

Beschreibung der Parabel aus gegebenen Punkten und Tangenten.

Von **Emil Koutny,**
Professor an der technischen Hochschule in Graz.

(Mit 1 Tafel.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 27. April 1871.)

§. 1.

Einleitung.

Als Anschluss an meine im 57. Bande der Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften veröffentlichte Abhandlung über die Construction der Kegelschnitte aus gegebenen Punkten und Tangenten will ich im Nachfolgenden nach denselben Grundsätzen ein zweites ähnliches Problem lösen, nämlich aus gleichen Bestimmungsstücken die Parabel verzeichnen.

Durch die Annahme der Gattung der Curve[1] entfällt hier eines der fünf Bestimmungsstücke, so dass zur Beschreibung der Parabel

1. vier gegebene Punkte derselben,
2. drei Punkte und eine Tangente,
3. zwei Punkte, eine Tangente und ihr Berührungspunkt,
4. zwei Punkte und zwei Tangenten,
5. ein Punkt, zwei Tangenten und ein Berührungspunkt,
6. zwei Tangenten und deren Berührungspunkte,
7. ein Punkt und drei Tangenten,
8. drei Tangenten und ein Berührungspunkt, endlich
9. vier Tangenten

genügen. Dies erhellt auch schon aus dem Umstande, dass in jedem dieser Fälle eine Tangente in unendlicher Entfernung

[1] Dies ist eben nur bei der Parabel der Fall.

liegend gedacht werden kann, welche das fünfte Bestimmungsstück des Kegelschnittes repräsentirt.

Bezüglich der angeführten neun Auflösungsfälle sei hier gleich bemerkt, dass die zu verzeichnende Parabel stets als centrale Projection eines Kreises gedacht und als solche construirt werden wird, dass daher die in die Bildfläche gedrehte Distanztrace der Kreisebene den in gleicher Weise umgelegten Grundkreis berühren muss, der Radius des letzteren somit zugleich die Augdistanz liefert, wenn der Mittelpunkt in der Bildfläche liegend angenommen wird.

Dies vorausgeschickt, wollen wir nun zur Durchführung der verschiedenen Fälle selbst übergehen.

§. 2.

Gegeben vier Punkte.

Sind die Punkte 1, 2, 3 und 4 Fig. 1 der Parabel gegeben, so betrachte man das durch dieselben gebildete Viereck als Perspective eines dem Grundkreise eingeschriebenen Rechteckes, ziehe somit die Fluchtlinie E_v seiner Ebene durch die Convergenzpunkte v und v_1 je zweier Gegenseiten und beschreibe über dem Durchmesser vv_1 den Halbkreis vOX, der bekanntlich den um E_v in die Bildfläche gelegten Pol des Projectionssystems, den Gesichtspunkt O enthält. Um nun diesen selbst zu finden, bedenke man, dass $v3v_1$ die Projection eines rechten Winkels ist, welcher um die Bildflächtrace E_b der Kreisebene (die wir hier wieder durch den Durchschnittspunkt c der Diagonalen 13, 24 des Vierecks parallel zu E_v annehmen wollen) in die Bildfläche gelegt, seinen Scheitel im Kreise $\varkappa$ hat, weil die in der Bildflächtrace gelegenen Punkte a und b der Schenkel bei der Drehung ungeändert bleiben, also einen Durchmesser des Kreises $\varkappa$ angeben.

Wäre z. B. O der Gesichtspunkt, so müsste bm, durch b parallel zu vO gezogen, im Durchschnitte m mit dem Kreise $\varkappa$ den Scheitel, daher auch in cm den Radius des Grundkreises K bestimmen, welcher, wie schon in §. 1 bemerkt, der Augdistanz AO gleich sein müsste.

Aus dem eben Gesagten folgt nun einfach der Ort des Gesichtspunktes. Nehmen wir v zum Ursprung und E_v zur X-Axe eines rechtwinkeligen Coordinatensystems in der Ebene an, setzen die Längen $vv_1 = 2R$, $ab = 2r$, $Av = x$, $AO = y$, $bc = m$, so ist

$$x^2 + y^2 = 2Rx \tag{1}$$

die Gleichung des Kreises vOX.

