

Zuerst wurden, und zwar schon im J. 1864, die nach Bunsen's gasometrischem Verfahren mit Leuchtgas an verschiedenen Tagen gemachten Bestimmungen mit den durch den neuen Apparat erhaltenen verglichen, wobei sich Folgendes ergab:

Bunsen	N. Appt.
2·70 Vol. Pct. CO <sub>2</sub>	2·60
2·55	2·62
2·87	2·95
2·68	2·71
1·75	1·65
1·98	2·07
1·98	1·98
1·40	1·50
2·05	2·01

In einer zweiten Versuchsreihe wurden mit demselben Apparate und dem nämlichen Gase wiederholte Bestimmungen gemacht. Die Resultate waren folgende:

1	2	3
2·75	2·80	
2·82	2·84	2·88
2·97	2·98	

Endlich wurden in einer dritten Versuchsreihe die mit vier verschiedenen Apparaten und dem gleichen Gase erhaltenen Resultate verglichen:

Nr. 1	Nr. 2	Nr. 3	Nr. 4
2·7	2·68	2·8	2·8
2·7	3·1	3·0	3·0
2·9	2·9	2·8	2·8
2·8	2·8	2·7	2·8

Hiebei war es schwierig, mit vier Apparaten neben einander zu operiren, was die Genauigkeit der Resultate jedenfalls in etwas beeinflusste.

Aus allen diesen Zahlen ergibt sich, dass mit dem beschriebenen Apparate eine für die Praxis mehr als genügende Genauigkeit erzielt wird.

Noch sei erwähnt, dass Herr Fr. Rüdorff im 125. Bande von Pogg. Ann. Jhrg. 1865 einen Apparat beschrieben hat, der

ebenfalls zur Bestimmung der Kohlensäure im Leuchtgase dient, jedoch auf einem ganz andern Principe als der von mir angegebene beruht. Ohne Zweifel kann man auch mit jenem Apparate genaue Resultate erhalten; nur dürften die drei Hähne, von denen der aus Glas an der Hahnpipette, der sich stets mit Kalilauge in Berührung befindet, einige Inconvenienzen verursachen.

Es bedarf übrigens kaum der Erwähnung, dass der oben beschriebene Apparat auch in manchen Fällen für andere Gase gebraucht werden kann, wo dann das Verfahren entsprechend modificirt werden muss.

---

## Untersuchungen aus dem chemischen Laboratorium der medicinischen Facultät in Innsbruck.

### 1. Über die Trommer'sche Zuckerreaction im Harn.

Von Prof. Richard Maly.

(Vorgelegt in der Sitzung am 9. März 1871.)

Gelegentlich eines Falles von Diabetes (im Beginn der Entwicklung) beobachtete ich einen Harn, der durch sein hohes specifisches Gewicht und die Symptome des Kranken auf obige Diagnose schliessen liess, der aber keine Trommer'sche Probe gab. Er wurde mir zur Untersuchung übergeben, und es war leicht, ihn durch Hefe in Alkoholgährung zu bringen <sup>1</sup>.

Ich wurde dadurch dazu geführt, eine genaue Aufmerksamkeit der Kupferoxydreaction im Harn zuzuwenden, und war im Verlaufe oft überrascht durch die prononcirte Eigenschaft des Harn, die genannte Reaction zu verhindern, um so mehr als die meisten harnchemischen Anleitungen und physiologisch chemischen Werke diesen Punkt nicht berühren, oder nur gelegentlich erwähnen, dass die Anwesenheit von Ammoniak, indem es löslich auf das Kupferoxydul einwirkt, die Reaction beeinträchtigt. Nur in Kühne's Lehrbuch der physiologischen Chemie fand ich pag. 518—520 ausführlicher die Thatsache erörtert, dass man häufig normalem Harn Zucker hinzufügen kann, und dann bei der Trommer'schen Reaction wohl Reduction aber keine Ausscheidung von Kupferoxydul erhält, und dass diese Erscheinung der Gegenwart mehreren Substanzen zuzuschreiben ist, von denen die eine Kreatinin ist. Alles was ich darüber in Kühne's Buche fand, ist mir mit gleichem Resultate gelungen, und ich habe dieselben zum Theil quantitativ zu vervollständigen vermocht.

Zunächst seien, bevor ich zeige, wie man die versagende Reaction in der Regel wieder positiv machen kann, folgende Versuche um so mehr angeführt, als sie nicht nur Kühne's An-

---

<sup>1</sup> Im späteren Verlaufe nahm dieser Harn die Eigenschaften eines exquisiten diabetischen an, und gab intensive Trommer'sche Reaction.

gaben bestätigen, sondern auch einen wichtigen, von anderen Autoren nur unvollständig oder nicht berührten Gegenstand betreffen.

Um zu sehen, wie weit die, die Trommer'sche Reaction verdeckende Eigenschaft von normalem Harn geht, wurde folgende Versuchsreihe mit dem Morgenharn eines gesunden 30jährigen Mannes vom 20. Jänner unternommen. Die zum Harn gefügte Zuckerlösung war aus im Vacuum getrocknetem käuflichem Traubenzucker bereitet.

### I. Einprocentige Zuckerlösung.

CC. Harn		und	CC. Zuckerlös.	Resultate der Trommersehen Probe.
1.	5		$\frac{1}{2}$	Kein Oxydul, gelb u. klar bis auf einige Phosphatflocken. Beim Erhitzen, selbst bis zum Kochen gelbe oder braungelbe Lösungen ohne Abscheidung von gelbem oder rothem Oxydul. Nach einigen Stunden waren in allen Proben immer dunkel werdende schmutzig grüne schwebende Ausscheidungen.
2.	5		1	
3.	5		$1\frac{1}{2}$	
4.	5		2	
5.	5		3	
6.	5		4	
7.	5		5	
8.	5		6	
9.	5		7	
10.	5		10	
11.	5		20	Nunmehr trat starke gelbe Fällung ein.
12.	5		25—30	

### II. Mit zweiprocentiger Zuckerlösung.

CC. Harn	mit	CC. Zuckerlös.	Resultate
5		$\frac{1}{2}$ bis 2	Kein Oxydul; nach einiger Zeit leichte Flocken. Erst nichts, nach einigem Stehen schmutzig grüne Trübungen. Nun lebhaft gelbe Fällung, die bald rothbraun wurde. Würde sofort als Zuckerreaction gelten.
5		$2\frac{1}{2}$ bis 5	
5		8	

Es genügen diese wenigen Versuche um zu sehen, wenn man nach der Abscheidung des Kupferoxyduls urtheilt, wie sehr viel

Zucker man übersehen kann. Vielleicht mitunter noch mehr, der Probeharn war kein besonders ausgewählter, doch waren die meisten anderen von mir untersuchten Harne eher quantitativ in ihrer Hemmungswirkung nachstehend <sup>1</sup>.

Wie noch einige normale Harne, so wurden auch einige pathologische in dieser Richtung geprüft. Letztere stammten von folgenden Krankheitsfällen:

- |                     |                                |
|---------------------|--------------------------------|
| 1. Pericarditis     | 5. Myelitis & Exudat. pleurit. |
| 2. Insuff. v. Aort. | 6. Tremores potator.           |
| 3. Emphys. pulmon.  | 7. Perityphlitis               |
| 4. Tuberculos.      | 8. Tumor. lienis (?)           |

und gaben alle mit etwas Zucker versetzt (1 CC. 1% Lös. auf 5 CC. Harn) ein negatives Resultat, mit Ausnahme von Nr. 6, einem klaren ungemein blassen Harn, der die zugefügte kleine Zuckermenge durch einen deutlichen orangen Niederschlag anzeigte.

Dem allen gegenüber waren ein paar Versuche über die Empfindlichkeit der Trommer'schen Probe mit reiner Traubenzuckerlösung angezeigt. Es wurde dazu eine 1% Zuckerlösung genommen. Von ihr gingen circa 20 Tropfen auf 1 CC.; ein Tropfen enthielt also 0.0005 Grm. Zucker. Wurden zwei Tropfen mit etwa 5 CC. Wasser gemischt, so erhielt man bei Ausführung der Probe während des Erhitzens einen rothen Schimmer, und nach einigen Minuten einen deutlichen Kupferoxydulniederschlag. Drei, vier Tropfen gaben die Reaction steigend deutlicher, ein Tropfen kaum mehr. Es ist also bei einer Flüssigkeitsmenge von 5 CC. 1 Milligramm Zucker die Grenze, aber dieses ist unverkennbar. Wurden statt 5 CC. Wasser, 5 CC. eines Harns genommen, so blieb die Reaction auch aus, wenn statt zwei Tropfen Zuckerlösung 1, 2 oder 3 CC. zugesetzt wurden, daher die 20 und 30fache Menge Zucker hiebei nicht aufgefunden werden kann, gegenüber reinem Zuckerwasser, und der Harn als eine

---

<sup>1</sup> Es hängt dabei auch von der Ausführung der Reaction einiges ab. Meist setzt man nur so viel Kupfervitriol zum alkalisirten Harn, dass sich das ausgeschiedene blaue Hydroxyd wieder löst, so wurde auch hier verfahren. Setzt man den Vitriol aber bis zur bleibenden Trübung zu, so erhält man früher die Oxydulabscheidung, wengleich meist schmutziggrün.

für die Trommer'sche Reaction höchst störende Flüssigkeit bezeichnet werden muss.

Die Negativität der Reaction bezieht sich aber nicht darauf, dass keine Reduction des Kupferoxydes statthat, denn diese findet wie an der Gelbfärbung der blauen Flüssigkeit beobachtet wird, wirklich und resp. reichlich statt, sondern, wie schon angedeutet wurde, auf das Ausbleiben der Kupferoxydulausscheidung, und Kühne in seinem trefflichen Lehrbuche sagt: „der normale Harn muss demnach noch Stoffe enthalten, welche mit freiem Alkali gemischt Kupferoxydul in Lösung zu erhalten vermögen.“

Ich habe durch mehrfache Versuche die einzelnen Körper des Harns auf die Störung der Zuckerreaction untersucht. Sie wurden ausgeführt mit 1 und 3 proc. Zuckerlösung.

Harnstoff. 5 CC. einer zweiprocentigen Harnstofflösung, also von dem durchschnittlichen Concentrationsgrade des Harns mit 1 CC. einer einprocentigen Zuckerlösung gaben die Reaction in unveränderter Weise. Auch als ein ziemlich grosser Harnstoffkrystall in etwa 3 CC. Wasser gelöst war, liessen sich darin  $\frac{2}{10}$  CC. einer einprocentigen Zuckerlösung nachweisen, durch eine Oxydul-fällung einige Secunden nach dem Erhitzen zum Kochen. Manches Mal wird die erst gelbe Oxydul-fällung bald missfarbig.

Harnsäure stört in geringer Menge, wie sie etwa im Harn vorkommen kann, nicht. Bei grösseren Mengen wird durch die Bildung von wahrscheinlich harnsaurem Kupfer die Entstehung einer klaren blauen Flüssigkeit verhindert, es scheidet sich ein milchig trübender Niederschlag ab, aber beim Erhitzen bekommt man immer noch eine Oxydul-fällung.

Ebenso wurde nicht störend beobachtet die Gegenwart von Milchsäure, Oxalsäure, Taurin, Parabansäure, Glycocoll und Alloxan.

Hingegen ist die Anwesenheit von Kreatinin, wie auch Kühne angegeben hat in dessen Lehrbuch pag. 520 (nach Versuchen von Winogradoff), von wesentlichem Einfluss, und ich habe denselben genauer quantitativ verfolgt.

Es wurde dazu schön krystallisirtes, aus Harn gewonnenes salzsaures Kreatinin benützt, und eine Lösung davon in der Concentration bereitet, dass sie 1.32 Procen-te salzsaures Kreatinin oder 1.00 Procen-te Kreatinin enthielt. Von dieser Lösung

wurden steigende Mengen zu je 1 CC. einer 1% Zuckerlösung gesetzt, und damit die Trommer'sche Probe mit thunlichster Gleichförmigkeit ausgeführt. (Das Kupfersulfat wurde zur alkalischen Lösung immer in der Menge zugetropft, dass eine blaue stark trübe Lösung entstand.)

CC. Zuckerlös.	und	CC. Kreatininlös.	
1		$\frac{1}{2}$	Reiche orange Fällung.
1		1— $1\frac{1}{2}$	Etwas später gelbe Fällung.
1		2	} Beim Erhitzen bis zum Kochen gelb und klar; nach einiger Zeit schwach gelber Nieder- schlag.
1		$2\frac{1}{2}$	
1		3	Gelb, klar und bleibend.

Um noch näher die Grenze der ausbleibenden Fällung zu bestimmen:

CC. Zuckerlös.	und	CC. Kreatininlös.	
1		2·7	Kleine Spuren Kupferoxydul.
1	„	2·8	Bleibt klar.

Sonach wären, da die Kreatininlösung einprocentig ist, eben 0·028 Gramm oder 28 Milligramm hinreichend, die durch 10 Milligramm Zucker abgeschiedene Kupferoxydulmenge zu lösen. Wird die Kreatininmenge vermindert, so wird nach kurzem wenigstens eine Kupferoxydulabscheidung beobachtet.

Nach Fehling und Neubauer reduzieren 180 Gewichtstheile Zucker 396·8 Gewichtstheile Kupferoxyd, also 0·01 Gramm Zucker 0·0220 Gramm Kupferoxyd. Diese Menge Kupferoxyd, resp. davon stammendes Oxydul = 0·01978 Gramm, müsste in 0·018 Gramm Kreatinin gelöst bleiben. Dividirt man beide Zahlen, nämlich 0·028 Kreatinin und 0·01987 Kupferoxydul durch ihre Atomgewichte, so erhält man Zahlen, welche sich verhalten wie 1 : 1·1, oder ein Molekül Kreatinin hält gelöst 1 Atom Kupferoxydul ( $\text{Cu} = 31\cdot7$ ). Dies spricht nun dafür, dass das Kreatinin mit Kupferoxydul ein Metallderivat im bezeichneten Atomenverhältniss gibt, und dass diese Verbindung durch Kali nicht zerlegt wird, etwa so, wie Kali bei Gegenwart von Weinsäure das Kupferoxyd nicht fällt.

Da es von Interesse war, die Störung vom Kreatinin auf die Zuckerreaction genauer zu kennen, wurden noch mehrere quan-

titative Bestimmungen ausgeführt. Dabei wurden nach verschiedenen Versuchen die besten Resultate durch auf folgende Weise angestellte Titrirversuche gewonnen. Es wurde eine gewogene Quantität von meist salzsaurem Kreatinin in Wasser gelöst, mit etwas Kali und einigen CC. einer verdünnten Zuckerlösung versetzt, dann erwärmt, und unter fortwährendem Heisshalten der Flüssigkeit in einem Kölbchen eine Kupferlösung von  $C_u$  Gehalt so lange vorsichtig zutröpfeln gelassen, bis das erste Kupferoxydul sich auszuschcheiden begann. Die Flüssigkeit im Kölbchen färbt sich hiebei in dem Masse als Kupferoxydul in der Flüssigkeit sich löst, gelb dann roth, wird aber nach einigem Stehen bei Luftzutritt grün.

Versuch 1. 0·1788 Gramm salzsaures Kreatinin verbrauchten 6·4 CC. Fehling'scher Lösung (von 0·3463 Gramm Kupfervitriol in 10 CC.) bis zum Auftreten der ersten erkennbaren Trübung durch  $Cu_2O$  in der diesmal dunkel gewordenen Flüssigkeit.

Verhält. Kreatinin:  $Cu_2O = 1·19 : 0·87$ .

Versuch 2. 0·2733 Gramm salzsaures Kreatinin brauchten bis zum Auftreten des ersten gelben Kupferoxydul 20·2 CC. einer alkalischen Kupferlösung in der das Kupferoxyd durch Glycerin gelöst erhalten wurde, und von der 1 CC. gerade 0·005 Gramm Kupferoxyd enthielt. Dieselbe Kupferlösung diente auch zu nachfolgenden zwei Versuchen.

Verhält. Kreatinin:  $Cu_2O = 1·82 : 1·27$ .

Versuch 3. 0·2723 Gramm salzsaures Kreatinin hielt in Lösung das Oxydul von 26·3 CC. obiger Kupferlösung.

Verhält. Kreatinin:  $Cu_2O = 1·82 : 1·65$ .

Versuch 4. 0·2314 Gramm salzsaures Kreatinin verbrauchten 20·8 CC. Kupferlösung.

Verhält. Kreatinin:  $Cu_2O = 1·54 : 1·31$ .

Ein fünfter Versuch wurde in anderer Weise ausgeführt, indem dabei Kupferlösung im Überschusse zugesetzt, das ausgeschiedene Kupferoxydul abfiltrirt und dann in der alkalischen roth gefärbten Lösung die Menge des gelösten Kupfers auf gewichtsanalytischem Wege bestimmt wurde.

Versuch 5. Auf 0.1310 Gramm salzsaures Kreatinin wurde nach obigem Verfahren 0.061 Gramm Kupferoxyd gefunden.

Verhält. Kreatinin:  $\text{Cu}_2\text{O}$  — 0.87 : 0.76.

Bezieht man in diesen Versuchen das Verhältniss des in der alkalischen Lösung gebliebenen Kupferoxyduls zum Kreatinin auf 1 Molekül des letzteren, so erhält man Atome Kupferoxydul  $\text{Cu}_2\text{O}$  ( $\text{Cu} = 31.7$ ):

Versuch 1 Molek. Kreatinin	1	Atom. $\text{Cu}_2\text{O}$	0.7
	2	1	0.7
	3	1	0.9
	4	1	0.8
	5 „	1	„ 0.9

Die nur mässige Übereinstimmung der erhaltenen Zahlen, welche man hiebei wohl auch nicht so genau wie bei einer accreditirten chemischen Methode verlangen kann, liegt zum Theil darin, dass man in der mitunter ziemlich dunkel gewordenen Flüssigkeit sich nicht so genau über das erste Eintreten des ausgeschiedenen Kupferoxyduls orientiren kann, doch kann man wohl annehmen, dass 1 Molekül Kreatinin 1 Atom Kupferoxydul entspricht, und dass dieses durch jenes in der alkalischen Flüssigkeit gelöst erhalten wird.

Bleibt man aber genau bei den Versuchen und nimmt statt 1 Atom  $\text{Cu}_2\text{O}$  nur 0.8, so hält ein Molekül Kreatinin (= 113) 57.12 Gewichtstheile  $\text{Cu}_2\text{O}$  in Lösung, und da diese Menge von 28.8 Gewichtstheilen Zucker erzeugt wird, so verdecken 113 Gewichtstheile Kreatinin die Anwesenheit von 28.8 Gewichtstheilen Zucker oder in annähernd runder Zahl 4 Gramm Kreatinin die Anwesenheit von 1 Gramm Zucker.

Daraus sieht man, dass die kleinen Zuckermengen des normalen Harns sonach nicht durch  $\text{Cu}_2\text{O}$  Abscheidung aufgedeckt werden können. Nach Neubauer beträgt die pro die ausgeschiedene Kreatininmenge circa 1.00 Gramm, was auf die durchschnittliche Harnmenge von 1500 CC. in Procenten 0.067 macht, und es sollte was an Zucker über ein Viertel davon beträgt, durch die Trommer'sche Probe nachweisbar sein.

Wir haben gesehen, dass dies nicht der Fall ist, und dass viel mehr Zucker der Reaction entgeht.

Es muss also noch nach anderen Körpern gesehen werden. Dabei liesse sich zunächst an Xanthin etc. denken, wegen ihrer dem Kreatinin analogen Constitution, aber ihre Menge ist offenbar zu klein.

Es hat sich jedoch gezeigt, dass ganz besonders die Körper hier zu nennen sind, welche durch Thierkohle dem Harn entzogen werden. Gute Thierkohle entfärbt stark gelben Harn rasch und vollständig in etwa einstündigem Digeriren. Die entfärbte gleich concentrirte Flüssigkeit gibt unter gleichen Umständen nach Zuckerzusatz die  $\text{Cu}_2\text{O}$  Abscheidung weit eher, und die Reaction bei weitem reiner, das Oxydul ist gelb oder orange und nicht so missfärbig schmutziggrün, wie bei nicht entfärbtem Harn.

Eigener Morgenharn mit steigender Menge 1% Zuckerlösung versetzt, und die Trommer'sche Proben ganz gleich gemacht:

	<u>a) gelber Harn</u>	<u>b) entfärbt</u>
5 CC. Harn mit 1 CC. Fehling's Lösung und $\frac{1}{2}$ CC. Zuckerlösung	nichts;	nichts;
5 CC. Harn mit $\frac{1}{2}$ CC. Zuckerlösung und 2 CC. Fehling's Lösung	nichts, bloss Phosphate;	die rasch nieder fallenden Phosphate deutlich gelb;
5 CC. Harn mit 1 CC. Zuckerlösung und 3 CC. Fehling's Lösung	nichts;	gelber Niederschlag;
5 CC. Harn mit 2 CC. Zuckerlösung und 4 CC. Fehling's Lösung	undeutlich gelb;	starker gelber Niederschlag.

Der Unterschied zwischen gelben und entfärbten Harn ist recht auffallend, und abgesehen von dem viel früheren Eintreten des Niederschlages ist dieser nicht störend gefärbt.

Unter den Substanzen, welche die Kohle dem Harn entzieht gehört, wie man neuestens durch Schunk und Neubauer weiss, die Oxalursäure, deren amidartige Constitution auch wieder um ein kleines der Trommer'schen Probe hinderlich sein kann. Wesentlicher ist aber der Farbstoff des Harns selbst, den man als

im hohen Grade  $\text{Cu}_2\text{O}$  lösend bezeichnen muss, und man wird daher bei einer einigermaßen genaueren Zuckerreaction, falls man nicht einen diabetischen Harn par excellence vor sich hat, nicht unterlassen können, den Harn zu entfärben.

Ich habe die Entfärbungskohle mit Alkohol digerirt, auch einmal damit ausgekocht, aber dabei wird der Farbstoff von der Kohle nicht wieder losgelassen, und das abgedampfte alkoholische Extract, das sehr wenig gefärbt ist, hält zwar etwas  $\text{Cu}_2\text{O}$  in Lösung, aber nicht der Differenz von gelbem und farblosem Harn entsprechend.

Da man Harnfarbstoff nicht rein darstellen und also nicht wägen kann, so weiss ich nicht die  $\text{Cu}_2\text{O}$  lösende Kraft desselben mit der vom Kreatinin quantitativ zu vergleichen, aber nach den Erfahrungen von zahlreichen Proben muss ich angeben, dass ich den störenden Einfluss des Farbstoffes auf die Trommer'sche Probe viel grösser halte als den des Kreatinins.

Was die Frage anbelangt, ob das Kreatinin als solches oder durch seine Zersetzungsproducte mit Kali  $\text{Cu}_2\text{O}$  lösend wirkt, so ist das durch folgendes erledigt. Frisch gefälltes rothes Kupferoxydul, namentlich leicht aber oranges Oxydulhydrat löst sich in wässrigem salzsaurem Kreatinin und diese Flüssigkeit wird durch Kali nicht gefällt. Oder was dasselbe ist, in einer Lösung von Kupferchlorür (durch Auflösen von  $\text{Cu}_2\text{O}$  in Salzsäure erhalten) hindert Kreatinin die Ausfällung des Oxyduls. Dies beweist, dass ein Zersetzungsproduct des Kreatinins z. B. Ammoniak etc. nicht dabei im Spiele ist, und dass letzteres durch die Eigenschaft eine durch Kali nicht zersetzbare Kupferoxydulverbindung zu geben ausgezeichnet ist.

In Bezug auf das Ammoniak herrscht überhaupt eine irrige Meinung, die in einige Bücher übergegangen ist. Es werden da Ammoniak und dessen Salze als die Trommer'sche Probe beeinträchtigend angegeben, aber das sind sie nicht, wenigstens nicht für Kupferoxydulmengen, wie sie dabei in Betracht kommen. Und zwar genirt weder freies Ammoniak noch Salmiak oder oxalsaures Ammoniak. Z. B. führe ich folgende paar Versuche an, gemacht mit einer 1% Zuckerlösung und einer 2% Salmiaklösung.

1 CC. Zuckerlös. u. 1 CC. Salmiaklösung	}	Normales rothes Oxydul.
1		2
1	}	Niederschlag stark, orange.
1/2 "		3

Dabei war in der Flüssigkeit der letzten Probe 6 Mal so viel Salmiak als Zucker. Von einer hindernden Wirkung des Ammoniak's kann also füglich nicht die Rede sein. Dessgleichen thut Äthylamin der Reaction keinen Eintrag.

Ich habe noch versucht, das gelöst gebliebene Kupferoxydul wieder auszufällen, es seiner Verbindung durch ein anderes Oxyd zu entreissen und zur Abscheidung zu veranlassen. Dabei habe ich nicht ungünstige Resultate mit Zinkoxyd erhalten. Hat man nach Anstellung der Trommer'schen Probe ein negatives Resultat, nämlich keinen Niederschlag erhalten, und gibt jetzt zu der heissen Flüssigkeit eine Messerspitze voll Zinkoxyd, erwärmt noch einen Moment, so dass ein Theil des Zinkoxydes hinaufgerissen wird, so sieht man nach kurzem Absitzenlassen einen gelben Ring von  $\text{Cu}_2\text{O}$  haltendem Zinkoxyd, der sich gegen das unten liegende gebliebene schneeweisse Zinkoxyd gut abgrenzt. Es scheint also durch das Zinkoxyd das Kupferoxydul zum Theil deplacirt und abgeschieden zu werden. Dabei brauche ich wohl kaum zu erwähnen, dass der Kupfergehalt der gelben Fällung constatirt worden ist, und dass vom Zinkoxyd weder aus Harn noch vom kalisch gebräunten Zucker Farbstoff mitgerissen wird.

Wenn ich schliesslich nach den mitgetheilten und meinen Erfahrungen über die medicinisch so viel geübte Trommer'sche Probe resumire, so finde ich nicht nothwendig, dieselbe, die zu der physiologisch-chemisch besten Reaction gehört, verlassen zu sollen, wie dies Huizinga<sup>1</sup> will und dafür Molybdänsäure anrät, sondern ich würde nur folgende Cautelen damit in Verbindung

<sup>1</sup> Pflüger's Archiv 1871.

bringen. Der Farbstoff ist aus der jeweiligen Flüssigkeit (Harn etc.) durch Digeriren mit Thierkohle wegzunehmen; der Kupfervitriol ist der alkalisch gemachten Flüssigkeit so lange hinzuzusetzen, dass ein kleiner Theil Kupferhydroxyd noch ungelöst ist, und dann wäre bei nochmaligem Erhitzen auf die Gelbfärbung des hinzugebrachten Zinkoxyds zu achten. Die Empfindlichkeit einer reinen Zuckerlösung auf Kupfersalze, ist aber dabei nicht zu erreichen.

---

## 2. Bemerkungen über den schwefelhaltigen Körper des Harns.

Von Dr. **Wilhelm Loebisch.**

Von Sertoli<sup>1</sup> rührt die Beobachtung her, dass der Harn von Menschen, Pferden und Hunden mit Zink und Salzsäure behandelt, Schwefelwasserstoffgas entwickelt das durch die Schwärzung eines mit Bleizuckerlösung getränkten Papierstreifens nachgewiesen werden kann. Aus dieser Reaction, welche auch nach meiner Erfahrung in 50 CC. Harn von Menschen und Pferden schon einige Stunden nach der Behandlung mit Zink und Salzsäure deutlich hervortritt, geht zunächst hervor, dass sich im Harne ein Körper befindet, in welchem der Schwefel nicht als Sulfat vorhanden ist. Die Darstellung dieses schwefelhaltigen Körpers gelang Sertoli bisher noch nicht, er fand, dass derselbe in Alkohol, Äther und Ammoniak löslich ist, und dass die denselben enthaltenden Lösungen weder durch Eisenchlorid noch durch Nitroprussidnatrium gefärbt wurden; auch meine Bemühungen den schwefelhaltigen Körper zu isoliren, deren Mittheilung weiter unten folgt, führten noch nicht zu dem gewünschten Endresultate.

Man nimmt gegenwärtig an, dass die im Harn an Alkalien gebunden vorkommende Schwefelsäure zum Theil von den mit den Nahrungsmitteln eingeführten Sulfaten herrührt, zum Theil aber ein Oxydationsproduct der Albuminate ist. Der obengenannte schwefelhaltige Körper fand sich aber in jedem Harne von gesunden Menschen vor, welcher darauf untersucht wurde und er darf daher als normaler Bestandtheil des menschlichen Harnes aufgefasst werden, dessen quantitative Beziehungen zu der im Harne als Sulfat ausgeschiedenen Schwefelsäure in soferne von Interesse sind, als man vielleicht annehmen darf, dass zwischen beiden ein antagonistisches Verhältniss stattfindet in der

---

<sup>1</sup> Sull' esistenza di uno speciale corpo solforato nell' orina. Gaz. med. ital. lomb. 1869. Virchow Jahresbericht über die Leistungen der physiol. Chemie im J. 1869.

Weise, dass in den Fällen, wo die Oxydation der im Organismus eingeführten schwefelhaltigen Verbindungen gehindert ist, der schwefelhaltige Körper im Harn in um so grösserer Menge auftreten müsste.

Die quantitative Bestimmung der Schwefelsäure, welche einer Oxydation des in dem schwefelhaltigen Körper vorkommenden Schwefels entspricht, wurde in folgender Weise ausgeführt. In grösseren Mengen vom Harn gesunder Individuen wurde die Harnsäure mittelst Salzsäure ausgefällt. Die von der Harnsäure abfiltrirte Harnmenge wurde in zwei gleiche gemessene Portionen *a* und *b* getheilt. In dem mit *a* bezeichneten Harn wurde die als Sulfat enthaltene Schwefelsäure mit Bariumchlorid gefällt und als schwefelsaurer Baryt gewogen. Die mit *b* bezeichnete Portion wurde mit Kaliumchlorat so lange erhitzt, bis sich Chlordämpfe entwickelten. Die in dem zu gleicher Zeit entfärbten Harn<sup>1</sup> nun vorhandene Schwefelsäure wurde jetzt ebenfalls mit Bariumchlorid gefällt, als schwefelsaurer Baryt gewogen. Aus der Differenz der in den beiden Harnmengen *a* und *b* enthaltenen Schwefelsäure ergibt sich nun die Menge des im Harn nicht als Sulfat vorhandenen Schwefels.

Bei drei Versuchen aus dem Harn gesunder Individuen ergaben sich folgende Zahlen:

Versuch I	<i>a</i> in 100 CC.	Harn	0·143	Gr.	$\text{SO}_3$
		<i>b</i>	0·154	"	"
		somit als Differenz	0·011	Gr.	$\text{SO}_3$
Versuch II	<i>a</i> in 100 CC.	Harn	0·129	Gr.	$\text{SO}_3$
		<i>b</i>	0·141	"	"
		somit als Differenz	0·012	Gr.	$\text{SO}_3$
Versuch III	<i>a</i> in 100 CC.	Harn	0·113	Gr.	$\text{SO}_3$
		<i>b</i>	0·122	"	"
		somit als Differenz	0·009	Gr.	$\text{SO}_3$

Nehmen wir aus diesen drei Beobachtungen das arithmetische Mittel der Differenzen, so ergibt sich für 100 CC. Harn gesunder

---

<sup>1</sup> Mit reiner Thierkohle vollständig entfärbter Harn gab mir die oben angegebene Reaction auf  $\text{H}_2\text{S}$  ebenfalls.

Individuen 0·0104 Gramm  $\text{SO}_3$ . Bei der Annahme, dass in 24 Stunden 1500 CC. Harn entleert werden, entspräche dies 0·156 Gramm  $\text{SO}_3$  als Oxydationsproduct des in der schwefelhaltigen Verbindung enthaltenen Schwefels für 24 Stunden.

Zur Controle wurde in zwei Fällen die vom Niederschlage in *a* abfiltrirte Flüssigkeit, in welcher der Überschuss des zur Fällung benützten Bariumchlorids enthalten war, mit Kaliumchlorat behandelt. Es entstand in Folge der Oxydation schwefelsaurer Baryt, dessen Beschaffenheit durch Zerlegung desselben mittelst Kaliumcarbonat auf analytischem Wege bestätigt wurde.

Die Oxydation des Schwefels ist auch mittelst Einleiten von Chlorgas in den Harn ausführbar. In je 250 CC. Harn eines Reconvalescenten der chirurgischen Klinik wurde in der einen Probe *a* die als Sulfat vorhandene Schwefelsäure mit Bariumchlorid gefällt, in die andere Probe *b* wurde Chlorgas eingeleitet, der Harn einige Zeit lang stehen gelassen, das überschüssige Chlorgas durch Erwärmen entfernt und dann mit Bariumchlorid gefällt. Der Versuch ergab:

<i>a</i> in 100 CC. Harn	0·168 Gr. $\text{SO}_3$
<i>b</i>	0·171 „ „
	somit als Differenz 0·003 Gr. $\text{SO}_3$

Sertoli fand, dass wenn er den Niederschlag, welchen essigsaurer Blei im Harne hervorbringt mit Ammoniak extrahirte, diesen Auszug zur Trockene verdunsten liess und ihn dann mit Alkohol behandelte, der schwefelhaltige Körper in Alkohol und theilweise auch in Äther überging. Ich überzeugte mich, dass der schwefelhaltige Körper schon im alkoholischen Extracte des eingedickten Harnes reichlich vorhanden ist, und dass derselbe aus dem Harne weder durch Bleizucker noch durch Bleiessig vollständig gefällt wird.

Verdampft man eine grössere Menge von Menschenharn bis zur Syrupconsistenz, filtrirt, fällt dann mit Bleizucker und behandelt die von dem Bleizuckerniederschlage abfiltrirte Flüssigkeit nachdem das Blei durch kohlen-saures Natron ausgefällt wurde und man sie schwach angesäuert hat, mit Quecksilberchlorid, so entsteht hiebei nach der Beobachtung von Professor R. Maly ein Niederschlag einer Quecksilber haltigen Kreatininverbindung,

welche mit Schwefelwasserstoff zerlegt salzsaures Kreatinin gibt, während in der Mutterlauge davon der schwefelhaltige Körper sich ziemlich reichlich findet.

Aus einer Reihe von Versuchen, welche ich mit dem wässerigen Auszuge von thierischen Geweben in der Weise ausführte, dass ich 50 CC. des Extractes in einem Bechergläschen mit Zink und Salzsäure versetzte, dasselbe mit einem Uhrglase bedeckte, an dessen unterer Fläche ein mit Bleizuckerlösung getränktes Stückchen Filtrirpapier adhärirte, zeigten eine deutliche Entwicklung von Schwefelwasserstoff die wässerigen Extracte der Lunge und Leber vom Rinde. Damit bei dieser Reaction die Mitwirkung der Albuminate ausgeschlossen werde, wurden die Extracte mit Essigsäure angesäuert und mit einer Lösung von Natriumsulfat versetzt erhitzt, und von den abgeschiedenen Albuminaten abfiltrirt.

Hühnereiweiss direct mit Zink und Salzsäure behandelt, gibt die obige Reaction auf Schwefelwasserstoff nicht. Behandelt man dasselbe aber mit Äther und löst das ausgefällte Eieralbumin mit Salzsäure, so gibt die so entstandene Lösung mit Zink versetzt die Schwärzung des mit Bleizuckerlösung getränkten Papierstreifens schon nach einigen Minuten.

---

### 3. Einfache Darstellung von salzsaurem Kreatinin aus Harn.

Von Richard Maly.

Auf folgende Art kann man sich in bequemer Weise salzsaures Kreatinin aus Harn in grossen Krystallgruppen darstellen. Menschenharn, von dem man aber natürlich grössere Mengen, doch einige Liter nehmen muss, wird auf ein Drittel oder Viertel abgedampft, von den ausgeschiedenen Salzen abgegossen, mit Bleizucker gefällt und das überschüssige Blei aus dem Filtrate durch kohlensaures Natron oder Schwefelwasserstoff entfernt. Das Filtrat wird annähernd neutralisirt, im ersten Falle mit Essigsäure, im zweiten mit Soda und nun mit concentrirter Sublimatlösung gefällt. Dieser Niederschlag ist der Hauptmasse nach eine Verbindung von Kreatinin mit Quecksilberchlorid, wird unter Wasser mit Schwefelwasserstoff zerlegt, die Flüssigkeit mit Thierkohle entfärbt und abgedampft. Die bleibende Krystallmasse wird aus starkem Alkohol ein- oder zweimal umkrystallisirt. Man erhält weisse Krystallkrusten oder grosse harte glänzende Prismen.

Die Substanz gibt mit Schwefelsäure übergossen dicke Salzsäuredämpfe, löst sich sehr leicht in Wasser, etwas schwieriger in Alkohol, und gibt mit Platinchlorid ein oranges Doppelsalz. Auch aus Pferdeharn wurde dasselbe Resultat erhalten.

Als Probe der Reinheit folgende Analyse:

0.2734 Gramm Krystalle aus Menschenharn gaben 0.3204 Gramm  $\text{CO}_2$  und 0.1328 Gramm  $\text{H}_2\text{O}$

Salzsaures Kreatinin enthält:		Gefunden
C	32.10%	31.96%
H	5.35%	5.39%

---

## Über rationale Raumcurven vierter Ordnung.

Von **Emil Weyr** in Mailand.

(Vorgelegt in der Sitzung am 16. März 1871.)

1. In der zweiten geometrischen Mittheilung (Mai-Heft 1870) wurde eine einfache Beziehung zwischen den Parametern dreier in gerader Linie liegender Punkte einer rationalen (mit einem Doppelpunkt versehenen) Curve dritter Ordnung entwickelt, welche in der daselbst aufgestellten Gleichung (1) ihren Ausdruck fand.

Diese Gleichung spricht nichts anderes als das Abel'sche Theorem für Curven dritter Ordnung in jener Form aus, welche es für Curven mit einem Doppelpunkte, d. h. für rationale Curven dritter Ordnung annimmt, und überdies für jenen Fall, wo man die Curve mit einer Geraden in Verbindung setzt. Es dürfte vielleicht nicht uninteressant sein zu sehen, dass eine ähnliche Beziehung für die rationalen Raumcurven vierter Ordnung besteht.

2. Eine rationale Raumcurve vierter Ordnung ist eine solche, für welche sich die homogenen Coordinaten ihrer Punkte durch ganze, rationale Functionen eines einzigen Parameters ausdrücken lassen. Es ist dies die sogenannte Curve vierter Ordnung zweiter Art. Sind also  $x_1, x_2, x_3, x_4$  die Coordinaten eines Punktes  $M$  unserer rationalen Curve  $C$ , und  $\xi$  der dem Punkte entsprechende Parameterwerth, so muss sein:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= a_1 \xi^4 + b_1 \xi^3 + c_1 \xi^2 + d_1 \xi + e_1 \\ x_2 &= a_2 \xi^4 + b_2 \xi^3 + c_2 \xi^2 + d_2 \xi + e_2 \\ x_3 &= a_3 \xi^4 + b_3 \xi^3 + c_3 \xi^2 + d_3 \xi + e_3 \\ x_4 &= a_4 \xi^4 + b_4 \xi^3 + c_4 \xi^2 + d_4 \xi + e_4 \end{aligned} \right\} \quad (\text{I})$$

wobei die  $a, b$ , nur von der Curve  $C$  abhängige constante Grössen sind. Bringen wir die Curve  $C$  mit der Ebene:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 = 0 \quad (\text{II})$$

in Verbindung, so erhalten wir, die  $x$ -Werthe aus I in II gesetzt, für  $\xi$  die Gleichung vierten Grades:

$$\xi^4 \sum \alpha_i a_i + \xi^3 \sum \alpha_i b_i + \xi^2 \sum \alpha_i c_i + \xi \sum \alpha_i d_i + \sum \alpha_i e_i = 0 \quad (\text{III})$$

wobei abkürzend:

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 + \alpha_4 a_4 = \sum \alpha_i a_i \text{ u. s. f.}$$

gesetzt worden ist.

