©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Über die Maxima und Minima der Winkel, unter welchen krumme Flächen von Radien-Vectoren durchschnitten werden.

Von Dr. **Karl Exner.**

(Mit 1 Tafel.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 9. December 1870.)

In meiner Abhandlung „Über die Maxima und Minima der Winkel, unter welchen Curven von Radien durchschnitten werden", Sitzb. 1868, habe ich den Satz bewiesen:

„Wenn im Raume eine Curve von einem Radius-Vector unter einem grössten oder kleinsten Winkel durchschnitten wird, so liegt der Ursprung der Radien-Vectoren mit der Curve auf derselben Seite der rectificirenden Ebene und es ist die dritte Proportionale zum Krümmungshalbmesser und Radius-Vector zugleich die dritte Proportionale zu den Abständen des Ursprunges der Radien-Vectoren von der rectificirenden Ebene und der Tangente". (a)

Diesem Satze kann die folgende geometrische Deutung gegeben werden. Es sei, Fig. 1,

- a der Durchschnittspunkt der Curve und des Radius-Vector,
- ab der Krümmungshalbmesser des Punktes a der Curve, $ab = A$,
- cd die Tangente dieses Punktes der Curve,
- e der Ursprung der Radien-Vectoren,
- $ef \perp bad$, $fg = N \perp cd$, $eg = M$, $ea = R$ der Radius-Vector.

Dann folgt aus dem Satze (a):

$$R^2 : M^2 = A : N.$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Ferner findet sich:

$$A : N = ad : gd$$
$$ae^2 : eg^2 = ad : gd$$
$$ag^2 + eg^2 : eg^2 = ag + gd : gd$$
$$ag : eg = eg : gd$$
$$\sphericalangle\, aed = \frac{\pi}{2}.$$

Daher der Satz:

Wenn eine Curve von doppelter Krümmung in einem ihrer Punkte, π, von einem Radius-Vector unter einem grössten oder kleinsten Winkel durchschnitten wird, so bildet der Radius-Vector einen rechten Winkel mit jener Geraden, welche durch den Ursprung der Radien-Vectoren und einen Punkt der Tangente von π geht, welcher in gerader Linie liegt mit dem Krümmungsmittelpunkte von π und der Projection des Ursprungs der Radien-Vectoren auf die Schmiegungsebene des Punktes π. (I)

Für eine ebene Figur vereinfacht sich dieser Satz in den folgenden:

„Wird in der Ebene eine Curve von einem Radius-Vector unter einem grössten oder kleinsten Winkel durchschnitten, so ist der Radius-Vector die Projection des Krümmungshalbmessers."

Wenn man ein rechtwinkeliges Coordinatensystem so in die Figur legt, dass der Ursprung desselben auf den Krümmungsmittelpunkt des Punktes π fällt, die $+y$-Axe nach dem Punkte π gerichtet ist und die xy-Ebene mit der Schmiegungsebene des Punktes π zusammenfällt; wenn man ferner durch x, y, z die Coordinaten des Ursprungs der Radien-Vectoren und durch A den Krümmungshalbmesser des Punktes π bezeichnet, so liefert der Satz (a) die folgende Gleichung:

$$\frac{x^2 + (A-y)^2 + z^2}{A} = \frac{(A-y)^2 + z^2}{A-y} \qquad (b)$$

welche ausdrückt, dass der Ursprung der Radien-Vectoren auf einer gewissen Fläche liegt, von welcher einige zu ihrer Construction dienende Eigenschaften abgeleitet werden sollen.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Ich schneide daher die Fläche durch eine Ebene, zou, Fig. 2, welche mit ox einen Winkel $= \alpha$ einschliesst, und finde die Gleichung des Schnittes in Bezug auf das System zou, indem ich in Gleichung (b)

$$x = u \,.\cos\alpha \quad y = u \,.\sin\alpha \tag{e}$$

setze, nämlich:

$$\left(u - A\,.\frac{1+\sin^2\alpha}{2\sin\alpha}\right)^2 + z^2 = \left(A\,.\frac{1-\sin^2\alpha}{2\,.\sin\alpha}\right)^2 \tag{c}$$

die Gleichung eines Kreises, dessen Mittelpunkt auf ou liegt. Ich erhalte die Durchschnitte dieses Kreises mit ou, indem ich in Gleichung (c) $z=o$ setze, nämlich:

$$u_1 = \frac{A}{\sin\alpha} \qquad u_2 = A\,.\sin\alpha \tag{d}$$

Um die geometrische Bedeutung der Gleichungen (d) darzulegen substituire ich in dieselben die Gleichungen (e) und erhalte, wenn ich durch x_1, y_1, x_2, y_2 die Coordinaten der beiden Durchschnittspunkte bezeichne:

$$y_1 = A \qquad x_2^2 + \left(y_2 - \frac{A}{2}\right)^2 = \left(\frac{A}{2}\right)^2$$

Es liegt daher der eine der Durchschnittspunkte auf der Tangente des Punktes π, der andere auf einem über dem Krümmungsradius als Durchmesser construirten Kreise. Es folgt:

Wenn eine doppelt gekrümmte Curve in einem ihrer Punkte, π, von einem Radius-Vector unter einem grössten oder kleinsten Winkel durchschnitten wird, so liegt der Ursprung der Radien-Vectoren auf einer Fläche, welche der geometrische Ort ist aller Kreise, deren Ebenen auf der Schmiegungsebene des Punktes π senkrecht stehen und welche einen Durchmesser so in dieser Ebene haben, dass dessen Verlängerung durch den Krümmungsmittelpunkt des Punktes π geht und seine beiden Endpunkte auf die Tangente des Punktes π und

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

einen Kreis fallen, welcher über dem Krümmungsradius des Punktes π als Durchmesser in der Schmiegungsebene dieses Punktes construirt wird. (II)

Die in Rede stehende Fläche liegt ganz zwischen zwei Ebenen, nämlich der rectificirenden Ebene des Punktes π und einer Ebene, welche parallel zur rectificirenden Ebene durch den Krümmungsmittelpunkt des Punktes π gelegt wird.

Zu der soeben analytisch abgeleiteten Construction der in Rede stehenden Fläche kann man auch gelangen, wenn man von der im Satze (I) angeführten Eigenschaft derselben ausgeht. Es folgt nämlich aus dieser Eigenschaft, dass, Fig. 2, der Schnitt der Ebene zou und der Fläche zusammenfällt mit dem Schnitte dieser Ebene und der über πg als Durchmesser construirten Kugel, also ein Kreis ist, $ghik$, in Bezug auf welchen nur noch die Lage des Punktes h zu bestimmen ist; dass dieser Punkt auf dem über $o\pi$ in der Ebene oxy construirten Kreise, $oh\pi$, liegt, folgt aus dem leicht zu erweisenden Satze, dass zwei über zweien Seiten, πg, πo, eines Dreieckes als Durchmessern construirte Kreise, πhg, πho, sich in der dritten Seite des Dreiecks schneiden.

Wendet man den Satz (II) auf eine ebene Figur an, so hat man statt der in diesem Satze definirten Fläche nur ihren Durchschnitt mit der Schmiegungsebene zu nehmen, welcher aus einem Kreise und einer geraden Linie besteht; da jedoch klar ist, dass ein Radius-Vector, welcher zugleich tangirt, kein Maximum oder Minimum des Durchschnittswinkels haben kann, indem das Differential dieses Winkels nicht verschwindet, sondern dem Contingenzwinkel der Curve gleich wird, so entfällt die zweite jener beiden Linien und es ergibt sich der folgende Satz:

Wenn in der Ebene eine Curve von einem Radius-Vector unter einem grössten oder kleinsten Winkel durchschnitten wird, so liegt der Ursprung der Radien-Vectoren auf einem Kreise, welcher über dem Krümmungsradius des Durchschnittspunktes als Durchmesser construirt wird. (III)