Aus den ähnlichen Dreiecken bma und v_1vO ergibt sich ferner

$$bm' = \frac{r}{R}x$$

$$mm' = \frac{r}{R}y,$$

folglich

$$cm = \sqrt{\overline{cm'}^2 + \overline{mm'}^2} = \sqrt{\left(m - \frac{r}{R}x\right)^2 + \frac{r^2}{R^2}y^2} = AO = y.$$

Hieraus ist

$$r^2\left[\left(\frac{mR}{r} - x\right)^2 + y^2\right] = R^2y^2$$

oder

$$y = \pm\frac{r}{\sqrt{R^2 - r^2}}\left(x - \frac{mR}{r}\right) \tag{I}$$

Da nun x und y die Coordinaten des zu suchenden Punktes sind, so folgt aus den beiden Gleichungen (1) und (I), dass dieser im Durchschnitte des Kreises vOX mit den beiden Geraden (I) erhalten wird, welch' letztere die Fluchtlinie E_v in der Entfernung $pv = \frac{mR}{r}$ vom Punkte v (gegen v_1 zu) treffen und gegen dieselbe zu beiden Seiten vor p eine gleiche Neigung φ besitzen. Da sich hiedurch vier Durchschnittspunkte ergeben, von welchen je zwei in einer auf E_v senkrechten Geraden liegen, so ist ersichtlich, dass im Halbkreise vOX zwei verschiedene Orte des Gesichtspunktes erhalten werden.

Nimmt man also, weil die Länge R in den meisten Fällen nicht benützt werden kann, z. B. $vm_1 = \frac{1}{2}R$, beschreibt über vm_1 als Durchmesser den Halbkreis m_1nv und durchschneidet denselben aus dem Mittelpunkte m_1 mit einem Kreisbogen vom Halbmesser $\frac{1}{2}r = \frac{1}{4}ab$, so ist $\sphericalangle n v m_1 = \sphericalangle \varphi$. Man hat demnach nur noch vp auf bekannte Weise als vierte geometrische Proportionale zu den Längen m_1n, m_1v und bc zu construiren, nach vp zu übertragen und durch p eine zu vn parallele Gerade (I) zu ziehen; letztere schneidet den Kreis vOX in zwei Punkten ω, von welchen in der Figur der eine ausser die Zeichnungsfläche, der andere hingegen nach entgegengesetzter Seite der Fluchtlinie fällt, für die Construction somit nach O ($\omega v = vO$) übertragen werden muss, und bestimmt in diesen die Gesichtspunkte zweier Projectionssysteme, auf Grundlage deren auch zwei Parabeln $PP, P'P'$, den Bedingungen der Aufgabe Genüge leistend, erhalten werden.

Die Augdistanzen $AO, A'O'$ geben, wie bereits erwähnt, die Radien der bezüglichen Grundkreise, welche, aus dem Mittelpunkte c beschrieben, die Trace E_b in den Punkten α, β, resp. $\alpha'\beta'$ treffen, die der Parabel angehören und gegen die zugehörigen Augpunkte gerichtete Tangenten besitzen. Da hier jedoch die Augdistanz $A'O'$ nicht unmittelbar abgenommen werden konnte, so wurde $vq = \frac{1}{4}vp$ gemacht, qs parallel zu $p\omega$, sw senkrecht auf E_v gezogen und in sw der vierte Theil des Halbmessers $c\alpha_1$ gefunden.

Die Verzeichnung der Parabeln kann nun anstandslos auf bekannte Weise vorgenommen werden. Da sich dieselben als Central-Projectionen der beiden Grundkreise ergeben, so ist es am zweckmässigsten, jene Axen zu suchen, welche die Augpunkte mit dem Kreismittelpunkte c verbinden, indem die Scheitel diese Längen halbiren und die denselben zukommenden Tangenten eine zu E_v parallele Richtung haben.