Die Gleichung III ist in  $\xi$  vom vierten Grade, wie es auch sein muss, da die Ebene mit der Curve vier Punkte gemeinschaftlich hat. Die vier Wurzeln  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$  der Gleichung III sind somit die Parameter der vier Curvenpunkte  $M_1, M_2, M_3, M_4$ , welche in der Ebene II liegen. Setzt man der Kürze halber:

$$\begin{aligned} \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 &= (\xi)_1 \\ \xi_1 \xi_2 + \xi_2 \xi_3 + \xi_3 \xi_1 + \xi_1 \xi_4 + \xi_2 \xi_4 + \xi_3 \xi_4 &= (\xi)_2 \\ \xi_1 \xi_2 \xi_3 + \xi_2 \xi_3 \xi_4 + \xi_3 \xi_4 \xi_1 + \xi_4 \xi_1 \xi_2 &= (\xi)_3 \\ \xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4 &= (\xi)_4 \end{aligned}$$

so hat man bekanntlich in Bezug auf die letzte Gleichung:

$$\begin{aligned} (\xi)_1 &= - \frac{\sum \alpha_i b_i}{\sum \alpha_i a_i} \\ (\xi)_2 &= + \frac{\sum \alpha_i c_i}{\sum \alpha_i a_i} \\ (\xi)_3 &= - \frac{\sum \alpha_i d_i}{\sum \alpha_i a_i} \\ (\xi)_4 &= + \frac{\sum \alpha_i e_i}{\sum \alpha_i a_i} \end{aligned}$$

Setzt man rechter Hand die eigentlichen Werthe für die symbolischen Ausdrücke, so kann man diese Gleichungen in der Form schreiben:

$$\begin{aligned} \alpha_1 [b_1 + a_1 (\xi)_1] + \alpha_2 [b_2 + a_2 (\xi)_1] + \alpha_3 [b_3 + a_3 (\xi)_1] + \alpha_4 [b_4 + a_4 (\xi)_1] &= 0 \\ \alpha_1 [c_1 - a_1 (\xi)_2] + \alpha_2 [c_2 - a_2 (\xi)_2] + \alpha_3 [c_3 - a_3 (\xi)_2] + \alpha_4 [c_4 - a_4 (\xi)_2] &= 0 \\ \alpha_1 [d_1 + a_1 (\xi)_3] + \alpha_2 [d_2 + a_2 (\xi)_3] + \alpha_3 [d_3 + a_3 (\xi)_3] + \alpha_4 [d_4 + a_4 (\xi)_3] &= 0 \\ \alpha_1 [e_1 - a_1 (\xi)_4] + \alpha_2 [e_2 - a_2 (\xi)_4] + \alpha_3 [e_3 - a_3 (\xi)_4] + \alpha_4 [e_4 - a_4 (\xi)_4] &= 0 \end{aligned}$$

Durch Elimination der vier homogen vorkommenden Constanten  $\alpha$  der Ebene II erhält man folgende von der besonderen Lage der Ebene unabhängige Relation:

$$\left\{ \begin{array}{l} [b_1 + a_1(\xi)_1], [c_1 - a_1(\xi)_2], [d_1 + a_1(\xi)_3], [e_1 - a_1(\xi)_4] \\ [b_2 + a_2(\xi)_1], [c_2 - a_2(\xi)_2], [d_2 + a_2(\xi)_3], [e_2 - a_2(\xi)_4] \\ [b_3 + a_3(\xi)_1], [c_3 - a_3(\xi)_2], [d_3 + a_3(\xi)_3], [e_3 - a_3(\xi)_4] \\ [b_4 + a_4(\xi)_1], [c_4 - a_4(\xi)_2], [d_4 + a_4(\xi)_3], [e_4 - a_4(\xi)_4] \end{array} \right\} = 0$$

Zerlegt man die linker Hand stehende Determinante in ihre Addenden, so fallen alle bis auf fünf derselben weg, da sie alle nach Heraushebung gemeinschaftlicher Factoren mindestens zwei identische Columnen besitzen.

Der übrig bleibende Theil liefert die Gleichung:

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} b_1 c_1 d_1 e_1 \\ b_2 c_2 d_2 e_2 \\ b_3 c_3 d_3 e_3 \\ b_4 c_4 d_4 e_4 \end{array} \right\} + (\xi)_1 \cdot \left\{ \begin{array}{l} a_1 c_1 d_1 e_1 \\ a_2 c_2 d_2 e_2 \\ a_3 c_3 d_3 e_3 \\ a_4 c_4 d_4 e_4 \end{array} \right\} - (\xi)_2 \cdot \left\{ \begin{array}{l} b_1 a_1 d_1 e_1 \\ b_2 a_2 d_2 e_2 \\ b_3 a_3 d_3 e_3 \\ b_4 a_4 d_4 e_4 \end{array} \right\} + \\ & + (\xi)_3 \cdot \left\{ \begin{array}{l} b_1 c_1 a_1 e_1 \\ b_2 c_2 a_2 e_2 \\ b_3 c_3 a_3 e_3 \\ b_4 c_4 a_4 e_4 \end{array} \right\} - (\xi)_4 \cdot \left\{ \begin{array}{l} b_1 c_1 d_1 a_1 \\ b_2 c_2 d_2 a_2 \\ b_3 c_3 d_3 a_3 \\ b_4 c_4 d_4 a_4 \end{array} \right\} = 0. \end{aligned}$$

Bestimmt man die Constanten  $A_1, A_2, A_3, A_4$  aus den vier Gleichungen:

$$\left. \begin{array}{l} b_1 A_1 + c_1 A_2 + d_1 A_3 + e_1 A_4 = a_1 \\ b_2 A_1 + c_2 A_2 + d_2 A_3 + e_2 A_4 = a_2 \\ b_3 A_1 + c_3 A_2 + d_3 A_3 + e_3 A_4 = a_3 \\ b_4 A_1 + c_4 A_2 + d_4 A_3 + e_4 A_4 = a_4 \end{array} \right\} \quad (\text{IV})$$

so kann man obige Gleichung in der Form schreiben:

$$A_4(\xi)_4 - A_3(\xi)_3 + A_2(\xi)_2 - A_1(\xi)_1 = 1 \quad (\text{V})$$

„Diese Relation, welche von der schneidenden Ebene ganz unabhängig zwischen den vier Parametern  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$  stattfindet, stellt also in der That

nichts anderes vor als die Bedingung, welchenothwendig und hinreichend ist, damit vier Punkte  $M_1 M_2 M_3 M_4$  der Curve, denen jene vier Parameter entsprechen, in einer und derselben Ebene liegen.“

Wie man sofort erkennt, ist die Grundrelation (V) symmetrisch in den vier Parametern und in jedem von ihnen nur vom ersten Grade, wie dies auch a priori hätte geschlossen werden können, wenn man bemerkt, dass drei beliebig gewählte Punkte der Curve eine Ebene, und somit auch deren vierten Schnittpunkt mit der Curve eindeutig bestimmen und dass, wenn die Bedingungsgleichung von einem Werthsystem erfüllt ist, sie von jeder Combination der vier Parameter des Systemes erfüllt werden muss.

3. Die Gleichung V kann uns auch über die wichtigsten Hauptcharaktere der von uns in Betracht gezogenen Curve  $C$  genügenden Aufschluss geben. Aus ihr ergibt sich zunächst für den Parameter des vierten Schnittpunktes  $M_4$  der Curve mit einer, durch drei Punkte  $M_1 M_2 M_3$  derselben gelegten Ebene der Ausdruck:

$$\xi_4 = - \frac{1 + A_1(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3) - A_2(\xi_1 \xi_2 + \xi_2 \xi_3 + \xi_3 \xi_1) + A_3 \xi_1 \xi_2 \xi_3}{A_1 - A_2(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3) + A_3(\xi_1 \xi_2 + \xi_2 \xi_3 + \xi_3 \xi_1) - A_4 \xi_1 \xi_2 \xi_3} \quad (\text{VI})$$

Hieraus folgt zunächst, dass der Gleichung (V) ein ganz beliebiger Werth von  $\xi_4$  mit den drei Werthen  $\xi_1 \xi_2 \xi_3$  genügt, sobald gleichzeitig:

$$\left. \begin{aligned} 1 + A_1(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3) - A_2(\xi_1 \xi_2 + \xi_2 \xi_3 + \xi_3 \xi_1) + A_3 \xi_1 \xi_2 \xi_3 &= 0 \\ A_1 - A_2(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3) + A_3(\xi_1 \xi_2 + \xi_2 \xi_3 + \xi_3 \xi_1) - A_4 \xi_1 \xi_2 \xi_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{VII})$$

denn in der That verschwinden dann in der rechten Seite von VI Zähler und Nenner unabhängig von einander und  $\xi_4$  kann jeden beliebigen Werth annehmen. Es liegen in diesem Falle also die drei Punkte  $M_1 M_2 M_3$  der Curve mit jedem beliebigen vierten Punkte in einer und derselben Ebene und folglich müssen erstere in einer und derselben Geraden liegen. Wenn also die Gleichungen VII erfüllt sind, so befinden sich die drei Curvenpunkte  $M_1 M_2 M_3$ , deren Parameter  $\xi_1 \xi_2 \xi_3$  sind, in einer und derselben Geraden. Da man einen der drei Parameter willkürlich annehmen

kann, dann aber die beiden anderen der Symmetrie wegen eindeutig bestimmt werden können, so erhalten wir den bekannten Satz: „Durch jeden Punkt der Curve  $C$  geht eine Gerade, welche die Curve in zwei weiteren Punkten schneidet.“

Eine solche Gerade nennen wir eine dreipunktige Secante der Curve. Alle dreipunktigen Secanten der Curve  $C$  erfüllen — wie wir auch später ganz unabhängig sehen werden — die einzige Fläche zweiten Grades, welche sich durch die Curve  $C$  legen lässt<sup>1</sup>. Setzt man in den zwei Gleichungen VII:

$$\xi_1 \xi_2 \xi_3 = \lambda,$$

so ergibt sich sofort aus denselben:

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = \frac{\lambda(A_2 A_4 - A_3^2) - A_1 A_2 - A_3}{A_1 A_3 - A_2^2}$$

$$\xi_1 \xi_2 + \xi_2 \xi_3 + \xi_3 \xi_1 = \frac{\lambda(A_1 A_4 - A_2 A_3) - A_1^2 - A_2}{A_1 A_3 - A_2^2}.$$

Man kann daher drei Werthe  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ , welche den Gleichungen VII genügen, als die drei Wurzeln der kubischen Gleichung:

$$\xi^3 + \xi^2 \frac{A_1 A_2 + A_3 + \lambda(A_3^2 - A_2 A_4)}{A_1 A_3 - A_2^2} + \xi \frac{\lambda(A_1 A_4 - A_2 A_3) - A_1^2 - A_2}{A_1 A_3 - A_2^2} + \lambda = 0$$

betrachten, welche sich in die Form bringen lässt:

$$\begin{aligned} & [\xi^3(A_1 A_3 - A_2^2) + \xi^2(A_1 A_2 + A_3) - \xi(A_1^2 + A_2)] + \\ & + \lambda[\xi^2(A_3^2 - A_2 A_4) + \xi(A_1 A_4 - A_2 A_3) + (A_1 A_3 - A_2^2)] = 0 \end{aligned} \quad \text{(VIII)}$$

Diese Gleichung ist aber offenbar die Gleichung einer kubischen Involution, da jedem Werthe von  $\lambda$  drei  $\xi$ -Werthe entsprechen, während umgekehrt ein  $\xi$ -Werth unzweideutig den entsprechenden  $\lambda$ -Werth liefert. Wir können daher den Satz aussprechen:

<sup>1</sup> Bekanntlich ist der Unterschied zweier Curven vierter Ordnung erster und zweiter Art darin gelegen, dass sich durch erstere unendlich viele und durch letztere nur eine einzige Fläche zweiter Ordnung legen lässt.

„Die Punkttripel, welche die dreipunktigen Secanten der Curve  $C$  auf derselben bestimmen, bilden eine kubische Involution.“

Diese kubische Involution wird wie jede andere vier Doppelpunkte besitzen, d. h. vier Punktgruppen, in denen je zwei Punkte zusammenfallen. Eine dreipunktige Secante aber, welche die Curve in zwei unendlich nahen Punkten schneidet, ist eine Tangente an der betrachteten Stelle; wir sehen also:

„Die Curve  $C$  besitzt vier Tangenten, welche sie überdies schneiden.“ Die Berührungspunkte dieser Tangenten sind die Doppelpunkte der eben betrachteten kubischen Involution.

4. Denken wir uns die zwei Punkte  $M_3, M_4$  fest, so werden die variablen Punkte  $M_1, M_2$  durch Ebenen eines Büschels auf der Curve  $C$  bestimmt, dessen Axe die zweipunktige Secante  $\overline{M_3 M_4}$  ist. Die Bedingungsgleichung, welche zwischen den Parametern  $\xi_1, \xi_2$  von  $M_1, M_2$  bestehen muss, ist in VII dargestellt, wenn man nur  $\xi_3$  und  $\xi_4$  als constant betrachtet. Man kann dann diese Gleichung in der Form schreiben:

$$\xi_1 \xi_2 [A_4 \xi_3 \xi_4 - A_3 (\xi_3 + \xi_4) + A_2] - (\xi_1 + \xi_2) [A_3 \xi_3 \xi_4 - A_2 (\xi_3 + \xi_4) + A_1] + [A_2 \xi_3 \xi_4 - A_1 (\xi_3 + \xi_4) - 1] = 0 \quad (\text{VII})$$

woraus, da in ihr  $\xi_1$  und  $\xi_2$  jedes nur linear vorkommt und überdies beide in symmetrischer Verbindung, sofort hervorgeht, dass die beiden Punkte  $M_1, M_2$  zwei projectivische und gleichzeitig vertauschungsfähige Reihen, also eine quadratische Involution auf der Curve beschreiben:

„Die Ebenen eines Büschels, dessen Axe eine zweipunktige Secante der Curve  $C$  ist, bestimmen auf der Curve Punktepaare einer quadratischen Involution.“

Die gefundene Involution wird zwei (reelle oder imaginäre) Doppelpunkte besitzen, welche zwei Ebenen des Büschels entsprechen, die die Curve  $C$  berühren; jede dieser Ebenen enthält demnach eine Tangente der Curve, welche die Büschelaxe schneiden muss. Wir sehen daher, dass jede zweipunktige Secante der Curve zwei ihrer Tangenten schneidet. Überdies begegnet eine

solche Secante selbstverständlich den beiden Tangenten jener Punkte, in denen sie die Curve  $C$  schneidet, d. h. den Tangenten der Punkte  $M_3, M_4$ . Jede der beiden letzteren Tangenten ist doppelt zu zählen, d. h. als entstanden durch das unendlich nahe Rücken zweier die Büschelaxe  $\overline{M_3 M_4}$  schneidenden Curventangenten. Wenn wir dies berücksichtigen, erhalten wir das Ergebniss, dass eine Gerade von sechs Tangenten unserer Curve geschnitten wird, d. h. dass der Rang der Curve, oder die Ordnung ihrer Developpablen gleich sechs ist.

Wenn die beiden Punkte  $M_3, M_4$  unendlich nahe zu einander rücken, so wird die Büschelaxe  $\overline{M_3 M_4}$  eine Tangente der Curve  $C$ ; da jedoch die obige Betrachtung auch in diesem Falle vollständig zur Geltung kommt, so erhalten wir den Satz:

„Jede Tangente der Curve  $C$  wird von zwei anderen Tangenten geschnitten.“

Da nun jede der beiden letzteren Tangenten mit der ersten eine Ebene bestimmt, welche die Curve offenbar an zwei verschiedenen Stellen berührt, so kann man sagen:

„Durch jede Tangente der Curve  $C$  gehen zwei Doppeltangentenebenen.“

Es ist klar, dass eine Doppeltangentenebene mit der Curve  $C$  ausser ihren beiden Berührungspunkten keinen weiteren Punkt gemeinschaftlich haben kann, weil sie sonst mit der Curve mehr als vier Punkte gemein hätte, was nicht angeht, da  $C$  nur von der vierten Ordnung ist.

Betrachtet man einen Punkt der Curve  $C$  als den Schnittpunkt zweier unendlich naher Tangenten derselben, so gehen durch jede derselben zwei doppelberührende Ebenen, welche auch selbstverständlich den Punkt enthalten werden. Hieraus ergibt sich das bekannte Resultat, dass durch jeden Punkt des Raumes vier Doppeltangentenebenen der Curve gehen, oder mit anderen Worten, dass die durch die Doppeltangentenebenen gebildete developpable Fläche von der vierten Classe ist.

5. Aus der Gleichung (VII)' können wir sehr leicht die Bedingung für das Auftreten eines Doppelpunktes der Curve ausdrücken. Sind nämlich für den Augenblick  $\xi_3, \xi_4$  die zwei Parameter, welche einem vorausgesetzten Doppelpunkte (resp. seinen beiden Nachbarpunkten) zukommen, so muss die Gleichung (VII)'

für jedes beliebige Werthepaar  $\xi_1, \xi_2$  erfüllt werden, da doch je zwei beliebige Punkte mit dem Doppelpunkte in einer und derselben Ebene liegen. Es muss daher gleichzeitig:

$$A_4 \xi_3 \xi_4 - A_3 (\xi_3 + \xi_4) + A_2 = 0$$

$$A_3 \xi_3 \xi_4 - A_2 (\xi_3 + \xi_4) + A_1 = 0$$

$$A_2 \xi_3 \xi_4 - A_1 (\xi_3 + \xi_4) - 1 = 0$$

sein, woraus sich durch Elimination der Grössen  $(\xi_3 \xi_4), -(\xi_3 + \xi_4)$  die Bedingungsgleichung:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_2 A_3 A_4 \\ A_1 A_2 A_3 \\ -1 A_1 A_2 \end{array} \right\} = 0$$

ergibt, welche von den Constanten  $A$  oder respective  $a, b, c$ , erfüllt werden muss, falls die Curve  $C$  einen Doppelpunkt besitzen soll. In diesem Falle übergeht das die Curve enthaltende Hyperboloid in jenen Kegel zweiten Grades, welcher den Doppelpunkt zum Scheitel und die Curve zur Leitlinie hat. In der That ist jede Kante dieses Kegels eine dreipunktige Secante der Curve.

6. Rückten von den vier in einer Ebene liegenden Punkten  $M_1 M_2 M_3 M_4$  der Curve  $C$  die beiden mittleren unendlich nahe zum ersten, so wird die Ebene zur Schmiegungeebene der Curve im Punkte  $M_1$ .

Wenn man also in VI  $\xi_3 = \xi_2 = \xi_1$  setzt, so erhält man für den Schnittpunkt  $M_4$  der Curve mit der Schmiegungeebene des Punktes  $M_1$  den Parameterwerth:

$$\xi_4 = - \frac{1 + 3A_1 \xi_1 - 3A_2 \xi_1^2 + A_3 \xi_1^3}{A_1 - 3A_2 \xi_1 + 3A_3 \xi_1^2 - A_4 \xi_1^3} \quad (\text{IX})$$

Während diese Gleichung für ein gegebenes  $\xi_1$  nur einen Werth von  $\xi_4$  liefert, entspricht jedem  $\xi_4$ -Werth ein System von 3  $\xi_1$ -Werthen, da die Gleichung IX in  $\xi_1$  kubisch ist. Es lassen sich drei Schmiegungeebenen der Curve durch jeden ihrer Punkte legen.

„Durch jeden Punkt der Curve gehen drei ihrer Schmiegungeebenen.“

Da die Schmiegungebene der Curve in dem betrachteten Punkte für drei unendlich nahe, durch den Punkt gehende Schmiegungebenen gilt, so finden wir, dass durch ihn im Ganzen sechs Schmiegungebenen gehen würden, wenn er beliebig im Raume läge. In der That ist die Curve vierter Ordnung zweiter Art bekanntlich von der sechsten Classe. Die Gleichung IX, geordnet nach  $\xi_1$ , erhält die Form:

$$\xi_1^3 - 3\xi_2 \frac{A_2 - A_3 \xi_4}{A_3 - A_4 \xi_4} + 3\xi_1 \frac{A_1 - A_2 \xi_4}{A_3 - A_4 \xi_4} + \frac{1 + A_1 \xi_4}{A_3 - A_4 \xi_4} = 0 \quad (\text{IX})'$$

aus welcher sich drei Wurzeln  $\xi_1'$ ,  $\xi_1''$ ,  $\xi_1'''$  für  $\xi_1$  ergeben, welche nach früherem die Parameter der Schmiegungepunkte jener drei Schmiegungebenen sein werden, die man durch den Punkt  $M_4$ , dessen Parameter  $\xi_4$  ist, legen kann. Für diese drei Wurzeln hat man:

$$\begin{aligned} \xi_1' + \xi_1'' + \xi_1''' &= 3 \frac{A_2 - A_3 \xi_4}{A_3 - A_4 \xi_4}, \\ \xi_1' \xi_1'' + \xi_1'' \xi_1''' + \xi_1''' \xi_1' &= 3 \frac{A_1 - A_2 \xi_4}{A_3 - A_4 \xi_4}, \\ \xi_1' \xi_1'' \xi_1''' &= - \frac{1 + A_1 \xi_4}{A_3 - A_4 \xi_4}. \end{aligned}$$

Bestimmt man nun mittelst Gleichung VI den vierten Schnittpunkt  $\xi^{\text{IV}}$  der Curve  $C$  mit der Ebene  $(\xi_1' \xi_1'' \xi_1''')$ , so erhält man:

$$\xi^{\text{IV}} = - \frac{1 + 3A_1 \frac{A_2 - A_3 \xi_4}{A_3 - A_4 \xi_4} - 3A_2 \frac{A_1 - A_2 \xi_4}{A_3 - A_4 \xi_4} - \frac{1 + A_1 \xi_4}{A_3 - A_4 \xi_4}}{A_1 - 3A_2 \frac{A_2 - A_3 \xi_4}{A_3 - A_4 \xi_4} + 3A_3 \frac{A_1 - A_2 \xi_4}{A_3 - A_4 \xi_4} + A_4 \frac{1 + A_1 \xi_4}{A_3 - A_4 \xi_4}}$$

oder aber nach kurzer Reduction:

$$\xi^{\text{IV}} = \xi_4$$

so dass also die Ebene  $(\xi_1' \xi_1'' \xi_1''')$  durch den ursprünglich angenommenen Punkt geht. Dies gibt den bekannten Satz:

„Legt man durch einen Punkt der Curve  $C$  die drei möglichen Schmiegungebenen, so liegen deren

drei Berührungspunkte mit ihm in einer und derselben Ebene.“

Zu demselben Resultate gelangt man durch Projection der Curve  $C$  aus dem betrachteten Punkte auf eine Ebene. Man erhält nämlich eine Curve dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte (welcher der Schnittpunkt der Bildebene mit der durch das Projectionscentrum gehenden dreipunktigen Secante ist) und da deren drei Inflexionspunkte (welche die Bilder der drei Punkte  $\xi_1', \xi_1'', \xi_1'''$  sind) in einer und derselben Geraden liegen, so erhält man den ausgesprochenen Satz sofort wieder.

Schreibt man die Gleichung IX in der Form:

$$(1 + 3A_1\xi_1 - 3A_2\xi_1^2 + A_3\xi_1^3) + \xi_4(A_1 - 3A_2\xi_1 + 3A_3\xi_1^2 - A_4\xi_1^3) = 0$$

so erkennt man sofort, dass das  $\xi_1$ -System eine kubische Involution darstellt, indem jedem  $\xi_4$ -Werth drei Werthe  $\xi_1$  entsprechen.

„Durch jeden Punkt der Curve  $C$  geht eine Ebene, welche die Curve in drei solchen Punkten schneidet, dass deren Schmiegungebenen durch den ersteren hindurch gehen. Die so erhaltenen Punktetripel bilden eine kubische Involution“.

Da durch jeden Punkt der Curve eine einzige solche Ebene hindurchgeht, welche ein Tripel enthält, da man jedoch diesen Punkt auch zu einem und nur zu einem solchen Tripel rechnen kann, dessen Ebene dann selbstverständlich auch durch den Punkt hindurchgehen muss, so erkennen wir, dass durch jeden Punkt der Curve im Ganzen zwei solche Ebenen gehen, welche die Curve in oben betrachteten Punktetripeln schneiden. Alle diese Ebenen umhüllen daher eine Developpable zweiter Classe, d. h. einen Kegel zweiten Grades<sup>1</sup>.

Die eben erwähnte kubische Involution besitzt vier Doppelpunkte, von denen sich leicht zeigen lässt, dass sie identisch seien mit den Doppelpunkten der in Art. 3 betrachteten Involution. In der That, wenn durch einen Punkt der Curve  $C$  drei Schmiegungebenen gehen, für welche von den drei Berührungs-

<sup>1</sup> Siehe die Abhandlung Cremona's: Intorno alla curva gobba etc. Ann. d. Mat. tom IV, N. 2.

punkten derselben zwei unendlich nahe zu einander rücken, so ist die Schnittlinie der entsprechenden Schmiegungebenen eine die Curve schneidende Tangente. Die Berührungspunkte der vier die Curve schneidenden Tangenten sind also wirklich nicht nur die Doppelpunkte der Involution des Art. 3, sondern auch der zuletzt betrachteten.

7. Eine Schmiegungebene, welche vier unmittelbar auf einander folgende Punkte der Curve enthält, ist eine stationäre Ebene der Curve. Für unsere Curve werden wir daher die Parameter der Berührungspunkte stationärer Ebenen erhalten, wenn wir in Gleichung V  $\xi_4 = \xi_3 = \xi_2 = \xi_1$  setzen. Wir erhalten:

$$A_4 \xi_1^4 - 4A_3 \xi_1^3 + 6A_2 \xi_1^2 - 4A_1 \xi_1 = 1 \quad (\text{X})$$

welche Gleichung nach  $\xi_1$  aufgelöst, die vier Parameter solcher Punkte der Curve liefert, in denen diese von Ebenen in vier unendlich nahen Punkten geschnitten wird.

„Die Curve  $C$  besitzt vier stationäre Ebenen; ihre Berührungspunkte haben die Wurzeln der Gleichung X zu Parametern“.

8. Bringt man die Curve  $C$  mit einem beliebigen Ebenenbüschel:

$$(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4) - \mu(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_4 x_4) = 0$$

in Verbindung, so erhält man für die Schnittpunkte der dem Parameter  $\mu$  entsprechenden Ebene mit der Curve die Gleichung:

$$\xi^4 [\sum \alpha_i a_i - \mu \sum \beta_i a_i] + \xi^3 [\sum \alpha_i b_i - \mu \sum \beta_i b_i] + \xi^2 [\sum \alpha_i c_i - \mu \sum \beta_i c_i] + \xi [\sum \alpha_i d_i - \mu \sum \beta_i d_i] + [\sum \alpha_i e_i - \mu \sum \beta_i e_i] = 0$$

welche Gleichung die vier Parameter-Werthe  $\xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4$  der vier Schnittpunkte liefert. Diese Gleichung ist aber offenbar die Grundgleichung einer biquadratischen Involution, so dass wir sagen können:

„Die Ebenen eines Ebenenbüschels bestimmen auf  $C$  vierpunktige, eine biquadratische Involution bildende Gruppen.“

Die sechs Doppelpunkte einer solchen Involution sind die Berührungspunkte der sechs, die Büschelaxe schneidenden Curventangenten. (Vergl. Art. 4.)

Wenn die Axe des Ebenenbüschels der Curve in einem Punkte begegnet, so gehört dieser allen jenen vierpunktigen Gruppen an, wesshalb die Involution in diesen Punkt und eine kubische Involution zerfallen muss.

„Die Ebenen eines Büschels, welches eine die Curve  $C$  einpunktig schneidende Axe besitzt, bestimmen auf der Curve eine kubische Involution von Punkten.“

Hätte die Büschelaxe zwei Punkte mit  $C$  gemeinschaftlich, d. h. wäre sie eine zweipunktige Secante, so kommt man zu der quadratischen Involution des 4. Artikels zurück.

9. Schliesslich wollen wir auf Grund der letzten Entwicklung die Frage nach der von den dreipunktigen Secanten gebildeten Fläche erledigen. Um den Grad dieser Fläche zu finden, haben wir die Zahl der dreipunktigen Secanten der Curve zu bestimmen, welche eine beliebige Gerade im Raume schneiden. Zu dem Behufe nehmen wir die Gerade zur Axe eines Ebenenbüschels, welches nach dem vorhergehenden Artikel auf  $C$  eine biquadratische Involution bestimmt. Die dreipunktigen Secanten bestimmen, wie wir wissen, auf  $C$  eine kubische Involution, welche mit der biquadratischen sechs Paare entsprechender Punkte gemeinschaftlich hat. (Siehe Crellé, Bd. 72 „Über Involutionen höherer Grade“ pag. 292.)

Jede Ebene des Büschels jedoch, welche eine dreipunktige Secante enthält, enthält ein ganzes Tripel der kubischen Involution, welches gleichzeitig einer Gruppe der biquadratischen Involution angehört.

Ein solches Tripel zählt aber für drei Paare entsprechender Elemente und somit absorbiert jede die Büschelaxe schneidende dreipunktige Secante drei, beiden Involutionen gemeinschaftliche Punktepaare. Da der letzteren im Ganzen sechs vorkommen, so erkennen wir, dass nur zwei dreipunktige Secanten eine beliebige Gerade schneiden. Es ist also in der That der Ort der dreipunktigen Secanten eine Fläche zweiten Grades, im Allgemeinen ein einmanteliges Hyperboloid.

## Über den Bau des Stärkemehls.

Von Prof. Dr. **Th. Hartig**,

*Forstrath in Braunschweig.*

(Mit 1 Tafel).

In einer früheren Arbeit über Verjauchung todter, organischer Stoffe, aufgenommen im LXI. Bande der Sitzungsberichte der k. k. Akademie der Wissenschaften, Maiheft 1870, habe ich beiläufig einer auffallenden Bildung des Stärkemehls der Kartoffelknolle erwähnt (Fig. 2 der dort beigegebenen Tafel), die man nicht selten zur Ansicht erhält, wenn man im Wasser eines Kochröhrchens suspendirtes Stärkemehl, unter fortdauerndem Schütteln auf 60—65° C. erhitzt. Den bis daher unbekanntem, gegliederten Bau des Stärkemehlkorns habe ich weiter an anderen Mehlartern verfolgt und erlaube mir Hoher Akademie die Resultate meiner neuesten Untersuchungen in Nachfolgendem vorzulegen.

Die wichtigsten Aufschlüsse lieferte mir das Mehl aus dem Rhizom von *Canna indica* dadurch, dass in ihm fast jedes Korn den Gliederstrang als normale Bildung erkennen lässt. Ich erlaube mir eine Probe dieses Mehls für das Mikroskop und einige Präparate, Quellungszustände desselben enthaltend, hier beizulegen.

Es hat das sehr grobkörnige Canna-Mehl nahezu die Grösse des Kartoffelmehls (0.01 Mm.), zeigt auch, wie Letzteres, in den oberen, dem Nabel entgegengesetzten Regionen eine, durch Zwischenlagerung von Luftschichten dunklere, dadurch scharf hervortretende Compressions-Faltung (Fig. 1—3 der beiliegenden Tafel). Unfern dem unteren Rande des Fig. 1 gezeichneten, unveränderten Korns erkennt man einen kleinen, kreisrunden sogenannten Nabelfleck, der jedoch nicht, wie am Kartoffelmehle der Fall ist, lichthell hervortritt, da er nicht, oder doch nur sehr

selten durch Einstülpung veranlasst wird. Dieser Nabelfleck erscheint von zarten Schichtungslinien concentrisch umgeben, zu denen auch die Schichtungslinien in den oberen Theilen des Mehlkorns in Beziehung zu stehen scheinen.

Im Wasser des Kochröhrchens auf 30—40° C. erhitzt, erweitert sich der Nabelfleck sternförmig (Fig. 2). Bei einer Erwärmung auf 40—50° C. findet weitere Vergrösserung des Raumes nach oben hin statt, ehe noch eine bedeutende Quellung des ganzen Korns eingetreten ist (Fig. 3), und erkennt man schon jetzt eine gewisse Regelmässigkeit in Grösse, Form und Stellung der sogenannten Risse, sowie eine, aus dem Innenraume in die Risse hinaufreichende Granulirung, die, wie sich am Kartoffelmehle bei gleicher Behandlung viel deutlicher erkennen lässt, auf dem Vorhandensein eines, die innere Wandungsgrenze bekleidenden Schlauches beruht, dessen Verwandtschaft mit dem Zellschlauche (Primordialschlauch) unverkennbar ist. Bei einer Quellung im Wasser von 64—65° C. hat sich, wie die Figuren 4—7 veranschaulichen, der Innenraum in dem Maasse erweitert, dass die einschliessende Mehlwandung den Charakter einer dicken, aus Schichtungslamellen bestehenden Zellwandung erhält, die durch radial gestellte, in der optischen Längsschnittfläche des expandirten Zustandes zuckerhutförmige Räume von verhältnissmässig bedeutender Grösse durchsetzt ist, deren Regelmässigkeit in Form, Grösse, Stellung, der Annahme eines, auf gewaltsamer Zerreissung beruhenden Entstehens dieser Räume auf's Bestimmteste widerspricht.

In der That sind diese Räume schon im frischen, feuchten Mehlkorne vorgebildet, entziehen sich aber der Beobachtung, so lange die gegenüberliegenden Flächen der Räume, Grenzen einer Gliederung der Mehlwandung, dicht aneinander liegen. Erst durch eintretende Quellung, gleichviel ob diese in heissem Wasser, Glycerin oder in verdünnten Säuren sich vollzieht, bilden sich die in der Aufsicht zuckerhutförmigen Räume zwischen je zweien Gliedern der Wandung, in einer von Aussen nach Innen zunehmenden Weite, durch ungleiches, von Innen nach Aussen zunehmendes Quellungsvermögen der Wandungsschichten in peripherischer Richtung. Nur auf diesem Wege vermag ich die Thatsache zu erklären: dass, mit zunehmender Quellung der Wandung, zugleich auch

der Innenraum des Korn's, wie es scheint passiv, sich erweitert, dass, bis zu einem hohen Quellungsgrade, die Wandungsglieder zwischen je zweien Nachbarräumen nach Innen zugeshärft sind (Fig. 4, 11). Der Umstand, dass die äusseren Schichten der Mehllandung die älteren sind, dass in ihnen die Zahl der sie constituirenden, organischen Moleküle wahrscheinlich eine grössere ist, mag das nach Aussen zunehmende Quellungsvermögen der Schichten erklären.

Dass auch hier jedes einzelne Glied der Mehllandung von einer, im Verhalten zu heissem Wasser und zu verdünnten Säuren von den Ablagerungsschichten verschiedenen Hüllschicht umgeben ist, die nur an der Aussengrenze des Mehlkorns den Zusammenhang der Glieder erhält, lässt sich aus der, mitunter starken Wölbung schliessen, mit der die expandirten Wandungsschichten über die Spitzen je zweier benachbarten Räume hervortreten. In der äusseren Grenzlinie der Figuren 4—7 und 11 habe ich dies hervorgehoben. Es macht diese Quellungsform den Eindruck, als sei die Quellung an der Spitze eines jeden Raumes zurückgehalten. Die Grenze der einzelnen Glieder, in Fig. 4 durch eine geschlängelte Doppellinie bezeichnet, bleibt durch Jodlösung ungefärbt.

Wenn zwischen zweien Gliedern des Stranges Zerreiſsung eingetreten ist, dann runden sich alle, bis daher durch Pressung eckigen Glieder zur gestreckt ovalen Form, wie dies der Vergleich von Fig. 11 mit Fig. 13 aus Bohnenmehl (Fig. 10), der Vergleich zwischen Fig. 15 und 16 aus Roggenmehl (Fig. 14) erläutert. Canna-Mehl zeigt dies seltener, am expandirten Korne mitunter in einem gewissen Grade des Austrocknens auf der Objectplatte (Fig. 9— die scheinbar dunkle Färbung durch Lichtbrechung).

Wie die Figuren 4, 5, 7 und 17 erkennen lassen, ist der untere Theil des Mehlkorns, da wo früher der Nabel sich befand, weit dünnwandiger als der entgegengesetzte Wandungstheil. Der untere, dünnwandige Theil ist, häufig mehrfach sich wiederholenden Ein- und Ausstülpungen unterworfen, wie die Figuren 7 und 17 erkennen lassen. Die Gliederung der Mehllandung, als Regel bei Canna, häufig bei Leguminosen, seltener bei Cerealien, und ausnahmsweise am Mehl der Kartoffelknolle zu beobachten, ist jedoch selbst beim Canna-Mehl nicht ohne Ausnahme. Ein gliederfreies Mehlkorn dieser Art stellt Fig. 8 dar. In Folge der

Expansion haben sich die Schichtungslamellen des dickeren Theils der Wandung von einander getrennt und in ihrer Lagerung unregelmässig verändert.

Es ist nicht leicht aus der mikroskopischen Ansicht des Mehlkorns ein annähernd richtiges, körperliches Bild desselben sich zu construiren. Aufsicht auf die zum Innenraume erweiterte Längsachse einer geschälten Apfelsine, wenn man sich in Letzterer, trotz der Erweiterung des Innenraums, die ursprüngliche Form der Längsstücke erhalten denkt, würde wohl der in Fig. 11 gezeichneten optischen Querfläche ganz gut entsprechen, lässt aber in Bezug auf höhere und tiefere Einstellung des Objectiv's Vieles zu wünschen.

Von dem bis daher geschilderten Baue des Mehlkorns, der sich sehr wohl mit dem Baue der Zellwandung vergleichen lässt, treten nicht selten Abweichungen ein, die sich auf die Zellwandung nicht zurückführen lassen. Es bestehen diese Abweichungen in einer Verdoppelung der Mehlwandung, die von den, auch bei Zellen häufigen Einschachtelungen mehrerer Schichtungscomplexe darin sich unterscheidet, dass sie einen sie trennenden Innenraum einschliessen, entweder neben dem normalen granulirten Innenraume oder ohne letzteren. Die Figuren 5 und 6 stellen beide Fälle dar. Fig. 5 zeigt in den oberen dickwandigen Theilen den inneren Schichtungscomplex (*b*) genau im Anschluss zum äusseren Schichtungscomplexe (*a*) so dass die zuckerhutförmigen Gliederungsräume beider Schichtungscomplexe mit den Trichterrändern einander genau gegenüberstehen, gemeinschaftliche spindelförmige Räume bildend, die untereinander durch schmale Räume (*c*) verbunden sind <sup>1</sup>. In den unteren Theilen des Kornes erweitern sich diese überall granulirten, also mit einer Schlauchhaut ausgekleideten Räume, unter Einstülpung nur des inneren Schichtungscomplexes, zu einem grossen, granulirten Innenraume (*d*), während in dem Raume *b* die Granulirung fehlt. Das Abweichende vom Bau der Zellwandung liegt hier darin, dass, wo letztere aus mehreren Schichtungscomplexen zusammen-

---

<sup>1</sup> Hierher gehört auch diejenige Bildung des Gliederstranges, die ich Fig. 2, zur Abhandlung „Über Verjauchung“ im vorigen Jahrgange der Sitzungsberichte, gezeichnet habe.