Ähnliche Relationen, wie die für Curven abgeleiteten, bestehen auch für Flächen, wenn dieselben von Radien-Vectoren unter grössten oder kleinsten Winkeln durchschnitten werden; und sollen dieselben im Folgenden abgeleitet werden.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Es sei, Fig. 3, *oxyz* ein rechtwinkeliges Coordinatensystem, *o* der Durchschnittspunkt der Fläche und des Radius-Vector, er werde als solcher auch durch π bezeichnet, *ox*, *oy* die beiden Haupttangenten des Punktes π der Fläche, so dass die Ebenen *xz*, *yz* die Ebenen der Hauptnormalschnitte sind, *ok*, *ki*, *ia* die Coordinaten des Ursprungs der Radien-Vectoren, welche zunächst alle drei als positiv vorausgesetzt werden, so dass $\sphericalangle aoi = \varphi$ den Durchschnittswinkel der Fläche und des Radius-Vector darstellt, von welchem vorausgesetzt wird, dass er ein Maximum oder ein Minimum sei. Aus dieser letzten Voraussetzung folgt zunächst, dass der Winkel $aoc = \psi$, der Winkel zwischen Radius-Vector und Normale, ebenfalls ein Maximum oder Minimum habe. Es muss daher das Differential des Winkels ψ verschwinden für jede unendlich kleine Variation des Durchschnittspunktes π auf der Fläche. Dies ist der Fall, wenn es verschwindet für zwei Variationen, nämlich diejenigen im Sinne der beiden Hauptnormalschnitte des Punktes π. Ich betrachte zunächst eine dieser beiden Variationen, z. B. die im Sinne des *xz*-Normalschnittes. Es sei *b* ein nächster Punkt der Fläche in dieser Richtung; er muss auf der Tangente *ox* angenommen werden, weil die Tangente in der Nähe des Berührungspunktes mit der Fläche zusammenfällt.

Beim Übergange des Punktes π von *o* nach *b* ändern der Radius-Vector und die Normale dieses Punktes ihre Richtungen, wodurch der Winkel dieser beiden Richtungen, ψ, übergeht in $\psi+\delta$, wo der Voraussetzung gemäss $\delta=o$ ist. Es ist aber $\delta=\delta'+\delta''$ zu setzen, wo δ' das partielle Differential des Winkels ψ in Bezug auf die Drehung der Normale, δ'' dasjenige in Bezug auf die Drehung des Radius-Vector bedeuten. δ'' ist negativ, daher δ' positiv. Damit δ' positiv sei, muss man den Durchschnittspunkt der durch *o* und *b* gehenden Normalen nach einem Punkte, *c*, der positiven *z*-Axe verlegen; dass nämlich diese beiden Normalen einen Durchschnittspunkt haben, folgt aus dem Umstande, dass *ob* zu einem Hauptnormalschnitte gehört, und dass der Durchschnittspunkt nicht auf der negativen *z*-Axe oder in unendlicher Entfernung liegt, folgt daraus, dass im ersten Falle $\delta'<o$, im zweiten Falle $\delta'=o$ wäre gegen die Voraussetzung. Es sei also *ab* der neue Radius-Vector, *cb* die neue Normale. Ausserdem seien:

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$od \parallel cb,\ cd \parallel ob,\ ol \parallel ab,\ al \parallel ob,\ at \parallel ik,\ kt \parallel ia$$

$$oe = of = og = on = oq = or = os = 1$$

gfe, fgn, qrs sphärische Dreiecke

$$fh \perp eh,\ np \perp gp,\ lm \perp am$$

oq in der Ebene xy, or in der Ebene yz

$$\sphericalangle soq = \sphericalangle koi,\ \sphericalangle sor = \sphericalangle akt$$

und möge überdies der Einfachheit wegen:

$$ok = a,\ ki = b,\ ia = c,\ oa = R,\ oc = A,\ ob = \sigma$$

gesetzt werden. Dies vorausgesetzt ist:

$$\delta' = eh = ef . \cos hef$$

$$ef = \frac{cd}{oc} = \frac{\sigma}{A}$$

$$\cos hef = \cos koi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\delta' = \sigma . \frac{a}{A\sqrt{a^2 + b^2}} \qquad (f)$$

ferner:

$$\delta'' = -gp = -ng . \cos pgn$$

$$ng = \frac{lm}{R} = \frac{la . \sin lam}{R} = \frac{\sigma . \sin aok}{R} = \frac{\sigma \frac{ak}{R}}{R} = \sigma . \frac{\sqrt{b^2 + c^2}}{R^2}$$

$$\delta'' = -\sigma \frac{\sqrt{b^2 + c^2}}{R^2} \cos pgn$$

$$\cos pgn = \cos qor = \cos qos . \cos ros = \cos koi . \cos tka =$$

$$= \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}}$$

$$\delta'' = -\sigma \frac{a . c}{R^2 \sqrt{a^2 + b^2}} \qquad (g)$$

und wenn man die Werthe (f), (g) in die Gleichung

$$\delta = \delta' + \delta'' = o$$

einsetzt, so erhält man:

$$R^2 = A . c \qquad (h)$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.zobodat.at

Für eine Variation des Punktes π in der Richtung oy würde man analog erhalten, dass der Durchschnittspunkt der neuen Normale mit der alten auf der positiven z-Axe liege, und dass, durch B den Krümmungshalbmesser des neuen Normalschnittes bezeichnet, die Relation bestehe:

$$R^2 = B \, . \, c \tag{i}$$

Aus den Gleichungen (h), (i) folgt aber die weitere Gleichung

$$A = B$$

welche besagt, dass der Punkt π der Fläche ein Nabelpunkt sei. Dies liegt nicht in der Voraussetzung, vielmehr muss diese in Bezug auf den Punkt π allgemeiner Natur sein. Es folgt, dass die Voraussetzung dreier positiver Coordinaten a, b, c unstatthaft ist, woraus sogleich weiter folgt, dass der Ursprung der Radien-Vectoren überhaupt in keinem der acht Octanten liegt. Es bleiben daher die folgenden Fälle:

1. Fall. $a = b = c = o$
2. Fall. a oder $b = c = o$. b oder a endlich
3. Fall. $a = b = o$. c endlich
4. Fall. a oder $b = o$. b oder a und c endlich.

Sichtlich führt der 1. Fall auf die Consequenz: $A = \infty$ $B = \infty$, der 2. auf die Consequenz: A oder $B = \infty$, der 3. auf $A = B$.

Es bleibt daher nur der 4. Fall möglich, so dass der Ursprung der Radien-Vectoren auf einer der beiden Hauptnormalebenen des Punktes π liegt.

Wenn man von dieser Voraussetzung ausgeht, handelt es sich wieder darum, dass $\delta = o$ sei für eine Variation des Punktes π in der Richtung ox sowohl als in der Richtung oy. Geht man nun z. B. von der Voraussetzung aus, es liege der Ursprung der Radien-Vectoren auf der xz-Ebene, so sieht man, dass $\delta = o$ ist für eine Variation des Punktes π auf dem yz Normalschnitte, wie immer dieser beschaffen sei, während man für eine Variation auf dem xz-Normalschnitte analog der oben für drei positive Coordinaten a, b, c ausgeführten Rechnung wieder die Gleichung (h) erhält. Umgekehrt würde man von der Voraussetzung ausgehend,

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

es liege der Ursprung der Radien-Vectoren auf der yz-Ebene, die Gleichung (i) als einzige Bedingungsgleichung erhalten.

Es liegt also der Ursprung der Radien-Vectoren auf einer der beiden Haupt-Normalebenen des Punktes π und besteht überdies die Relation

$$R^2 = A \cdot c \qquad (j)$$

wenn A den Krümmungshalbmesser des bezüglichen Hauptnormalschnittes bezeichnet.