§. 3.

Gegeben drei Punkte und eine Tangente.

Sind die Punkte 1, 2, 3, Fig. 2 und die Tangente T_1T_1 gegeben, so nehme man zwei der ersteren, z. B. 1 und 2 in der Bildfläche liegend als Endpunkte eines Durchmessers des Grundkreises K an und führe die Distanztrace E_d der Kreisebene tangentiell an K, parallel zu E_b. Die Tangente T_1T_1, welche E_b in a schneidet, entspricht nun offenbar einer der beiden durch a an K gezogenen Tangenten ab oder ad. Diese treffen E_d in den Punkten b und d, welchen bekanntlich die in unendlicher Entfernung befindlichen Punkte der Tangente T_1T_1 als Perspectiven zukommen, weshalb die Augpunkte des Projectionssystems in den Geraden dO'', bO, welche durch d und b parallel zu T_1T_1 gezogen wurden, sich vorfinden müssen.

Zieht man ferner durch den dritten Punkt 3 eine zu T_1T_1 geometrisch Parallele $3\omega t$, so wird die derselben entsprechende Gerade in der Kreisebene durch den beiden gemeinschaftlichen Punkt ω der Trace E_b, so wie auch durch einen der Punkte d oder b hindurchgehen, weil solche Gerade, welche geometrisch parallele Bilder besitzen, sich in einem Punkte der Distanztrace schneiden.

Die so erhaltenen Geraden treffen die Peripherie des Grundkreises in vier Punkten III, III′, III″, III‴, von welchen jeder den Punkt 3 zur Perspective haben kann, woraus erhellt, dass dieser Fall vier verschiedene Auflösungen gestattet.

Werden die in $b\omega$ liegenden Punkte III, III′ mit 3 verbunden, so schneiden sich diese Linien, welche gleichfalls einen Ort des bezüglichen Gesichtspunktes angeben, mit der durch b gehenden Geraden bO in den Punkten O und O', während die Verbindungslinien III″3, III‴3 die durch d geführte Parallele dO'' in den Punkten O'' und O''' treffen, wodurch die vier Gesichtspunkte der fraglichen Projectionssysteme gefunden sind.

Sollen auch die Augpunkte und Fluchtlinien der Kreisebenen angegeben werden, so hat man blos in den einzelnen Gesichtspunkten Senkrechte auf E_b zu errichten, auf denselben von den Gesichtspunkten aus den Radius des Grundkreises nach A, A', A'', A''' aufzutragen und die Fluchtlinien E_v, E_v', E_v'', E_v''' durch letztere Punkte parallel zu E_b zu ziehen.

Hiemit ist Alles gefunden, was zur Verzeichnung der verschiedenen Projectionen des Kreises K erforderlich ist, und können somit die vier Parabeln entweder punktweise, oder durch die der gemeinschaftlichen Sehne 12 zukommenden Scheitel einfach bestimmt werden.

Bemerkung: Sind die Bestimmungsstücke so gegeben, dass keine Parabel möglich wird, so gibt sich dies sofort in der Zeichnung derart zu erkennen, dass entweder der Punkt a innerhalb die Kreisperipherie K fällt, also keine Tangenten an K zulässt, oder dass die Geraden $d\omega$, $b\omega$ den Kreis K nicht schneiden. Bei näherer Betrachtung dieser Umstände wird leicht ersichtlich, dass, wenn durch die vier gegebenen Stücke eine Parabel zu ziehen möglich sein soll, keine der drei durch die gegebenen Punkte begrenzten Sehnen von der Tangente T_1T_1 geschnitten werden darf, und, dass diese Punkte auch nicht in einer Geraden liegen dürfen.