Es ist mir leider noch nicht gelungen eine bestimmte Ansicht zu gewinnen in Bezug auf das, was man in der Literatur der Stärkemehlkunde als Cellulose und Granulose unterscheidet. Auch im expandirten Mehlkorne vermag ich eine Strukturveränderung durch mehrstündige Einwirkung einer, auf 50° C. erwärmten Speichelflüssigkeit nicht aufzufinden. Ich sehe in diesem Falle nicht mehr als das allmähliche Erlöschen der Reaction des Mehl's auf Jodlösung, ohne Übertragung derselben auf die, das Mehl umgebende Speichelflüssigkeit. Nach längerer Einwirkung des Speichelferments zeigt sich, vor völligem Zerfallen der Wandung, mitunter eine Granulirung derselben, die sich dann aber gleichmässig auf alle Schichtungs-Lamellen erstreckt.

Ebenso vermag ich im Innern des Mehlkorns einen „Kern“ oder eine, einen Innenraum erfüllende Flüssigkeit nicht zu unterscheiden. Selbst bei einer auf den doppelten Durchmesser bei 80° C. vorgeschrittenen Quellung erkennt man noch hier und da die Zuschärfung der einzelnen Wandungsglieder nach Innen (Fig. 11) und wenn bei einer auf 100° C. gesteigerten Erwärmung, bei einer Quellung auf das Dreifache des ursprünglichen Durchmessers, die Gliederung bis auf seltene Spuren verschwindet, das Korn alsdann einem mehr oder weniger geordneten Convolut von Bändern ähnlich wird, so mag dies darin begründet sein, dass bei den höchsten Graden der Quellung die Grenzflächen der Räume dicht aneinander gepresst und dadurch unsichtbar werden. Meiner Auffassung nach stossen im nicht gequollenen Korne die inneren Schärfe aller Wandungsglieder da zusammen, wo der sogenannte Nabelfleck liegt (vergl. Fig. 1—3), ohne einen bemerkbaren Raum zwischen sich zu lassen. Wenn in anderen Mehlarthen ein dunkler, strahliger Luftraum an die Stelle des Nabelflecks tritt (Fig. 10 Phaseolus, Fig. 14 Secale, Fig. 19 Zea) so entsteht derselbe allein in Folge stärkeren Schwindens der inneren Wandungsschichten durch Austrocknen, im Gegensatz zu dem stärkeren Quellen der äusseren Wandungsschichten in erwärmtem Wasser.

Als Belag, dass die Gliederung eine weit verbreitete Eigenthümlichkeit der Mehlwandung ist, habe ich Fig. 10 ein Mehlkorn von Phaseolus, Fig. 11—13 verschiedene Quellungs Zustände

desselben; Fig. 14 ein Mehlkorn von Secale, Fig. 15—18 Quellungs Zustände desselben; Fig. 19 ein Grosskorn von Zea, Fig. 20 den gewöhnlichsten Quellungs Zustand desselben abgebildet. Auf die Eigenthümlichkeit der Quellungsverschiedenheiten habe ich vorhergehend Bezug genommen.

Aus den mitgetheilten Thatsachen ergibt sich:

1. Dass das Bild des Mehlkorns im unveränderten Zustande nicht entfernt Aufschluss zu geben vermag über den Bau desselben.

2. Dass die durch Quellung zur Erkenntniss gelangenden Strukturverhältnisse im Wesentlichen denen der Gewebezelle entsprechen, mit der die Mehlzelle auch in den Ernährungs-, Wachstums- und Mehrungs-Vorgängen übereinstimmt.

3. Dass die Annahme freithätigen Werdens so hoch entwickelter Organismen aus einem Urschleime (Protoplasma), gegenüber der von mir nachgewiesenen Abstammung der Mehlkörper aus dem Zellkerne (Entwicklungsgeschichte des Pflanzenkeims Taf. III) thatsächlicher Begründung bedarf.

4. Dass, ausser der Beseitigung jener Protoplasma-Hypothese, jenes Hemmschuhes aller gedeihlichen Entwicklung biologischer Erkenntniss, Letzterer Nichts nöthiger ist als die Praxis einer Experimentirkunst am Mikroskopische, für die ich, in einem beinahe vierzigjährigen Zeitraume mit nur sehr beschränktem Erfolge gekämpft habe, wie solches auch der vorliegende Fall ergibt.

Dagegen ist es mir noch nicht gelungen eine bestimmte Ansicht zu gewinnen hinsichtlich der Beziehungen, in denen die, am unveränderten Mehlkorne erkennbaren, scheinbar ununterbrochenen Schichtungslinien zu den Schichtungslinien stehen, die in den Gliedern des expandirten Mehlkornes erkennbar sind. Andeutungen liegen mir für die Annahme vor: dass Erstere nur den äussersten, ältesten Schichtungslamellen angehören und einer Einfaltung derselben ihr Dasein verdanken, während am expandirten Korne die wirklich bestehende Schichtung der Mehlwand erkennbar wird.

## Erklärung der Abbildungen.

---

Fig. 1—9, Mehlkörner aus dem Rhizom von Canna.

Fig. 1, unverändert.

„ 2—9, verschiedene Grade und Arten der Quellung.

10—13, Mehlkörner aus dem Samen von Phaseolus.

Fig. 10, unverändert.

„ 11—13, verschiedene Grade und Arten der Quellung.

14—18, Mehlkörner aus Secale Samen.

Fig. 14, unverändert.

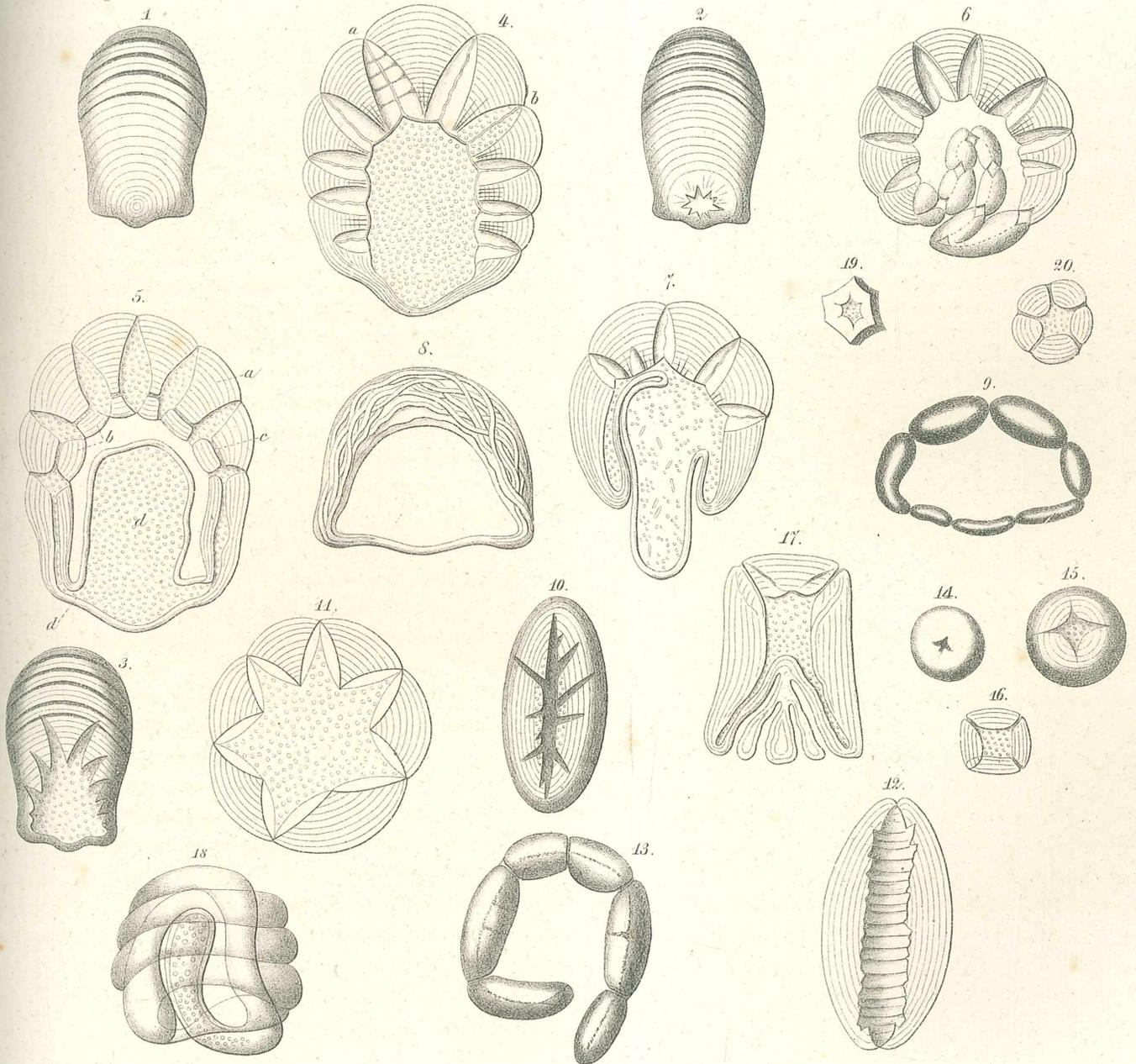
„ 15—18, verschiedene Grade und Arten der Quellung.

19—20, Grosskörner aus dem Mehl des Samens von Zea.

Fig. 19, unverändert.

20, gequollen.

---





## Über die Oxypikrinsäure (Styphninsäure).

Von Dr. **J. Schreder.**

(Mit 2 Holzschnitten.)

Im Jahre 1808 beschrieb zuerst *Chevreul* eine der Pikrinsäure ähnliche Nitrosäure, die er aus Fernambukextract erhalten hatte. — 1846 wurde diese Säure von *Erdmann* und fast gleichzeitig von *Böttger* und *Will* näher untersucht. *Erdmann* war zu ihr bei seiner Arbeit über das *Euxanthon* gelangt. *Böttger* und *Will* hatten gefunden, dass sie aus mehreren Harzen, dem *Asant*, *Galbanum*, *Sagapenum*, entsteht, und in der neuern Zeit empfahl *Stenhouse* das Extract des *Sapanholzes* als das beste Material für ihre Gewinnung<sup>1</sup>.

Die Säure erhielt wegen ihres adstringirenden Geschmacks den Namen *Styphninsäure*. Ihre Formel wurde übereinstimmend zu  $C_6H_3(NO_2)_3O_2$  gefunden. Sie enthält also um ein Atom Sauerstoff mehr als die *Pikrinsäure* und wurde demnach auch als *Oxypikrinsäure* bezeichnet.

Die Frage, von welcher Verbindung dieses Nitroproduct stammt, ist bisher weder durch das Experiment zu lösen versucht noch theoretisch discutirt worden. Nur *R. Wagner*<sup>2</sup> sprach gelegentlich seiner Untersuchung der *Brenzmoringersäure*, die er als *Brenzcatechusäure* erkannte, die Vermuthung aus, die *Styphninsäure* könnte die dieser Verbindung zugehörige Nitrosäure sein. Bekanntlich aber gibt es ausser dem *Brenzcatechin* noch zwei Isomere von der Formel  $C_6H_6O_2$ , das *Hydrochinon* und das *Resorcin*. Bezüglich der *Oxyphensäure* theilte mir *Professor Hlasiwetz*, unter dessen freundlicher Leitung ich diese Untersuchung ausgeführt habe, mit, dass er schon vor längerer Zeit vergeblich

<sup>1</sup> *Annalen der Chemie und Pharmacie*. CXLI. 224.

<sup>2</sup> *Annalen der Chemie und Pharmacie*. LXXXIV. 285.

versucht hat, aus ihr die Oxy-pikrinsäure zu erhalten. Noch weniger Aussicht auf diesen Erfolg bot das Hydrochinon, welches durch Salpetersäure zuerst in Chinhydron übergeht, und es wurde demnach viel wahrscheinlicher, dass das Resorcin die Stammverbindung der Styphninsäure sei. Man kann in dieser Vermuthung durch die Überlegung bestärkt werden, dass aus der Mehrzahl der Styphninsäure liefernden Substanzen bereits Resorcin gewonnen worden ist, und ich habe daher eine Quantität Styphninsäure dargestellt und sie zunächst mit dem kürzlich von Stenhouse<sup>1</sup> erhaltenen Trinitroresorcin verglichen. Zu diesem Vergleich stand mir ein Trinitroresorcin zu Gebote, welches von Dr. Weselsky im Verlauf seiner Untersuchung einiger Abkömmlinge des Resorcins dargestellt worden war. Die Styphninsäure gewann ich nach der empfehlenswerthen Vorschrift von Stenhouse aus Sapanholzextract in reichlicher Menge. Das Rohproduct wurde wiederholt durch Umkrystallisiren aus Wasser und Alkohol gereinigt. Es war aber so lange in seinem Äusseren und in seiner Art zu krystallisiren von dem Trinitroresorcin etwas verschieden, als nicht eine kleine Beimengung einer zweiten verunreinigenden Verbindung durch partielle Fällung der heissen Säurelösung mittelst Bleizuckers entfernt war.

Als in die, von dem geringen Niederschlage abfiltrirte Flüssigkeit Schwefelwasserstoff geleitet, dann filtrirt und das Filtrat mit Salpetersäure versetzt wurde, fiel die Nitrosäure in körnigen sandigen Krystallen heraus, während sie bis dahin in feinen, weichen, nadelförmigen Krystallen erschienen war. Die etwas dunklere Färbung, die das sandige Präparat noch hatte, verschwand beim Erwärmen mit etwas concentrirter Salpetersäure; dann wurde es mit kaltem Wasser gewaschen und aus verdünntem Alkohol umkrystallisirt. Nunmehr zeigten Styphninsäure und Trinitroresorcin im Äusseren und bei allen Reactionen genau die gleichen Erscheinungen, so dass die Identität dieser beiden Verbindungen als feststehend betrachtet werden darf. Die Analysen ergaben:

---

<sup>1</sup> Chem. Cent. 1870. S. 675.

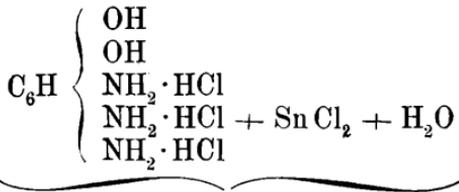


### Triamidoresorcin.

Erwärmt man in einem geräumigen Kolben Trinitroresorcin mit Zinn und Salzsäure, so hat eine stürmische Reaction statt, die, wenn sie zu Ende ist, eine etwas dickliche Flüssigkeit von meist dunkelrother Farbe hinterlässt. Diese Farbe wenigstens muss sie haben, wenn die Umsetzung vollständig gewesen sein soll. Ist die Flüssigkeit nur grünbraun, so muss noch mit neuen Mengen Zinn und Salzsäure erwärmt werden, bis sie roth geworden ist. Alsdann krystallisirt sie auch beim Erkalten, wenn sie concentrirt genug war, von selbst, oder doch auf Zusatz neuer Mengen von concentrirter Salzsäure. Das Product ist ein etwas gefärbter aus feinen Prismen bestehender Krystallbrei, welchen man zunächst auf einem Trichter abtropfen lässt, und hierauf auf porösen Thonplatten von der sauren Lauge befreit. Zur Reinigung löst man es in möglichst wenig warmen Wasser, filtrirt, und versetzt das Filtrat wieder mit concentrirter Salzsäure.

Nur auf diese Weise lässt sich die in Wasser sehr lösliche Substanz ohne Verlust umkrystallisiren. Sie wird wieder auf porösen Platten vorgetrocknet, dann mit Alkohol gewaschen und schliesslich unter der Luftpumpe ganz ausgetrocknet. Sie ist farblos, zeigt in ihrer breiigen Form einen schönen Atlasglanz und oxydirt sich in ihrer wässerigen Lösung an der Luft äusserst rasch unter schöner rother Färbung. Die Analyse ergibt die Zusammensetzung des salzsauren Triamidoresorcins verbunden mit Zinnchlorür. Das Salz war im Vacuum getrocknet. Im Wasserbade beginnt es bereits sich zu zersetzen.

1. 0·308 Gramm Substanz gaben 0·175 Kohlensäure und 0·087 Wasser.
2. 0·647 Grm. Substanz gaben 0·967 Silberchlorid.
3. 0·5695 Grm. Substanz gaben 0·182 Zinnoxyd.
4. 0·67 Grm. Substanz gaben 0·215 Zinnoxyd.



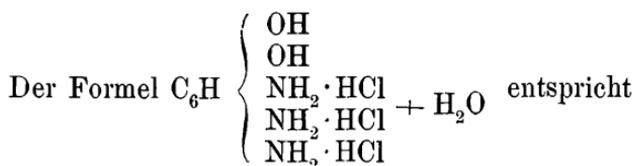
		Berechnet		Gefunden	
C <sub>6</sub>	—	15·25	15·49	—	
H <sub>14</sub>	—	2·96	3·13	—	
Sn	—	25·02	25·13	25·24	
C <sub>5</sub>	—	37·64	36·96	—	

Aus dieser Zinn-Doppelverbindung lässt sich zunächst das salzsaure Triamidorescin leicht gewinnen, wenn man aus der wässerigen Lösung desselben das Zinn durch Schwefelwasserstoff entfernt, und das vom Schwefelzinn ablaufende wasserhelle Filtrat unter der Luftpumpe eindampft. Bei passender Concentration krystallisirt dann die Verbindung oft in sehr schönen grossen Krystallen, die nur etwas gelblich gefärbt sind. Aus concentrirten Lösungen erhält man zu Drusen vereinigte Nadeln. Die Verbindung ist sehr leicht löslich in Wasser. Aus einigermaassen concentrirten Lösungen fällt sie auf Zusatz von Salzsäure schnell heraus. Sie färbt sich an der Luft bald roth, und zersetzt sich trocken sowohl wie gelöst schon beim Erwärmen auf 100°, wobei sie zuerst roth, dann braun wird.

Versetzt man eine Lösung der reinen Verbindung mit Ammoniak, so bemerkt man zuerst eine gelbliche, schnell ins Braune und Grüne übergehende Färbung, und bald darauf erfüllt sich die Flüssigkeit mit feinen, graugrünen Nadelchen, die einen schönen metallischen Glanz besitzen. Mit Ätzkali entsteht in der wässerigen Lösung eine aus dem Rothgelben bei Berührung mit der Luft schnell ins Dunkelkönigsblaue übergehende Färbung. Auch wenn man eine mit ausgekochtem Wasser bereitete Lösung über Quecksilber mit Ammoniak zusammenbringt, färbt sie sich bald und wird zuletzt fast undurchsichtig blau. Die Analysen der im Vacuum getrockneten Substanz ergaben folgende Zahlen:

1. 0·298 Grm. Substanz gaben 0·280 Grm. Kohlensäure und 0·135 Grm. Wasser.

2. 0.304 Grm. Substanz gaben 0.285 Grm. Kohlensäure und 0.135 Grm. Wasser.
3. 0.568 Grm. Substanz gaben 0.867 Silberchlorid.
4. 0.2995 Grm. gaben 36.75 CC. Stickstoff bei 754.4 Mm. Bar. und 13° C.



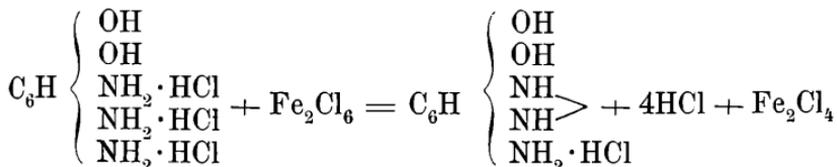
		Berechnet	Gefunden	
$C_6$	—	25.49	25.62	25.55
$H_{14}$	—	4.95	5.03	4.93
N	—	14.86	14.41	—
Cl	—	37.68	37.74	—

### Salzsaures Amidodiimidoresorcin.

Mit diesem Namen kann man eine Verbindung bezeichnen, welche dem salzsauren Amidodiimidophenol parallel ist. Heintel<sup>1</sup> erhielt diese letztere durch die Behandlung einer Lösung von salzsaurem Triamidophenol mit Eisenchlorid in der Form kleiner brauner Krystalle die im reflectirten Licht einen blauen metallischen Glanz zeigen. Eine Lösung von salzsaurem Triamidoresorcin färbt sich auf Zusatz von Eisenchlorid dunkel kirschroth und gibt bei einiger Concentration sofort, bei grösserer Verdünnung auf Zusatz von Salzsäure eine Ausscheidung kleiner dunkelrother Nadeln mit blauem metallischem Glanz, der Verbindung Heintel's ähnlich. In noch einfacherer Weise entsteht der Körper, wenn man durch eine Lösung des salzsauren Triamidoresorcins so lange Luft saugen lässt, bis sie ganz dunkelroth geworden ist. Schon während dieser Operation erfüllt sich meistens die Flüssigkeit mit den schönen rothen Nadeln die fast quantitativ erhalten werden, wenn hinterher noch etwas Salzsäure zugesetzt wird, was ihre Löslichkeit im Wasser vermin-

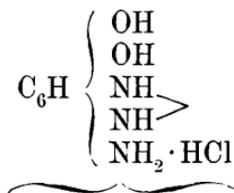
<sup>1</sup> Erdmann's Journal 100. S. 216.

dert. Sie sind in kaltem Wasser nicht allzu löslich, und lassen sich durch Eindampfen einer solchen Lösung nur zum kleinsten Theile wieder erhalten. Die Hauptmenge zersetzt sich unter Bildung einer braunen Ausscheidung. Lässt man aber eine kalt bereitete Lösung unter der Luftpumpe verdampfen, so kann man die Verbindung in prachtvollen 5 bis 6 Mm. langen, flachen schmalen Nadeln erhalten. Ätzkali verwandelt die rothe Farbe ihrer Lösung in eine dunkel königsblaue. Die Analyse führt zur Formel  $C_6H_8N_3O_2Cl$  (bei  $100^\circ$  getrocknet) und die Bildung der Verbindung ist demnach offenbar:



Die Analyse ergab:

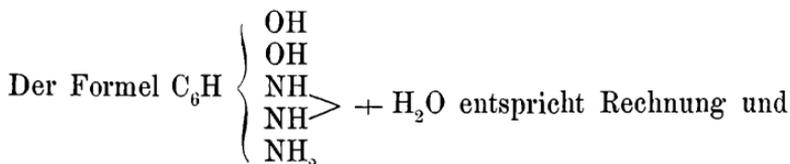
1. 0·2865 Grm. Substanz gaben 0·391 Grm. Kohlensäure und 0·111 Grm. Wasser.
2. 0·3005 Grm. Substanz gaben 0·405 Grm. Kohlensäure und 118 Grm. Wasser.
3. 0·393 Grm. Substanz gaben 0·2975 Grm. Silberchlorid.
4. 0·3195 Grm. Substanz gaben 62·5 CC. Stickstoff bei 752·4 Mm. Barom. und  $16^\circ$  C.



		Berechnet		Gefunden	
$C_6$	—	37·46		37·21	36·83
$H_8$	—	4·22		4·31	4·37
$N_3$	—	22·16		22·53	—
Ce	—	18·73		18·70	—

Unter den Reactionen des salzsauren Triamidoresorcins ist erwähnt, dass eine mit Ammoniak versetzte Lösung desselben bei Luftzutritt kleine grüne metallglänzende Nadeln ausscheidet.

Dieselbe Verbindung bildet sich auch, wenn mit Ammoniakdämpfen beladene Luft durch eine solche Lösung aspirirt wird, und endlich verwandeln sich mit Wasser zu einem Brei angerührte Krystalle des rothen salzsauren Amidodiimidoresorcins augenblicklich in diese grüne Verbindung, wenn man Ammoniak hinzutröpfelt. Dieselbe ist so gut wie unlöslich in kaltem Wasser, besitzt besonders im aufgeschlammten Zustande den dunkelgrünen Metallglanz in hohem Grade, ist auch in Alkohol und Äther unlöslich, wird aber von verdünnter Kalilauge sofort mit prachtvoll blauer Farbe gelöst. Nach dem Trocknen an der Luft stellt sie ein Haufwerk verfilzter Nadeln dar, welche bei 100° noch an Gewicht abnehmen und dabei dunkelblau und glanzlos werden. Die Analyse zeigte, dass ihnen die Zusammensetzung der vorigen Verbindung minus Salzsäure zukommt, dass sie also einfach Amidodiimidoresorcine sind. Während demnach das Trinitroresorcine bei der Reduction sich bisher genau so verhielt, wie die Pikrinsäure nach der schönen Untersuchung von Heinzel, hat hier der Unterschied statt, dass das Amidodiimidoresorcine isolirbar ist, während das Amidodiimidophenol nach Heinzel nicht isolirt erhalten werden kann<sup>1</sup>.



Versuch wie folgt.

1. 0·319 Grm. Substanz gaben 0·491 Grm. Kohlensäure, 0·150 Grm. Wasser.
2. 0·315 Grm. Substanz gaben 0·484 Grm. Kohlensäure, 0·142 Grm. Wasser.
3. 0·294 Grm. Substanz gaben 61·5 CC. Stickstoff bei 750·3 Mm. Bar. und 15° C.

<sup>1</sup> Erdmann. Journ. f. p. Ch. Bd. 100, S. 220.

		Berechnet	Gefunden	
C <sub>6</sub>	—	42·11	41·97	41·91
H <sub>9</sub>	—	5·2	5·22	5·02
N <sub>3</sub>	—	24·56	24·16	—
O <sub>3</sub>	—	28·31	—	—
		<hr style="width: 50%; margin: 0 auto;"/> 100·00		

Es entspricht also, wie man sieht, der einbasischen Pikrinsäure die zweibasische Oxypikrinsäure genau so wie der zweiatomige Alkohol-Resorcin dem einatomigen Phenol.

Man kann auch, scheint es, nach dem Auftreten der Oxypikrinsäure bei der Behandlung irgend einer Substanz mit Salpetersäure, sofort auf die mögliche Entstehung des Resorcins aus derselben einen Schluss ziehen. Denn so wie die im Eingange genannten Harze, die Oxypikrinsäure liefern, bei der Behandlung mit Ätzkali Resorcin geben, so gibt auch, wie ich gefunden habe, bei der letzteren Reaction das Sapanholzextract Resorcin in ansehnlicher Menge.

Dabei aber tritt noch eine durch Blei fällbare Verbindung anderer Art auf, die gut krystallisirt ist, und von der Spuren genügen, um in Lösung von Eisenchlorid intensiv roth gefärbt zu werden. Über diese Verbindung, die zu untersuchen ich im Begriffe bin, behalte ich mir weitere Mittheilungen vor.

Auch habe ich schon vorläufige Versuche über die Purpursäure des Trinitroresorcins gemacht, die ich zu vervollständigen gedenke.

Endlich liegt es nach alle dem nahe, zwei Verbindungen noch auf ihre Beziehung zum Resorcin zu untersuchen, die beide mit Salpetersäure Trinitroresorcin liefern: das Euxanthon und das Osorelon.

Wien, Laboratorium des Prof. Hlasiwetz.



# SITZUNGSBERICHTE

DER

## KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

---

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

---

LXIII. Band.

ZWEITE ABTHEILUNG.

4.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie, Physiologie, Meteorologie, physischen Geographie und Astronomie.



## X. SITZUNG VOM 13. APRIL 1871.

---

Der Präsident gedenkt des am 7. April l. J. erfolgten Ablebens des inländischen Ehrenmitgliedes der k. Akademie, Sr. Excellenz des Herrn Vice-Admirals Wilhelm von Tegetthoff.

Sämmtliche Anwesende erheben sich zum Zeichen des Beileides von ihren Sitzen.

Herr Prof. Dr. C. Freih. v. Eттingshausen dankt, mit Schreiben vom 13. April, für die ihm zur Fortsetzung der Erforschung der fossilen Flora Steiermarks bewilligte Subvention von 300 fl.

Der Secretär berichtet über die am 7. April durch Herrn Hofrath C. Winnecke in Carlsruhe gemachte neuerliche Entdeckung eines teleskopischen Kometen.

Derselbe legt ferner folgende eingesendete Abhandlungen vor:

„*Phymatocarcinus Speciosus*, eine neue fossile Krabbe aus dem Leithakalke des Wiener Beckens“, von Herrn Prof. Dr. Aug. Em. Ritter v. Reuss.

„Bericht über eine neue Thermosäule von grosser Wirksamkeit“, mitgetheilt vom Herrn Prof. Dr. A. v. Waltenhofen in Prag.

„Kritische Untersuchungen auf dem Gebiete der Physiologie und feineren Anatomie der Insecten, und speciell der Pediculinen“, vom Herrn Prof. Dr. V. Graber in Graz.

„Lösung algebraischer Gleichungen von beliebig hohem Grade, auch mit complexen Coëfficienten, mit Hilfe des Gauss'schen Schema's für complexe Grössen“, umgearbeitet und neuerdings eingesendet vom Herrn A. Raabe zu Hundeshagen in Preussen.

Herr Prof. Dr. V. v. Lang legt eine Abhandlung: „Versuche über Einströmung von Gasen“ vor.

Das c. M. Herr Prof. Dr. C. Freih. v. Ettingshausen überreicht eine für die Denkschriften bestimmte Abhandlung: „Die fossile Flora von Sagor in Krain“.

Das c. M. Herr Prof. Dr. K. Kořistka aus Prag legt eine Höhenkarte des Albanergebirges mit 100 Meter Schichtenhöhe sammt Profilen und Ansichten vor.

Herr Dr. E. Klein legt folgende zwei Abhandlungen vor:

1. „Ein Beitrag zur Lehre von den Malpighischen Körperchen der menschlichen Niere“, vom Herrn Dr. Victor Seng aus Wien;

2. „Zur Kenntniss der feineren Nerven der Mundhöhlenschleimhaut“, vom Herrn Dr. E. Elin aus Sibirien.

Herr Prof. Dr. L. Boltzmann aus Graz überreicht zwei Abhandlungen, und zwar:

1. „Einige allgemeine Sätze über Wärmegleichgewicht“ und

2. „Analytischer Beweis des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie aus den Sätzen über das Gleichgewicht der lebendigen Kraft“.

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Akademie der Wissenschaften & Künste, Südslavische: Rad. Knjiga XIV. U Zagrebu, 1871; 8°.

Annalen der Chemie & Pharmacie, von Wöhler, Liebig & Kopp. N. R. Band LXXXI, Heft 3. Leipzig & Heidelberg, 1871; 8°.

Apotheker-Verein, allgem. österr.: Zeitschrift. 9. Jahrg. Nr. 10—11. Wien 1871; 8°.

Association, The American Pharmaceutical: Proceedings. XVIII<sup>th</sup> Meeting, held in Baltimore, MD; September, 1870. Philadelphia, 1870; 8°.

Astronomische Nachrichten. Nr. 1838—1839 (Bd. 77. 14—15). Altona, 1871; 4°.

Bibliothèque Universelle et Revue Suisse: Archives des Sciences physiques & naturelles. N. P. Tome XL<sup>e</sup>, Nr. 158. Genève, Lausanne, Paris, 1871; 8°.

Brücke, Ernst, Die Physiologischen Grundlagen der neuhochdeutschen Verskunst. Wien, 1871; 8°.

- Comitato geologico d'Italia: Bollettino. Anno 1871, Nr. 1 & 2. Firenze; 8<sup>o</sup>.
- Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Tome LXXI, Nrs. 10—26. Tome LXXII, Nrs. 1—8 & 10. Paris, 1870 & 1871; 4<sup>o</sup>.
- Erlangen, Universität: Akademische Gelegenheitsschriften aus dem Jahre 1870. 4<sup>o</sup> & 8<sup>o</sup>.
- Ferretti, Alessandro, Ancora sulle ferrovie di montagna. Mantova, 1871; 8<sup>o</sup>.
- Gesellschaft, k. k. mähr.-schles., zur Beförderung des Ackerbaues, der Natur- & Landeskunde: Mittheilungen. 1870. Brünn; 4<sup>o</sup>. — Notizen-Blatt der histor.-statistischen Section vom 1. Jänner bis 1. December 1870. Brünn, 1870; 4<sup>o</sup>. — österr., für Meteorologie: Zeitschrift. VI. Band, Nr. 6—7. Wien, 1871; 4<sup>o</sup>.
- Gewerbe-Verein, n.-ö.: Verhandlungen und Mittheilungen (Wochenschrift). XXXII. Jahrg. Nr. 13—15. Wien, 1871; 8<sup>o</sup>. (4<sup>o</sup>.)
- Jahrbuch, Neues, für Pharmacie und verwandte Fächer, von Vorwerk. Band XXXV, Heft 2. Speyer, 1871; 8<sup>o</sup>.
- Journal für praktische Chemie, von H. Kolbe. N. F. Band III, 3. Heft. Leipzig, 1871; 8<sup>o</sup>.
- Landbote, Der steirische. 4. Jahrgang. Nr. 7. Graz, 1871; 4<sup>o</sup>.
- Landwirthschafts-Gesellschaft, k. k., in Wien: Verhandlungen und Mittheilungen. Jahrgang 1871, Nr. 8. Wien; 8<sup>o</sup>.
- Lotos. XXI. Jahrgang. März 1871. Prag; 8<sup>o</sup>.
- Mittheilungen des k. k. technischen und administrativen Militär-Comité. Jahrgang 1871, 4. Heft. Wien; 8<sup>o</sup>. — aus J. Perthes' geographischer Anstalt. 17. Band 1871, Heft III—IV. Gotha; 4<sup>o</sup>.
- Museum Carolino-Augusteum zu Salzburg: Jahres-Bericht für 1870. Salzburg; 4<sup>o</sup>.
- Nature Nrs. 73—75, Vol. III. London, 1871; 4<sup>o</sup>.
- Osservatorio del R. Collegio Carlo Alberto in Moncalieri: Bollettino meteorologico. Vol V, Nr. 9. Torino, 1870; 4<sup>o</sup>.
- Reichsanstalt, k. k. geologische: Verhandlungen. Jahrg. 1871, Nr. 5. Wien; 4<sup>o</sup>.

- Revue des cours scientifiques et littéraires de la France et de l'étranger. VII<sup>e</sup> Année Nrs. 42—50. Paris & Bruxelles, 1869—1870; 4<sup>o</sup>.
- Vimercati, Guido, Revista scientifico-industriale del 1870. Anno II<sup>do</sup>. Firenze 1871; 12<sup>o</sup>. — L'equivalente meccanico del calore con un saggio di storia della termodinamica. Firenze, 1870; gr. 8<sup>o</sup>.
- Wiener Medizin. Wochenschrift. XXI. Jahrgang, Nr. 12—14. Wien, 1871; 4<sup>o</sup>.
- Zeitschrift für Chemie, von Beilstein, Fittig & Hübner. XIII. Jahrgang. N. F. VI. Band, 24. Heft; XIV. Jahrgang. N. F. VII. Band, 2. Heft. Leipzig, 1870 & 1871; 8<sup>o</sup>.
- des österr. Ingenieur- & Architekten-Vereines. XXIII. Jahrgang, 5. & 6. Heft. Wien, 1871; 4<sup>o</sup>.
-

## Über einige neue Talbot'sche Interferenz-Erscheinungen.

Von **L. Ditscheiner.**

(Mit 1 Tafel.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 9. März 1871.)

Diejenigen Interferenz-Erscheinungen, welche unter dem Namen der Talbot'schen zusammengefasst werden können, verdienen, ihrer leichten Ausführbarkeit wegen, sicherlich einige Aufmerksamkeit. Es sind dies Interferenz-Erscheinungen, die im allgemeinen durch zwei neben einander, durch verschieden dicke oder verschieden brechende Medien gehende Strahlen hervorgerufen werden. So ist zuerst nachgewiesen worden, dass im Spectrum eine grosse Zahl nahezu gleichweit von einander abstehender dunkler Interferenzstreifen auftreten, wenn man die auf der Seite der brechenden Kante des Prismas liegende Hälfte der Pupille mit einem dünnen durchsichtigen Plättchen bedeckt. Es werden so diejenigen Strahlen, welche durch das Plättchen gegangen und jene, welche neben demselben vorbeigehend ins Auge gelangen, auf der Netzhaut interferiren. Es ist später von Stefan<sup>1</sup> gezeigt worden, dass das Plättchen auch irgendwo zwischen Auge und Prisma oder zwischen Prisma und Spalte von der Seite der brechenden Prismenkante eingeschoben werden kann, dass aber auch vor der Spalte, wenn man eben diese auf der einen oder der anderen Seite halb mit dem Plättchen bedeckt, dieses die Interferenz-Erscheinung hervorruft. Es ist ebenfalls von Stefan gezeigt worden, dass auch zwei verschieden dicke Platten nebeneinander gestellt, solche Interferenz-Erscheinungen liefern, wenn nur die mehr verzögerten Strahlen auf der Seite der minder brechbaren Strahlen des Spectrums liegen. Es ist

---

<sup>1</sup> Sitzber. 50. Bd. II. Abth. pag. 138.

ferner bei einer anderen Gelegenheit gezeigt worden<sup>1</sup>, wie diese Talbot'schen Streifen auftreten, wenn man statt einer einfach brechenden Substanz ein planparalleles Krystallplättchen nimmt. Während nämlich bei einer Platte eines einfach brechenden Mediums die Interferenz-Streifen nahezu von gleicher gegenseitiger Entfernung durch das ganze Spectrum hindurch mit gleicher Schärfe und Schwärze vertheilt erscheinen, ist dies bei der letzteren nicht mehr der Fall, indem nicht nur ihre Schwärze und Schärfe an verschiedenen Stellen des Spectrums verschieden ist, so dass selbst streifenfreie Stellen auftreten, sondern die zwischen den streifenfreien Stellen abwechselnd liegenden Gruppen dunkler Streifen erscheinen gegen einander um die halbe Entfernung zweier solcher Streifen verschoben. Bezeichnen wir, unter Anwendung von unpolarisirtem Licht, mit  $D$  die Dicke der Platte, mit  $\mu$  im ersten und mit  $\mu_1$  und  $\mu_2$  im zweiten Falle die Brechungsquotienten der Platte für die Wellenlänge  $\lambda$ , so ist die Intensitätsgleichung für die entsprechende Stelle des Spectrums, für die einfach brechende Platte

$$(1) \quad I = a^2 \cos^2 \frac{\pi}{\lambda} (\mu - 1) D$$

und für die doppeltbrechende Platte

$$(2) \quad I = \frac{a^2}{2} \left[ 1 + \cos \frac{\pi}{\lambda} (\mu_2 - \mu_1) D \cos \frac{2\pi}{\lambda} \left( \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} - 1 \right) D \right]$$

In den folgenden Zeilen soll nun eine Reihe ähnlicher Erscheinungen behandelt werden, die alle dadurch erzeugt wurden, dass zwei von einer und derselben Lichtquelle kommende Strahlenbündel, welche durch verschieden dicke planparallele doppeltbrechende Krystallplatten zwischen zwei polarisirenden Vorrichtungen hindurch gegangen sind, zur Interferenz gelangen. Im allgemeinen zeigen sich unter diesen Voraussetzungen im Spectrum wieder einzelne durch streifenfreie Stellen getrennte Gruppen schwarzer, bei passender Dicke der Platten nahe aneinander liegender Streifen, aber diese Gruppen sind nicht mehr von nahezu gleicher Breite, im Gegentheile wechselt diese oft sehr rasch und gibt so dem Ganzen ein unregelmässiges, fast will-

<sup>1</sup> Sitzungsber. 57. Bd. II. Abth.

kürliches Ansehen. Ausserdem treten an gewissen Stellen breite schwarze Streifen auf, ähnlich jenen, welche sich im Spectrum zeigen, wenn man zwischen polarisirenden Vorrichtungen eine Krystallplatte so einschiebt, dass alle Strahlen durch sie hindurchgehen müssen. Auch hier zeigt sich im Gegensatze zu der ange deuteten Erscheinung ein rascher Wechsel nicht nur ihrer gegen seitigen Distanz, sondern auch ihrer Schärfe und Schwärze. Es wird dadurch wohl erklärlich, dass diese Erscheinungen sich nicht in so einfacher Weise wie die bisher betrachteten darstellen lassen, aber man ist in jedem speciellen Falle im Stande, aus den weiter unten entwickelten Gleichungen sich ein vollständiges Bild der Erscheinung zu entwerfen.