Über die geometrische Bedeutung der Gleichung (j) lässt sich Folgendes sagen: Bedeutet, Fig. 4, die Ebene des Papiers die betreffende Hauptnormalebene, o den Durchschnittspunkt der Fläche und des Radius-Vector, aa die betreffende Haupttangente, ob den betreffenden Hauptkrümmungshalbmesser, de den betreffenden Krümmungskreis, of den Radius-Vector, so dass: $of = R$, $ob = A$, $fg = c$ ist, so folgt aus der Gleichung (j): $\sphericalangle \alpha = \frac{\pi}{2}$.

Es liegt daher der Ursprung der Radien-Vectoren auf dem Kreise hi, welcher über dem Krümmungsradius als Durchmesser construirt wird.

Man gelangt daher zu dem folgenden Satze:

Wenn eine krumme Fläche in einem ihrer Punkte von einem Radius-Vector unter einem grössten oder kleinsten Winkel durchschnitten wird, so liegt der Ursprung der Radien-Vectoren in einer der beiden Hauptnormalebenen des Durchschnittspunktes und zwar auf einem Kreise, welcher über dem entsprechenden Hauptkrümmungs-Radius als Durchmesser construirt wird. (IV)

Dieser Satz, dessen Umkehrung aus einem naheliegenden Grunde nicht gestattet ist, erfährt im Folgenden eine analytische Ableitung:

Es seien in Bezug auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem a, b, c die Coordinaten des Ursprungs der Radien-Vectoren und x, y, z diejenigen eines Punktes der Fläche. Dann ist die Gleichung des durch diesen Punkt gehenden Radius-Vector:

$$\xi - a = \frac{a-x}{c-z}(\zeta - c) \qquad y - b = \frac{b-y}{c-z}(\zeta - c)$$

© Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

wenn durch ξ, η, ζ die laufenden Coordinaten desselben bezeichnet werden; und die Gleichung der tangirenden Ebene für den Durchschnittspunkt:

$$(\xi-x)\frac{dz}{dx}+(\eta-y)\frac{dz}{dy}-(\zeta-z)=o$$

wo abermals ξ, η, ζ die laufenden Coordinaten bedeuten. Daher ist der Durchschnittswinkel des Radius-Vector und der tangirenden Ebene:

$$\sin\varphi=\frac{1-\frac{dz}{dx}\,\frac{a-x}{c-z}-\frac{dz}{dy}\,\frac{b-y}{c-z}}{\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}\;\sqrt{1+\left(\frac{a-x}{c-z}\right)^2+\left(\frac{b-y}{c-z}\right)^2}}$$

Man findet durch Differentiation, wenn man der Kürze wegen

$$\frac{dz}{dx}=p\quad\frac{dz}{dy}=q\quad\frac{d^2z}{dx^2}=r\quad\frac{d^2z}{dxdy}=s\quad\frac{d^2z}{dy^2}=t$$

$$p(a-x)+q(b-y)-(c-z)=W$$

$$\sqrt{p^2+q^2+1}=U\qquad\sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2}=V$$

setzt:

$$\frac{d\sin\varphi}{dx}=\frac{W}{U^3V^3}\Big\{V^2(pr+qs)-U^2[a-x+(c-z)p]\Big\}-\\-\frac{1}{UV}[r(a-x)+s(b-y)]\quad(k)$$

$$\frac{d\sin\varphi}{dy}=\frac{W}{U^3V^3}\Big\{V^2(qt+ps)-U^2[b-y+(c-z)q]\Big\}-\\-\frac{1}{UV}[t(b-y)+s(a-x)].\quad(l)$$

Da der Winkel φ ein Maximum oder Minimum hat, verschwindet sein Differential und daher auch dasjenige seines Sinus; es sind daher die Ausdrücke (k), (l) der Nulle gleich zu setzen. Ehe ich dies ausführe, gebe ich dem Coordinatensysteme eine solche Lage, dass der Ursprung desselben auf den Durchschnittspunkt, und die x und y-Axe auf die beiden Haupttangenten dieses