Sollen sich die vier Auflösungen auf zwei reduciren, so müssen die Geraden $b\omega$, $d\omega$ blos je einen Punkt des Kreises in sich enthalten, also in dessen Tangenten übergehen, oder es müssen die Tangenten da, ba zusammenfallen, woraus hervorgeht, dass diesfalls einer der gegebenen Punkte in der Tangente T_1T_1 liegen müsste. Wir ersehen auch hieraus, dass der Fall, wo zwei Punkte und eine Tangente nebst ihrem Berührungspunkte gegeben, zwei Auflösungen zulässt, und dass der Gang der Lösung sich nicht wesentlich ändert. Wir wollen einen solchen Fall im nächsten Paragraphen besprechen.

§. 4.

Gegeben zwei Punkte, eine Tangente und ihr Berührungspunkt.

Es seien in Fig. 3 die Punkte 1, 2, 3 und die Tangente TT der Parabel im Punkte 3 gegeben.

Nehmen wir, so wie früher, 12 zur Bildflächtrace E_b und den über dem Durchmesser 12 beschriebenen Kreis K als Grundkreis an und führen aus dem in E_b gelegenen Punkte a der Tangente TT die Tangenten an K bis zum Durchschnitte d mit der Distanztrace E'_d, oder, was dasselbe ist, wir ziehen aus a blos eine Tangente bad an den Kreis, nehmen jedoch die Distanztrace E_d einmal über, das andere Mal E'_d unterhalb E_b an, so werden wieder die durch b und d parallel zu TT geführten Geraden die Gesichtspunkte der beiden Projectionssysteme enthalten müssen, demnach mit der Verbindungslinie 3III der beiden Berührungspunkte zum Schnitt gebracht, diese Punkte O und O' selbst ergeben. (O fällt hier ausser die Zeichnungsfläche.)

OA und $O'A'$ senkrecht auf E_b errichtet und gleich $c1$ gemacht, liefern in A und A' die beiden Augpunkte und die Fluchtlinien E_v, E'_v der beiden Kreisebenen, wodurch alles Erforderliche zur Fixirung und Verzeichnung der Kreisbilder PP, $P'P'$ gegeben ist.

§. 5.

Gegeben zwei Punkte und zwei Tangenten.

Sind die beiden Punkte 1, 2 und die Tangenten TT_1, TT_2, Fig. 4 gegeben, so legen wir auch hier durch die ersteren die Bildflächtrace E_v der Ebene des Grundkreises K, dessen Durchmesser 12 sei, und führen die Distanztrace E_d tangentiell an K und parallel zu E_b. Werden nun durch die Punkte a und b, in welchen die beiden Tangenten von E_b getroffen werden, die möglichen Tangenten eat, ag, fbt, bh an K gezogen und je zwei derselben, als den gegebenen Tangenten entsprechend, betrachtet, so ist ersichtlich, dass durch die hiedurch möglichen Combinationen auch vier verschiedene Lösungen der gestellten Aufgabe angezeigt werden.

Wir werden demzufolge blos durch jene Punkte e, g, h, f, in welchen die vorbenannten vier Tangenten die Distanztrace schneiden, die beziehungsweise zu TT_1, TT_2 Parallelen eOO', $gO'''O''$, $hO'''O'$, $fO''O$ zu ziehen haben, um in den vier Eckpunkten O, O', O'', O''' des durch diese Geraden gebildeten Parallelogramms die Gesichtspunkte der den verschiedenen Lösungen zugehörigen Projectionssysteme zu erhalten. Vertikal über diesen Punkten, in einer dem Halbmesser $c1$ gleichen Entfernung von denselben, befinden sich die Augpunkte A, A', A'', A''', durch welche die Fluchtlinien der Grundkreisebenen parallel zu E_b laufen. Man erhält auf Grundlage dieser Daten die vier Parabeln $PP, P'P', P''P'', P'''P'''$ als Bilder des Grundkreises K.

Dass bei richtiger Construction die Punkte t, T und O, ebenso wie t''', T, O''', etc., in einer Geraden liegen, braucht wohl kaum erst erwähnt zu werden.