Von all den möglichen Fällen, die bezüglich der nebeneinander gestellten verschieden dicken Platten sich ergeben, wollen wir der Einfachheit der Rechnung wegen nur ganz bestimmte betrachten. Erstens soll stets vorausgesetzt werden, dass die planparallelen Krystallplatten senkrecht zu den einfallenden Strahlen gestellt sind und dass sowohl der eine wie der andere der senkrecht zu einander polarisirten, die Krystallplatte durchziehenden Strahlen keine Brechung erleidet. Wir setzen also Krystallplatten voraus, die bei optisch einaxigen Substanzen parallel zur optischen Axe, bei optisch zweiaxigen aber senkrecht zu einer optischen Elasticitätsaxe geschnitten sind. Zweitens aber wollen wir voraussetzen, dass die zwei Platten so nebeneinander gestellt sind, dass sie optisch gleich orientirt sind, oder dass die optisch gleichwerthigen Linien in beiden auf einander senkrecht stehen, so dass z. B. bei optisch einaxigen Substanzen entweder die optischen Axen der beiden Platten parallel oder senkrecht stehen.

Wir wollen zuerst diejenigen Erscheinungen betrachten, die sich bei optisch gleich orientirten Krystallplatten ergeben. Diese sind auch am leichtesten dadurch herzustellen, dass man auf eine Krystallplatte von der Dicke  $D$  eine zweite gleich orientirte von der Dicke  $D'$  so legt, dass nur die Hälfte der ersteren gedeckt wird. Man hat dadurch eine Platte von der Dicke  $D$  und eine zweite unmittelbar anliegend von der Dicke  $D+D'$  hergestellt. Bringt man nun diese Doppelplatte so zwischen die Spalte eines Spectralapparates und das Auge, dass die dickere Platte auf der Seite der rothen Strahlen des Spectrums zu liegen kommt und

die aus dem Collimator kommenden Strahlen theilweise durch die eine, theilweise durch die andere Platte gehen müssen, bringt man ferner vor der Spalte und vor dem Okulare des Beobachtungsfernrohres Nicole an, so beobachtet man die schon oben angedeuteten Interferenz-Streifen, deren Lage, wie man sich leicht überzeugen kann, wesentlich abhängt von der Dicke der Platten und von der Neigung der Schwingungsebenen der beiden Nicole, sowohl gegen einander als auch gegen jene der die Krystallplatten durchziehenden senkrecht zu einander polarisirten Strahlen.

Bezeichnen wir mit  $OP$  die Schwingungsrichtung der aus den Polariseur durch den Collimator gesandten linear polarisirten Lichtstrahlen, die charakterisirt sein sollen durch die Gleichung

$$\sigma = a \sin \frac{2\pi}{\lambda} \cdot vt,$$

bezeichnen wir ferner mit  $Oy$  und  $Oz$  die auf einander senkrecht stehenden Schwingungsrichtungen der die Krystallplatten durchziehenden Strahlen und wird Winkel  $POy = \alpha$  gesetzt; sind ferner  $\mu_1$  und  $\mu_2$  die Brechungsquotienten für die Platte, so treten aus der Begrenzungsebene der dickeren Platte (wenn die dem Collimator zugekehrten Begrenzungsebenen der Platten zusammenfallen) folgende zwei Strahlenpaare aus und zwar auf der Seite der dickeren Platte

$$(3) \quad \begin{aligned} y_1 &= a \cos \alpha \sin \frac{2\pi}{\lambda} (vt - \mu_1 D - \mu_1 D') \\ z_1 &= a \sin \alpha \sin \frac{2\pi}{\lambda} (vt - \mu_2 D - \mu_2 D') \end{aligned}$$

und auf der Seite der dünneren Platte, da hier die Lichtstrahlen noch eine Luftschichte von der Dicke  $D'$  zu durchlaufen haben, bis sie an die verlängerte zweite Begrenzungsfläche der dickeren Platte gelangen,

$$(4) \quad \begin{aligned} y_2 &= a \cos \alpha \sin \frac{2\pi}{\lambda} (vt - \mu_1 D - D') \\ z_2 &= a \sin \alpha \sin \frac{2\pi}{\lambda} (vt - \mu_2 D - D'), \end{aligned}$$

wenn wir auch von jenen Gangunterschieden absehen, welche beiden Strahlenpaaren gemeinschaftlich sind. Die parallel schwin-

genden Strahlen  $y_1$  und  $y_2$ , sowie  $z_1$  und  $z_2$  setzen sich zu je einem zusammen und diese sind

$$Y = 2a \cos \alpha \cos \frac{\pi}{\lambda} (\mu_1 - 1) D' \sin \frac{2\pi}{\lambda} (vt - \mu_1 D - \frac{\mu_1 + 1}{2} D') \dots \quad (5)$$

$$Z = 2a \sin \alpha \cos \frac{\pi}{\lambda} (\mu_2 - 1) D' \sin \frac{2\pi}{\lambda} (vt - \mu_2 D - \frac{\mu_2 + 1}{2} D') \dots \quad (6)$$

Von diesen Strahlen rufen aber die Interferenz-Erscheinung nur die zur Schwingungsrichtung  $OA$  des Analyseurs parallelen Componenten hervor. Nennen wir den Winkel der Schwingungsrichtungen von Polarisieur und Analyseur, nämlich  $POA = \psi$ , so sind diese Componenten

$$Y_1 = 2a \cos \alpha \cos(\alpha - \psi) \cdot \cos \frac{\pi}{\lambda} (\mu_1 - 1) D' \cdot \sin \frac{2\pi}{\lambda} (vt - \mu_1 D - \frac{\mu_1 + 1}{2} D')$$

$$Z_1 = 2a \sin \alpha \cdot \sin(\alpha - \psi) \cdot \cos \frac{\pi}{\lambda} (\mu_2 - 1) D' \cdot \sin \frac{2\pi}{\lambda} (vt - \mu_2 D - \frac{\mu_2 + 1}{2} D')$$

Diese beiden in einer Ebene schwingenden Strahlen setzen sich wieder zu einem einzigen zusammen, dessen Intensität ist

$$I = 4a^2 \left[ \cos^2 \alpha \cos^2(\alpha - \psi) \cos^2 \frac{2\pi}{\lambda} (\mu_1 - 1) D' + \sin^2 \alpha \sin^2(\alpha - \psi) \cos^2 \frac{2\pi}{\lambda} (\mu_2 - 1) D' + \right. \\ \left. + 2 \sin \alpha \cos \alpha \sin(\alpha - \psi) \cos(\alpha - \psi) \cos \frac{\pi}{\lambda} (\mu_1 - \mu_2) (2D + D') \right]. \quad (7)$$

Diese Gleichung gibt für jede beliebige Stelle des Spectrums nach Substitution der ihr entsprechenden Werthe von  $\lambda$ ,  $\mu_1$  und  $\mu_2$  die Intensität, und es lässt sich aus ihr das Auftreten der dunklen Intensitätsminima und der hellen Intensitätsmaxima durch eine mehr oder weniger complicirte Rechnung finden. Im allgemeinen aber ist, namentlich wegen der zwischen  $\mu_1$  und  $\mu_2$  und  $\lambda$  bestehenden Relation und der in der Gleichung (7) vorkommenden transcendenten Functionen die genaue Bestimmung des Auftretens dunkler Streifen nicht möglich und man ist in den meisten Fällen genöthigt, sich mit einer annähernden Bestimmung zu begnügen. Aus dem Auftreten dieser Streifen an bestimmten Stellen des Spectrums, für welche die obige Gleichung eine einfache, leicht zu behandelnde Form annimmt, lassen sich jedoch ohne Schwierigkeit die zwischen diesen Stellen auftretenden Streifen erkennen, so dass man auf diese Weise ein mehr oder weniger

vollständiges Bild der ganzen Erscheinung zu liefern im Stande ist. Am deutlichsten und regelmässigsten treten aber diese Interferenz-Streifen offenbar auf, wenn die beiden Nicole in gekreuzter oder in paralleler Stellung sich befinden, wenn also  $\psi=90^\circ$  oder  $=0$  ist und wenn gleichzeitig  $\alpha=0, 45^\circ$  oder  $90^\circ$  ist.

Betrachten wir vorerst diejenigen Fälle, für welche  $\psi=90^\circ$  ist, bei welcher also Analyseur und Polariseur in gekreuzter Stellung sind, so wird für  $\alpha=0$

$$I=0$$

und für  $\alpha=90$  ebenfalls

$$I=0,$$

so dass bei beiden Stellungen der Krystallplatte, wie sich dies von selbst versteht, das ganze Gesichtsfeld für alle Farben gleichzeitig dunkel erscheint. Dreht man aber die Krystallplatte aus der einen Stellung in die andere, so erscheint sogleich durch das Spectrum hindurch ein Wechsel von Hell und Dunkel, welcher seine grösste Regelmässigkeit für  $\alpha=45^\circ$  zeigt, bei jener Stellung also, wo die optischen Elasticitätsaxen der Platte den rechten Winkel zwischen den Schwingungsrichtungen der Nicole halbiren. Für diesen Fall wird Gleichung (7)

$$(8) \quad I = 2a^2 \left( \cos \frac{2\pi}{\lambda} (\mu_1 - 1) D' + \cos \frac{2\pi}{\lambda} (\mu_2 - 1) D' - 2 \cos \frac{\pi}{\lambda} (\mu_1 - 1) D' \cos \frac{\pi}{\lambda} (\mu_2 - 1) D' \cos \frac{\pi}{\lambda} (\mu_1 - \mu_2) (2D + D') \right).$$

Eine allgemeine Discussion dieser Gleichung ist auch hier aus den schon oben angegebenen Gründen nicht leicht möglich, aber es lassen sich hier leichter bestimmte Stellen des Spectrums finden, für welche eine Vereinfachung der Gleichung eintritt, aus welcher sich eine grössere Übersicht der ganzen Erscheinung ergibt. Von denjenigen Werthen in der Gleichung (8), welche sich periodisch ändern, wenn man von einer Stelle des Spectrums zur andern geht, wenn man also  $\lambda$  und damit auch  $\mu_1$  und  $\mu_2$  sich ändern lässt, hat

$$\cos \frac{\pi}{\lambda} (\mu_1 - \mu_2) (2D + D')$$

die längere Periode, indem sich

$$\cos \frac{\pi}{\lambda} (\mu_1 - 1) D' \text{ und } \cos \frac{\pi}{\lambda} (\mu_2 - 1) D'$$

weit rascher ändern. Es wird deshalb zweckmässig erscheinen, die Gleichung für diejenigen Stellen zu untersuchen, für welche der angeführte Cosinus einfache Werthe annimmt, also  $=0$ ,  $+1$  oder  $-1$  wird. Diesen bestimmten Werthen für den Cosinus entsprechend, findet man der Reihe nach

$$(\mu_1 - \mu_2)(2D + D') = \frac{2n-1}{2}\lambda \quad (9)$$

$$(\mu_1 - \mu_2)(2D + D') = 2n\lambda \quad (10)$$

$$(\mu_1 - \mu_2)(2D + D') = (2n-1)\lambda, \quad (11)$$

so zwar, dass die entsprechenden Stellen nicht anders sind als jene, für welche eine gleiche Krystallplatte von der Dicke  $2D + D'$ , in paralleler Stellung mit der angewendeten, zwischen gekreuzten Nicoln helle Intensitäts-Maxima oder dunkle schwarze Streifen, entsprechend einem Gangunterschied von gerader und ungerader Anzahl Wellenlängen, zeigt.

Führen wir den Werth aus Gleichung (9) in die Gleichung (8) ein, so wird

$$\begin{aligned} I &= 2a^2 \left( \cos \frac{2\pi}{\lambda} (\mu_1 - 1)D' + \cos \frac{2\pi}{\lambda} (\mu_2 - 1)D' \right) \\ &= 2a^2 \left( 1 + \cos \frac{\pi}{\lambda} (\mu_1 - \mu_2)D' \cdot \cos \frac{2\pi}{\lambda} \left( \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} - 1 \right) D' \right). \end{aligned} \quad (12)$$

Es geht aus dieser Relation im Vergleiche mit einer bei einer anderen Gelegenheit (Sitzber. 57. Bd. II. Abth.) abgeleiteten hervor, dass an allen Stellen, für welche eine Platte von der Dicke  $(2D + D')$  zwischen gekreuzten Nicoln helle Intensitätsmaxima zeigt, die Interferenz-Streifen so auftreten, wie sie an eben denselben Stellen auftreten würden, wenn die Talbot'schen Streifen durch eine Krystallplatte von der Dicke  $D'$  bei unpolarisirtem Licht erzeugt würden. Ob an solchen Stellen scharfe schwarze Streifen in normaler oder verschobener Stellung auftreten oder ob dieselben streifenfrei sind, lässt sich in jedem speciellen Falle leicht erkennen, wenn man auf die a. a. O. gemachten Bemerkungen Rücksicht nimmt und untersucht, ob die Krystallplatte von der Dicke  $D'$  zwischen gekreuzten Nicoln Intensitätsmaxima oder solche Minima mit gerader oder ungerader Anzahl Wellenlängen Gangunterschied besitzt.

Führen wir den Werth aus (10) in (8) ein, so erhalten wir offenbar

$$(13) \quad \begin{aligned} I &= 2a^2 \left( \cos \frac{\pi}{\lambda} (\mu_1 - 1) D' - \cos \frac{\pi}{\lambda} (\mu_2 - 1) D' \right)^2 \\ &= 8a^2 \sin^2 \frac{\pi}{\lambda} \left( \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} - 1 \right) D' \sin^2 \frac{\pi}{\lambda} \left( \frac{\mu_1 - \mu_2}{2} \right) D'. \end{aligned}$$

Das Auftreten der Intensitätsminima ist hier sowohl durch den ersten als auch durch den zweiten Faktor bedingt. Im Allgemeinen ist nun die Änderung im Werthe des ersten Faktors eine viel raschere, als die des zweiten Faktors bei einer Änderung von  $\lambda$ ,  $\mu_1$  und  $\mu_2$ . Der erste Faktor liefert also nahe aneinander liegende, durch helle Maxima getrennte scharfe dunkle Streifen, während durch den zweiten Faktor, wenn er der Nulle sich nähert, breite dunkle Streifen, die sich über eine grössere Zahl der erstgenannten Streifen erstrecken können, bedingt sind. Die Intensitätsminima erster Ordnung, wie wir sie nennen wollen, treten also auf für

$$\sin \frac{\pi}{\lambda} \left( \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} - 1 \right) D' = 0$$

oder für

$$\left( \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} - 1 \right) D' = n\lambda,$$

während die entsprechenden Maxima auftreten für

$$\left( \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} - 1 \right) D' = \frac{2n-1}{2} \lambda.$$

Diese Interferenz-Streifen treten sonach in derselben gegenseitigen Distanz auf, wie die Talbot'schen Streifen bei einer einfach brechenden Platte von der Dicke  $D'$  und den mittleren Brechungsquotienten  $\frac{\mu_1 + \mu_2}{2}$ , erscheinen aber gegen diese um ihre halbe Distanz verschoben. Wir nennen diese Stellung der Streifen die verschobene Stellung der Minima erster Ordnung. Ob die Maxima ihren höchsten Werth wirklich erlangen, hängt ersichtlich vom zweiten Faktor ab. Es wird nämlich das Auftreten

breiter dunkler Minima oder heller Maxima zweiter Ordnung davon abhängen, ob

$$\sin \frac{\pi}{\lambda} \left( \frac{\mu_1 - \mu_2}{2} \right) D'$$

gleich 0 oder 1 ist. Das erstere tritt ein, wenn gleichzeitig an den betrachteten Stellen

$$\frac{\pi}{\lambda} (\mu_1 - \mu_2) D' = 2n\lambda,$$

das zweite, wenn

$$\frac{\pi}{\lambda} (\mu_1 - \mu_2) D' = (2n - 1)\lambda.$$

Dunkle breite Streifen treten also an den betrachteten Stellen auf, wenn an eben diesen Stellen eine Krystallplatte von der Dicke  $D'$  zwischen gekreuzten Nicolen dunkle Interferenz-Streifen mit einem Gangunterschiede von einer geraden Anzahl von Wellenlängen besitzen würde. Diese Streifen fehlen aber gänzlich, wenn dieser Gangunterschied eine ungerade Anzahl von Wellenlängen beträgt. Liegt der Werth von  $\frac{\pi}{\lambda} (\mu_1 - \mu_2) D'$  zwischen den angegebenen Grenzwerten, so werden die Streifen um so weniger dunkel sein, je mehr sich eben dieser Werth dem zweiten Grenzwerte nähert.

Wird endlich der Werth aus Gleichung (11) in (8) substituiert, so erhält man

$$\begin{aligned} I &= 2a^2 \left( \cos \frac{\pi}{\lambda} (\mu_1 - 1) D' + \cos \frac{\pi}{\lambda} (\mu_2 - 1) D' \right)^2 = \\ &= 8a^2 \cos \frac{2\pi}{\lambda} \left( \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} - 1 \right) \cos \frac{2\pi}{\lambda} \left( \frac{\mu_1 - \mu_2}{2} \right) D' \end{aligned} \quad (14)$$

Auch hier erhalten wir wieder Maxima und Minima sowohl erster, als auch zweiter Ordnung. Die Minima erster Ordnung treten auf für

$$\left( \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} - 1 \right) D' = \frac{2n - 1}{2} \lambda$$

die entsprechenden Maxima aber für

$$\left(\frac{\mu_1 + \mu_2}{2} - 1\right) D' = n\lambda.$$

Es treten hier also die Talbot'schen Streifen gerade so auf, wie sie bei einer einfach brechenden Platte von der Dicke  $D'$  und den mittleren Brechungsquotienten  $\frac{\mu_1 + \mu_2}{2}$  bei Anwendung von unpolarisirtem Licht auftreten würden. Sie sind sonach in normaler Stellung.

In ähnlicher Weise wie früher ergeben sich Minima zweiter Ordnung für

$$(\mu_1 - \mu_2) D' = (2n - 1)\lambda$$

und ihnen entsprechende Maxima zweiter Ordnung für

$$(\mu_1 - \mu_2) D' = 2n\lambda.$$

Diese Werthe lehren also, dass sich breite dunkle Streifen an den betrachteten durch (11) gegebenen Stellen zeigen, wenn gleichzeitig an diesen Stellen eine Krystallplatte von der Dicke  $D'$  zwischen gekreuzten Nicoln dunkle Minima, entsprechend einem Gangunterschied von einer ungeraden Anzahl Wellenlängen, zeigen würde, dass aber, wenn dies nicht der Fall ist, die dunklen Streifen um so schwächer auftreten, je mehr sich für sie der angedeutete Gangunterschied einer geraden Anzahl von Wellenlängen nähert, so zwar, dass bei diesen letzteren die Maxima erster Ordnung in voller Intensität auftreten.

Aus dem Angeführten ist es ersichtlich ein Leichtes, das Auftreten der Interferenz-Streifen für die durch die Gleichungen (9), (10) und (11) repräsentirten Stellen des Spectrums zu finden. Man ist aber aus dem eben Gesagten leicht im Stande, das Bild der ganzen Erscheinung sich durch passende Übergänge zu vervollständigen. So wird ersichtlich sein, dass die Minima zweiter Ordnung, wenn sie überhaupt auftreten, nur an den durch die Gleichungen (10) und (11) gegebenen Stellen zu suchen sein werden, dass sie sich aber über diese Stellen rechts und links bis auf eine

gewisse Distanz ausbreiten werden, jedenfalls aber nicht weiter als bis in die Nähe der durch Gleichung (9) bestimmten Stellen, da an diesen solche Minima niemals auftreten können. Die Maxima und Minima erster Ordnung können an den nächstliegenden, durch Gleichung (9), (10) und (11) bestimmten Stellen, beide in normaler oder beide in verschobener, oder endlich an einer Stelle in normaler, an der nächstliegenden in verschobener Stellung sich befinden. In den beiden ersten Fällen ist anzunehmen, dass auch an den Zwischenstellen diese Minima und Maxima in gleicher Weise auftreten, während im letzten Falle ein Übergang stattfinden muss, der sich in ähnlicher Weise durch ein Auftreten von streifenfreien Stellen kennzeichnen wird, wie dies auch ganz ebenso bei den durch eine einzige Krystallplatte erzeugten Streifen der Fall war. Durch eben diese Verhältnisse ergibt sich eine grosse Mannigfaltigkeit im Wechsel dieser Streifen, die beim blossen Anblick der Erscheinung auf ein regelloses, ganz ungesetzmässiges Auftreten der Streifen hinzuweisen scheint.

Wird in der allgemeinen Gleichung (8)  $D=0$  gesetzt, bedeckt man nur die eine Hälfte des Objectives mit einer Krystallplatte von der Dicke  $D'$ , so nimmt sie die einfachere Form an

$$I=2a^2 \sin \frac{2\pi}{\lambda} (\mu_1 - \mu_2) D'.$$

Es folgt hieraus, dass die Erscheinung unter diesen Umständen gerade so auftritt, wie bei einer einzigen das ganze Objectiv bedeckenden Krystallplatte von der Dicke  $D'$  zwischen gekreuzten Nicolén, abgesehen natürlich von der geringeren Intensität an Stellen der Maxima, indem ja alle Strahlen, welche nicht durch die Krystallplatte gegangen sind, durch den Analyseur ausgelöscht werden.

Wird hingegen  $D'=0$ , bedecken wir also das ganze Objectiv mit der Platte von der Dicke  $D$ , so liefert die Gleichung (8)

$$I=4a^2 \sin \frac{2\pi}{\lambda} (\mu_1 - \mu_2) D,$$

eine Relation, die mit der obigen identisch, indem man absieht von dem absoluten Werthe der Intensität und nur Rücksicht nimmt auf die Orte der Maxima und Minima. Diese Relation

hätte selbstverständlich auf eine einfachere Weise gefunden werden können.

Es sollen nun in dem Folgenden ein paar hieher gehörige Interferenz-Erscheinungen mit Hilfe der in Fig. 1 und 2 gegebenen Zeichnungen erläutert werden. Wie sich aus den schon angestellten Betrachtungen leicht ergibt, ist die mehr oder minder regelmässige Vertheilung der Intensitätsminima und Maxima, sowohl erster als zweiter Ordnung, wesentlich von dem mehr oder weniger einfachen Verhältnisse der Werthe  $D'$  und  $2D+D'$  abhängig. In Fig. 1 ist nun eine Interferenz-Erscheinung dargestellt für  $D = \frac{1}{2} D'$ , so dass  $2D+D' = 2D'$  wird. Bei Fig. 2 ist

ein etwas complicirterer Fall dargestellt, indem für sie  $D = \frac{3}{2} D'$  gewählt wurde, so dass  $2D+D' = 4D'$  wird. In beiden Zeichnungen enthält die erste breite horizontale Zone durch Verticallinien diejenigen Orte angedeutet, für welche eine Krystallplatte von der Dicke  $D'$ , die zwischen gekreuzten Nicolen so eingestellt ist, dass ihre optischen Elasticitätsachsen mit den Polarisations Ebenen der Nicole Winkel von  $45^\circ$  bilden, dunkle Intensitätsminima hat. Dasselbe gilt bezüglich der zweiten Zone für eine eben solche Platte von der Dicke  $2D+D'$ . Die diesen Linien nebengestellten Zahlen geben die ihnen entsprechende Anzahl von Wellenlängen als Gangunterschied an, so dass links das rothe, rechts das violette Ende des Spectrums gedacht werden muss. Es wird durch diese Linien ein leichteres Verständniss der in der dritten Zone gegebenen eigentlichen Interferenz-Erscheinungen ermöglicht. Betrachten wir in Fig. 1 zuerst diejenigen Orte, welche durch die Gleichung (9) gegeben sind, so finden wir an den mit  $a$  bezeichneten Stellen die Maxima und Minima erster Ordnung in der normalen, für die mit  $b$  bezeichneten Stellen aber in verschobener Stellung. Der Gleichung (10) entsprechen die mit  $c$  und  $d$  bezeichneten Stellen. An beiden finden wir die Maxima und Minima in verschobener Stellung, so zwar, dass sie sich, wo es eben möglich ist, vollkommen an die bei  $b$  auftretenden anschliessen. Bei  $c$  finden sich vollkommen dunkle Minima zweiter Ordnung, die bei  $d$  gänzlich fehlen, da dort solche Maxima Platz finden. Die ersteren entsprechen nämlich Stellen,

für welche eine Platte von der Dicke  $D'$  zwischen gekreuzten Nicolen Minima mit gerader, letztere aber mit ungerader Anzahl Wellenlängen Gangunterschied hat. Die Stellen bei  $e$  entsprechen der Gleichung 11. Wir finden bei ihnen die Maxima und Minima erster Ordnung in der normalen Stellung, wie bei  $a$ , an welche sie sich auch, wenn sie nachbarlich auftreten, vollkommen anschliessen. An diesen Stellen hat aber auch die Platte von der Dicke  $D'$  zwischen gekreuzten Nicolen Maxima, es wird somit für sie

$$\cos \frac{2\pi}{\lambda} \left( \frac{\mu_1 - \mu_2}{2} \right) D' = \frac{1}{2},$$

weshalb hier nach Gleichung (14) Minima zweiter Ordnung auftreten, die indess nur schwach sind, da der sie bedingende Cosinus nur  $\sqrt{\frac{1}{2}}$  und nicht 0 ist. Endlich sind noch die Stellen bei  $f$  zu betrachten. Sie sind fast vollkommen streifenfrei, da sich an ihnen der Ausgleich der Maxima und Minima erster Ordnung aus der normalen und verschobenen Stellung vollzieht, ganz ähnlich wie bei den Talbot'schen Streifen einer Krystallplatte unter Anwendung von unpolarisirtem Lichte, wie dies auch oben schon angedeutet wurde.

In Fig. 2 entsprechen der Gleichung (9) die mit  $a$ ,  $b$  und  $c$  bezeichneten Stellen; dort finden sich nämlich für die Platte von der Dicke  $2D + D'$  helle Maxima zwischen gekreuzten Nicolen. Bei  $a$  treten die Maxima und Minima erster Ordnung in normaler Stellung auf, da sie in der Nähe der Minima mit gerader Anzahl Wellenlängen Gangunterschied für die Platte von der Dicke  $D'$  liegen, bei  $b$  sind diese Maxima und Minima erster Ordnung in verschobener Stellung, da sie in der Nähe von Minima mit ungerader Anzahl Wellenlängen Gangunterschied auftreten. Die bei  $a$  und  $b$  auftretenden dunklen Interferenz-Streifen sind sehr scharf, während sie bei  $c$  verhältnissmässig schwach sind und sich eben dort weder in der normalen noch in der verschobenen Stellung befinden, indem sie wieder etwas gegen beide Stellungen verschoben erscheinen. Denn an diesen Stellen beginnt der Ausgleich zwischen der normalen und verschobenen Stellung der Talbot'schen Streifen einer Krystallplatte von der Dicke  $D'$  bei Anwendung von unpolarisirtem Licht. Der Gleichung (10) entsprechen in ähn-

licher Weise die mit  $d$ ,  $e$  und  $f$  bezeichneten Stellen. Bei allen diesen erscheinen die Minima und Maxima erster Ordnung in der verschobenen Stellung. Bei  $d$  erscheinen ausserdem vollkommen dunkle Minima zweiter Ordnung, da dort eine Krystallplatte von der Dicke  $D'$  zwischen gekreuzten Nicolén dunkle Streifen, entsprechend einem Gangunterschiede von einer geraden Anzahl Wellenlängen hat. Bei  $e$  hingegen treten nur sehr schwache Minima zweiter Ordnung auf, und bei  $f$  fehlen die Minima gänzlich, da an ihre Stelle Maxima zweiter Ordnung getreten sind. Der Gleichung (11) entsprechen die mit  $g$  und  $h$  bezeichneten Stellen. An beiden finden sich die Maxima und Minima erster Ordnung in normaler Stellung. Bei  $g$  finden sich ziemlich dunkle Minima zweiter Ordnung, die aber bei  $h$  gänzlich fehlen. Für die erste Stelle ist nämlich

$$\cos \frac{\pi}{\lambda} \left( \frac{\mu_1 - \mu_2}{2} \right) D'$$

nicht viel grösser als 0, an zweiter Stelle aber nahezu gleich 1. Bei  $i$  endlich sind wieder vollkommen streifenfreie Stellen, die wieder wie in Fig. 1 bei  $f$  den Übergang aus der normalen zur verschobenen Stellung der Maxima und Minima erster Ordnung bilden. Für die übrigen Stellen wird nach dem oben Gesagten die Stellung der Interferenz namentlich mit Hilfe der Zeichnung leicht zu erkennen sein.

Wenn man in der allgemeinen Gleichung (7),  $\psi=0$  setzt, so geht sie in den mathematischen Ausdruck über, für alle Erscheinungen, die verschieden dicke, gleich orientirte Krystallplatten zwischen parallelen Nicolén geben. Wir finden z. B. für  $\alpha=0$

$$I=4a^2 \cos \frac{2\pi}{\lambda} (\mu_1 - 1) D',$$

für  $\alpha=90$

$$I=4a^2 \cos \frac{2\pi}{\lambda} (\mu_2 - 1) D'.$$

Diese Gleichungen ergeben durch das ganze Spectrum Talbot'sche Streifen in gleicher Stärke, wie sie durch eine einzige einfach brechende Platte von der Dicke  $D'$  und den Brechungsquotienten  $\mu_1$ , respective  $\mu_2$  geliefert werden.

Für den Fall, dass  $\alpha=45^\circ$  wird, geht die Gleichung (7) in folgende über

$$I_1 = 2a^2 \left[ \cos \frac{2\pi}{\lambda} (\mu_1 - 1) D' + \cos \frac{2\pi}{\lambda} (\mu_2 - 1) D' + 2 \cos \frac{\pi}{\lambda} (\mu_1 - 1) D' \cos \frac{\pi}{\lambda} (\mu_2 - 1) D' \cos \frac{\pi}{\lambda} (\mu_1 - \mu_2) (2D + D') \right]. \quad (15)$$

Wenn wir diese Gleichung mit der Gleichung (8) in Beziehung bringen, so ist

$$I + I_1 = 4a^2 \left[ \cos \frac{2\pi}{\lambda} (\mu_1 - 1) D' + \cos \frac{2\pi}{\lambda} (\mu_2 - 1) D' \right],$$

wodurch sich ergibt, dass die bei gekreuzter und paralleler Stellung der Nicole auftretenden Erscheinungen nicht vollkommen complementär sind. Nur an jenen Stellen des Spectrums, für welche

$$\cos \frac{\pi}{\lambda} (\mu_1 - 1) D' = \cos \frac{\pi}{\lambda} (\mu_2 - 1) D' = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} \quad (16)$$

oder für welche nach diesem

$$\cos \frac{\pi}{\lambda} (\mu_1 - \mu_2) D' = 0$$

ist, wird sich ein solches complementäres Auftreten der Interferenz-Streifen ergeben.

Wenn wir wieder die Discussion der Gleichung (15) in ähnlicher Weise einleiten, wie jene der Gleichung (8), so erhalten wir nach Gleichung (9)

$$I_1 = 2a^2 \left( \cos \frac{2\pi}{\lambda} (\mu_1 - 1) D' + \cos \frac{2\pi}{\lambda} (\mu_2 - 1) D' \right) = 2a^2 \left( 1 + \cos \frac{2\pi}{\lambda} \left( \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} - 1 \right) D' \cos \frac{\pi}{\lambda} (\mu_1 - \mu_2) D' \right). \quad (17)$$

Da diese Gleichung mit der Gleichung (12) identisch ist, so folgt, dass an allen Stellen des Spectrums, für welche eine Platte von der Dicke  $2D + D'$  zwischen gekreuzten Nicolen Intensitätsmaxima hat, die Talbot'schen Interferenz-Streifen bei paralleler Stellung der Nicole gerade so auftreten, wie bei gekreuzter Stellung derselben. Für die durch Gleichung (10) gegebenen Stellen des Spectrums erhält man

$$I_1 = 8a^2 \cos \frac{2\pi}{\lambda} \left( \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} - 1 \right) D' \cos \frac{2\pi}{\lambda} \left( \frac{\mu_1 - \mu_2}{2} \right) D' \quad (18)$$

Aus dieser Gleichung ergeben sich die Minima erster Ordnung für

$$\left(\frac{\mu_1 + \mu_2}{2} - 1\right) D' = \frac{2n-1}{2} \lambda$$

und die dazu gehörigen Maxima für

$$\left(\frac{\mu_1 + \mu_2}{2} - 1\right) D' = n\lambda.$$

Minima zweiter Ordnung, also breite dunkle Streifen treten auf für

$$(\mu_1 - \mu_2) D' = 2n\lambda$$

und die entsprechenden Maxima zweiter Ordnung für

$$(\mu_1 - \mu_2) D' = (2n-1)\lambda.$$

Vergleicht man das Auftreten dieser dunklen Streifen mit jenen an denselben Stellen des Spectrums bei gekreuzten Nicolen auftretenden, so findet man, dass die Maxima und Minima, sowohl erster als zweiter Ordnung um ihre halbe Distanz verschoben erscheinen. Im allgemeinen deutet eine solche Verschiebung eine complementäre Erscheinung an. Hier ist dies jedoch nur in einigen speciellen Fällen richtig, wie sich leicht ergibt, wenn man nicht nur die relativen Werthe der Maxima in Betracht zieht, sondern wenn man auch die absoluten Werthe derselben berücksichtigt. Bildet man nämlich nach den Gleichungen (12) und (18)  $I + I_1$ , so kann diese Summe nur dann  $4a^2$  werden, die Erscheinungen also nur dann complementär auftreten, wenn die schon in (16) gegebenen speciellen Bedingungen erfüllt sind.

Ein ähnliches Verhältniss zeigt sich auch für jene Stellen des Spectrums, welche durch die Gleichung (11) bestimmt sind. Unter dieser Voraussetzung geht die Gleichung (15) über in folgende:

$$(19) \quad I_1 = 8a^2 \sin \frac{2\pi}{\lambda} \left( \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} - 1 \right) D' \sin \frac{2\pi}{\lambda} (\mu_1 - \mu_2) D'.$$

Da diese Gleichung mit jener (13) identisch ist, so werden Maxima und Minima in derselben Weise zu bestimmen sein, wie sie dort gefunden wurden. Im Vergleiche mit (14), welche das

Auftreten der Interferenz-Streifen für dieselben Stellen bei gekreuzten Nicolen liefert, ergibt sich auch hier wieder eine Verschiebung der Interferenz-Streifen der ersten und zweiten Ordnung um ihre halbe Distanz. Aber auch hier wird diese Verschiebung nur dann eine complementäre Erscheinung andeuten, wenn die durch die Gleichung (16) gestellten Bedingungen eintreten.

Zum Schlusse wollen wir die Erscheinung betrachten, wie sie sich unter Anwendung von unpolarisirtem Lichte ergibt. Wenn wir wieder annehmen, dass unpolarisirtes Licht aus linearpolarisirtem dadurch entsteht, dass in diesem die Schwingungsrichtung sich proportional der Zeit ändert, dass aber diese Änderungen nur verhältnissmässig langsam eintreten, so dass die Schwingungsrichtung für die zum Durchlaufen der grössten Plattendicke nothwendige Zeit als constant angesehen werden kann, so können wir uns zu unserer Untersuchung der Gleichungen (5) und (6) bedienen. Die Intensitäten der beiden Strahlen während der sehr kurzen Zeit  $dt$ , während welcher die Schwingungsrichtung des unpolarisirten Lichtes mit einer beliebig angenommenen Linie, etwa eine Elasticitätsaxe des Krystalles, den Winkel  $\alpha$  bildet, ist

$$dI_0 = 4a^2 \cos^2 \alpha \cos \frac{2\pi}{\lambda} (\mu_1 - 1) D' dt$$

$$dI'_0 = 4a^2 \sin^2 \alpha \cos \frac{2\pi}{\lambda} (\mu_2 - 1) D' dt.$$

Die während der Zeit  $dt$  entwickelte Gesamtintensität ist also

$$dI = 4a^2 \left( \cos^2 \alpha \cos \frac{2\pi}{\lambda} (\mu_1 - 1) D' dt + \sin^2 \alpha \cos \frac{2\pi}{\lambda} (\mu_2 - 1) D' dt \right).$$

Bezeichnen wir mit  $\tau$  die Zeit einer Undulation, so erhalten wir für die während derselben auftretende Intensität

$$I = 4a^2 \left[ \cos \frac{2\pi}{\lambda} (\mu_1 - 1) D' \int_0^\tau \cos^2 \alpha dt + \cos \frac{2\pi}{\lambda} (\mu_2 - 1) D' \int_0^\tau \sin^2 \alpha dt \right]$$

und da

$$\alpha = \frac{2\pi t}{\tau}$$

ist, so erhalten wir schliesslich nach ausgeführter Integration

$$(20) \quad I = 2a^2\tau \left[ \cos \frac{2\pi}{\lambda} (\mu_1 - 1) D' + \cos \frac{2\pi}{\lambda} (\mu_2 - 1) D' \right].$$

Diese Gleichung lehrt, dass hier, wo zwei verschieden dicke, aber gleich orientirte Krystallplatten zur Hervorrufung der Talbot'schen Streifen verwendet werden, die Erscheinung genau so auftritt, wie bei Anwendung nur einer einzigen Krystallplatte, deren Dicke  $D'$  gleich ist der Differenz der beiden Plattendicken, indem die angegebene Gleichung die Intensität proportional liefert einer schon a. a. O. abgeleiteten.

Wir haben bisher nur jene Fälle in Betracht gezogen, bei welchen die verschieden dicken Platten gleich orientirt waren, so dass die Schwingungsrichtungen der gleich schnell durch die Platten sich bewegenden Strahlen parallel waren. Es sind aber auch jene Fälle bemerkenswerth, bei welchen die verschieden dicken Krystallplättchen so gestellt sind, dass die bezeichneten Schwingungsrichtungen auf einander senkrecht stehen. In diesem Falle brauchen wir nur in den Gleichungen (4),  $\mu_1$  und  $\mu_2$  zu vertauschen, so dass

$$(21) \quad \begin{aligned} y_2 &= a \cos \alpha \sin \frac{2\pi}{\lambda} (vt - \mu_2 D - D') \\ z_2 &= a \sin \alpha \sin \frac{2\pi}{\lambda} (vt - \mu_1 D - D') \end{aligned}$$

wird, während die Gleichungen (3) un geändert bleiben.

