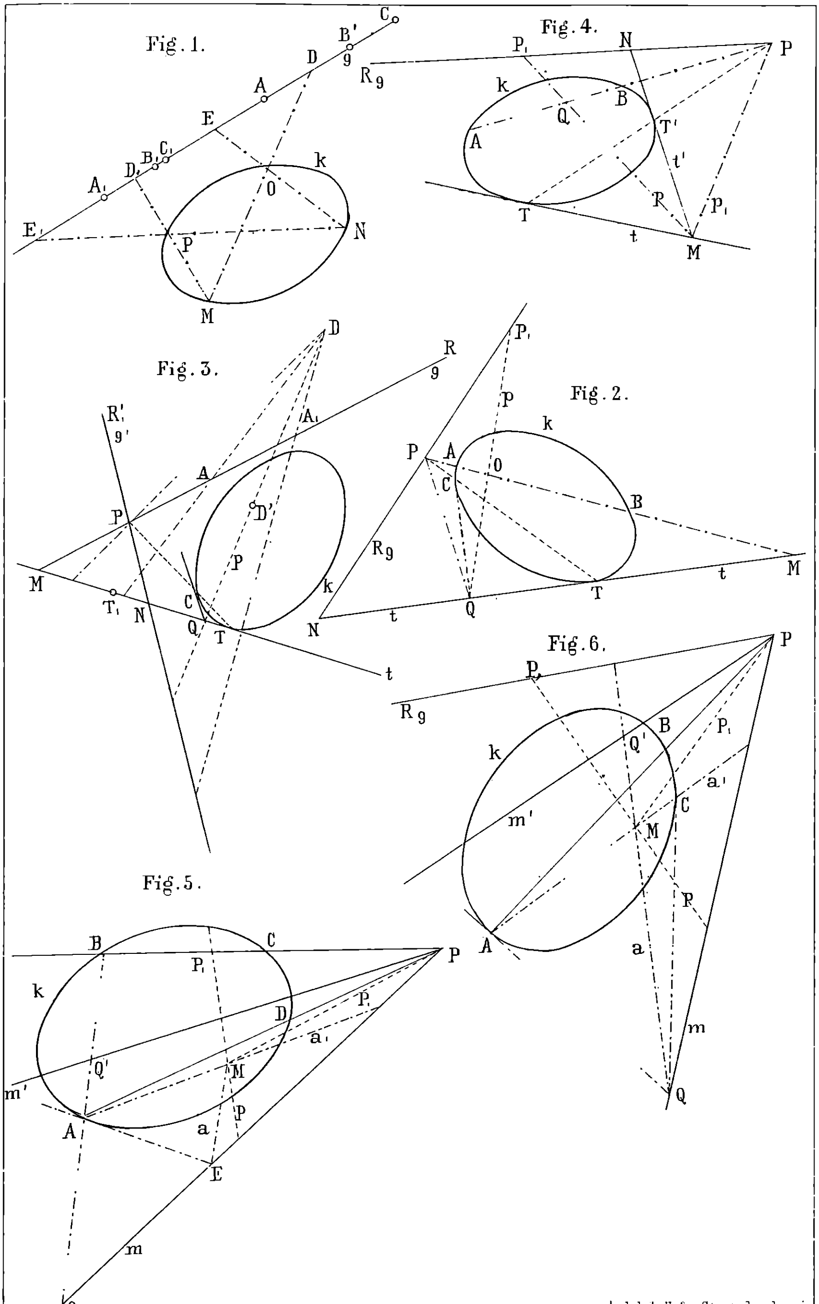
Es erübrigt noch zu erklären, wie man die Punkte Q und Q' ermitteln kann. Wie erwähnt, sind sie die Schnittpunkte der Geraden a mit jenem Kegelschnitte K, in welchem die Pole von a_1 in Bezug auf sämmtliche Curven des durch A, B und die Doppelpunkte von R gehenden Kegelschnittbüschels liegen. Diese Schnittpunkte können bestimmt werden, ohne daß man die Curve K zu construiren braucht. Bekanntlich ist K identisch mit jenem Kegelschnitte, welcher sämmtliche Punkte enthält, die den Punkten von a_1 in Bezug auf irgend zwei Curven des Büschels zugleich conjugirt sind. Heißen k_1 und k_2 zwei solche Curven, so ergibt sich K, indem man a_1 als Träger einer Punktreihe r betrachtet, zu allen Punkten von r die Polaren in Bezug auf k_1 und ebenso in Bezug auf k_2 bestimmt. Diese Polaren bilden zwei Strahlenbüschel s und s_1, welche projectivisch verwandt sein müssen, nachdem sie beide der Reihe r projectivisch sind. Die Mittelpunkte von s und s_1 werden von den Polen der Geraden a_1 in Bezug auf k_1 und k_2 gebildet. Als Kegelschnitt k_1 kann man das System der zwei Geraden AB und g betrachten; der Pol von a_1 in Bezug auf k_1 ist dann P und die Polare irgend eines Punk-

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

tes X von r ist jene durch P gehende Gerade, welche von X durch AB und g harmonisch getrennt wird. Alle diese Polaren bilden den Strahlenbüschel s. Als Curve k_2 kann das Erzeugniß der zwei Strahlenbüschel angesehen werden, deren Mittelpunkte sich in A und B befinden und welche Scheine jener projectivischen Punktreihen sind, aus denen die involutorische Reihe R besteht. Wie man den Pol von a_1 in Bezug auf diese Curve k_2, sowie auch die den Strahlenbüschel s_1 bildenden Polaren der Punkte von r bestimmt, ohne k_2 selbst zu construiren, bedarf wohl keiner weiteren Erklärung. Die Punkte Q und Q' ergeben sich schließlich als Doppelpunkte der zwei projectivischen Punktreihen, in welchen die Strahlenbüschel s und s_1 von der Geraden a geschnitten werden. Selbstverständlich braucht man zur Bestimmung von Q und Q' nur drei Paare sich entsprechender Strahlen der Büschel s und s_1, also nur drei conjugirte Gerade von a in Bezug auf k_1 und ebenso viele in Bezug auf k_2 zu construiren.

In derselben Weise wie die Aufgabe 7 kann auch die vorhergehende gelöst werden. Es vereinfacht sich jedoch die Construction für den unter 6 angeführten Fall, wenn man annimmt, der Kegelschnitt k_2 bestehe aus den Geraden AB und CD (Fig. 5).

© Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at



A. d. k. k. Hof- u. Staatsdruckerei.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1870

Band/Volume: 61_2

Autor(en)/Author(s): Weyr Emil

Artikel/Article: Zur Vervollständigung der Involutionen höherer Ordnung. 600-620