Blos zwei Auflösungen ergeben sich, wenn durch einen der beiden Punkte a, b nur eine Tangente an den Kreis zu ziehen möglich wird, d. h. wenn der eine der gegebenen Punkte in eine der gegebenen Tangenten fällt. Es folgt hieraus, dass der im §. 1 angeführte Lösungsfall (5), wo ein Punkt, zwei Tangenten und der Berührungspunkt der einen gegeben ist, zwei Auflösungen gestattet, und dass die Durchführung dieses Falles nicht die geringste Abänderung des eben gegebenen Verfahrens erheischt, weshalb derselbe hier weiter keiner Besprechung unterzogen werden soll.

Fallen auch die Punkte 1 und a zusammen, d. h. fällt jeder der beiden Puukte in je eine der gegebenen Tangenten, so ist blos Eine Lösung möglich.

§. 6.

Gegeben zwei Tangenten und deren Berührungspunkte.

Sind die beiden Tangenten TT_1, TT_2, Fig. 5, und deren Berührungspunkte 1, 2 gegeben, und man wählt 12 als Bildflächtrace und als Durchmesser des Grundkreises, so ist T der Augpunkt, und es wird, weil die Augdistanz der halben Sehne $1\omega = \omega 2$ gleichkonmmt, ein Scheitelpunkt S der Parabel, welchem eine zu 12 parallele Tangente zukommt, im Halbirungspunkte S der Länge ωT gefunden sein, während diese Gerade selbst die entsprechende Axe der Parabel angibt.

Dass, um den Scheitel S zu erhalten, blos $T\omega$ zu halbiren ist, folgt übrigens schon aus der bekannten, auch für schiefe Coordinaten gültigen Eigenschaft der Parabel, dass die Subtangente ωT der doppelten Abscisse ωS gleich ist.

§. 7.

Gegeben ein Punkt und drei Tangenten.

Es seien die drei Tangenten TT_1, TT_2, T_3T_3, Fig. 6 und der Punkt 1 gegeben. Es lässt sich nun leicht ein zweiter, derselben Parabel angehöriger Punkt 2 auffinden, wenn man die Parabel als centrale Projection eines Kreises betrachtet und die Bildflächtrace seiner Ebene zu einer der Tangenten, z. B. zu T_3, T_3, parallel gehen lässt, während die Fluchtlinie den Vereinigungspunkt T der beiden anderen Tangenten enthält. Denkt man sich ferner an die Parabel eine zu $T_3 T_3$ parallele Tangente in unendlicher Entfernung gezogen, so bestimmen diese Tangenten ein Viereck, dessen Diagonalen durch die beiden Eckpunkte a und b parallel zu TT_1, TT_2 gehen und im Durchschnitte ω die Perspective des Kreismittelpunktes geben.

Es ist somit 1ω ein Radius, welcher nur auf der Verlängerung nach $w2$ übertragen zu werden braucht, um in 2 einen zweiten Punkt der Parabel zu bestimmen. Das Übertragen dieser Länge geschieht bekanntlich einfach dadurch, dass man 1 mit T verbindet, ae auf $T_3 T_3$ nach bf überträgt, und fT bis zum Durchschnitte 2 mit $\omega 1$ zieht.

Ebenso ergeben sich zwei andere Punkte der Parabel, indem man so wie früher mit dem Punkte T, jetzt mit den Vereinigungspunkten a und b von zwei anderen Tangenten zu Werke geht. Man hat alsdann, wenn man z. B. a in der Fluchtlinie und TT_2 parallel zur Bildflächtrace annimmt, $b\omega_1$ durch b parallel zu TT_1, $T\omega_1$ durch T parallel zu $T_3 T_3$ zu führen, ω_1 mit 1 und 1 mit a zu verbinden, Te_1 nach bf_1 zu übertragen und $f_1 a$ mit der Verbindungslinie $1\omega_1$ in dem fraglichen Punkte 3 zum Durchschnitt zu bringen.