Die beiden Strahlen  $y_1$  und  $y_2$ , sowie jene  $z_1$  und  $z_2$  liefern je einen neuen Strahl und diese beiden sind durch folgende Gleichungen gegeben:

$$(22) \quad Y = 2a \cos \alpha \cos \frac{\pi}{\lambda} \left( (\mu_1 - \mu_2) D + (\mu_2 - 1) D' \right) \sin \frac{2\pi}{\lambda} \left( vt - \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} D - \frac{\mu_1 - 1}{2} D' \right)$$

$$(23) \quad Z = 2a \sin \alpha \cos \frac{\pi}{\lambda} \left( (\mu_1 - \mu_2) D - (\mu_1 - 1) D' \right) \sin \frac{2\pi}{\lambda} \left( vt - \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} D - \frac{\mu_2 - 1}{2} D' \right).$$

Bilden wir von diesen Werthen die zur Schwingungsrichtung des Analysers parallelen Componenten, so geben diese durch ihre Zusammensetzung den schliesslich aus dem Analyser austretenden Strahl

$$X = Y \cos (\alpha - \psi) + Z \sin (\alpha - \psi),$$

dessen Intensität nach den obigen Gleichungen sich in folgender Weise ergibt

$$I=4a^2 \left[ \cos^2 \alpha \cos^2 (\alpha - \psi) \cos^2 \frac{2\pi}{\lambda} A + \sin^2 \alpha \sin^2 (\alpha - \psi) \cos^2 \frac{2\pi}{\lambda} A' + \right. \quad (24)$$

$$\left. + 2 \cos \alpha \sin \alpha \cos (\alpha - \psi) \sin (\alpha - \psi) \cos \frac{\pi}{\lambda} A \cos \frac{\pi}{\lambda} A' \cos \frac{\pi}{\lambda} (\mu_1 - \mu_2) D' \right]$$

wobei der Kürze halber gesetzt wurde

$$A = (\mu_1 - \mu_2) D + (\mu_1 - 1) D'$$

$$A' = (\mu_1 - \mu_2) D - (\mu_2 - 1) D'.$$

Relativ am einfachsten gestalten sich auch hier die Verhältnisse (abgesehen von der einfachsten Bedingung  $\alpha = 0$  und  $\alpha = 90^\circ$ ), wenn  $\alpha = 45^\circ$  und wenn gleichzeitig  $\psi = 90^\circ$  oder  $= 0$  ist.

In allen Fällen aber erweist es sich wieder als nothwendig, dass die dickere Krystallplatte mehr gegen das rothe Ende des Spectrums liegen muss, soll das Auftreten der Talbot'schen Streifen möglich sein. Aber es ist hier noch auf einen anderen Umstand aufmerksam zu machen. In den zusammengehörigen Gleichungen (3) und (21) nehmen die beiden Strahlen  $y_1$  und  $y_2$  jedenfalls Theil an der Bildung der Talbot'schen Streifen, da  $\mu_1 > \mu_2$  angenommen wurde. Nicht so ist es jedoch im allgemeinen mit den Strahlen  $z_1$  und  $z_2$ ; diese geben nur Anlass zur Bildung der Talbot'schen Streifen und wirken dabei mit, wenn

$$\mu_2 D + \mu_2 D' > \mu_1 D + D', \quad (25)$$

wahrscheinlich aus demselben Grunde, wegen welchem die gewöhnlichen Talbot'schen Streifen nur auftreten, wenn das dünne Plättchen von der rothen Seite des Spectrums her eingeschoben wird. Wird die oben aufgestellte Bedingungsgleichung nicht erfüllt, so treten die durch  $y_1$  und  $y_2$  hervorgerufenen dunklen Streifen nur sehr schwach auf, da sie von den nicht interferirenden Strahlen  $z_1$  und  $z_2$  im Spectrum überdeckt sind.

Bei der weiteren Betrachtung wollen wir stets  $\alpha = 45^\circ$  voraussetzen und vorerst den Fall betrachten, dass  $\psi = 90^\circ$ , dass also wieder Polariseur und Analyseur sich in gekreuzter Stellung befinden. Unter diesen Voraussetzungen nimmt unsere allgemeine Gleichung (24) folgende einfache Form an:

$$(26) \quad I = 2\alpha^2 \left[ \sin \frac{2\pi}{\lambda} (\mu_1 - 1) D' + \sin \frac{2\pi}{\lambda} (\mu_2 - 1) D' - 2 \sin \frac{\pi}{\lambda} (\mu_1 - 1) D' \sin \frac{\pi}{\lambda} (\mu_2 - 1) D' \cos \frac{\pi}{\lambda} (\mu_1 - \mu_2) (2D + D') \right].$$

Wenn wir diese Gleichung in derselben Weise analysiren wie die ihr ähnlichen (8) und (15), so erhalten wir an den durch (9) bestimmten Stellen

$$(27) \quad I = 2\alpha^2 \left( \sin \frac{2\pi}{\lambda} (\mu_1 - 1) D' + \sin \frac{2\pi}{\lambda} (\mu_2 - 1) D' \right).$$

Ziehen wir diese Relation in Vergleich mit der Gleichung (13), so ergibt sich hier die Interferenz-Erscheinung vollkommen complementär mit jener, die an eben diesen Stellen auftritt, unter Anwendung einer einzigen Krystallplatte von der Dicke  $D'$ , bei unpolarisirtem Licht. Wir haben also auch hier wieder dunkle Streifen in normaler oder verschobener Stellung oder streifenfreie, den Übergang zwischen diesen vermittelnde Stellen. Es sind hier die streifenfreien Stellen an demselben Orte wie dort, da ihnen in beiden Fällen nur eine mittlere, das Maximum nicht erreichende Intensität zukommt.

Für diejenigen Stellen des Spectrums, welche der Gleichung (10) entsprechen, erhalten wir aus obiger Gleichung (26)

$$(28) \quad \begin{aligned} I &= 2\alpha^2 \left( \sin \frac{\pi}{\lambda} (\mu_1 - 1) D' - \sin \frac{\pi}{\lambda} (\mu_1 - 1) D' \right)^2 \\ &= 8\alpha^2 \cos \frac{2\pi}{\lambda} \left( \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} - 1 \right) D' \sin \frac{2\pi}{\lambda} \left( \frac{\mu_1 - \mu_2}{2} \right) D'. \end{aligned}$$

Wir entnehmen aus dieser Gleichung wieder das Auftreten der Maxima und Minima erster und zweiter Ordnung und in Vergleichung mit Gleichung (13) finden wir, dass hier bei gekreuzten Nicolen und gekreuzten Elasticitätsachsen der Krystallplatten die Maxima und Minima erster Ordnung um ihre halbe Distanz verschoben erscheinen gegen ihr Auftreten bei gekreuzten Nicolen und parallelen Elasticitätsachsen. Wir haben hier nämlich Minima und Maxima erster Ordnung für

$$\left(\frac{\mu_1 + \mu_2}{2} - 1\right) D' = \frac{2n-1}{2} \lambda \text{ und}$$

$$\left(\frac{\mu_1 + \mu_2}{2} - 1\right) D' = n\lambda,$$

während Minima und Maxima zweiter Ordnung auftreten für

$$(\mu_1 - \mu_2) D' = 2n\lambda \text{ und}$$

$$(\mu_1 - \mu_2) D' = (2n-1)\lambda.$$

Auf ganz ähnliche Weise gestalten sich die Verhältnisse für die durch die Gleichung (11) bestimmten Stellen des Spectrums. Für diese wird

$$I = 2a^2 \left( \sin \frac{\pi}{\lambda} (\mu_1 - 1) D' + \sin \frac{\pi}{\lambda} (\mu_2 - 1) D' \right)^2$$

$$= 8a^2 \sin^2 \frac{\pi}{\lambda} \left[ \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} - 1 \right] D' \cdot \cos^2 \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\mu_1 - \mu_2}{2} D'. \quad (29)$$

Diese Gleichung steht in derselben Beziehung zur Gleichung (14), wie jene (28) zu (13). Auch hier erscheinen die einzelnen Talbot'schen Streifen, die Minima erster Ordnung, um die halbe Distanz verschoben gegen ihr Auftreten bei gekreuzten Nicolen und parallelen Elasticitätsaxen, während die Minima und Maxima zweiter Ordnung hier wie dort gleich auftreten.

An denjenigen Stellen des Spectrums, die nicht durch die Gleichungen (9), (10) und (11) bestimmt sind, wird nun auch hier, wie dies bei parallelen Elasticitätsaxen der Fall war, ein Übergang der verschieden gestellten Talbot'schen Streifen eintreten, wodurch wieder neue streifenfreie Stellen entstehen, die in verschiedenen Theilen des Spectrums bald weiter, bald näher aneinander liegen, was selbst wieder wesentlich von dem Verhältniss der Plattendicken  $2D + D'$  und  $D'$  abhängt.

Die allgemeine Gleichung (26) geht für den Fall, dass  $D = 0$  wird, über in

$$I = 2a^2 \sin^2 \frac{2\pi}{\lambda} (\mu_1 - \mu_2) D' \quad (30)$$

und es tritt in diesem Falle die Erscheinung gerade so auf, wie sie durch eine einzige Krystallplatte von der Dicke  $D'$ , deren

Elasticitätsaxen-Winkel von  $45^\circ$  mit den gekreuzten Nicolen bildet, auftritt, indem selbstverständlich die neben der Platte vorbeigehenden Strahlen durch den Analyseur nicht hindurchgehen. Nimmt man aber  $D'=0$ , so wird

$$I=0,$$

d. h. bei zwei gleich dicken Platten soll gar kein Licht durch den Analyseur austreten. Das ist nun im Experimente nicht der Fall, wenigstens ist mir dasselbe bis nun nicht gelungen. Es ist im Gegentheile das Gesichtsfeld hell, mit schwachen Interferenz-Streifen, die gerade so auftreten, wie die durch die Gleichung (30) gegebenen. Hier tritt nämlich der Umstand ein, auf welchen schon oben aufmerksam gemacht wurde, dass nämlich nur der durch die gegen das rothe Ende des Spectrums liegende Platte langsamer sich fortpflanzende Strahl mit dem schnelleren der anderen Platte interferirt, während die übrigen beiden Strahlen das Gesichtsfeld gleichmässig erhellen. Es ist mir, wie schon oben bemerkt, auch hier nicht gelungen, im Experimente die durch die Formel gegebene Erscheinung zu erhalten. Ich glaube auch, dass die gegebene Erklärung die richtige ist, da sie in den gewöhnlichen Talbot'schen Streifen ein bewährtes Analogon hat, wenn auch andererseits zu berücksichtigen ist, dass es gewiss nicht leicht ist, die eine Bedingung, dass durch beide Platten gleichviel Licht geht, strenge einzuhalten. Aber ich bin überzeugt, dass es mir bei den vielen Versuchen, die ich in dieser Richtung gemacht habe, einmal wenigstens für kurze Zeit möglich gewesen ist, diese Bedingung zu erfüllen, ohne ein anderes Resultat bezüglich der Helligkeit des Gesichtsfeldes bekommen zu haben.

Der zweite Fall, der bei senkrecht zu einander orientirten Krystallplatten einfache Resultate liefert, tritt ein, wenn  $\psi=0$  wird, d. h., wenn Analyseur und Polariseur in paralleler Stellung sind. Unter dieser Voraussetzung (sowie der schon oben angeführten  $\alpha=45^\circ$ ) nimmt die Gleichung (24) folgende Form an:

$$(31) \quad I=2a^2 \left\{ \cos \frac{2\pi}{\lambda} (\mu_1-1) D' + \cos \frac{2\pi}{\lambda} (\mu_2-1) D' + \right. \\ \left. + 2 \cos \frac{\pi}{\lambda} (\mu_1-1) D' \cos \frac{\pi}{\lambda} (\mu_2-1) D' \cos \frac{\pi}{\lambda} (\mu_1-\mu_2) (2D+D') \right\}.$$

Nachdem diese Gleichung aber vollkommen identisch ist mit jener (15), folgt, dass hier bei parallelen Nicolen und gekreuzten Elasticitätsaxen die Erscheinung genau so eintritt, wie bei parallelen Nicolen und parallelen Elasticitätsaxen.

Zum Schlusse wollen wir nun auch derjenigen Interferenz-Erscheinung Erwähnung thun, die sich zeigt, wenn man zwei verschieden dicke Krystallplatten, die optisch senkrecht gegen einander orientirt sind, unter Anwendung von unpolarisirtem Licht zur Erzeugung der Talbot'schen Streifen benützte.

Nehmen wir an, dass zur Zeit  $t$  das auf die Krystallplatte fallende Licht mit der einen Schwingungsrichtung oder Elasticitätsaxe der Krystallplatten einen Winkel  $\alpha$  bildet, so liefern die beiden durch die Gleichungen (22) und (23) gegebenen Strahlen während des Zeitelementes  $dt$  folgende Intensitäten:

$$dI_0 = 4a^2 \cos^2 \alpha \cos \frac{2\pi}{\lambda} [(\mu_1 - \mu_2)D + (\mu_1 - 1)D'] dt$$

$$dI_0 = 4a^2 \sin^2 \alpha \cos \frac{2\pi}{\lambda} [(\mu_1 - \mu_2)D - (\mu_2 - 1)D'] dt.$$

Diese beiden, senkrecht zu einander schwingenden Strahlen liefern also während der Zeit  $dt$  die Gesamtintensität

$$dI = 4a^2 \left( \cos \frac{2\pi}{\lambda} [(\mu_1 - \mu_2)D + (\mu_2 - 1)D'] \cos^2 \alpha dt + \cos \frac{2\pi}{\lambda} [(\mu_1 - \mu_2)D - (\mu_2 - 1)D'] \sin^2 \alpha dt \right).$$

Die während einer Schwingung, d. i. in der Zeit  $\tau$  entwickelte Intensität ist sonach, da wieder  $\alpha = \frac{2\pi t}{\tau}$

$$I = 4a^2 \left( \cos \frac{2\pi}{\lambda} [(\mu_1 - \mu_2)D + (\mu_1 - 1)D'] \int_0^\tau \cos^2 \frac{2\pi t}{\tau} dt + \cos \frac{2\pi}{\lambda} [(\mu_1 - \mu_2)D - (\mu_2 - 1)D'] \int_0^\tau \sin^2 \frac{2\pi t}{\tau} dt \right)$$

oder nach ausgeführter Integration

$$I=2a^2\tau\left[\cos\frac{2\pi}{\lambda}\left[(\mu_1-\mu_2)D+(\mu_1-1)D'\right]+\right. \\ \left.+\cos\frac{2\pi}{\lambda}\left[(\mu_1-\mu_2)D-(\mu_2-1)D'\right]\right],$$

welcher Werth sich in folgende bequemere Form bringen lässt:

$$(32) \quad I=2a^2\tau\left[1+\cos\frac{2\pi}{\lambda}\left[\frac{\mu_1+\mu_2}{2}-1\right]D'\cos\frac{\pi}{\lambda}(\mu_1-\mu_2)(2D+D')\right].$$

Vergleichen wir dieses Resultat mit den durch die Gleichung (20) gegebenen, so finden wir eine vollständige Übereinstimmung, wenn wir  $D'$  im zweiten Faktor durch  $2D+D'$  ersetzen. Demzufolge treten unter den angenommenen Umständen die Talbot'schen Interferenz-Streifen an jenen Stellen des Spectrums vollkommen scharf auf, an welchen eine Krystallplatte von der Dicke  $2D+D'$  zwischen gekreuzten Nicolen dunkle Streifen zeigt. An jenen Stellen, wo diesen dunklen Streifen ein Gangunterschied von einer geraden Anzahl von Wellenlängen entspricht, treten die Talbot'schen Streifen gerade so auf, wie bei einer einfach brechenden Platte von der Dicke  $D'$  und den mittleren Brechungsquotienten  $\frac{\mu_1+\mu_2}{2}$ . An jenen dunklen Stellen aber, wo ein Gangunterschied von einer ungeraden Anzahl von Wellenlängen eintritt, erscheinen die Talbot'schen Streifen in der verschobenen Stellung. Dort wo zwischen gekreuzten Nicolen eine Krystallplatte von der Dicke  $2D+D'$  helle Maxima besitzt, sind hier scheinbar streifenfreie Stellen, die wieder den Übergang von der normalen in die verschobene Stellung der Streifen bedingen.

Ein einfacher Fall tritt ein, wenn hier  $D'=0$  wird, wenn also zwei gleich dicke Krystallplatten benützt werden. Es wird sodann

$$I=4a^2\tau\cos\frac{2\pi}{\lambda}(\mu_1-\mu_2)D,$$

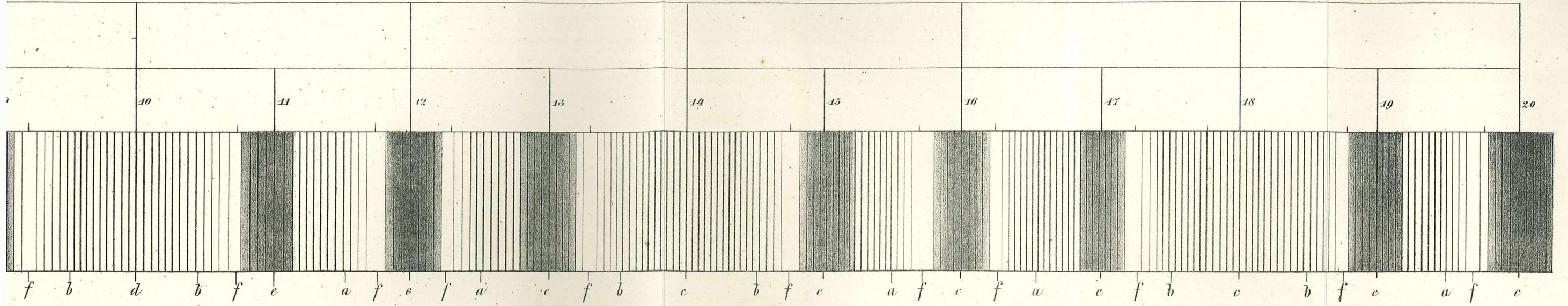
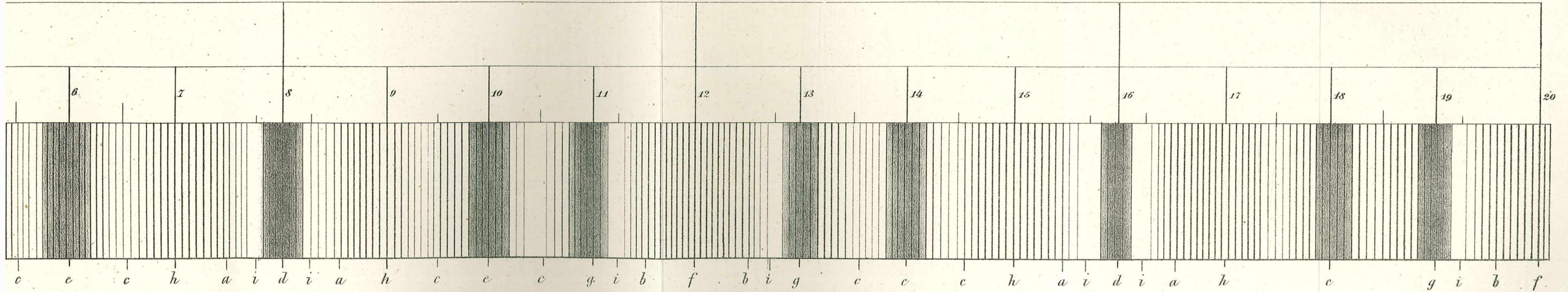


Fig. 2.





d. h. ez müsste die Erscheinung so auftreten, wie sie eine einzige Krystallplatte von der Dicke  $D$  zwischen parallelen Nicolen zeigt. Diese Erscheinung tritt aber aus den oben schon mehrfach erwähnten Gründen nicht auf. Die zwei nicht zur Interferenz kommenden Strahlen überdecken die durch Interferenz der anderen beiden Strahlen entstehenden Streifen, so dass diese nicht gut sichtbar werden können.

---

## Über eine einfache Vorrichtung zur Herstellung complementärer Farbenpaare mit Brücke's Schistoscop.

Von **L. Ditscheiner.**

(Vorgelegt in der Sitzung am 9. März 1871.)

In seinem trefflichen Werke „Physiologie der Farben“<sup>1</sup> hat Brücke einen sinnreichen und sehr bequemen Apparat zur Herstellung complementärer Farbenpaare beschrieben und Schistoscop genannt. Im Wesentlichen besteht derselbe aus einem Nicol'schen Prisma und einer Haidinger'schen dichroscopischen Loupe, zwischen welche eine dünne doppeltbrechende Krystallplatte, am besten Glimmer oder Gyps, eingeschoben wird. Befinden sich der polarisirende Nicol und die analysirende dichroscopische Loupe so gestellt, dass die Polarisationssebene des aus dem Nicole austretenden Strahles zur Polarisationssebene des einen der durch die Loupe gehenden Strahlen parallel, zu jener des zweiten aber senkrecht steht, hat man ferner die Krystallplatte so eingeschoben, dass die Polarisationssebenen der sie senkrecht durchziehenden Strahlen mit jenen des Nicols und der Loupe Winkel von  $45^\circ$  bilden, so erscheinen die beiden im Gesichtsfelde der Loupe auftretenden Felder, wenn nur die Krystallplatte dünn genug ist, verschieden, aber vollkommen complementär gefärbt. Die Farben, welche die beiden Felder zeigen, hängen ab von der Dicke  $D$  der Krystallplatte und von den Brechungsquotienten  $\mu_1$  und  $\mu_2$  der sie durchziehenden, senkrecht zu einander polarisirten Strahlen. Wenn wir eine bestimmte Farbe des Spectrums, der etwa die Wellenlänge  $\lambda$  in Luft zukommt, in Betracht ziehen, so liefert eine einfache Rechnung als Intensität für die aus der Loupe austretenden in je einem Felde zu beobachtenden Strahlen

<sup>1</sup> Leipzig. S. Hirzel. 1866. pag. 36.

$$I_o = i^2 \sin \frac{2\pi}{\lambda} (\mu_1 - \mu_2) D \text{ und}$$

$$I_e = i^2 \cos \frac{2\pi}{\lambda} (\mu_1 - \mu_2) D.$$

Es ist daraus ersichtlich, dass bei Anwendung von weissem Lichte in den beiden Feldern nicht alle Strahlen des Spectrums gleichmässig vertreten sind, sondern dass gewisse gänzlich fehlen, andere aber mit ihrer vollen Intensität auftreten, aber immer so, dass die in einem Felde der Loupe fehlenden Strahlen im andern Felde mit dem Maximum der Intensität vorhanden sind, wie dies unmittelbar durch die Gleichung

$$I_o + I_e = i^2$$

gegeben wird.

Es ist ebenso erklärlich, dass man es im Schistoscope mit Farben zu thun hat, die einfach dadurch entstanden sind, dass man aus dem weissen Lichte gewisse Farben mehr oder weniger herausgenommen hat, wodurch der übrig bleibende Rest wieder vereint eine ganz bestimmte Mischfarbe zeigt. Es folgt aber auch durch Betrachtung der oben aufgestellten Gleichungen, dass die aus dem weissen Lichte herausgenommenen Farben unter einander in einem ganz bestimmten Zusammenhange stehen, und dass es nicht in der Hand des Experimentators liegt, durch Anwendung verschieden dicker Krystallplättchen beliebige Farben aus dem Spectrum herauszunehmen und so beliebige Farbenpaare im Schistoscope sich herzustellen, so dass man auch nicht erwarten kann, jede beliebige Farbe in einem der Felder finden zu können, wie dies auch bereits von Brücke angegeben wurde. Wählt man z. B. als Object eine parallel zur optischen Axe geschnittene Quarzplatte von der Dicke 0·22913 Millimeter, so erhält man in einem der beiden Felder eine Mischfarbe, die dadurch charakterisirt ist, dass sie bei der Analyse mit dem Spectralapparate dunkle Streifen, also fehlende Farben, zeigen wird, an Stellen die im Kirchhoff'schen Spectrum bezeichnet sind durch die Zahlen

**B** 593

**E** 1523

**G** 2855

und deren Wellenlängen sind

687·41

527·02

430·78.



bedingt werden, wenn man es mit verschiedenen Krystallen zu thun hat, bei welchen ein verschiedenes Verhältniss in der Dispersion der beiden sie durchziehenden Strahlen eintritt. Man kann für ein bestimmtes im Schistoscop auf diese Weise erhaltenes Farbenpaar einen symbolischen Ausdruck, etwa in folgender Form geben

$$I_o = \Sigma i^2 \sin \frac{2\pi}{\lambda} (\mu_1 - \mu_2) D$$

$$I_e = \Sigma i^2 \cos \frac{2\pi}{\lambda} (\mu_1 - \mu_2) D,$$

wobei die Summirung ausgedehnt werden muss über alle Farben, die in dem durch das Schistoscop zerlegten Lichte enthalten waren. Hat man weisses Licht, so muss eben die Summirung über alle sichtbaren Farben vom äussersten Roth bis zum äussersten Violet ausgedehnt werden.

Dadurch, dass man mit dem Schistoscope nicht zu jeder beliebigen Farbe das Complement herstellen kann, ist das Instrument, so schätzenswerthe Leistungen durch dasselbe auch naturgemäss erhalten werden können, doch namentlich in der Praxis, für die es eben bestimmt ist, auf einen engeren Kreis angewiesen, wenn man nicht rasch alle mit demselben herstellbare Farbenpaare sich vor Augen führen kann. Und dies scheint mir in der Weise, in welcher man dies bis jetzt zu leisten vermag, nicht genügend zu sein. Nach den Angaben Brücke's legt man nach und nach eine grössere Anzahl, als Objecte dienende dünne Krystallplättchen auf das Tischchen des Instrumentes, bis man in einem der beiden Felder die gegebene Farbe auftreten sieht. Wenn man auch schon früher eine grössere Anzahl von solchen Objecten sich hergestellt und in passender Ordnung zusammengestellt hat, so vergeht doch, bei eben einer grösseren Zahl von Objecten, eine verhältnissmässig lange Zeit mit dem Einlegen, Richten und Herausnehmen der Objectplättchen, die umsomehr als verloren erscheint, wenn man, was ja sehr möglich ist, die betreffende Farbe überhaupt im Schistoscope nicht finden kann. Es schien mir darin ein Grund zu liegen, dass von Seite der Praktiker diesem Instrumente nicht diejenige Bedeutung beigelegt werden könnte, die es unstreitig hat. Es

war in mir deshalb, kurze Zeit nachdem ich Gelegenheit hatte mit dem Schistoscope zu arbeiten, der Wunsch rege geworden, bei der Benützung desselben die vielen Objectplättchen durch ein oder zwei solche zu ersetzen, denen man auf irgend eine Weise den einfallenden Strahlen gegenüber eine verschiedene Dicke geben kann.

Es lag zunächst nahe, eine senkrecht zur optischen Axe geschnittene Platte einer optisch einaxigen Substanz zu nehmen. Dadurch, dass man eine solche Platte zwischen Nicol und dichroskopische Loupe einschiebt und um eine horizontale, d. i. zur Schrichtung senkrechte Axe dreht, welche letztere noch mit den Polarisations Ebenen des Nicols und der Loupe Winkel von  $45^\circ$  bildet, ist man im Stande, den durch die Platte gehenden ordentlichen und ausserordentlichen Strahlen beliebige Gangunterschiede zu ertheilen und so verschiedene complementäre Farbenpaare zu erhalten. So liefert z. B. eine zur optischen Axe senkrecht geschnittene Kalkspathplatte von der Dicke gleich 0.00574 Millimeter bei der angedeuteten Drehung um  $45^\circ$  in dem einen Felde des Schistoscopes eine Farbe, die durch den Spectralapparat analysirt, bei den Kirchhoff'schen Linien

$$B. \quad 593 \qquad 1570 \qquad 2627,$$

denen eine Wellenlänge von

$$687.41 \qquad 523.40 \qquad 444.25$$

entspricht, dunkle Interferenz-Streifen zeigt. Der Gangunterschied der beiden Strahlen ist für die Anwendung einer solchen Platte

$$\Delta = n\lambda = D \left( \frac{\mu_o}{\mu_e} \sqrt{\mu_e^2 - \sin^2 \alpha} - \sqrt{\mu_o^2 - \sin^2 \alpha} \right),$$

wobei  $\alpha$  denjenigen Winkel bedeutet, um welchen die Krystallplatte aus ihrer zur Schrichtung normalen Lage gedreht wurde, während  $\mu_o$  und  $\mu_e$  die Brechungsquotienten des ordentlichen und ausserordentlichen Strahles in Kalkspath sind. Die Farben für diesen Fall sind dann durch folgende Symbole darzustellen:

$$I_o = \Sigma i^2 \sin \frac{2\pi}{\lambda} \left( \frac{\mu_o}{\mu_e} \sqrt{\mu_e^2 - \sin^2 \alpha} - \sqrt{\mu_o^2 - \sin^2 \alpha} \right)$$

$$I_e = \Sigma i^2 \cos \frac{2\pi}{\lambda} \left( \frac{\mu_o}{\mu_e} \sqrt{\mu_e^2 - \sin^2 \alpha} - \sqrt{\mu_o^2 - \sin^2 \alpha} \right).$$

Schon aus diesen Symbolen ergibt sich, dass die auf solche Weise dargestellten Farben mit jenen, die man durch senkrecht auf die Schrichtung eingeschobene Krystallplättchen herstellen kann, nicht vollkommen identisch sind. Aber die oben gegebenen Zahlen liefern auch hier wieder den Beweis, dass die Verschiedenheit der Farbe eine nicht sehr bedeutende sein kann. Solche senkrecht zur optischen Axe geschnittene Platten könnten jedoch nur aus einer einzigen Substanz, dem isländischen Doppelspathe praktisch angewendet werden, da der Quarz, wegen der durch ihn bewirkten Drehung der Polarisationssebene, und andere Substanzen aus anderen Gründen nicht angewendet werden können. Dieser Doppelspath bietet aber für eine solche Anwendung insofern Schwierigkeiten, als die Platten wegen des grossen Unterschiedes von  $\mu_e$  und  $\mu_o$  sehr dünn sein müssten. Den einen wichtigen Vortheil würden aber solche Kalkspathplatten gegen andere unten zu besprechende Krystallplatten haben, dass man mit ihnen alle Gangunterschiede von 0, bei  $\alpha=0$ , bis zu jenen leicht erhalten könnte, bei welchen schon beide Felder des Schistoscopes vollkommen weiss erscheinen.

Ausser Kalkspath eignet sich noch besonders optisch einaxiger Glimmer, der durch natürliche Spaltung leicht in gehörig dünnen Plättchen erhalten werden kann. Da aber einaxiger Glimmer in farblosen Varietäten höchst selten oder fast gar nicht gefunden wird, so wird auch seine Anwendung erschwert, da die ihm eigenthümliche Farbe auf die Farbe der Felder der dichroskopischen Loupe einen störenden Einfluss üben muss.

Eine andere Methode, sich im Schistoscope durch Drehen einer Platte nach und nach rasch viele complementäre Farbenpaare vor Augen zu führen, besteht in der Anwendung zweier gleich dicker, parallel zur optischen Axe geschnittener Quarzplatten, welche so über einander gestellt sind, dass ihre optischen Axen zu einander senkrecht stehen. Schiebt man diese Combination so zwischen den Nicol und die Loupe ein, dass ihre optischen Axen Winkel von  $45^\circ$  mit den Polarisationssebenen der polarisirenden Vorrichtungen (Nicol und Loupe) bilden, so erhält man bei paralleler, zur Schrichtung senkrechter Lage der Quarzplatten das eine Feld der Loupe vollkommen dunkel, das zweite aber hell und farblos. Die Wirkungen beider Platten heben sich in

diesem Falle vollkommen auf, sie verhalten sich wie eine einfach brechende Platte oder so als ob sie gar nicht vorhanden wären. Dreht man aber die eine Platte um eine in ihr liegende, zur optischen Axe parallele oder auf ihr senkrecht stehende Axe, so sieht man die Felder sich verschieden färben und bei fortgesetztem Drehen einen raschen aber continuirlichen Wechsel der Farben. Dadurch nämlich, dass man die eine der Quarzplatten dreht, verändert man den Gangunterschied des ordentlichen und ausserordentlichen Strahles immer mehr und bringt so eine Erscheinung hervor, wie sie sich ähnlich beim Einschieben immer dickerer Glimmer- oder Gypsplättchen zeigt. Bezeichnet man nämlich mit  $\alpha$  den Winkel, um welchen man die eine Quarzplatte aus ihrer normalen Lage gebracht, mit  $D$  die Dicke jeder der beiden Quarzplatten, endlich mit  $\mu_o$  und  $\mu_e$  die Hauptbrechungsquotienten des Quarzes für Licht von der Wellenlänge  $\lambda$  in Luft, so erhält man als Gangunterschied der aus der Quarzcombination austretenden Strahlen

$$\Delta = n\lambda = D(\mu_e - \mu_o) \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{\mu_o^2}} \right),$$

wenn die Drehung stattgefunden hat um eine zur optischen Axe der drehbaren Quarzplatte senkrechte Linie und

$$\Delta = n\lambda = D(\mu_e - \mu_o - \sqrt{\mu_e^2 - \sin^2 \alpha} + \sqrt{\mu_o^2 - \sin^2 \alpha}),$$

wenn die optische Axe parallel zur Drehungsaxe ist.

Die auf diese Weise erhaltenen Farben sind durch folgende Symbole zu geben:

$$I_o = \Sigma i^2 \sin \frac{2\pi}{\lambda} (\mu_e - \mu_o) \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{\mu_o^2}} \right)$$

$$I_e = \Sigma i^2 \cos \frac{2\pi}{\lambda} (\mu_e - \mu_o) \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{\mu_o^2}} \right)$$

im ersten und

$$I_o = \Sigma i^2 \sin \frac{2\pi}{\lambda} (\mu_e - \mu_o - \sqrt{\mu_e^2 - \sin^2 \alpha} + \sqrt{\mu_o^2 - \sin^2 \alpha})$$

$$I_e = \Sigma i^2 \cos \frac{2\pi}{\lambda} (\mu_e - \mu_o - \sqrt{\mu_e^2 - \sin^2 \alpha} + \sqrt{\mu_o^2 - \sin^2 \alpha})$$

im zweiten Falle.

Es ist, wie man sich leicht durch einen Versuch überzeugen kann, ziemlich gleichgiltig, ob man die eine oder die andere Drehung einleitet. Im ersteren Falle wird man nur eine etwas grössere Drehung vornehmen müssen als im zweiten, wenn man ähnliche Farbenpaare erhalten will. Man wird aber auch aus den obigen Gleichungen erkennen, dass die durch diese verschiedenen Drehungen der Quarzplatte erhaltenen Farbenpaare nicht vollkommen gleich sind, dass sie aber auch verschieden sind von den oben auf andere Weise dargestellten. Bedeutend ist aber auch hier der Unterschied nicht, wie die folgenden Zahlenresultate lehren. Wenn man nämlich zwei Quarzplatten von der Dicke  $D=2$  Millimeter in gekreuzter Stellung im Schistoscop einschiebt und man dreht die eine Platte um eine Axe senkrecht zu ihrer optischen Axe um den Winkel  $\alpha=45^{\circ}44'$ , so tritt in dem einen Felde des Schistoscopes eine Farbe auf, der im Spectralapparate dunkle Streifen entsprechen, an folgenden Stellen des Kirchhoff'schen Spectrums

*B.* 593                      1578                      *B* 1

entsprechend den Wellenlängen

687·41                      522·99                      422·97.

Die Quarzplatten eignen sich zur Herstellung solcher complementärer Farbenpaare ganz vorzüglich. Sie sind leicht mit der nöthigen Reinheit und vollkommen farblos und durchsichtig zu erhalten und sind durch ihre Härte dauernde und widerstandsfähige Theile des Apparates. Durch die Anwendung solcher Quarzplatten wird auch der ganze Apparat einfacher und für den Praktiker bequemer, da er leicht von jedem Mechaniker in geschlossener Form hergestellt werden kann, und nicht eine Verschiebung der einzelnen Theile des Apparates gegen einander nothwendig eingeführt werden muss. Bei der Zusammenstellung des Apparates bringt man die eine fixe Quarzplatte unmittelbar vor die Öffnung der dichroscopischen Loupe, während man die zweite, durch einen Schraubenkopf drehbare Platte der ersten

---

<sup>1</sup> An der von mir mit *B* bezeichneten starken Fraunhofer'schen Linie zwischen *G* und *H* in der Nähe bei *G*. Angström gibt für diese Linie in seinem Spectre normal du soleil als Wellenlänge 422·64.

möglichst nahestellt. Mit dem angedeuteten Schraubenkopfe kann auch ein Zeiger in Verbindung gebracht werden, dessen Stellung an einem Theilkreise abgelesen und fixirt werden kann, um ein einmal aufgefundenes Farbenpaar leichter wieder herstellen zu können. Es ist dies jedoch kaum nöthig, da man durch eine wiederholte Beobachtung dasselbe fast ebenso schnell wieder erreichen kann. Dieser Theil des Apparates soll, wo möglich, auch um eine zur Sehrichtung parallele Axe gedreht werden können, um leichter den Quarzplatten gegenüber den Polarisations Ebenen von Nicol und Loupe die richtige Stellung geben zu können. Diese Combination ist auch dadurch ausgezeichnet, dass sie alle Gangunterschiede von 0 bis zu jenen, für welche beide Felder des Schistoscopes schon weiss erscheinen (nach Stefan tritt dies ein, wenn mehr als zehn dunkle Streifen im Spectralapparate sich zeigen), bei einer Drehung um eine einzige Axe liefert.

Es gibt nämlich noch eine andere hierher gehörige Methode, die ich erwähnen muss, da sie sich namentlich dann empfiehlt, wenn man vornemlich sich mit Farbenpaaren zu beschäftigen hat, die durch gesättigtere Farben gebildet werden. In diesem Falle ist der Gangunterschied der senkrecht zu einander polarisirten Strahlen nicht sehr klein. Man kann sich dann einer optisch zweiaxigen Glimmerplatte bedienen, die leicht senkrecht zur ersten Mittellinie in genügend dünne Plättchen gespalten werden kann. Bringt man nämlich ein solches Plättchen so zwischen Nicol und Loupe, dass die Ebene der optischen Axen einen Winkel von  $45^\circ$  mit den Polarisations Ebenen des Nicols und der Loupe bildet, so erscheinen die beiden Felder gefärbt und man wählt ein solches Plättchen, für welches eines dieser Felder ziemlich dunkelbraun ist, während das andere bläulichweiss gefärbt ist.

Dreht man nun die Glimmerplatte um eine zur Ebene der optischen Axen parallele Linie, so stellt sich ebenfalls ein ziemlich rascher und continuirlicher Übergang von einem complementären Farbenpaare zu anderen ein. Bezeichnen wir mit  $\mu_\alpha$ ,  $\mu_\beta$  und  $\mu_\gamma$  die drei Hauptbrechungsquotienten und mit  $D$  die Dicke der Glimmerplatte, ferner mit  $\alpha$  den Winkel, welchen die Normale der gedrehten Platte mit der Sehrichtung bildet, so wird der Gangunterschied der austretenden Strahlen

$$\Delta = n\lambda = \left( \frac{\mu_\beta}{\mu_\gamma} \sqrt{\mu_\gamma^2 - \sin^2 \alpha} - \sqrt{\mu_\alpha^2 - \sin^2 \alpha} \right)$$

und die den Farben zukommenden Symbole

$$I_o = \Sigma i^2 \sin \frac{2\pi}{\lambda} \left( \frac{\mu_\beta}{\mu_\gamma} \sqrt{\mu_\gamma^2 - \sin^2 \alpha} - \sqrt{\mu_\alpha^2 - \sin^2 \alpha} \right) D.$$

$$I_e = \Sigma i^2 \cos \frac{2\pi}{\lambda} \left( \frac{\mu_\beta}{\mu_\gamma} \sqrt{\mu_\gamma^2 - \sin^2 \alpha} - \sqrt{\mu_\alpha^2 - \sin^2 \alpha} \right) D.$$

Man ersieht aus diesen Werthen, dass man hier kleinere Gangunterschiede als jener für  $\alpha=0$ , nämlich

$$(\mu_\beta - \mu_\alpha) D,$$

also auch die ihnen zukommenden Farbenpaare nicht erhalten kann. Dieser Gangunterschied wird im Allgemeinen um so kleiner, je kleiner der optische Axenwinkel ist, so dass sich Glimmer mit kleinen optischen Axenwinkeln zu ihrer Anwendung besser eignen als solche mit grösseren.