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Punktes der Fläche fallen, ferner der Ursprung der Radien-Vectoren im dreifach positiven Octanten des Systems zu liegen kommt. Hiedurch ergeben sich die folgenden Vereinfachungen:

$$x = y = z = p = q = s = o$$

$$r = \frac{1}{A} \quad t = \frac{1}{B} \quad \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = R \tag{m}$$

Wenn man nun nach Ausführung der Werthe (m) die Ausdrücke (k) und (l) der Nulle gleichsetzt, so erhält man:

$$\frac{a}{R}\left(\frac{c}{R^2} - \frac{1}{A}\right) = o \tag{n}$$

$$\frac{b}{R}\left(\frac{c}{R^2} - \frac{1}{B}\right) = o \tag{o}$$

Es folgt aus den Gleichungen (n), (o), dass a und b nicht beide von der Nulle verschieden sein können, da dann folgen würde: $A = B$. Ich setze daher eine dieser beiden Grössen, z. B. b, der Nulle gleich. Hiedurch wird Gleichung (o) befriedigt und bleibt allein Gleichung (n) übrig. Dies würde nur dann nicht der Fall sein, wenn gleichzeitig $a = c = o$ wäre, was nicht vorkommt. Da auch nicht gleichzeitig a und b der Nulle gleich sein können, also a endlich sein muss, verwandelt sich die Gleichung (n) in die einfachere Gleichung:

$$R^2 = Ac. \tag{p}$$

Es muss also der Ursprung der Radien-Vectoren in einer der Hauptnormalebenen liegen, $(b = o)$, und überdies die Gleichung (p) bestehen, welche mit der Gleichung (j) zusammenfällt und deren geometrische Bedeutung bereits besprochen wurde.

© Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Fig. 1

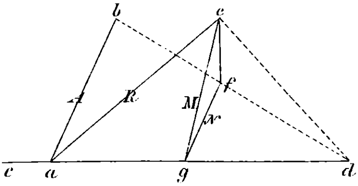


Fig. 2.

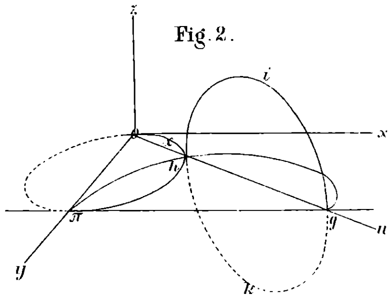


Fig. 3.

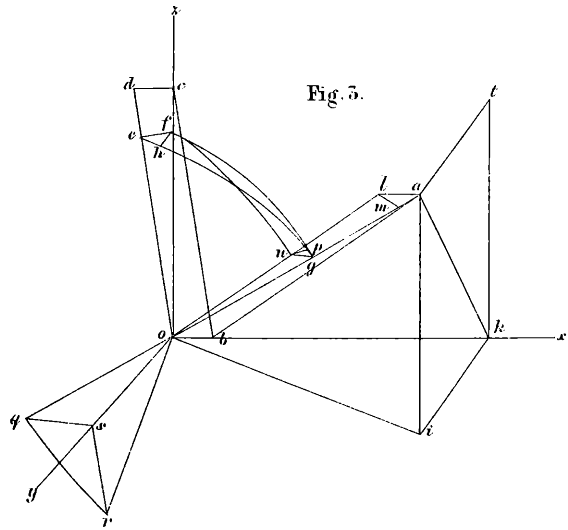
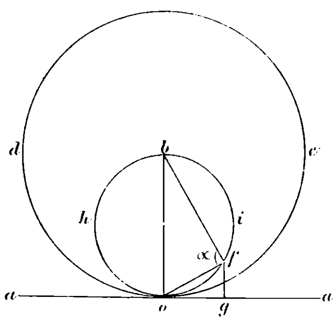


Fig. 4.



Ant. del.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1871

Band/Volume: 63_2

Autor(en)/Author(s): Exner Karl

Artikel/Article: Über die Maxima und Minima der Winkel, unter welchen krumme Flächen von Radien-Vectoren durchschnitten werden. 149-158