Nachdem, wie wir gleich ersehen werden, diese Aufgabe zwei Lösungen zulässt, die eben gefundenen Punkte jedoch beiden angehören müssen, so wurden durch das angewandte Verfahren jene besonderen Punkte ermittelt, in welchen sich die beiden den Bedingungen der Aufgabe genügenden Parabeln schneiden.

Zur weiteren Durchführung dieses Problems wählen wir eine der so erhaltenen Sehnen z. B. 12 zur Bildflächtrace und als Durchmesser des Grundkreises K und verfahren in derselben Weise wie in Fig. 4. Da wir jedoch hier drei Tangenten haben, folglich aus den Durchschnittspunkten derselben mit E_b sechs verschiedene Tangenten an K und durch die Fusspunkte der letzteren auf E_d sechs beziehungsweise zu den drei Tangenten parallele Gerade ziehen können, so werden offenbar nur solche

Punkte als Gesichtspunkte zu betrachten sein, in welchen sich drei dieser letztgenannten Geraden schneiden, was in Anbetracht des Umstandes, dass je zwei dieser Geraden zu einander parallel sind, nur bei zwei Punkten O und O' eintreten kann.

Die Parabeln PP, $P'P'$ sind nun durch die bekannten Bestimmungsstücke O, A, und O', A' der Projectionssysteme auf bekannte Weise einfach zu verzeichnen.

§. 8.

Gegeben drei Tangenten und ein Berührungspunkt.

Besonders einfach gestaltet sich die Construction des vorigen Falles, wenn der gegebene Punkt 1, Fig. 7 in eine der gegebenen Tangenten fällt, weil durch das gleiche Verfahren sofort die Berührungspunkte der übrigen Tangenten höchst einfach erhalten werden.

Zur Bestimmung des Berührungspunktes 2 der Tangente TT_2 wird man daher durch a und b die zu TT_2 resp. TT_1 Parallelen $a\omega$, $b\omega$ zu ziehen und ihren Durchschnitt ω mit 1 zu verbinden haben. 12 in c halbirt und c mit T verbunden, gibt die zur Richtung 12 conjugirte Axe der Parabel und der Halbirungspunkt der Länge cT den zugehörigen Scheitel S derselben.

Führt man durch T eine Parallele zu T_3T_3 und durch b eine Parallele zu TT_1, und verbindet den Durchschnittspunkt ω_1 beider Geraden mit 1, so schneidet diese Linie die Tangente T_3T_3 in ihrem Berührungspunkte 3.

In der Zeichnung erscheint ferner noch der Punkt 3 mit Benützung des Punktes 2 bestimmt.

§. 9.

Gegeben vier Tangenten.

Sind die vier Tangenten TT_1, TT_2, $T'T_3$, $T'T_4$, Fig. 8 der Parabel vorhanden, so dürfte wohl auch hier der Brianchon'sche Satz am vortheilhaftesten zur Anwendung gelangen, indem man sich eine fünfte Tangente der Parabel in unendlicher Entfernung denkt. Man wird sonach, um z. B. den Berührungspunkt 2 der Tangente TT_2 zu erhalten, durch die in dieser Tangente liegenden Eckpunkte des der Parabel umschriebenen Polygons die Gegendiagonalen $\gamma\alpha$ und $\beta\pi$ zu dem der zweiten Ecke nächstliegenden Eckpunkte (also $\beta\pi$ parallel zu $T'T_4$) ziehen und ihren Durchschnittspunkt π mit der Gegenecke der Tangente TT_2 verbinden, d. h. durch π eine zu TT_1 Parallele $\pi 2$ bis zum Durchschnitte mit TT_2 ziehen. Auf gleiche Weise wurde in Fig. 8 der Berührungspunkt 3 der Tangente $T'T_3$ gefunden.