Man kann aber auch mit einer solchen Glimmerplatte kleinere als durch ihre Dicke bestimmte Gangunterschiede, also die noch fehlenden Farbenpaare erhalten, wenn man die Glimmerplatte um eine zur bis nun gewählten Axe senkrechte dreht. Diese liegt dann ebenfalls in der Platte und ist senkrecht zur Ebene ihrer optischen Axen. Dann wird der Gangunterschied, wenn man um den Winkel  $\alpha$  dreht

$$\Delta = n\lambda = \left( \frac{\mu_\alpha}{\mu_\gamma} \sqrt{\mu_\gamma^2 - \sin^2 \alpha} - \sqrt{\mu_\beta^2 - \sin^2 \alpha} \right) D.$$

Diese Gangunterschiede werden immer kleiner, wenn  $\alpha$  von 0 an wächst und für den Fall, dass  $\alpha$  gleich dem scheinbaren optischen Axenwinkel wird, wird auch  $\Delta$  seinen kleinsten Werth bekommen, es wird 0 und wächst nun wieder bei einer weiteren Zunahme von  $\alpha$ .

So einfach diese letzte Methode auch zu sein scheint, so steht sie doch jener mit den compensirenden Quarzplatten nach und verdient diese letztere entschieden den Vorrang. Die Farblosigkeit und Festigkeit des Quarzes und die mögliche Her-

stellung aller Farbenpaare bei einer und derselben Drehung sind Dinge, welche das Ersparen der fixen Quarzplatte, die noch dazu den eigentlichen Gebrauch des Instrumentes nicht im Geringsten erschwert, wohl aufzuwiegen im Stande sind, wenn auch nicht geläugnet werden kann, dass die mit dem Glimmer herzustellenden Farbenpaare sich in vielen Fällen als ausreichend erweisen dürften.

---

## Zur Bestimmung der Wellenlänge der Fraunhofer'schen Linien.

Von **L. Ditscheiner.**

(Vorgelegt in der Sitzung am 9. März 1871.)

Im 50. Bande pag. 296 habe ich von einer grösseren Zahl Fraunhofer'scher Linien die Wellenlängen in Luft gegeben und zwar basirt auf die von Fraunhofer selbst vorgenommene Bestimmung der Wellenlänge der *D*-Linien. Fast um dieselbe Zeit hat Angström<sup>1</sup> mit Hilfe eines Nobert'schen Gitters ebenfalls solche Wellenlängenbestimmungen bekannt gemacht unter Zugrundelegung der ihm von Nobert angegebenen Spaltenbreite. Wenn auf die von Angström erhaltenen absoluten Werthe nicht vollkommen mit den von mir gefundenen übereinstimmten, so war doch die Uebereinstimmung eine überraschende, wenn ich meinen Messungen den von Angström gefundenen Werth für die *D*-Linien statt jenen von Fraunhofer zu Grunde legte. Dies bestimmte mich denn auch, selbst einen solchen absoluten Werth für die *D*-Linien mit Hilfe eines Fraunhofer'schen Gitters zu gewinnen. Da von diesem Gitter weder die Gesamtbreite noch die Anzahl der eingerissenen Linien bekannt war, so mussten diese beiden Werthe für sich bestimmt werden. Das erstere gelang leicht mit Hilfe des ausgezeichneten Comparators des Wiener polytechnischen Institutes und der im 52. Bande der Sitzungsberichte pag. 289 gegebene Werth für die Gesamtbreite des Gitters kann als vollkommen entsprechend beibehalten werden. Die Zahl der eingerissenen Linien, die dort auf 2997 angegeben worden ist, dürfte indess nach den bisher von mir gemachten Erfahrungen nicht ganz richtig sein. Ich habe schon a. a. O. auf

---

<sup>1</sup> Oefversigt af k. Vet. Akad. Forh. 1863. Nr. 2 und Pogg. Ann. 123. 489.

die Schwierigkeiten aufmerksam gemacht, die beim Zählen so eng aneinander liegender in Glas eingerissener Linien mit Hilfe des Mikroskopes sich einstellen und ich habe die angegebene Zahl nur deshalb beibehalten, weil sie bei oft wiederholtem Zählen der Linien am öftesten erhalten wurde. Ich hatte damals auch die grössere Zahl 3001 erhalten, ich konnte sie aber nicht in erster Linie für die richtige halten, da sie eben nur einmal erhalten wurde und in Folge dessen der kleineren Zahl nachstehen musste. Gewiss ist, dass sich mir beim Zählen oftmals der Zweifel einstellte, ob ich eine etwas breitere eingerissene Linie für eine oder für zwei nehmen solle, da es doch möglich sein könnte, dass eben die Theilmaschine zwei neben einander liegende Linien so breit einriss, dass sie in eine zusammenflossen. Ich hatte damals jedesmal eine solche breite Linie für eine genommen, und dadurch mag es geschehen sein, dass die kleinere Zahl sich ergab. Dass die Zahl 3001 jedoch die richtigere, scheint mir auch daraus hervorzugehen, dass bei allen Fraunhofer'schen Gittern die Zahl der eingerissenen Linien um Eins grösser ist, als ein Vielfaches von Hundert. Ich selbst würde jedoch kaum Anlass genommen haben, diese grössere Zahl ohne wiederholte Zählung den Bestimmungen zu Grunde zu legen, wenn nicht, wie dies auch schon von Angström<sup>1</sup> bemerkt wurde, meine dadurch modificirten Zahlen mit den von ihm neu gewonnenen Zahlen so vollkommen übereinstimmen würden, wie dies nur überhaupt gewünscht werden kann. Diese Übereinstimmung tritt aber auch erst ein, wenn man diejenigen Angström'schen Werthe nimmt, die sich nach der von ihm neuerdings vorgenommenen Bestimmung der Spaltenbreite seines Nobert'schen Gitters aus seinen ursprünglichen Zahlen ergeben.

Nach dem eben Gesagten ist für mein Fraunhofer'sches Gitter, dessen Gesamtbreite 13·8765 Millimeter und das auf diese Distanz 3001 Linien enthält, die Spaltenbreite

$$b+c = 0\cdot0064255 \text{ Millimeter.}$$

Demnach sind nun die Wellenlängen, wie sie im 52. Bande der Sitzungsberichte gegeben wurden, umgerechnet worden und

---

<sup>1</sup> Spectre Normal du soleil. Upsal. 1868.

in folgender Liste nebst den ihnen zukommenden Kirchhoff'schen Bezeichnungen zusammengestellt worden. Ausserdem sind auch die Angström'schen Werthe, wie sie sich aus seiner Zeichnung ergeben, beigefügt, ebenso wie die von van der Willigen ebenfalls mit einem Nobert'schen Gitter erhaltenen Werthe, die ebenfalls den Angström'schen und meinen Werthen sich vollkommen gut anschliessen.

	<u>Kirchhoff</u>	D	<u>Angström</u>	<u>v. d. Willigen</u>
<i>B</i>	593	687·41	686·67	687·132
<i>C</i>	694	656·23	656·18	656·557
	711·5	651·71	651·55	651·961
	719·5	649·67	649·45	649·817
	783·5	633·87	633·58	—
	831	623·24	623·14	—
	850	619·26	619·05	619·423
	860	617·14	616·82	617·201
	864	616·37	616·12	616·510
	874·5	614·38	614·05	614·451
	877	613·88	613·55	613·973
	885	612·40	612·11	612·559
	895	610·46	610·13	610·554
	959	597·79	597·70	—
<i>Da</i>	1002·8	589·74	589·49	589·844
<i>Db</i>	1006·8	589·10	588·90	589·230
	1029·4	585·92	585·65	—
	1096·1	576·39	576·20	—
	1103	575·44	575·20	—
	1135	571·17	570·83	—
	1155·7	568·37	568·14	—
	1174·4	566·00	565·77	—
	1200·4	563·93	562·23	562·336
	1207·5	561·65	561·45	561·809
	1218	560·44	560·16	560·599
	1231·6	558·80	558·55	558·933
	1242·5	557·45	557·18	—
	1280	554·21	552·75	553·214
	1303·7	550·80	550·05	—

	<u>Kirchhoff</u>	D	<u>Angström</u>	<u>v. d. Willingen</u>
	1307	550·37	549·65	—
	1324·8	547·81	547·60	548·186
	1337	546·46	546·23	546·551
	1343·5	545·73	545·46	545·813
	1351·3	544·76	544·58	544·946
	1367	543·10	542·88	—
	1389·6	540·60	540·48	—
	1410·5	539·71	538·23	—
	1421·6	537·20	537·05	537·409
	1451	534·20	534·02	—
	1463	532·98	532·75	533·070
	1492·5	529·91	529·70	—
	1500·5	528·39	528·26	—
	1515·5	527·71	527·50	—
<i>E</i>	1523·5	527·13	526·90	527·203
	1542	525·68	525·42	—
	1569·8	523·43	523·23	523·520
	1577·5	522·79	522·64	522·968
	1589·1	521·69	521·50	—
	1601·6	521·01	520·75	—
	1622·4	519·37	519·18	—
	1634	518·43	518·31	518·605
<i>b</i>	1648·8	517·40	517·22	517·522
	1655·6	516·85	516·68	516·985
	1693·8	514·34	513·85	—
	1737·6	511·12	510·70	—
	1750·4	510·00	509·88	510·199
	1777·4	508·11	507·88	508·268
	1799	506·61	506·40	—
	1834	504·26	504·13	504·390
	1854·5	502·96	502·70	—
	1867	501·97	501·75	—
	1873·5	501·38	501·32	—
	1885·8	500·78	500·50	—
	1908·5	499·43	499·02	—
	1920	498·48	498·20	—
	1961	495·87	495·65	495·979

	Kirchhoff	D	Angström	v. d. Willingen
	1975·6	494·75	494·56	—
	1983	494·05	493·85	—
	1989·5	493·46	493·32	—
	2005	492·03	491·99	492·265
	2018	491·12	491·10	—
	2041·4	489·25	489·05	489·378
	2058	487·89	487·75	—
	2067	487·26	487·10	—
<i>F</i>	2080·1	486·22	486·08	486·400
	2103·3	484·34	483·90	—
	2121·5	482·53	482·24	—
	2148·9	480·28	480·00	—
	2157·4	479·27	479·20	—
	2160·6	478·95	478·86	—
	1187·1	476·53	476·50	—
	2201·9	475·62	475·35	—
	2221·7	474·07	473·60	—
	2233·7	473·08	472·66	—
	2250	471·53	471·35	—
	2264·3	470·43	470·20	—
	2309	466·80	466·65	467·026
	2416	460·36	459·20	—
	2436·5	458·40	458·10	—
	2457·5	456·53	455·50	—
	2467·4	455·45	454·90	—
	2489·4	453·49	453·30	453·632
	2537·1	450·29	450·05	—
	2547·2	449·86	449·40	—
	2566·3	448·20	448·20	—
	2606	445·74	445·40	—
	2627	444·39	444·20	—
	2638·6	443·59	443·45	—
	2670	441·63	441·48	—
	2686·6	440·62	440·40	440·771
	2721·6	438·50	438·40	438·558
	2734·9	437·55	437·51	—
	2775·6	435·42	435·18	—

	<u>Kirchhoff</u>	D	<u>Angström</u>	<u>v. d. Willingen</u>
	2797	434·08	434·00	434·263
	2822·8	432·56	432·50	432·691
<i>G</i>	2854·7	431·12	430·70	431·137
	2869·7	430·13	430·00	430·190
	$\alpha$	428·96	428·90	—
	A	427·32	427·15	427·477
	$\gamma$	426·11	426·00	426·002
	<i>s</i>	425·41	425·05	—
	$\delta$	424·98	424·95	—
	$\varepsilon \omega$	423·69	423·55	—
	B	422·68	422·65	422·876
	$\varsigma$	421·80	421·50	—
	$\theta$	420·13	419·81	—
	$\iota$	418·92	418·70	—
		417·36	417·20	—
	$\mu$	415·70	415·40	—
	$\nu$	414·43	414·30	414·544
	$\Gamma$	413·37	413·20	413·444
	E	410·22	410·01	410·402
	$\sigma$	408·21	407·70	407·979
	$\pi$	407·75	407·10	—
		406·31	406·30	—
	Z	404·52	404·50	404·772
	$\tau$	403·38	402·95	403·615
	$\varphi$	400·63	400·45	—
	H	396·89	396·80	397·146
	H'	393·53	393·30	393·872

---

# Allgemeine Methoden zur Darstellung der Durchschnitte von Ebenen mit Kegel- und Cylinderflächen, von Geraden mit Kegelschnittlinien und von confocalen Kegelschnittlinien unter sich.

Von **R. Niemtschik**,

*Professor am k. k. polytechnischen Institute in Wien.*

(Mit 2 Tafeln.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 16. März 1871.)

1. Die vorliegende Abhandlung enthält allgemeine Methoden zur Darstellung ebener Durchschnitte von Kegel- und Cylinderflächen, wenn die Bestimmungsstücke der Aufgabe durch bloss eine Projection gegeben, also der Lage sowie beziehungsweise auch der Form nach nicht vollständig fixirt sind, und nur ihre gegenseitige Abhängigkeit aus dem gegebenen Bilde hervorgeht.

Ein wesentlicher Vortheil dieser Methoden besteht darin, dass eine und dieselbe Aufgabe auf gleiche Weise gelöst werden kann, ob nun das bezügliche Bild als eine orthogonale, schiefe, centrale oder perspectivische Projection aufgefasst wird.

Von besonderem Interesse sind die Constructionen der ebenen Schnitte von Kegel- und Cylinderflächen der zweiten Ordnung, wonach die Bestimmungsstücke, wie z. B. conjungirte Durchmesser, Hauptaxen, Scheitel, Brennpunkte u. s. w. eines solchen Schnittes auf die einfachste Weise direct gefunden werden, und zwar, ohne dass es nothwendig ist, in centralen oder perspectivischen Darstellungen andere Wege einzuschlagen, oder die bekannten, sehr umständlichen Untersuchungen bezüglich der Beschaffenheit des Schnittes durchzuführen.

Diese allgemeinen Methoden bieten ferner die einfachste Lösung für die Auffindung der gegenseitigen Durchschnitte von Geraden und Kegelschnittlinien und jener von confocalen Kegelschnittlinien.

Die Durchschnitte I, II einer Geraden  $G$  mit einer (nicht gezeichneten) Linie der zweiten Ordnung  $L$  werden dadurch gefunden, dass  $L$  als Projection des Durchschnittes ( $L$ ) eines Rotationskegels  $R$  mit einer Ebene  $e$ , und  $G$  als Projection einer in der Ebene  $e$  befindlichen Geraden ( $G$ ) angenommen und die Durchschnittspunkte (I), (II) von ( $G$ ) und  $R$  construirt werden, wo dann die Projectionen I, II von (I), (II) die fraglichen Punkte bilden.

Die Durchschnitte I, II zweier durch ihre Bestimmungsstücke gegebener confocaler Kegelschnittslinien  $L, L_1$  werden aber dadurch erhalten, dass  $L, L_1$  als Projectionen der Durchschnitte ( $L$ ), ( $L_1$ ) eines Rotationskegels  $R$  mit den Ebenen  $e, e_1$  betrachtet und die Durchschnittsgerade (I) (II) der Ebenen  $e, e_1$  so wie die Durchschnittspunkte (I), (II) der Geraden (I) (II) mit der Kegelfläche  $R$  ermittelt werden; dann ergeben sich I, II wieder als Projectionen der Punkte (I), (II).

Ausser den genannten finden sich in dieser Abhandlung noch Auflösungen von anderen einschlägigen Aufgaben.

## A. Construction der Durchschnitte von Ebenen mit Kegel- und Cylinderflächen.

### a) Allgemeine Kegel- und Cylinderflächen.

2. Es soll der Durchschnitt I II III der Ebene  $e$  mit der Kegelfläche  $S123$ , deren Scheitel  $S$  ist und deren Leitlinie  $123$  in der Ebene  $E$  liegt, dargestellt werden.

Die Linie  $123$  Taf. I, Fig. 1, 2 kann in der Bildfläche selbst liegend, oder auch als Projection einer Linie angesehen werden, deren Ebene  $E$  gegen die Bildfläche eine parallele oder eine geneigte Lage hat.

α. Man bestimme zuerst die Durchschnittslinie  $MN$  Fig. 1 der Ebenen  $e, E$  sowie die Durchschnittspunkte  $d, D$  einer durch den Kegelscheitel  $S$  gezogenen Geraden  $SdD$  mit den Ebenen  $e, E$ ; dann können die Durchschnittspunkte der Kegelkanten mit der Ebene  $e$  einfach durch Benützung der Punkte  $d, D$  und der Trace

$MN$  gefunden werden <sup>1</sup>. Z. B. Um den Durchschnittspunkt  $I$  der Kegelkante  $S1$  mit der Ebene  $e$  zu finden, hat man nur die Gerade  $D1$  bis zum Durchschnitte  $P$  mit  $MN$ , und  $Pd$  zu ziehen; dann ergibt sich  $I$  als gemeinschaftlicher Punkt der zwei Geraden  $S1$ ,  $Pd$ , weil nämlich  $DP$  und  $Pd$  die Durchschnitte der Ebene  $S1d$  mit den Ebenen  $E$  und  $e$  bilden.

Die Ebene  $S1d$  schneidet die Kegelfläche auch nach der Geraden  $S2$ , folglich treffen sich auch die Geraden  $S2$ ,  $Pd$  in dem Punkte  $II$ , welcher also wieder Durchschnittspunkt der Kante  $S2$  mit der Ebene  $e$  ist und darum so wie  $I$  dem fraglichen Kegelschnitte angehört.

Jede Tangente der Schnittcurve  $I$   $II$   $III$  ergibt sich als Durchschnittsline der Ebene  $e$  mit einer Berührungsebene der Kegelfläche. So ergibt sich die Tangente  $TI$ , wenn man an die Leitlinie  $123$  die Tangente  $1T$  zieht, bis sie die Trace  $MN$  in  $T$  schneidet und dann  $T$  mit  $I$  verbindet.

In derselben Weise wie  $d$ ,  $D$  können die zwei Durchschnittspunkte einer beliebigen Kegelkante mit den Ebenen  $e$ ,  $E$  benützt werden. Im Allgemeinen ist es jedoch vortheilhafter, eine ausserhalb der Kegelfläche gelegene Gerade  $SdD$  zu benützen, weil dann leichter günstige Schnitte der Kegelkanten erzielt werden können, und wenn die Leitlinie geschlossen oder spiralförmig ist, mittelst jeder durch  $Sd$  gelegten Ebene ein Punkt der Schnittcurve mehr als bei Benützung einer Kegelkante erhalten wird.

Um bei einer vollständig bestimmten Aufgabe nicht beide Punkte  $d$ ,  $D$  suchen zu müssen, wird man nicht die Gerade  $SD$ , sondern einen der Punkte entsprechend wählen.

Benützt man eine mit der Ebene  $E$  parallele Gerade  $Sd$ , welche die Ebene  $e$  in dem Punkte  $d$  trifft, dann schneiden in orthogonalen und schiefen Projectionen die durch  $Sd$  gelegten Ebenen die Ebene  $E$  nach Parallelen zu  $Sd$  und die Ebene  $e$  nach Geraden, die in dem Punkte  $d$  zusammentreffen. Der geometrische Ort des Punktes  $d$  ist die Durchschnittsline  $dd_1$  ( $\parallel MN$ ) der Ebene  $e$  mit der zu  $E$  parallelen Ebene  $Sdd_1$ .

<sup>1</sup> In unvollständig bestimmten Fällen, wie sie hier behandelt werden, können  $MN$ ,  $d$ ,  $D$  beliebig angenommen werden.

Benützt man aber eine mit der Ebene  $e$  parallele Gerade  $SD$ , welche die Ebene  $E$  in dem Punkte  $D$  trifft, dann sind in orthogonalen und schiefen Darstellungen die Durchschnitte der durch  $SD$  gelegten Ebenen mit  $e$  zu  $SD$  parallele, jene mit  $E$  im Punkte  $D$  sich schneidende Gerade. Der geometrische Ort des Punktes  $D$  ist die Durchschnittslinie  $DD_1$  ( $\parallel MN$ ) der Ebene  $E$  mit der zu  $e$  parallelen Ebene  $SDD_1$ .

Die Geraden  $dd_1$ ,  $DD_1$  können mit Benützung der Trace  $MN$  und der Durchschnittspunkte  $I$ ,  $1$  einer beliebigen Geraden  $SI$  mit den Ebenen  $e$ ,  $E$  wie folgt gefunden werden.

Zum Behufe der Bestimmung der Geraden  $dd_1$  ziehe man in der Ebene  $E$  durch den Punkt  $1$  eine beliebige Gerade  $1P$ , bis sie  $MN$  in  $P$  schneidet, dann  $Sd \parallel 1P$ ,  $PI d$  und  $dd_1 \parallel MN$ .

Um aber  $DD_1$  zu erhalten, ziehe man in der Ebene  $e$  durch den Punkt  $I$  die beliebige Gerade  $IP$  bis zum Durchschnitte  $P$  mit  $MN$ , nachher  $SD \parallel IP$ ,  $1PD$  und  $DD_1 \parallel MN$ . In Fig. 1 fällt  $D$  nach  $p$  und  $DD_1$  nach  $mn$ . Die Bedeutung der genannten Constructionslinien ist für sich klar. Beide Methoden gelten auch für perspectivische Darstellungen, es haben dort aber die Geraden  $dd_1$  und  $DD_1$  eine andere Bedeutung. Dort bildet  $dd_1$  die Durchschnittslinie der Ebene  $e$  mit jener Ebene  $[E]$ , welche durch den Kegelscheitel  $S$  und die Schnittlinie  $[G]$  der Verschwindungsebene mit der Ebene  $E$  bestimmt ist; hingegen bildet  $DD_1$  die Durchschnittslinie der Ebene  $E$  mit jener Ebene  $\{E\}$ , welche durch den Kegelscheitel und die Schnittlinie  $\{G\}$  der Verschwindungsebene mit der Ebene  $e$  gelegt werden kann.

$Sd$ ,  $1P$  sind als Durchschnittslinien einer Ebene mit den Ebenen  $E$ ,  $[E]$  zu betrachten; weil die letztgenannten Ebenen sich in der Geraden  $[G]$  der Verschwindungsebene begegnen, so begegnen sich die Geraden  $Sd$ ,  $1P$  in einem Punkte von  $[G]$ , weshalb auch die perspectivischen Bilder von  $Sd$ ,  $1P$  geometrisch parallel erscheinen.

$SD$  und  $IP$  sind aber als Durchschnittslinien einer durch den Kegelscheitel  $S$  gelegten Ebene mit den Ebenen  $E$ ,  $\{E\}$  anzusehen; weil sich die Ebenen  $E$ ,  $\{E\}$  in der Geraden  $\{G\}$  der Verschwindungsebene treffen, so liegt auch der Schnittpunkt der Geraden  $IP$ ,  $SD$  in  $\{G\}$  und deshalb erscheinen wieder die perspectivischen Bilder der Geraden  $IP$  und  $SD$  geometrisch parallel.

β. Mit Benützung der Durchschnittspunkte  $d$ ,  $d_1$  und  $D$ ,  $D_1$  der beliebigen zwei Geraden  $SdD$  und  $Sd_1D_1$  mit den Ebenen  $e$ ,  $E$  können die Punkte der Schnittcurve I II III wie folgt gefunden werden.

Man ziehe durch einen Punkt 1 der Leitlinie 1 2 3 die Geraden  $D1$  und  $D_11$ , bis sie  $MN$  beziehungsweise in  $P$  und  $P_1$  treffen und nachher die Geraden  $dP$  und  $d_1P_1$ ; dann schneiden sich die Geraden  $dP$ ,  $d_1P_1$  in einem der Curve I II III angehörigen Punkte I, welcher selbstverständlich zugleich in der Kegelkante  $S1$  liegt.  $dd_1$  und  $DD_1$  schneiden sich in einem Punkte der  $MN$ .

Von den Geraden  $SD$ ,  $SD_1$  kann eine mit der Ebene  $E$ , die andere mit der Ebene  $e$ , oder es können auch beide Gerade mit einer von den genannten Ebenen parallel sein.

γ. Wenn die Trace  $MN$  ausserhalb der Zeichnungsfläche liegt, so bestimme man ausser den Punkten  $d$ ,  $D$  der beliebigen Geraden  $SdD$  auch noch die Durchschnitte  $M_1N_1, \mu\nu$ , Fig. 2 einer durch den Kegelscheitel  $S$ , aber nicht durch  $Sd$  gelegten Ebene ( $E$ ) mit den Ebenen  $E$ ,  $e$ .

Um nun den Durchschnittspunkt einer Kante  $S1$  mit der Ebene  $e$  zu finden, lege man durch die Geraden  $Sd$ ,  $S1$  die Ebene  $SD1$ , welche die Ebenen  $E$ , ( $E$ ) und  $e$  der Reihe nach in den Geraden  $D1$ ,  $PS$  und  $pd$  schneidet; dann liegt I im Durchschnitte der Geraden  $pd$  und  $S1$ .

Weil die Ebene  $Sd1$  die Kegelfläche auch in der Kante  $S2$  und diese wieder die Gerade  $pd$  in dem Punkte II schneidet, so ist II zugleich Durchschnittspunkt der Kante  $S2$  mit der Ebene  $e$ .

Um die dem Punkte I der Schnittcurve entsprechende Tangente  $tI$  zu erhalten, hat man zuerst an die Leitlinie die Tangente  $1T$  bis zum Durchschnitte  $T$  mit  $M_1N_1$ , ferner die Gerade  $TtS$ , welche  $\mu\nu$  in  $t$  trifft, und endlich die fragliche Tangente  $tI$  zu ziehen. Es sind nämlich  $T1$ ,  $TtS$  und  $tI$  die Durchschnitte der die Kegelfläche längs der Kante  $S1$  berührenden Ebene  $S1T$  mit den Ebenen  $E$ , ( $E$ ) und  $e$ .

Nach dem bereits Gesagten ist es nicht mehr nothwendig, Beispiele über die Fälle durchzuführen, wenn die Trace  $MN$  nicht gebraucht werden kann, und die Gerade  $Sd$  mit der Ebene  $E$ , oder mit  $e$ , oder endlich mit den beiden Ebenen  $E$

und  $e$  parallel angenommen wird. Im letzten Falle haben die Durchschnitte aller durch  $Sd$  gelegten Ebenen mit  $E$  und  $e$  dieselbe Richtung wie die (nicht dargestellte) Trace  $MN$ .

In perspectivischen Darstellungen können ebenfalls zu  $MN$  geometrisch parallele Durchschnitte der Ebenen  $E$ ,  $e$  mit durch den Kegelscheitel  $S$  gelegten Ebenen erhalten werden, wenn nämlich die letztgenannten Ebenen zugleich durch den Schnittpunkt der Trace  $MN$  mit der Verschwindungsebene gehen. Aus diesem Grunde kann wieder das perspectivische Bild des ebenen Durchchnittes einer Kegelfläche ebenfalls auf die zuvor angegebene Weise construirt werden; nur sind dann die bezüglichen mit  $MN$  geometrisch parallelen Constructionslinien in dem bezeichneten Sinne aufzufassen.

∂. Wenn ausser der Trace  $MN$ , Fig. 1, auch die Durchschnittslinie  $mn$  der Ebene  $E$  mit der parallel zu  $e$  durch den Kegelscheitel gelegten Ebene ( $e$ ) benützt werden kann, ist es zweckmässig, die Punkte der Schnittcurve I II III auf folgende Art zu construiren.

Man lege durch die Kegelkante  $S1$ , deren Durchschnitt I mit  $e$  construirt werden soll, eine Ebene, welche die Ebene  $E$  etwa in der Geraden  $1Pp$ , die Tracen  $MN$ ,  $mn$  in  $P$ ,  $p$  schneidet und ziehe die zu  $pS$  parallele Gerade  $PI$ , bis sie  $S1$  in I trifft. Es bildet nämlich  $pS$  den Durchschnitt der Ebene  $S1p$  und ( $e$ ) und weil  $e$ , ( $e$ ) parallel sind, so ist auch die Durchschnittslinie  $PI$  mit  $pS$  parallel.

Trifft die Trace  $p1$  die Leitlinie noch in einem anderen Punkte 2, dann liegt die Kegelkante  $S2$  auch in der Ebene  $Sp1$ , folglich schneiden sich dann die Geraden  $S2$ ,  $PI$  in dem Punkte II, welcher zugleich den Durchschnitt der Kante  $S2$  mit der Ebene  $e$  bildet und deshalb auch der Schnittcurve angehört.

Für die Bestimmung der Tangente  $TI$  an die Schnittcurve hat man zuerst an die Leitlinie die Tangente  $1T$  bis sie  $MN$  in  $T$  und  $mn$  in  $t$  schneidet, und dann  $TI \parallel tS$  zu ziehen; denn  $TI$  bildet die Durchschnittslinie der Ebene  $e$  mit der die Kegelfläche in der Kante  $S1$  berührenden Ebene  $S1t$ .

Jede durch die Gerade  $St$  gelegte Berührungsebene des Kegels schneidet die Ebene  $e$  nach einer zu  $St$  parallelen Geraden, welche ebenfalls eine Tangente der Schnittcurve ist.

Daraus ist nun leicht der Vorgang zu entnehmen, nach welchem Tangenten von bestimmten Richtungen der Curve I II III gefunden werden können.

3. Ebene Durchschnitte von Cylinderflächen können nach denselben Methoden wie jene von Kegelflächen construirt werden, weil man Cylinderflächen als Kegelflächen mit unendlich fernen Scheiteln betrachten kann.

Die Auflösungen in Fig. 1 und 2 gelten deshalb auch für jene Fälle, wenn  $S123$  als perspectivische Bilder von Cylinderflächen angesehen werden, deren Kanten in  $S$  verschwinden.

Dann sind  $SdD$  Fig. 1, 2 perspectivische Bilder von Geraden, welche mit den Cylinderkanten parallel laufen und die Ebenen  $e, E$  beziehungsweise in  $d$  und  $D$  treffen, sowie  $M_1 N_1, \mu\nu$  Fig. 2 perspectivische Bilder der Durchschnitte einer mit den Cylinderkanten parallelen Ebene mit den Ebenen  $E$  und  $e$ .

Die Gerade  $mn$  Fig. 1 ist aber als perspectivisches Bild des Durchchnittes der Ebene  $E$  mit der parallel zu den Cylinderkanten durch die Schnittlinie ( $G$ ) der Ebene  $e$  und der Verschwindungsebene gelegten Ebene ( $E$ ) zu betrachten.

Die Bedeutung der übrigen Constructionslinien ist für sich klar.

In orthogonalen und schiefen Projectionen, wo die Cylinderkanten geometrisch parallel erscheinen, liegt die Gerade  $mn$  in unendlicher Ferne; die Ebene  $M_1 N_1, \mu\nu$  ist parallel mit den Cylinderkanten.

Die Gerade  $SdD$  kann aber entweder (1) mit den Cylinderkanten, oder (2) mit der Ebene  $e$ , oder (3) mit der Ebene  $E$ , oder endlich (4) mit den beiden Ebenen  $e, E$  parallel angenommen werden.

Im ersten Falle können beide Punkte  $d, D$  entweder in endlicher oder in unendlicher Entfernung sich befinden. In den Fällen (2), (3), (4) liegt die Gerade  $SdD$  stets in unendlicher Ferne; sie kann etwa im Falle (2) durch die Richtung  $R(\parallel e)$  und im Falle (3) durch die Richtung ( $R$ ), ( $\parallel E$ ) bestimmt werden. Im Falle (4) hat die Gerade  $SdD$  die Richtung  $MN$ .

In den Fällen (2), (3), wo die Gerade  $SdD$  mit  $R$  oder ( $R$ ) parallel ist, schneiden alle durch  $SD$  gelegte, also parallele Ebenen, sowohl die Ebene  $e$  als auch die Ebene  $E$  nach parallelen Geraden; von diesen sind im Falle (2) die in der Ebene  $e$

liegenden mit  $R$ , im Falle (3) die in der Ebene  $E$  befindlichen mit ( $R$ ) parallel. In dem Falle (4) haben die Durchschnitte aller durch  $SD$  gelegten Ebenen mit  $e$  und  $E$  die Richtung  $MN$ .

Die Ebene  $M_1 N_1 \mu \nu$  wird in allen Fällen von den durch Cylinderkanten gelegten Ebenen nach zu jenen Kanten parallelen Geraden geschnitten.

Von der Durchschnittslinie I II III IV der Ebene  $e$  und der Cylinderfläche 1 2 II IV, Fig. 6 wurden die Punkte I, II sowie die Tangente  $TI$  mit Benützung der Punkte  $d, D$  und der Trace  $MN$ , die Punkte III, IV sowie die Tangente  $t_1 III$  hingegen mit Benützung der Punkte  $d, D$  und der Tracen  $M_1 N_1, \mu \nu$  gefunden.

Nach diesen Methoden können beliebige Punkte der Curve I II IV dargestellt werden; es können aber auch je zwei in derselben Cylinderkante befindliche Punkte, von denen einer der Curve I II IV, der andere der Leitlinie 1 2 3 angehört, z. B. I, 1 in derselben Weise wie  $d, D$  zur Bestimmung weiterer Punkte der Schnittlinie I II IV benützt werden.

Sobald die Durchschnitte einer zu den Cylinderkanten parallelen Ebene mit  $E$  und  $e$ , z. B.  $D1, DI$  oder  $DP_1, dp_1$  bekannt sind, können dann beliebige Punkte der Curve I II IV auch durch Darstellung der Schnitte der zu  $D1I$  oder  $DP_1 p_1$  parallelen Ebenen mit der Cylinderfläche und mit  $E, e$  oder mit  $E, M_1 N_1 \nu$  ermittelt werden.

Nun kann jede orthogonale und schiefe Projection einer Cylinderfläche als perspectivisches Bild einer Kegelfläche betrachtet werden, deren Scheitel in der Verschwindungsebene liegt, und darum können die ebenen Durchschnitte von solchen Kegelflächen in perspectivischen Bildern wieder so wie jene von Cylinderflächen in orthogonalen und schiefen Darstellungen construirt werden.

#### b) Kegel- und Cylinderflächen der zweiten Ordnung.

4. Die ebenen Durchschnitte der Kegel- und Cylinderflächen zweiter Ordnung können selbstverständlich nach denselben Methoden wie jene der allgemeinen Kegel- und Cylinderflächen dargestellt werden; weil aber die erstgenannten Durchschnittslinien von der zweiten Ordnung sind, so ist es im Allgemeinen

zweckmässiger, von den fraglichen Durchschnitten jene Bestimmungsstücke aufzusuchen, aus denen dann ohne weitere Rücksichtnahme auf die bezüglichen Flächen die Schnittlinien selbst gezeichnet werden können.

Wir wollen nun hier die einfachsten Methoden zur Darstellung elliptischer, parabolischer und hyperbolischer Schnitte von solchen Flächen behandeln.

Die elliptische Leitlinie 1 2 3 Taf. I Fig. 3, 4, 5 liegt in der Ebene  $E$ ; diese Ebene wird von der Ebene  $e$  des fraglichen Kegelschnittes I II III in der Geraden  $MN$  und von der mit  $e$  parallelen Scheitelebene ( $e$ ) in der Geraden  $mn$  geschnitten.

#### α. Elliptischer Schnitt. Taf. I, Fig. 3.

In der Ebene ( $e$ ) liegt keine Kante der Kegelfläche  $S$  1 2 3, folglich ist die Ebene  $e$  gegen alle Kegelkanten geneigt und schneidet die Kegelfläche nach einer geschlossenen Curve, also nach einer Ellipse I II III IV.

Um einen Durchmesser  $d$  dieser Ellipse zu erhalten, hat man an die Kegelfläche zwei berührende Ebenen zu legen, welche die Ebene  $e$  nach parallelen Geraden schneiden; diese sind Tangenten der Ellipse und deshalb ist die Verbindungsgerade ihrer Berührungspunkte ein Durchmesser  $d$  von I II III IV.

Die Durchschnittsgerade  $D$  der beiden Berührungsebenen geht durch den Kegelscheitel  $S$  und ist parallel mit jenen Tangenten, folglich liegt sie in der Ebene  $Smn$ . Der dem Durchmesser  $d$  conjugirte Durchmesser  $d_1$  ist ebenfalls mit  $D$  parallel und demnach ist die Lage von  $d_1$  durch den Mittelpunkt von  $d$  und die Richtung von  $D$  vollständig bestimmt. Die Endpunkte des Durchmessers  $d_1$  können aber als Durchschnitte der Geraden  $d_1$  mit der Kegelfläche, oder aber auf gleiche Weise wie die Endpunkte von  $d$  construirt werden.

Aus dem eben Gesagten ist leicht zu entnehmen, wie ein Durchmesser der Ellipse, welcher eine bestimmte Richtung hat, dargestellt werden kann.

Die conjugirten Durchmesser I II, III IV der Ellipse I II III IV wurden auf die soeben besprochene Weise gefunden.

Zuerst wurde in der Ebene  $Smn$  die beliebige Gerade  $Sh$  gezogen, welche also  $mn$  in  $h$  trifft; dann wurden an die Kegel-

fläche durch die Gerade  $Sh$  die berührenden Ebenen  $Sh_1$  und  $Sh_2$  gelegt und deren Durchschnitte mit der Ebene  $E$ , d. s. die Tangenten  $h_1$ ,  $h_2$  der Leitlinie, sowie deren zu  $Sh$  parallele Durchschnitte  $J_1$ ,  $K_2$  mit der Ebene  $e$  und deren Berührungslinien  $S_1$ ,  $S_2$  mit der Kegelfläche dargestellt.

Die Geraden  $J_1$ ,  $S_1$  haben den Punkt I und die Geraden  $K_2$ ,  $S_2$  den Punkt II gemeinschaftlich, folglich ist I II ein Durchmesser der Ellipse I II IV.

Nachher wurde durch den Mittelpunkt  $o$  von I II die Gerade III IV  $\parallel Sh$  gezogen, welche  $MN$  in  $H$  trifft, und durch III IV,  $Sh$  die Ebene gelegt, welche wieder die Ebene  $E$  in der Geraden  $Hh$  und die Kegelfläche in den Kanten  $S_3$ ,  $S_4$  schneidet.

Weil nun die Gerade  $Ho$  die Kanten  $S_3$ ,  $S_4$  in III, IV trifft, so sind III, IV Endpunkte des Durchmessers III IV.

Würde man  $Sh \parallel MN$  wählen, dann wären auch die Tangenten  $h_1$ ,  $h_2$ ,  $J_1$ ,  $K_2$  und der Durchmesser III IV mit  $MN$  parallel. Läge 1 näher als 2 an der Trace  $MN$ , dann wäre I der nächste und II der entfernteste Punkt der Schnittcurve von der Ebene  $E$ .

Diese conjungirten Diameter können also auch in dem Falle gefunden werden, wenn die Trace  $mn$  ausserhalb der benützbaren Zeichnungsfläche liegt.

### 3. Parabolischer Schnitt. Taf. I, Fig. 4.

Die Trace  $mn$  der Scheitelebene ( $e$ ) berührt die Leitlinie 1 2 3 in dem Punkte  $h$ , folglich wird die Kegelfläche von der Ebene ( $e$ ) längs der Kante  $Sh$  berührt und von der mit ( $e$ ) parallelen Ebene  $e$  nach einer Parabel I AII geschnitten, deren Axe  $AH$  mit der Kante  $Sh$  parallel ist.

Die Durchschnittspunkte I, II der Trace  $MN$  mit der Leitlinie gehören der fraglichen Parabel an.