Um jedoch diese Aufgabe gleichfalls nach den Grundsätzen der Projectionslehre zu lösen, verbinden wir die Durchschnittspunkte T, T' je zweier nicht unmittelbar auf einander folgender Tangenten durch eine Gerade E_v, welche die Fluchtlinie der Grundkreisebene sei, ziehen die Diagonalen $\alpha\gamma v_1$ und $\beta v\delta$ des durch die Tangenten gebildeten Vierecks $\alpha\beta\gamma\delta$ und führen die Bildflächtrace E_b der Kreisebene durch den Vereinigungspunkt c der Diagonalen parallel zu E_v.

Der Annahme gemäss müssen die beiden Diagonalen zweien senkrechten Kreisdurchmessern entsprechen, also zwei Fluchtpunkte v, v_1 bestimmen, welche den Durchmesser ($=2R$) eines den Gesichtspunkt O enthaltenden Kreisbogens vOX begrenzen.

Wäre nun der Radius des Grundkreises K bekannt, und man zöge den letzteren aus dem Mittelpunkte c, so müsste die durch den Schnittpunkt a der Tangente $T'T_3$ an denselben geführte Tangente at den Gesichtspunkt O bestimmen, indem der aus T' gezogene Parallelstrahl $T'O$ den Kreis vOX in O träfe. Bezeichnen wir somit das Stück ac mit b, die Länge vT' mit a, nehmen v als Ursprung und E_v als X-Axe eines rechtwinkligen Coordinatensystems an, und setzen die Coordinaten des Gesichtspunktes $vA=x$, $AO=y$, so ist

$$y^2 = 2Rx - x^2$$

die Gleichung des Kreises vOX, und es folgt aus obiger Entwicklung, dass

$$\operatorname{tg} \sphericalangle OT'v = \operatorname{tg} \sphericalangle tac,$$