Um den Parabelscheitel  $A$  zu finden, ziehe man in der Ebene  $e$  die Gerade I III  $\perp Sh$ , lege durch I III und die zu ihr parallele, die Trace  $mn$  im Punkte  $i$  schneidende Gerade  $Si$  die Ebene  $S I III$ , welche also die Ebene  $E$  in der Geraden  $iI_3$ , die Leitlinie im Punkte 3 und die Kegelfläche nach den Kanten  $S_1$ ,  $S_3$  schneidet und bezeichne den aus dem Durchschnitte der

Geraden I III mit der Kegelfläche oder mit der Kante  $S3$  sich ergebenden Parabelpunkt III.

Dann ziehe man durch den Mittelpunkt  $o$  der Strecke I III die Parabelaxe  $HoA \parallel Sh$ , welche die Ebene  $E$  im Punkte  $H$  trifft. Endlich suche man den Durchschnittspunkt  $A$  der Geraden  $Ho$  mit der Kegelfläche und zwar durch Benützung der Ebene  $Sh Ho$ , welche die Ebene  $E$  in der Geraden  $hH$  und die Kegelfläche (ausser in  $Sh$ ) in der Kante  $Sa$  schneidet, wo dann also der Parabelscheitel  $A$  im Durchschnitte der Geraden  $Sa$  und  $Ho$  erhalten wird.

Der Scheitel  $A$  kann auch wie folgt ermittelt werden.

Die Scheiteltangente der Parabel steht senkrecht zu der Axe  $Ho$ , folglich ergibt sie sich auch als Durchschnitt der Ebene  $e$  mit der Ebene, welche berührend an die Kegelfläche durch die zu der Ebene  $e$  parallele und zu  $Sh$  senkrechte Gerade  $Si$  gelegt wird. Diese Berührungsebene schneidet die Ebene  $E$  nach der Tangente  $ia$  der Leitlinie und berührt also die Kegelfläche längs der Kante  $Sa$ .

Bestimmt man nun den Durchschnittspunkt  $A$  der Kante  $Sa$  mit der Kegelfläche, indem man durch die Ebene  $Sah$  die Ebene  $E$  nach der Geraden  $ha$  und die Ebene  $e$  nach der zu  $Sh$  Parallelen  $HA$  schneidet, wo alsdann  $Sa$  und  $HA$  den fraglichen Punkt  $A$  gemeinschaftlich haben; so bildet  $A$  den Berührungspunkt jener Tangente, folglich den Parabelscheitel und wird dadurch gleichzeitig auch die Parabelaxe  $HA$  erhalten.

Ein anderer einfacher Weg, den Scheitel  $A$  und die Axe  $AH$  der Parabel zu finden, besteht im folgenden.

Man zieht durch die Punkte I, II die Tangenten der Parabel (als Durchschnitte der Ebene  $e$  mit den Ebenen, welche die Kegelfläche in den Kanten  $SI$ ,  $SII$  berühren), bis sie  $Sh$  oder eine mit  $Sh$  Parallele  $tT$  beziehungsweise in  $t$  und  $T$  schneiden, errichtet auf  $tT$  die Senkrechten  $Iu$ ,  $IIV$ , halbirt die Strecken  $ut$ ,  $UT$  in  $v$ ,  $V$  und bringt die Geraden  $Iv$ ,  $IIV$  zum Durchschnitte in  $A$ ; dann hat man noch die Parabelaxe  $AH \parallel Sh$  zu ziehen.

### γ. Hyperbolischer Schnitt. Taf. I, Fig. 5.

Die Kegelfläche wird von der Scheitelebene ( $e$ ) nach den Kanten  $Sk$ ,  $Si$ , folglich von der Ebene  $e$  nach einer Hyperbel

IAII geschnitten, deren Asymptoten mit den Kanten  $Sk$ ,  $Si$  parallel sind, deren Axe also auch mit der Mittellinie  $Sh$  des Winkels  $iSk$  parallel ist.

Die Punkte I, II der Hyperbel ergeben sich unmittelbar als Durchschnitte der Trace  $MN$  mit der Leitlinie 123.

Die Hyperbelaxe  $Ho$  könnte nun auf ähnliche Weise wie die Parabelaxe im vorstehenden Art.  $\beta$ , nämlich mit Zuhilfenahme einer zu  $Sh$  senkrechten Sehne I III ermittelt werden. Dann könnte man auch leicht die Scheitel  $A$ ,  $A_1$ , den Mittelpunkt  $o$  und die Asymptoten  $Jo$ ,  $Ko$  der Hyperbel finden.

Oder, man könnte zuerst die den Punkten I, II der Hyperbel entsprechenden Tangenten, als Durchschnitte der Ebene  $e$  mit den die Kegelfläche in den Kanten  $SI$ ,  $SII$  berührenden Ebenen aufsuchen und vermittelst denselben und den bekannten Richtungen  $Si$ ,  $Sk$  der Asymptoten jene Bestimmungsstücke finden, aus denen sich dann die Hyperbel darstellen lässt.

Am einfachsten ist jedoch die folgende Bestimmungsweise.

Die Asymptoten sind Tangenten der Hyperbel, die dieselbe in unendlich entfernten Punkten berühren, welche Punkte sich also als Durchschnitte der Kanten  $Si$ ,  $Sk$  mit der Ebene ergeben; deshalb bilden die Asymptoten die Durchschnitte der Ebene  $e$  mit jenen Ebenen, welche die Kegelfläche nach den Kanten  $Si$ ,  $Sk$  berühren.

Diese Berührungsebenen schneiden nun die Ebene  $E$  längs den Tangenten  $iJ$ ,  $kH$  der Leitlinie, die Ebene  $e$  aber nach den, beziehungsweise zu  $Si$  und  $Sk$  parallelen Geraden  $Jo$  und  $Ko$ ; das sind also schon die Asymptoten.

Nun kann die Axe  $oH$  |  $Sh$  gezogen und mit der Kegelfläche zum Durchschnitte gebracht werden, indem man durch  $S$  und  $oH$  eine Ebene legt, welche die Ebene  $E$  in der Geraden  $hH$  und die Kegelfläche in den Kanten  $aS$  und  $a_1S$  schneidet; dann ergeben sich die Hyperbelscheitel  $A$ ,  $A_1$  als Schnitte der Axe  $Ho$  mit den Kegelkanten  $Sa$  und  $Sa_1$ .

5. Wir haben nun noch zu beweisen, dass die in den Fig. 3, 4, 5 ausgeführten Constructionen auch für perspectivische Darstellungen gelten und welche Bedeutung sie dort haben.

Um im Voraus bestimmen zu können, von welcher Beschaffenheit das perspectivische Bild eines ebenen Kegelschnittes

I II III ist, hat man zu untersuchen, ob die Verschwindungsebene mit dem Sehkegel, dessen Spitze das Auge oder Projections-Centrum ( $A$ ) und dessen Basis die Curve I II III ist, bloss den Scheitel ( $A$ ), eine oder zwei Kanten, oder ob sie mit der Curve I II III keinen, einen oder zwei Punkte gemeinschaftlich hat, wo dann im ersten Falle ein elliptisches, im zweiten Falle ein parabolisches und im dritten Falle ein hyperbolisches Bild des betreffenden Kegelschnittes resultirt.

Die bekannten Methoden für solche Untersuchungen und für die darauf gegründete Darstellung der perspectivischen Bilder ebener Kegelschnitte sind durchwegs sehr umständlich.

Durch folgende Betrachtungen gelangen wir zu dem Schlusse, dass die Untersuchung bezüglich der Beschaffenheit des perspectivischen Bildes eines ebenen Kegelschnittes sowie die Darstellung dieses Bildes auf dieselbe einfache Weise wie in den Fig. 3, 4, 5 erfolgen könne, dass also die genannten Figuren ebenso gut als Resultate einer perspectivischen wie der orthogonalen oder einer schiefen Darstellung aufgefasst werden dürfen.

Gemeinschaftliche Punkte der Curve I II III und der Verschwindungsebene liegen im Durchschnitte  $[G]$  der Ebene  $e$  der Curve I II III mit der Verschwindungsebene; es ist also einleuchtend, dass in den genannten drei Fällen die durch  $[G]$  und den Kegelscheitel  $S$  gelegte Ebene  $[E]$  mit dem Kegel  $S$  1 2 3 keine, eine oder zwei Kanten gemeinschaftlich haben werde, dass also die Durchschnittslinie  $mn$  der Ebenen  $[E]$ ,  $E$  die Leitlinie 1 2 3 im ersten Falle weder berühren noch schneiden könne, im zweiten Falle sie berühren und im dritten Falle sie (2mal) schneiden müsse.

Weil nun die Ebenen  $[E]$ ,  $e$  die Gerade  $[G]$  gemeinschaftlich haben und weil  $mn$ ,  $MN$  in derselben Ebene  $E$  liegen, so schneiden sich  $mn$ ,  $MN$  jedenfalls in einem Punkte der Geraden  $[G]$ , also in einem Punkte der Verschwindungsebene, aus welchem Grunde die perspectivischen Bilder von  $mn$ ,  $MN$  geometrisch parallel erscheinen.

Da  $MN$  gegeben ist, so handelt es sich nur noch um die Bestimmung eines Punktes der Trace  $mn$ , um diese dann ziehen zu können.

Zu dem Behufe schneiden wir die Ebenen  $E$ ,  $[E]$  durch eine beliebige Ebene, wodurch als Schnitte zwei Gerade erhalten werden, die sich wieder in einem Punkte von  $[G]$ , also ebenfalls in der Verschwindungsebene treffen, weshalb diese Geraden auch geometrisch parallele, perspectivische Bilder haben. Die in  $[E]$  gelegene Durchschnittslinie geht selbstverständlich durch den Kegelscheitel  $S$  und es liefert ihr Durchschnitt mit der Ebene  $E$  einen Punkt der Trace  $mn$ .

Wenden wir nun das Verfahren auf den speciellen Fall an, wenn die Figur 3 ein perspectivisches Bild der Kegelfläche  $S\ 1\ 2\ 3$  vorstellt, deren Durchschnittslinie  $I\ II\ III$  mit der Ebene  $e$  construirt werden soll, welche Ebene die Basisebene  $1\ 2\ 3$  nach der Geraden  $MN$  und die Kegelkante  $S1$  in dem Punkte  $I$  schneidet.

Wir legen durch die Kegelkante  $S1$  eine beliebige Ebene, welche die Ebene  $1\ 2\ 3$  etwa in der Geraden  $1Jh$ , folglich die Ebene  $e$  in der Geraden  $JI$  und die Ebene  $[E]$  in der zu  $JI$  geometrisch Parallelen  $Sh$  schneidet.  $1J$  und  $Sh$  schneiden sich in  $h$ , durch welchen Punkt nun die Trace  $mn$  geometrisch parallel zu  $MN$  gezogen werden kann.

Würde man die Gerade  $1Jh$  berührend an die Leitlinie ziehen, dann wäre  $JI$  die dem Punkte  $I$  der Curve  $I\ II\ III$  entsprechende Tangente.

Weil die Trace  $mn$  und die Leitlinie  $1\ 2\ 3$  keinen gemeinschaftlichen Punkt haben, so hat auch die Verschwindungsebene mit dem Kegel ( $A$ )  $I\ II\ III$  keine Kante gemeinschaftlich und deshalb ist das perspectivische Bild  $I\ II\ III$  des Kegelschnittes eine Ellipse u. s. w.

In Fig. 4 berührt die Trace  $mn$  der Ebene  $[E]$  die Leitlinie in dem Punkte  $h$ , folglich liegt der Durchschnittspunkt  $x$  dieser Kegelkante mit der Ebene  $e$  in der Verschwindungsebene, nämlich in der Geraden  $[G]$ , weshalb das perspectivische Bild des Punktes  $x$  in unendlicher Entfernung sich ergibt und das perspectivische Bild  $IAII$  des Kegelschnittes eine Parabel mit zu  $Sh$  geometrisch paralleler Axe ist. Die Verschwindungsebene berührt den Kegel ( $A$ )  $IAII$  längs der Kante ( $A$ ). $v$ .

In Fig. 5 schneidet die Trace  $mn$  der Ebene  $[E]$  die Leitlinie in den Punkten  $i$ ,  $k$ , folglich liegen die Durchschnittspunkte  $x$ ,  $y$

der Kegelkanten  $Si$ ,  $Sk$  mit der Ebene  $e$  in der Verschwindungsebene, und zwar in der Geraden  $[G]$ , weshalb die perspectivischen Bilder dieser Punkte in unendlicher Entfernung sich ergeben und daher das perspectivische Bild I II des Kegelschnittes eine Hyperbel mit zu  $Si$ ,  $Sk$  parallelen Asymptoten ist. Die Verschwindungsebene schneidet den Sehkegel  $(A)$  I II  $A$  nach den Kanten  $(A)x$  und  $(A)y$ .

Endlich können  $S$  1 2 3 Fig. 3, 4, 5 als perspectivische Bilder von Cylinderflächen betrachtet werden, wenn nämlich  $S$  den Fluchtpunkt der Cylinderkanten bezeichnet. Offenbar stellen dann die Linien I II III IV Fig. 3. I II Fig. 4 und I AA<sub>1</sub> II Fig. 5 wieder die Schnitte der Ebenen  $e$  mit den Cylinderflächen vor.

Die speciellen Fälle, wo die Spitze einer Kegelfläche in der Verschwindungsebene liegt und wo die Cylinderkanten mit der Bildfläche parallel sind, in welchen Fällen die perspectivischen Bilder der Kegel- und Cylinderkanten geometrisch parallel erscheinen, bedürfen wohl keiner weiteren Besprechung. Der Durchschnitt einer Ebene  $e$  mit der betreffenden Kegel- oder Cylinderfläche kann auf dieselbe Weise ermittelt werden, wie der ebene Durchschnitt einer Cylinderfläche in orthogonaler und schiefer Projection.

Als Beispiel diene Fig. 6, in welcher  $o$  den Mittelpunkt der in der Ebene  $E$  befindlichen elliptischen Leitlinie 1 2 3 der bezüglichen Kegel- oder Cylinderfläche 1 2 3 III bezeichnet. Die Ebenen  $e$ ,  $E$  schneiden sich in der Geraden  $MN$ .  $d$ ,  $D$  bilden die Durchschnittspunkte der durch den Kegelscheitel  $S$ , beziehungsweise parallel zu den Cylinderkanten gezogenen Geraden  $dD$  mit den Ebenen  $e$  und  $E$ .

Der Durchschnitt der Ebene  $e$  mit der Fläche 1 2 IV ist die Ellipse I II IV. Um ein Paar conjungirte Durchmesser dieser Ellipse zu erhalten, lege man durch  $dD$  eine beliebige Ebene, welche etwa  $E$  in der Geraden  $DP$ , folglich  $e$  in der Geraden  $Pd$  schneidet; dann lege man an die Fläche die mit  $DP$  parallelen Berührungsebenen, welche  $E$  nach den zu  $DP$  parallelen Tangenten  $R5$ ,  $N6$  der Leitlinie 1 2 3 sowie  $e$  nach den zu  $dP$  parallelen Tangenten  $RV$ ,  $NVI$  der Ellipse I II IV schneiden und die Fläche nach den Kanten  $5V$ ,  $6VI$  berühren. Die Berührungspunkte  $V$ ,  $VI$  der Tangenten  $RV$ ,  $NVI$  ergeben sich in den Durch-

schnitten der Geraden  $RV$ ,  $5V$  und  $NVI$ ,  $6VI$ ; daher ist  $VVI$  ein Durchmesser der Ellipse  $I II IV$ .

Endlich lege man durch  $oS$  die mit  $dP$  parallele Ebene  $oOW$ , welche die Ebenen  $E$ ,  $e$  in den Geraden  $8o7 W(\parallel R5)$ ,  $WVII OVIII$  ( $\parallel RV$ ) und die Fläche  $1 2 IV$  nach den Kanten  $7 VII$ ,  $8 VIII$  schneidet.  $7VII$  und  $8VIII$  treffen  $WO$  in den Punkten  $VII$ ,  $VIII$ , weshalb wieder  $VII VIII$  und  $VVI$  conjungirte Durchmesser der Ellipse  $I II IV$  sind.

Wenn die Tracen  $M_1 N_1$  und  $\mu\nu$  statt  $MN$  benützt werden, hat man zuerst die Durchschnittspunkte  $V$ ,  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  der Trace  $M_1 N_1$  mit den Geraden  $DP$ ,  $5R$ ,  $6N$  und  $oW$  zu bestimmen, durch dieselben die mit  $dD$  parallelen Geraden  $Vv$ ,  $Xx$ ,  $Yy$  und  $Zz$  und dann durch deren Begegnungspunkte  $v$ ,  $x$ ,  $y$ ,  $z$  mit  $\mu\nu$  die Geraden  $od$ ,  $xV$ ,  $yVI$ ,  $zO$  und zwar die letzten drei parallel mit  $vd$  zu ziehen, bis sie die bezüglichen Kanten  $5V$ ,  $6VI$ ,  $7VII$  und  $8VIII$  in den Punkten  $V$ ,  $VI$ ,  $VII$ ,  $VIII$  treffen.

c) **Rotations-Kegelflächen mit zur Bildfläche senkrechter Axe in orthogonalen Darstellungen.**

6. In den Fig. 6, 7, 8 Taf. I bildet der aus  $S$  beschriebene Kreis  $SD$  die Basis eines Rotationskegels, dessen Axe senkrecht auf der Bildfläche steht und deshalb den Kreismittelpunkt als orthogonale Projection hat; ferner bildet  $mn$  die Bildtrace einer durch den Kegelscheitel gelegten Ebene ( $e$ ) und  $MN(\parallel mn)$  die Bildtrace einer mit ( $e$ ) parallelen Ebene  $e$ , deren Durchschnitt mit der Kegelfläche construirt werden soll. Die Kegelspitze ist nicht weiter bestimmt.

a. **Elliptischer Schnitt  $AA_1 BB_1$ . Taf. I, Fig. 7.**

Die durch die Kegelaxe senkrecht auf die Ebene  $e$  gelegte Ebene  $SCD$ , deren Bildtrace  $oD \perp MN$  ist, schneidet die Ebenen, ( $e$ ),  $e$  nach den Parallelen  $Sh$ ,  $HA$  und die Kegelfläche nach den Kanten  $SC$ ,  $SD$ .

Um den Durchschnittspunkt  $A$  der Kegelkante  $SC$  mit der Ebene  $e$  zu finden, legen wir durch  $SC$  eine Ebene, deren Bildtrace  $CLm$  ist, welche Ebene also die Ebene ( $e$ ) in der Geraden  $Sm$ , die Ebene  $e$  in der zu  $Sm$  Parallelen  $LA$  schneidet und

erhalten demnach  $A$  als gemeinschaftlichen Punkt der Geraden  $SC$  und  $LA$ .

Zur Bestimmung des Durchschnittspunktes  $A_1$  der Kegelkante  $SD$  mit der Ebene  $e$  benützen wir die Ebene  $SDm$ , welche ( $e$ ) in der Geraden  $Sm$  und die Ebene  $e$  wieder in der zu  $Sm$  parallelen Geraden  $MA_1$  schneidet; deshalb treffen sich die Geraden  $SD$ ,  $MA_1$  in dem Punkte  $A_1$ .

Die den Punkten  $A$ ,  $A_1$  entsprechenden Tangenten der fraglichen Ellipse sind mit einander, weil mit  $MN$  parallel, also senkrecht zu  $AA_1$ , weshalb  $AA_1$  eine Axe der Ellipse ist.

Um die zweite Axe  $BB_1$  zu finden, legen wir an die Kegelfläche mit  $AA_1$  parallele Berührungsebenen, die sich also in einer zu  $AA_1$  parallelen Geraden  $Sh$  der Ebene ( $e$ ), die Bildfläche nach den Tangenten  $hE$ ,  $hF$  des Kreises und die Ebene  $e$  nach den zu  $Sh$  parallelen Geraden  $KB$ ,  $JB_1$  schneiden, ferner die Kegelfläche längs den Kanten  $SE$ ,  $SF$  berühren; folglich sind  $KB$ ,  $JB_1$  mit  $AA_1$  parallele Tangenten der Ellipse und weil sie dieselbe beziehungsweise in  $B$  und  $B_1$  berühren, so ist  $BB_1$  die zweite Axe dieser Ellipse.

Da die Axe  $BB_1$  der Lage nach bestimmt ist, indem sie durch den Mittelpunkt  $o$  von  $AA_1$  geht und senkrecht auf  $AA_1$  steht, so können ihre Endpunkte  $B$ ,  $B_1$  auch als Durchschnitte der Geraden  $BoB_1$  mit der Kegelfläche gefunden werden.

Die durch  $So$  und  $Sm$  gelegte Ebene schneidet die Ebene  $e$  in der Geraden  $oP(\parallel Sm)$  und die Bildfläche in der Geraden  $mPR$ ; folglich ergibt sich  $R$  als Durchschnittspunkt der Geraden  $So$  mit der Bildfläche. Die Ebene  $SBB_1$  schneidet aber die Bildfläche in der Geraden  $ERF(\parallel BB_1)$  und die Kegelfläche nach den Kanten  $ES$ ,  $FS$ , welche also  $BB_1$  in den Punkten  $B$ ,  $B_1$  treffen.

Nun wollen wir beweisen, dass  $S$  ein Brennpunkt der Ellipse  $BB_1$  ist.

Es sei

$$SC = SD = r; \quad SH = d, \quad Sh = D, \quad AA_1 = 2a, \quad BB_1 = 2b.$$

Aus der Figur ist zu entnehmen:

$$CA : CS = CL; \quad Cm = CH : Ch,$$

also

$$CA = \frac{CS \cdot CH}{Ch} = \frac{r(d-r)}{D-r};$$

ferner

$$DA_1 : DS = DM : Dm = DH : Dh,$$

folglich

$$DA_1 = \frac{DS \cdot DH}{Dh} = \frac{r(d+r)}{D+r}.$$

Dann findet man:

$$AA_1 = CD - CA - DA_1 = 2r - \frac{r(d-r)}{D-r} - \frac{r(d+r)}{D+r} = \frac{2rD(D-d)}{D^2-r^2}$$

mithin ist

$$a = \frac{1}{2}AA_1 = \frac{rD(D-d)}{D-r^2}.$$

Nun ist

$$KH = \frac{1}{2}KJ = \frac{1}{2}BB_1 = b.$$

Aus der Proportion:

$$KH : Hh = SE : Eh,$$

oder

$$b : D-d = r : \sqrt{D^2-r^2}$$

ergibt sich:

$$b = \frac{r(D-d)}{\sqrt{D^2-r^2}}$$

Zieht man  $KG \parallel ES$ ; so ist:

$$KG : Kh = KH : Hh$$

oder

$$KG : \sqrt{Hh^2 + KH^2} = b : D-d,$$

woraus folgt:

$$BS = KG = \frac{b\sqrt{(D-d)^2 + b^2}}{D-d} = \frac{rD(D-d)}{D^2-r^2} = a.$$

Weil nun der Abstand des Punktes  $S$  vom Punkte  $B$  gleich der halben grossen Axe  $AA_1$  ist, so bildet in der That  $S$  einen Brennpunkt der Ellipse  $AA_1 BB_1$ .

Betrachtet man die Ellipse  $AA_1 BB_1$  Taf. I Fig. 6 als Projection des Durchschnittes einer Ebene  $e$  mit einer Rotations-Kegelfläche, deren Basis der aus dem Brennpunkte  $S$  der Ellipse gezogene Kreis  $CD$  ist, dann können die Tracen  $MN$  und  $mn$  der Ebene  $e$

und der zu  $e$  parallelen Scheitelebene ( $e$ ), wie folgt, gefunden werden.

Man hat  $SB$  bis zum Durchschnitte  $E$  mit dem Kreise  $CD$ , dann  $Eh \perp SE$ ,  $BK \parallel AA_1$  und endlich  $mhn$  sowie  $MKN \perp AA_1$  zu ziehen.

Das gilt unter der Voraussetzung, dass die Ebene  $e$  den unteren Mantel der Kegelfläche schneidet.

Der zur Bildfläche senkrechte Cylinder mit der elliptischen Basis  $AA_1 BB_1$  schneidet aber auch den oberen Mantel desselben Kegels nach einer mit jener des unteren Mantels congruenten Ellipse, deren Ebene  $e_1$  wieder auf der Ebene  $CSD$  senkrecht steht und gegen die Bildfläche dieselbe Neigung wie  $e$  hat. Die Bildfläche wird von der Ebene  $e_1$  in der Geraden  $M_1 N_1$  ( $\parallel MN$ ) und von der mit  $e_1$  parallelen Scheitelebene ( $e_1$ ) in der Geraden  $m_1 n_1$  ( $\parallel MN$ ) geschnitten.

Die Abstände der Tracen  $mn$  und  $m_1 n_1$  vom Punkte  $S$  sind einander gleich. Die Abstände  $hH$  und  $h_1 H_1$  der Tracen  $mn$ ,  $MN$  und jener  $m_1 n_1$ ,  $M_1 N_1$  sind ebenfalls gleich und es liegt die Trace  $M_1 N_1$  auf derselben Seite von  $m_1 n_1$ , auf welcher  $MN$  von  $mn$  sich befindet.

Nun findet man

$$HK \neq oB = b, \quad KG \neq BS = a$$

folglich ergibt sich:

$$Hh = \frac{\overline{HK}^2}{HG} = \frac{\overline{HK}^2}{\sqrt{\overline{KG}^2 - \overline{HK}^2}} = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}.$$

Demnach ist die Strecke  $Hh$  bloss von  $a$  und  $b$  abhängig.

Durch das Vorstehende sind also folgende Sätze bewiesen:

Die orthogonale Projection eines elliptischen Schnittes auf einer Kreisschnittsebene derselben Rotations-Kegelfläche ist eine Ellipse, für welche der Kreisschnitts-Mittelpunkt einen Brennpunkt bildet.

Jede Ellipse kann als orthogonale Projection des Durchschnitte einer Ebene  $e$  mit einem Rotationskegel betrachtet werden, dessen Basis ein in der Ebene der Ellipse aus einem Brennpunkte derselben gezogener Kreis ist.

Ein elliptischer Cylinder und eine Rotations-Kegelfläche, deren Axe mit den Cylinderkanten parallel ist und durch einen Brennpunkt eines Normalschnittes des Cylinders geht, schneiden sich nach Ellipsen.

β. Parabolischer Schnitt I A II. Taf. I, Fig. 8.

Die Kegelfläche  $ShD$  wird von der Ebene ( $e$ ) längs der Kante  $Sh$  berührt, folglich von der Ebene  $e$  nach einer Parabel I A II geschnitten, deren Axe  $HA$  mit der Geraden  $Sh$  parallel ist.

Die Durchschnitte I, II der Trace  $MN$  mit der Kegelbasis bilden zwei Punkte der Parabel; weil aber die Gerade  $Sh$  auf der Geraden I II senkrecht steht und dieselbe im Punkte  $H$  halbiert, so fallen in der Figur die Geraden  $AH$  und  $Sh$  zusammen.

Um den Parabelscheitel  $A$  zu erhalten, legen wir durch die Kegelkante  $SD$ , in welcher  $A$  liegt, eine Ebene, deren Bildtrace  $Dm$  ist; diese Ebene schneidet die Ebene ( $e$ ) in der Geraden  $Sm$  und die Ebene  $e$  in der zu  $Sm$  Parallelen  $MA$ . Deshalb ergibt sich  $A$  im Durchschnitte der Geraden  $MA$  und  $SD$ .

Das Centrum  $S$  des Kreises  $CED$  bildet wieder den Brennpunkt der Parabel. Das beweisen wir einfach dadurch, indem wir zeigen, dass  $HS + 2SA = IS = r$  ist.

Aus der Construction findet man:

$$AD = AH,$$

also

$$HD = 2 AD;$$

ferner

$$hH = hD - HD = 2 SD - 2 AD = 2 SA;$$

daher ist:

$$HS + 2 SA = HS + hH = r,$$

was zu beweisen war.

Weil  $AD = AH$  und  $hI \perp ID$  so wie  $hII \perp IID$  ist, so sind  $DI$ ,  $DII$  Tangenten und  $hI$ ,  $hII$  Normalen der Parabel I A II.

Betrachtet man eine gegebene Parabel I A II, Taf. I Fig. 7, als orthogonale Projection einer Parabel  $P$  eines Rotationskegels, dessen Basis der aus dem Parabel-Brennpunkte  $S$  gezogene

(beliebige) Kreis  $hID$  ist, dann können die Tracen  $MN$  und  $mn$  der Ebenen  $e$  der Parabel  $P$  und der zu  $e$  parallelen Scheitel-ebene ( $e$ ) auf folgende Weise gefunden werden:

Man errichte im Durchschnitte  $h$  der Parabelaxe  $AS$  mit dem Kreise  $hID$  die Trace  $mn \perp hA$ , mache  $hH = 2AS$  und ziehe durch  $H$  die Gerade  $MN \parallel mn$ .

Derselben Projection  $IAII$  entspricht auf dem oberen Kegelmantel eine Parabel  $P_1$ , deren Ebene  $e_1$  wieder auf der Ebene  $ShD$  senkrecht steht und gegen die Basisebene dieselbe Neigung hat wie die Ebene  $e$ .  $e_1$  schneidet die Basisebene in der zu  $MN$  parallelen Geraden  $M_1N_1$ . Die Bildtrace der zu  $e_1$  parallelen Scheitel-ebene ( $e_1$ ) ist aber die mit  $MN$  parallele zweite Tangente des Kreises  $hID$ .  $MN$  und  $M_1N_1$  liegen beziehungsweise auf gleichen Seiten von  $mn$  und  $m_1n_1$ .

Der Abstand  $h_1H_1$  der Tracen  $m_1n_1$ ,  $M_1N_1$  ist gleich jenem  $hH$  der Tracen  $mn$ ,  $MN$ , nämlich  $= 2SA$ .

Aus den vorstehenden Gründen ergeben sich nun die folgenden Sätze:

Die orthogonale Projection eines parabolischen Schnittes auf einer Kreisschnittsebene desselben Rotationskegels ist eine Parabel, deren Brennpunkt im Mittelpunkte des Kreisschnittes liegt.

Jede Parabel kann als orthogonale Projection eines parabolischen Schnittes von einem Rotationskegel betrachtet werden, dessen Basis ein aus dem Brennpunkte der Parabel und in deren Ebene gezogener Kreis ist.

Ein parabolischer Cylinder und ein Rotationskegel, dessen Axe mit den Cylinderkanten parallel ist und durch den Brennpunkt eines Normalschnittes des Cylinders geht, schneiden sich nach Parabeln.

### 7. Hyperbolischer Schnitt $IAII$ . Taf. I, Fig. 9.

Die Kegelfläche  $SCD$  wird von der Scheittelebene ( $e$ ) nach den Kanten  $Si$ ,  $Sk$ , folglich von der Ebene  $e$  nach einer Hyperbel  $IAII$  geschnitten, deren Asymptoten  $Jo$ ,  $Ko$  mit den Kegelnanten  $Si$ ,  $Sk$  parallel sind.

Die Durchschnitte I, II der Trace  $MN$  mit der Kegelfläche  $CiD$  sind Punkte der Hyperbel. Weil die Gerade I II auf der Mittellinie  $Sh$  des Winkels  $iSk$  senkrecht steht und von derselben in  $H$  halbiert wird, und weil die Hyperbelaxe  $HA$  mit  $Sh$  parallel ist, so fallen hier wieder die Geraden  $Hd$  und  $Sh$  zusammen. Die Scheitel  $A, A_1$  der Hyperbel ergeben sich also als Schnitte der Kanten  $SC, SD$  mit der Ebene  $e$  oder mit der in  $e$  befindlichen Geraden  $Ho$ .

Um  $A, A_1$  zu finden, projiciren wir die drei Geraden  $SC, SD$  und  $Ho$  auf die Basisebene, in der zu der Ebene  $e$  parallelen, sonst beliebigen Richtung  $Sm$ , wodurch die schiefen Projectionen  $Cm, Dm$  und  $HM$  von den genannten Geraden und  $L, M$  von den Punkten  $A, A_1$  erhalten werden.

Demnach ergeben sich die Scheitel  $A, A_1$  durch schiefe Projection der Punkte  $L, M$  in der Richtung  $mS$  auf die Ebene  $SCD$ , oder als Durchschnitte der Geraden  $Ho$  mit den zu  $mS$  parallelen Geraden  $LA$  und  $MA_1$ .

Durch Halbiren der Strecke  $AA_1$  erhält man in  $o$  den Hyperbel-Mittelpunkt und dann können die Asymptoten  $oJ(\\|Si)$  und  $oK(\\|Sk)$  gezogen werden.

Weil die Tangenten  $iJ$  und  $kK$  des Kreises  $CiD$  die Bildtracen jener Ebenen sind, welche die Kegelfläche nach den Kanten  $Si Sk$ , berühren und die Ebene  $e$  nach den Asymptoten  $Jo, Ko$  schneiden; so treffen diese Tangenten die Trace  $MN$  in den Punkten  $J, K$  der Asymptoten. Es könnten also mit Benützung der Punkte  $J, K$  zuerst die Asymptoten und dann vermittelst dieser und eines der Punkte I, II die Scheitel  $A, A_1$  sowie beliebige Hyperbelpunkte ermittelt werden.

$S$  bildet wieder einen Brennpunkt der Hyperbel; denn bezeichnet  $2\alpha$  den Asymptotenwinkel  $JoK$  und  $2a$  die reelle Axe  $AA_1$ ; so findet man  $So = \frac{a}{\cos \alpha}$ .

Um dies zu beweisen, setzen wir den Basishalbmesser  $SC = SD = r$ , ferner  $SH = d$  und  $Sh = D = Si \cdot \cos \alpha = r \cos \alpha$ .

Aus der Zeichnung findet man:

$$DA : DS = DL : Dm = DH : Dh,$$

also

$$DA = \frac{DS \cdot DH}{Dh} = \frac{r(r+d)}{r+D} = \frac{r+d}{1+\cos \alpha};$$

ferner

$$CA_1 : CS = CM : Cm = CH : Ch;$$

also

$$CA_1 = \frac{CS \cdot CH}{Ch} = \frac{r(r-d)}{r-D} = \frac{r-d}{1-\cos \alpha}.$$

Dann findet man:

$$DA_1 = DC - CA_1 = 2r - \frac{r(r-d)}{r-D} = 2r - \frac{r-d}{1-\cos \alpha}$$

und

$$\begin{aligned} AA_1 &= DA - DA_1 = \frac{r(r+d)}{r+D} - 2r + \frac{r-d}{1-\cos \alpha} = \\ &= \frac{2(r\cos \alpha - d)\cos \alpha}{\sin^2 \alpha}; \end{aligned}$$

folglich ist:

$$a = \frac{1}{2}AA_1 = \frac{(r\cos \alpha - d)\cos \alpha}{\sin^2 \alpha}.$$

Es ist aber:

$$\begin{aligned} So &= SD - Do = r - oA_1 - DA_1 = \\ &= r - a - DA_1 = r - \frac{(r\cos \alpha - d)\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} - 2r + \frac{r-d}{1-\cos \alpha} \\ &= \frac{r\cos \alpha - d}{\sin^2 \alpha} = \frac{a}{\cos \alpha}, \end{aligned}$$

was nachzuweisen war.

Wird eine gegebene Hyperbel Taf. I, I A II Fig. 8, als orthogonale Projection einer Hyperbel  $H$  eines Rotationskegels betrachtet, dessen Basis der aus dem Brennpunkte  $S$  gezogene Kreis  $hID$  ist, dann können die Tracen  $MN$  und  $mn$  der Ebene  $e$  der Hyperbel  $H$  und der zu  $e$  parallelen Scheitelebene ( $e$ ) wie folgt gefunden werden.

Man ziehe durch den Brennpunkt  $S$  die Geraden  $Si \parallel oJ$  und  $Sk \parallel oK$ , d. s. die Durchschnitte der Kegelfläche mit der Ebene ( $e$ ), folglich ist durch  $i, k$  die Trace  $mn$  dieser Ebene bestimmt. Die Trace  $MN$  ist durch die Punkte I, II zu ziehen.

Wird als Kegelbasis ein nicht durch I, II gehender Kreis benützt, so hat man  $iJ \perp iS$  und  $kK \perp kS$  zu ziehen.  $iJ$ ,  $kK$  sind dann die Tracen der Ebenen, welche die Kegelfläche nach den Kanten  $Si$ ,  $Sk$  berühren und die Ebene  $e$  nach den Asymptoten  $Jo$ ,  $Ko$  schneiden, folglich ist durch  $J$ ,  $K$  die Trace  $MN$  der Ebene  $e$  bestimmt.

Errichtet man  $Sb \perp oJ$ , so ist bekanntlich die Strecke  $Sb$  gleich der imaginären Halbaxe  $b$  der Hyperbel.

Nun ist  $iJ = Sb = b$  und

$$Hh = iJ \sin iJH = iJ \sin \alpha = b \sin \alpha.$$

Der Abstand der beiden Tracen  $mn$ ,  $MN$  der Ebenen ( $e$ ) und  $e$  bleibt also derselbe, wenn auch der Halbmesser der Kegelbasis verändert wird, weshalb diese Eigenschaft mit Vortheil zur Bestimmung der Durchschnittspunkte von zur Axe  $AA_1$  senkrechten Geraden mit der Hyperbel, sowie überhaupt zur Darstellung von Punkten dieser Curve benützt werden kann.

Die Projection  $IAII$  entspricht auch einer Hyperbel  $H_1$  im zweiten Kegelmantel, deren Ebene  $e_1$  die Bildfläche in einer zu  $MN$  parallelen Geraden  $M_1N_1$  schneidet. Die Bildtrace  $m_1n_1$  der zu  $e_1$  parallelen Scheitelebene ( $e_1$ ) geht durch die zweiten Schnittpunkte  $i_1$ ,  $k_1$  der Geraden  $Si$ ,  $Sk$  mit der Basis  $CID$ .  $mn$  und  $m_1n_1$  haben also wieder gleiche Abstände von  $S$ . Auch ist der Abstand der Tracen  $m_1n_1$ ,  $M_1N_1$  gleich jenem der Tracen  $mn$ ,  $MN$ , d. h. es ist auch  $h_1H_1 = b \sin \alpha$ .  $MN$  und  $M_1N_1$  liegen beziehungsweise auf gleichen Seiten von  $mn$ ,  $m_1n_1$ .

Durch die vorstehend angeführten Gründe sind nun die folgenden Sätze erwiesen.

Die orthogonale Projection eines hyperbolischen Schnittes auf einer Kreisschnittsebene desselben Rotationskegels ist eine Hyperbel, für welche der Mittelpunkt des Kreisschnittes einen Brennpunkt bildet.

Jede Hyperbel kann als orthogonale Projection des Durchschnittes einer Ebene  $e$  mit einem Rotationskegel betrachtet werden, dessen Basis ein in der Ebene der Hyperbel und aus einem Brennpunkte derselben gezogener Kreis ist.

Ein hyperbolischer Cylinder und ein Rotationskegel, dessen Axe mit den Cylinderkanten parallel ist und durch einen Brennpunkt eines Normalchnittes des Cylinders geht, schneiden sich nach Hyperbeln.

### B. Construction der gemeinschaftlichen Punkte von Geraden und Linien der zweiten Ordnung.

7. Es sollen in Fig. 10 die Durchschnittspunkte I, II der Geraden  $ab$  mit der Ellipse  $AA_1 BB_1$ , deren Axen  $AA_1$ ,  $BB_1$  sind, construirt werden.

Man beschreibe aus dem Brennpunkte  $S$  der Ellipse den Kreis  $BB_1 D$ , errichte  $Bh \perp BS$  und  $mhn \perp AA_1$ .

Dann betrachte man den Kreis  $BB_1 D$  als Basis eines Rotationskegels und die Geraden  $mn$ ,  $MN(BB_1)$  als Bildtracen zweier parallelen Ebenen ( $e$ ),  $e$ , von denen ( $e$ ) durch den Kegelscheitel geht und  $e$  den Kegel nach der Ellipse  $ABB_1$  schneidet. Art. 6,  $\alpha$ . Ferner betrachte man  $ab$  als eine in der Ebene  $e$  liegende Gerade und folglich  $E$  als Durchschnittspunkt von  $ab$  mit der Bildfläche.

Demnach ergeben sich die fraglichen Punkte I, II als Durchschnitte der in der Ebene  $e$  gelegenen Geraden  $ab$  mit der Kegelfläche; um dieselben zu erhalten, lege man durch die Gerade  $ab$  und den Kegelscheitel  $S$  die Ebene  $Sab$ , welche also die Ebene ( $e$ ) in der zu  $ab$  Parallelen  $Sm$ , die Bildfläche in der Geraden  $mE$  und die Kegelfläche nach den Kanten  $S1$ ,  $S2$  schneidet. Dann treffen die Kanten  $S1$ ,  $S2$  die Gerade  $ab$  in den fraglichen Punkten I, II.

In der Figur sind nur die Geraden  $Sm \parallel ab$ ,  $m1 E2$ ,  $S1 I$  und  $S2 II$  zu ziehen, letztere beide bis sie  $ab$  in den Punkten I, II schneiden <sup>1</sup>).

8. In den Fig. 11, 12 bezeichnen  $A$  den Scheitel,  $AM$  die Axe und I einen Punkt der Parabel  $IAH$ , deren Durchschnitte mit der Geraden  $ab$  dargestellt werden sollen.

---

<sup>1</sup> Andere Aufösungen dieser Aufgabe finden sich in unseren Abhandlungen: Sitzb. der k. Akad. d. Wissensch. LII. Bd. 1865 und Febr.-Heft 1868.

Man bestimme zuerst den Brennpunkt  $S$  der Parabel  $IAM$   $IH \perp AS$ ,  $AD = AH$ ,  $Ih \perp ID$ ,  $AS = \frac{1}{2} Hh$ , ziehe aus  $S$  den Kreis  $IhD$  und an denselben die zu  $AS$  senkrechte Tangente  $mn$ .

Dann betrachte man den Kreis als Basis eines Rotationskegels und die Geraden  $MN$ ,  $mn$  als Bildtracen zweier parallelen Ebenen  $e$ ,  $(e)$ , von denen  $e$  den Kegel nach der Parabel  $IAII$  schneidet und  $(e)$  denselben längs der Kante  $Sh$  berührt; ferner betrachte man die Gerade  $ab$  als in der Ebene  $e$  liegend, folglich  $E$  als ihren Durchschnittspunkt mit der Bildfläche.

Unter diesen Voraussetzungen erhält man die verlangten Begegnungspunkte III, IV als Durchschnitte der in der Ebene  $e$  befindlichen Geraden  $ab$  mit der Kegelfläche und hat also in Fig. 10 nur die Geraden  $Su \parallel ab$ ,  $n3 EA$ ,  $S3III$  und  $S4IV$  zu ziehen.

Wenn die Geraden  $ab$  und  $MN$  einen sehr kleinen Winkel einschliessen, oder wenn die Durchschnittspunkte von  $ab$ ,  $MN$  und von  $Su$ ,  $mn$  nicht auf die Zeichnungsfläche fallen, kann die Bildtrace 3 4 der Ebene  $Sab$ , Fig. 12, wie folgt gefunden werden.

Man ziehe in der Ebene  $e$  durch den Punkt  $A$  eine Gerade, welche  $ab$  in  $c$  und  $MN$  in  $E$  trifft, lege durch dieselbe und den Kegelscheitel  $S$  die Ebene  $SAE$ , deren Bildtrace  $ED$  ist; dann bestimme man den Durchschnittspunkt  $\gamma$  der Geraden  $Sc$  mit  $ED$ , welcher offenbar der fraglichen Trace 3 4 angehört.

Ein zweiter Punkt  $\delta$  der Trace 3 4 kann entweder auf dieselbe Weise wie 3, oder aber mit Rücksichtnahme auf den Umstand dargestellt werden, dass 3 4 durch den (nicht vorhandenen) Schnittpunkt der Geraden  $ab$  und  $MN$  geht. Man ziehe also etwa  $Fe \parallel Ec$ ,  $F\delta \parallel E\gamma$  und  $e\delta \parallel c\gamma$ .

Die Durchschnittspunkte einer zu der Parabelaxe  $AM$  senkrechten Geraden, welche von  $S$  den Abstand  $d$  hat, haben von  $S$  den Abstand  $d + 2 AS$ . Art. 6,  $\beta$ .

In Fig. 11 ist der Fall dargestellt, wenn die Gerade  $a_1 b_1$  mit der Parabelaxe parallel ist, welche Gerade die Parabel nur in einem Punkte  $V$  schneidet. Die Ebene  $Sa_1 b_1$  enthält die zu  $a_1 b_1$  parallele Kegelkante  $Sh$ ; sie schneidet die Bildfläche in der Geraden  $hM$  und die Kegelfläche ausser in  $Sh$  auch noch in der Geraden  $S5$  und diese Gerade trifft  $a_1 b_1$  im Punkte  $V$ .

Aus derselben Figur ist zugleich zu ersehen, auf welche einfache Weise die Durchschnitte IV, V einer durch den Parabel-

scheitel gehenden Geraden  $4S5$  mit der Parabel ermittelt werden können.

Man betrachte die Stücke  $S4$ ,  $S5$  der Geraden  $4S5$  als Kegelkanten und bestimme deren Durchschnitte  $IV$ ,  $V$  mit der Ebene  $e$ , indem man durch  $S4$ ,  $Sh$  die Ebene  $S4h$  und durch  $S5$ ,  $Sh$  die Ebene  $S5h$  legt und diese beiden Ebenen mit der Ebene  $e$  zum Durchschnitte bringt, wodurch die mit  $Sh$  parallelen Geraden  $FIV$ ,  $MV$  erhalten werden, welche  $4S5$  in den Punkten  $IV$ ,  $V$  treffen. Statt  $h$  kann aber auch ein beliebiger Punkt der Trace  $mn$  in derselben Weise benützt werden.

Würden sich die Geraden  $ab$ ,  $S3$  oder  $ab$ ,  $S4$  unter sehr spitzen Winkeln schneiden und deshalb die Punkte  $III$ ,  $IV$  nicht genau ergeben, so könnten diese Punkte als Durchschnitte der Kegelkanten  $S3$ ,  $S4$  mit der Ebene  $e$  nach dem zuvor angegebenen Verfahren genau gefunden werden.

9. Es soll durch einen ausserhalb der Parabel  $IAII$  Taf. II Fig. 13 liegenden Punkt  $p$  eine Tangente  $pIII$  an dieselbe gezogen werden.

Man betrachte  $p$  als einen Punkt der Ebene  $e$  (Art. 8) und die Tangente  $pIII$  als Durchschnittslinie der Ebene  $e$  mit der durch die Gerade  $Sp$  gelegten Berührungsebene der Kegelfläche  $Shp$ .

Man bestimme zuerst den Durchschnittpunkt  $P$  der Geraden  $Sp$  mit der Bildfläche, indem man durch  $Sp$  und  $Sh$  eine Ebene legt, welche  $e$  in der zu  $Sh$  Parallelen  $pq$  und die Bildfläche in der Geraden  $hqP$  schneidet; folglich wird  $P$  im Durchschnitte der Geraden  $Sp$  und  $hq$  erhalten. Dann ziehe man die Tangente  $P3$  des Kreises  $IhD$  als Bildtrace der Berührungsebene  $Spn$ ; diese Ebene schneidet die Ebene ( $e$ ) in der Geraden  $nS$  und die Ebene  $e$  in der zu  $Sn$  Parallelen  $NpIII$ , d. i. aber die fragliche Tangente.

Weil die Kegelfläche von der Ebene  $SNP$  längs der Kante  $S3$  berührt und  $Np$  von  $S3$  in  $III$  geschnitten wird; so ist  $III$  der Berührungspunkt der Parabel-Tangente  $Np$ .

Zur Bestimmung dieser Tangente genügen selbstverständlich schon die Punkte  $N$ ,  $p$ , wenn aber  $N$ ,  $p$  sehr nahe aneinander fallen, dann wird man jedenfalls die Lage von  $Np$  durch Benützung der Richtung von  $Sn$  genauer als ohne diese bestimmen können. Die zweite durch  $p$  gehende Parabel-Tangente ergibt sich auf

gleiche Weise vermittelt der zweiten Tangente, welche an die Kegelbasis durch den Punkt  $P$  gezogen werden kann.

10. Construction der mit einer Geraden  $\alpha\beta$  parallelen Tangente  $MIV$  der Parabel  $IAII$  Fig. 13.

Man betrachte  $\alpha\beta$  als eine in der Ebene  $e$  befindliche Gerade und die fragliche Tangente  $MIV$  als Durchschnittslinie der Ebene  $e$  mit der zu  $\alpha\beta$  parallelen Berührungsebene  $Sm4$  der Kegelfläche. (Art. 8.) Diese Ebene  $Sm4$  schneidet die Scheitelebene ( $e$ ) in der zu  $\alpha\beta$  parallelen Geraden  $Sm$  und hat als Bildtrace die Tangente  $m4$  der Kegelbasis  $IhD$ ; sie schneidet also die Ebene  $e$  in der zu  $\alpha\beta$  parallelen Geraden  $MIV$  und berührt die Kegelfläche längs der Kante  $S4$ . Darum ergibt sich der Berührungspunkt  $IV$  der Parabel-Tangente  $MIV$  im Durchschnitte derselben mit der Kante  $S4$ .

11. Die Hyperbel  $IAS$ , Fig. 14, ist durch den Brennpunkt  $S$ , den Umfangspunkt  $I$  und die Richtungen  $R$ ,  $(R)$  ihrer Asymptoten gegeben. Es sollen die Durchschnittspunkte dieser Hyperbel mit der Geraden  $ab$  construirt werden.

Man ziehe aus dem Brennpunkte  $S$  den Kreis  $ICD$ , ferner die Geraden  $Si \parallel R$ ,  $Sk \parallel (R)$ , die Hyperbelaxe  $SC \perp ik$  und  $II \parallel ik$ .

Nun betrachte man den Kreis als Basis eines Rotationskegels  $SID$ , die Geraden  $mn$ ,  $MN$  als Bildtracen zweier parallelen Ebenen ( $e$ ),  $e$ , von denen ( $e$ ) durch den Kegelscheitel  $S$  geht, folglich die Kegelkanten  $Si$ ,  $Sk$  enthält und  $e$  den Kegel nach einer Hyperbel ( $H$ ) schneidet, deren orthogonale Projection die gegebene Hyperbel  $ISII$  bildet. Art. 6,  $\gamma$ . Ferner betrachte man die Gerade  $ab$  als Projection einer in der Ebene  $e$  gelegenen Geraden, deren Durchschnittspunkt  $N$  mit der Bildfläche in der Trace  $MN$  liegt.

Dieser Betrachtung zufolge bilden die fraglichen Punkte  $III$ ,  $IV$  die Durchschnitte der Geraden  $ab$  mit der Kegelfläche und können als solche leicht gefunden werden.

Man hat nämlich in der Fig. 14 nur die Geraden  $Sn \parallel ab$ ,  $3Nn4$ ,  $3SIII$  und  $4SIV$  zu ziehen, bis letztere beide  $ab$  in  $III$ ,  $IV$  treffen.

Wie die speciellen Fälle gelöst werden können, wenn die Gerade, deren Durchschnitte mit einer Hyperbel construirt werden sollen, zur Axe  $AS$  parallel steht, wenn sie zur Axe  $AS$  parallel ist, und wenn sie durch den Brennpunkt  $S$  geht, ist mit Bezugnahme auf das Vorausgeschickte nun leicht aus den bezüglichen Figuren zu ersehen.

12. Bestimmung der Tangenten, welche durch den, ausserhalb einer nicht gezeichneten Hyperbel gelegenen Punkt  $p$  an diese gezogen werden sollen.

Die fraglichen Tangenten können in ähnlicher Weise wie die Parabeltangente  $p$  III, Fig. 13, gefunden werden, wenn man  $p$  als einen Punkt der Ebene  $e$  betrachtet und die Durchschnitte der Ebene  $e$  mit den durch  $p$  gelegten Berührungsebenen des Kegels bestimmt.

13. Bestimmung der Tangenten, welche parallel zu einer Geraden  $\alpha\beta$  an eine nicht gezeichnete Hyperbel gezogen werden können.

Eine von den beiden Tangenten kann auf gleiche Weise wie die Tangente  $MIV$  der Parabel in Fig. 13 construirt werden. Die zweite Tangente  $TV$  kann dann dadurch erhalten werden, dass man durch den Berührungspunkt  $IV$  der ersten Tangente den Hyperbel-Durchmesser  $IVoV$  zieht,  $oV = oIV$  macht und endlich  $VT \parallel \alpha\beta$  führt.  $V$  ist nämlich der Berührungspunkt der zweiten Tangente  $TV$ .

14. Die angegebenen Methoden zur Bestimmung der Durchschnitte von Geraden mit Kegelschnittslinien und der Tangenten an die letzteren können auch zur Darstellung solcher Linien selbst benützt werden. Zu den einfachsten Constructionen dieser Art gehören jene der Parabel  $AS$  Fig. 8 und der Hyperbel  $SoJK$  Fig. 9.

Um die Punkte I II III IV der durch den Scheitel  $A$  und den Brennpunkt  $S$  bestimmten Parabel zu erhalten, wurden aus  $S$  beliebige Kreisbögen  $Ih$  II, III  $gIV$  beschrieben,  $hH = gG = \dots 2SA$  gemacht und durch die Punkte  $HG$  die zu  $AS$  senkrechten Geraden I II, III (IV) gezogen.

Zum Behufe der Darstellung der Punkte I, II der durch die Asymptoten  $oJ$ ,  $oK$  und den Brennpunkt  $S$  gegebenen Hyperbel

wurden zuerst die Geraden  $Si_{||}oJ$ ,  $Sk_{||}oK$  und aus  $S$  die beliebigen Kreisbögen  $I k II$ ,  $III g IV$  gezogen und dann beziehungsweise auf  $oJ$  und  $oS$  die Senkrechten  $kK$ ,  $gG$   $KI II$ ,  $G III IV$  errichtet.

### **C. Construction der Durchschnittspunkte zweier Linien der zweiten Ordnung $L$ , $L_1$ , welche in einer Ebene $E$ liegen und einen oder beide Brennpunkte gemeinschaftlich haben<sup>1</sup>.**

Man betrachte  $L$ ,  $L_1$  als Leitlinien zweier zur Ebene  $E$  senkrechten Cylinderflächen und schneide diese durch eine Rotationskegelfläche, deren Basis ein aus dem gemeinschaftlichen Brennpunkte  $S$  von  $L$ ,  $L_1$  gezogener Kreis ist. Die sich ergebenden Durchschnitte sind ebene Curven  $(L)$ ,  $(L_1)$  und  $[L]$ ,  $[L_1]$  von derselben Art wie die bezüglichlichen Leitlinien  $L$ ,  $L_1$ . (Art. 6,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ .)

Die ein und demselben Mantel des Kegels angehörigen Linien  $(L)$ ,  $(L_1)$  oder  $[L]$ ,  $[L_1]$  werden gemeinschaftliche Punkte haben, wenn  $L$ ,  $L_1$  solche Punkte besitzen und zwar werden die letzteren die orthogonalen Projectionen der ersteren Punkte bilden.

Haben  $(L)$ ,  $(L_1)$  die Punkte (I), (II) gemeinschaftlich, dann sind (I), (II) Schnittpunkte der Begegnungslinie der Ebenen  $e$ ,  $e_1$  von  $(L)$ ,  $(L_1)$  mit der Kegelfläche; dann hat auch die Gerade I II als Projection von (I)(II) mit den Curven  $L$ ,  $L_1$  die Punkte I, II gemeinschaftlich.

Nach dem Art. 6,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  können die Tracen  $MN$ ,  $M_1N_1$  der Ebenen  $e$ ,  $e_1$ , sowie die Tracen  $mn$ ,  $m_1n_1$  der beziehungsweise mit  $e$  und  $e_1$ , parallelen Scheitelebenen  $(e)$ ,  $(e_1)$  dargestellt werden, wenn nur die bezüglichlichen Bestimmungsstücke der Linien  $L$ ,  $L_1$  bekannt sind und die Kegelbasis gewählt ist. Sobald aber die genannten Tracen dargestellt sind, ist man auch im Stande, die orthogonale Projection I II der Durchschnittslinie (I) (II), sowie nach Art. 7, 8, 11 die Punkte I, II zu finden,

---

<sup>1</sup> Siehe auch unsere Abhandlungen: „Über die Construction der Durchschnittspunkte von Kreisen und Kegelschnittslinien“, sowie: Über die Construction der Durchschnittspunkte zweier Kegelschnittslinien. Sitzb. d. k. Akad. d. Wissensch. Jännerheft 1869 und Märzheft 1869.

welche letztere die Gerade  $I II$  und die beiden Linien  $L, L_1$  gemeinschaftlich haben.

Bezeichnen  $d, D$  die Durchschnittspunkte der Tracen  $mn, m_1 n_1$  und  $MN, M_1 N_1$ , dann ist  $dS$  die Projection der Durchschnittslinie der Ebenen  $(e), (e_1)$  und  $DI II || dS$  die Projection der Durchschnittslinie (I)(II) der Ebenen  $e, e_1$ .

Wenn  $L, L_1$  eine Ellipse und eine Parabel, oder zwei Ellipsen, oder zwei Parabeln vorstellen, dann liegen  $(L), (L_1)$  auf einem und  $[L], [L_1]$  auf dem anderen Mantel des Kegels und es schneiden sich die Ebenen von  $(L), (L_1)$  in der Geraden (I)(II) sowie die Ebenen von  $[L], [L_1]$  in der Geraden [I] [II]. Die beiden Geraden (I)(II), [I] [II] liegen in einer zur Kegelbasis senkrechten Ebene und bilden deshalb ihre orthogonalen Projectionen nur eine Gerade. Die Kegelfläche wird von der Geraden (I)(II) in den Punkten (I), (II) und von der Geraden [I] [II] in den Punkten [I], [II] so geschnitten, dass die orthogonalen Projectionen von (I), [I] der Punkt I und jene von (II), [II] der Punkt II bildet.

Daraus ist zu entnehmen, dass zwei Ellipsen, zwei Parabeln, oder eine Ellipse und eine Parabel, die einen gemeinschaftlichen Brennpunkt haben, nicht mehr als einen gemeinschaftlichen Berührungspunkt oder zwei gemeinschaftliche Schnittpunkte besitzen können.

Ist eine von den gegebenen Linien, etwa  $L_1$ , eine Hyperbel, dann ergeben sich als Durchschnitte des hyperbolischen Cylinders mit der Kegelfläche zwei Hyperbeln  $(L_1)$  und  $[L_1]$  folglich auf jedem Kegelmantel zwei verschiedene Hyperbeläste.

Um also die gemeinsamen Punkte der Linien  $L, L_1$  zu erhalten, wird man die orthogonalen Projectionen der gemeinschaftlichen Punkte zweier solcher Hyperbeläste mit der betreffenden Linie  $(L)$  desselben Kegelmantels auf der Ebene der Kegelbasis zu construiren haben.

Wenn aber beide Linien  $L, L_1$  Hyperbeln sind, so schneiden die beiden hyperbolischen Cylinder jeden Mantel der Kegelfläche nach 4 hyperbolischen Ästen, von denen jedoch nur je zwei nicht demselben Cylinder angehörige auch gemeinschaftliche Punkte haben können.

Die gemeinsamen Punkte der Hyperbeln  $L, L_1$  werden demnach erhalten, wenn man die Durchschnits- oder Berührungspunkte

(I) der Begegnungsgeraden je zweier Ebenen verschiedener Hyperbeln mit der Kegelfläche auf die Ebene der Kegelbasis orthogonal projicirt.

Nach dem zuvor angegebenen Verfahren wurden die Durchschnitte I, II der Ellipsen  $AA_1 BB_1$ ,  $aa_1 bb_1$  Fig. 15, die Durchschnitte I, II der Ellipse  $AA_1 BB_1$  mit der Parabel  $Sa$  Fig. 16 und die Durchschnitte I, II, III, IV der Ellipse  $AA_1 BB_1$  mit der Hyperbel  $Saa_1$  Fig. 17 construirt.

$A, A_1, a, a_1$  sind die Scheitel und  $S$  ist ein gemeinschaftlicher Brennpunkt der genannten Linien. Der aus  $S$  gezogene Kreis  $S12$  wurde als Basis des Rotationskegels benützt.

In Fig. 15 ist  $DI II$  ( $\parallel dS$ ) die Durchschnittslinie der Ebenen  $e, e_1$  der Ellipsen  $ABB_1$  und  $abb_1$ ; die Ebene  $SdD II$  schneidet die Kegelfläche nach den Kanten  $1S, 2S$  und diese treffen  $DII$  in den Punkten I, II, welche zugleich den beiden Ellipsen angehören.

In Fig. 16 ist  $D I II$  ( $\parallel dS$ ) die Durchschnittslinie der Ebenen  $e, e_1$  der Ellipse  $ABB_1$  und der Parabel  $Sa$ . Die Ebene  $SdDII$  schneidet die Kegelfläche nach den Kanten  $S1, S2$  und diese schneiden wieder die Gerade  $DII$  in den gemeinschaftlichen Punkten I, II der Ellipse und der Parabel.

In Fig. 17 ist  $DI II$  ( $\parallel dS$ ) die Begegnungslinie der Ebenen  $e, e_1$  der Ellipse  $ABB_1$  und der Hyperbel  $Saa_1$ . Die Ebene  $SDdII$  schneidet die Kegelfläche in den Kanten  $S1, S2$  und diese schneiden wieder die Gerade  $dII$  in den Punkten I, II, welche also die Ellipse  $ABB_1$  und den Hyperbelast  $Sa$  gemeinschaftlich haben.  $D_1 IH IV$  ( $\parallel d_1 S$ ) ist aber die Durchschnittslinie der Ebenen  $e, e_2$  der Ellipse  $ABB_1$  und der Hyperbel  $Saa_1$ . Die Ebene  $SD_1 d_1 IV$  schneidet die Kegelfläche in den Kanten  $S3, S4$ , weshalb diese wieder die Gerade  $D_1 IV$  in den Punkten III, IV treffen, welche Punkte also der Ellipse und dem Hyperbelaste  $Sa_1$  angehören.

Es ist leicht einzusehen, dass wenn  $e_1$  als Ebene der Hyperbel  $Saa_1$  angenommen wird, der Ast  $Sa_1$  auf dem unteren und der Ast  $Sa$  auf dem oberen Kegelmantel liegt, und wenn  $e_2$  die Ebene der Hyperbel  $Saa_1$  vorstellt, wieder der Ast  $Sa$  dem unteren, hingegen der Ast  $Sa_1$  dem oberen Kegelmantel angehört.

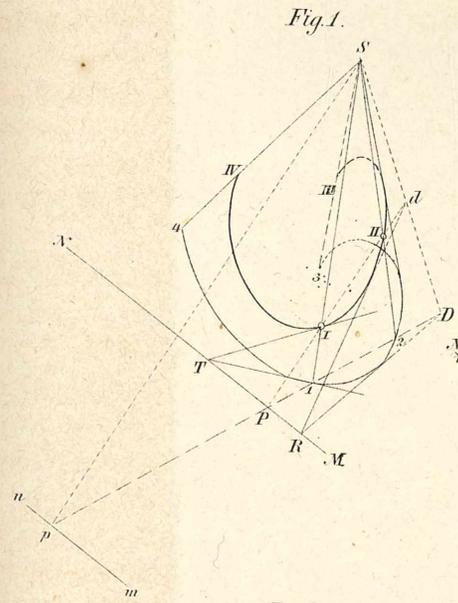


Fig. 1.

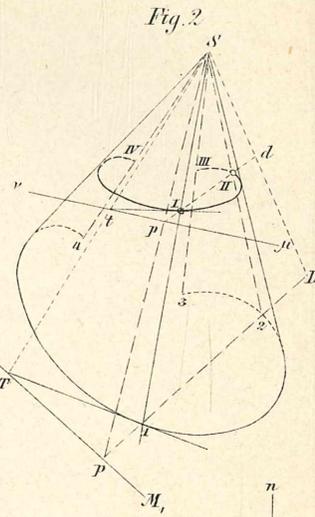


Fig. 2.

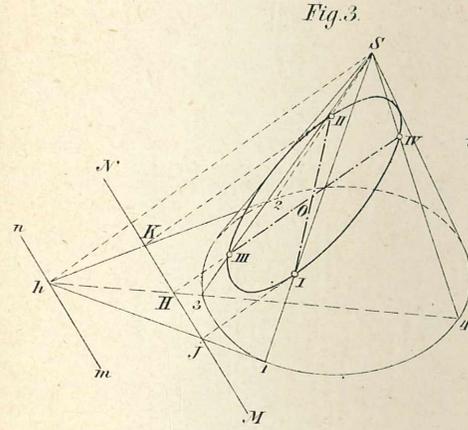


Fig. 3.

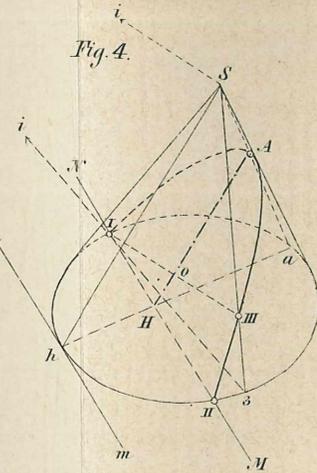


Fig. 4.

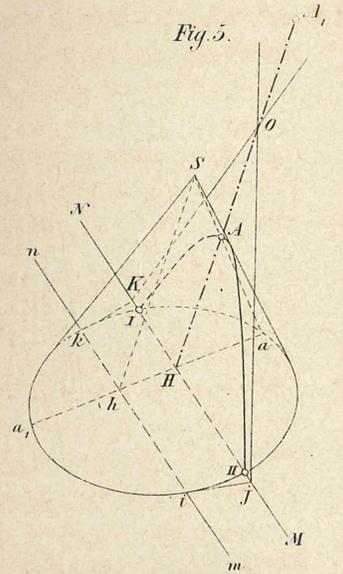


Fig. 5.

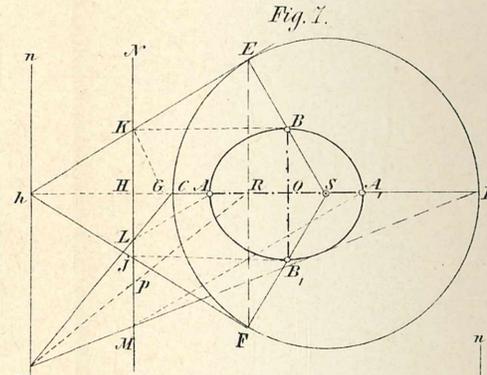


Fig. 7.

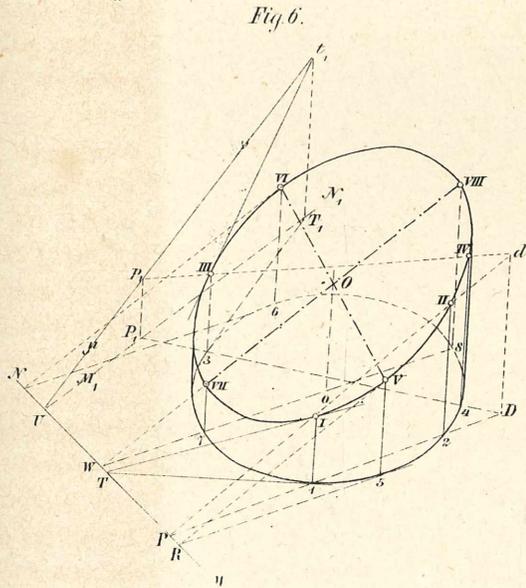


Fig. 6.

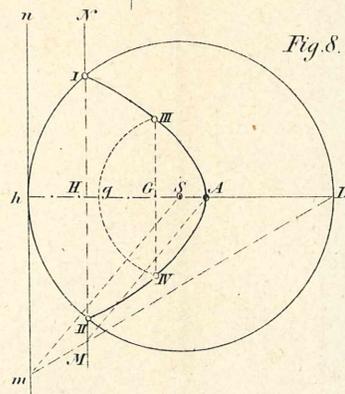


Fig. 8.

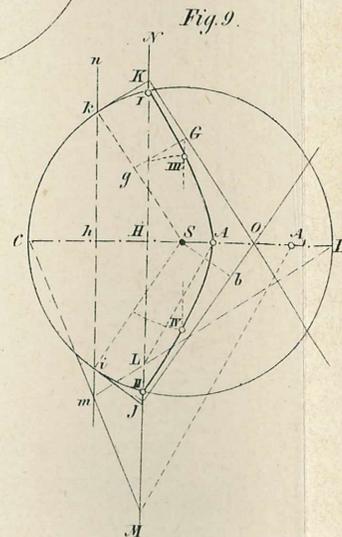


Fig. 9.

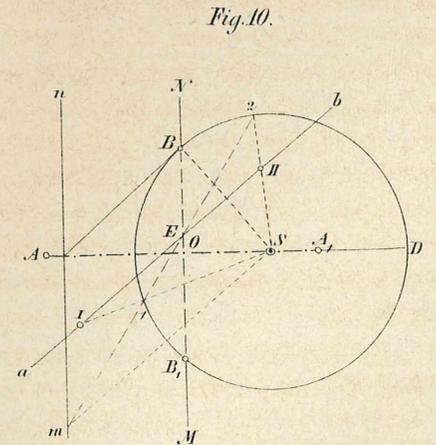


Fig. 10.

Fig. 15.

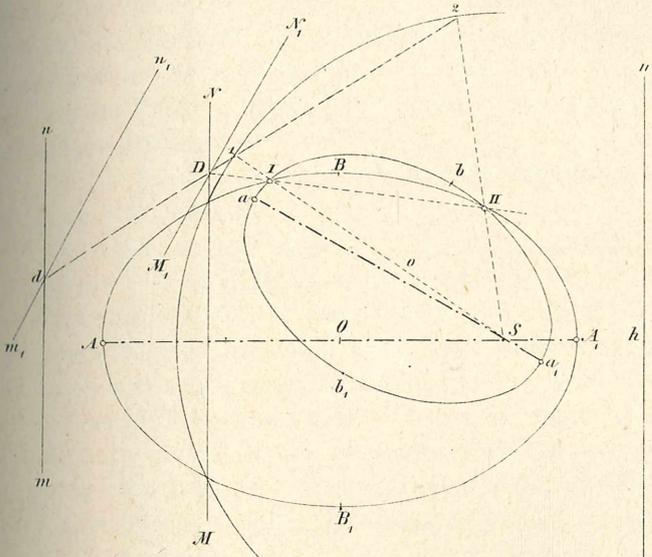


Fig. 17.

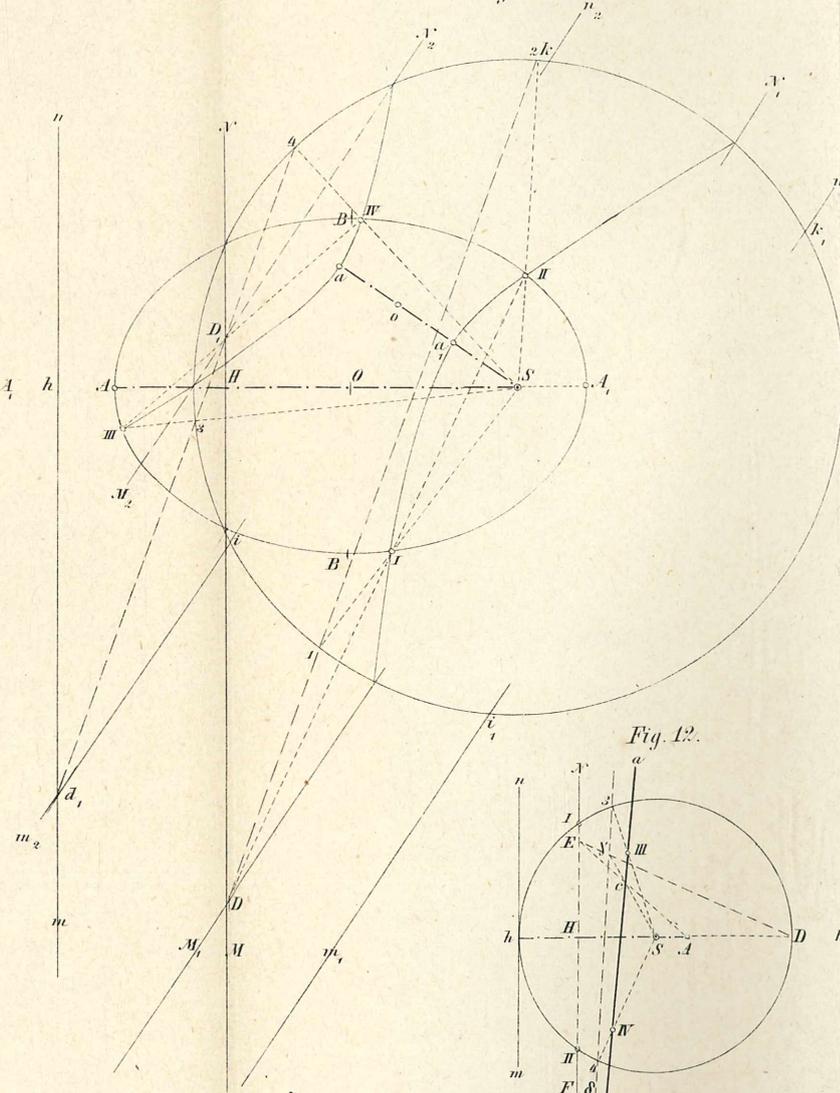


Fig. 16.

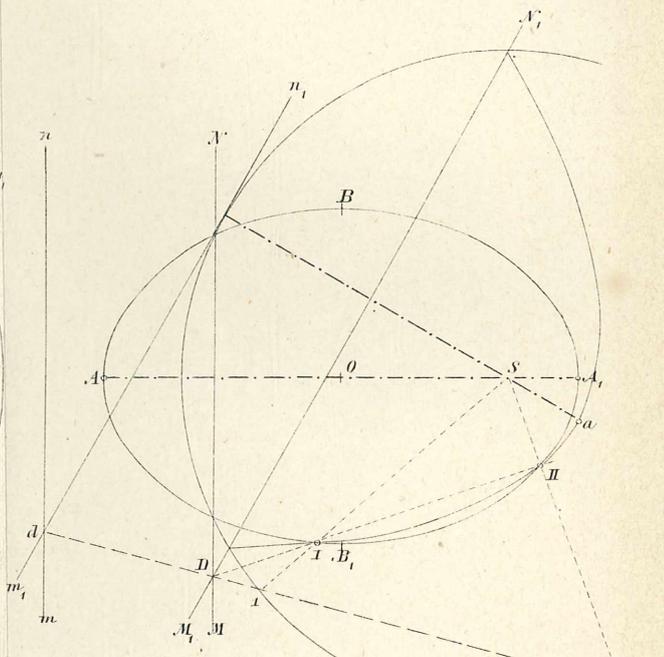


Fig. 11.

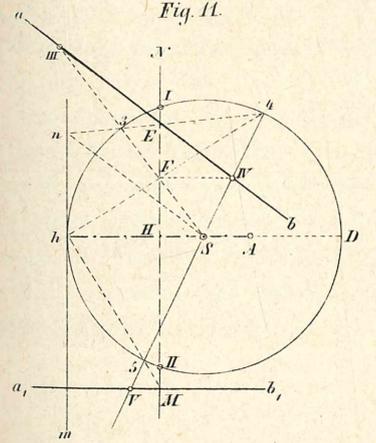


Fig. 12.

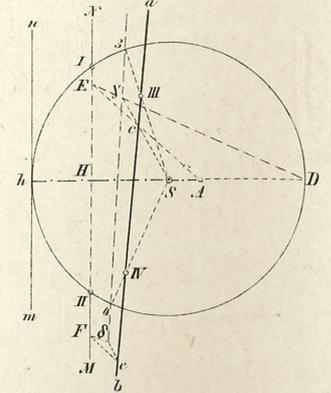


Fig. 13.

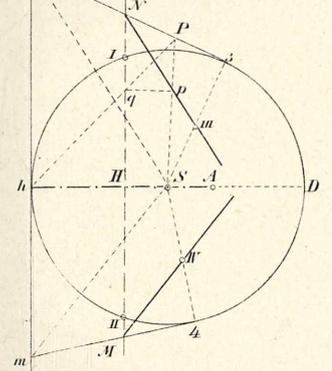
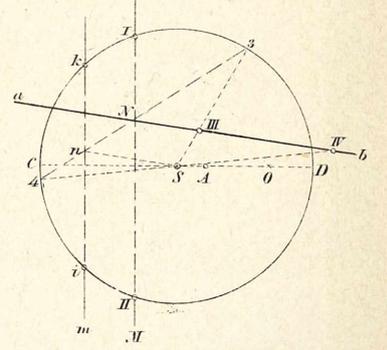


Fig. 14.





Wenn die Durchschnittspunkte  $d$ ,  $D$  der Tracen  $mn$ ,  $m_1 n_1$  und  $MN$ ,  $M_1 N_1$  nicht benützt werden können, so lege man durch  $S$  eine Ebene, welche der Reihe nach die Tracen  $mn$ ,  $MN$ ,  $m_1 n_1$ ,  $M_1 N_1$  in den Punkten  $f$ ,  $F$ ,  $f_1$ ,  $F_1$  und die Ebenen  $(e)$ ,  $e$ ,  $(e_1)$   $e_1$ , in den Geraden  $Sf$ ,  $F\delta$  ( $\parallel Sf$ )  $Sf_1$ ,  $F_1\delta$  ( $\parallel Sf_1$ ) schneidet; dann ergibt sich im Durchschnitte der Geraden  $F\delta$   $F_1\delta$  ein Punkt  $\delta$  der Begegnungslinien  $DII$  der Ebenen  $e$ ,  $e_1$ . Auf dieselbe Weise kann ein zweiter Punkt  $\delta_1$  dieser Linie gefunden und dann also diese selbst gezogen werden.

Die im Art. 6,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  aufgestellten 9 Sätze lassen sich durch folgende 3 ausdrücken.

1. Die orthogonale Projection eines ebenen Schnittes einer Rotations-Kegelfläche auf einer Kreisschnittsebene derselben Fläche ist eine Linie zweiter Ordnung, für welche das Centrum des Kreisschnittes einen Brennpunkt bildet.

2. Jede Linie zweiter Ordnung kann als orthogonale Projection des Durchchnittes einer Ebene mit einer Rotations-Kegelfläche betrachtet werden, deren Basis ein aus einem Brennpunkte jener Linie und in deren Ebene gezogener Kreis ist.

3. Ein Cylinder zweiter Ordnung und ein Rotationskegel, dessen Axe in einer Brennnlinie des Cylinders liegt, schneiden sich in ebenen Linien.

Zur Wahrung der Priorität sei mir die Bemerkung gestattet, dass ich in meinen Vorträgen über darstellende Geometrie alle einschlägigen Aufgaben, die sich in einer Projection lösen lassen, in der Allgemeinheit behandle, wie hier die betreffenden Aufgaben über Kegel- und Cylinderflächen, sowie im Februar-Hefte 1868 und März-Heft 1870 der Sitzungsberichte der kais. Akad. d. Wissensch. die Flächen, deren zu einer Axe senkrechte Schnitte ähnliche Ellipsen sind, und die windschiefen Hyperboloide und Paraboloiden behandelt wurden.