also, weil

$$\operatorname{tg} \sphericalangle OT'v = \frac{AO}{AT^1} = \frac{y}{a-x},$$

$$\operatorname{tg} \sphericalangle tac = \frac{r}{\sqrt{b^2 - r^2}}$$

und

$$r = y,$$

$$\frac{y}{a-x} = \frac{y}{\sqrt{b^2 - y^2}}$$

und hieraus

$$(a-x)^2 + y^2 = b^2$$

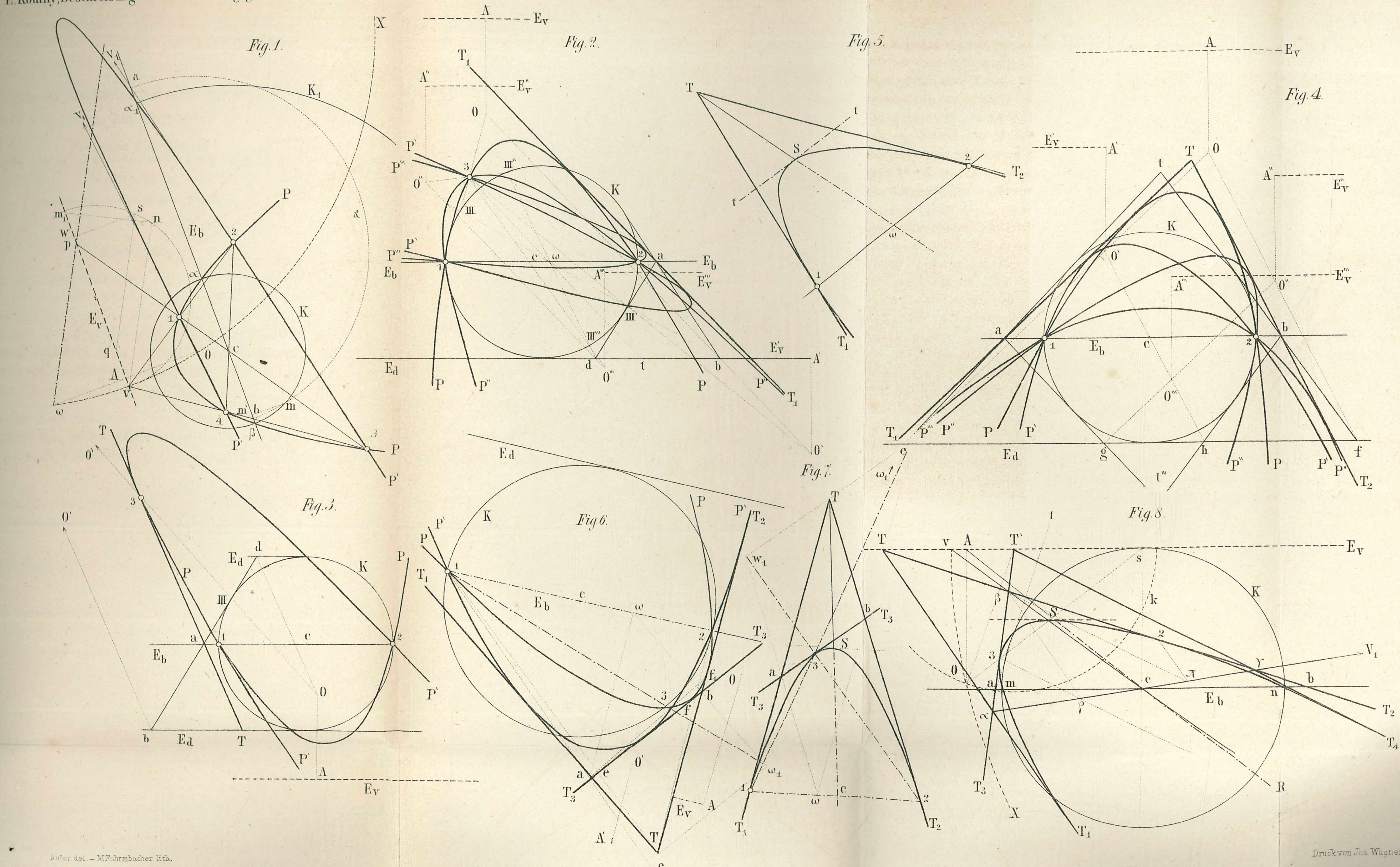
als ein zweiter Ort für den Gesichtspunkt. Dies ist jedoch die Gleichung eines Kreises, welcher in T' seinen Mittelpunkt und den Radius $b = ac$ hat. Nehmen wir demnach die Länge ac in den Zirkel, setzen in T' ein und durchschneiden den Kreis vOX durch den Kreisbogen k, so erhalten wir in O den verlangten Gesichtspunkt, in A den Augpunkt, in AO die Augdistanz und zugleich den Radius $cm = cn$ des Grundkreises K. Ac ist die Axenrichtung und zugleich der Ort des den zu E_b parallelen Sehnen conjugirten Durchmessers der Parabel. Der Endpunkt S desselben folgt einfach durch Halbirung von cA, oder, indem man cA mit sO zum Durchschnitt bringt.

Bemerkung. Bei den hier durchgeführten Auflösungsfällen wurde stets eine Sehne der Parabel als Kreisdurchmesser angenommen; es bleibt jedoch die Lösung dieselbe, wenn erstere auch als Sehne des Grundkreises betrachtet und dieser mit beliebigem Halbmesser beschrieben wird. In manchen Fällen dürfte letztere Annahme sogar anzuempfehlen sein. Mitunter ergeben sich auch recht interessante Lösungen, wenn man den Radius des Grundkreises so wählt, dass er eine der gegebenen Tangenten berührt. Dass jedoch auch andere Kegelschnittslinien die Grundlage der Construction bilden können, ist wohl von selbst verständlich.

Schlussbemerkung. Ich will hier noch anführen, dass in der vorliegenden Abhandlung die einzelnen Aufgaben mit alleiniger Rücksicht auf die praktische Verwendbarkeit der gegebenen Methoden gelöst wurden, insoweit dies, ohne mit dem leitenden Grundsatze in Collision zu kommen, thunlich war. In letzterer Beziehung muss ich bemerken, dass die hier gegebene construction der Parabel aus vier Tangenten, so einfach dieselbe auch an und für sich ist, doch kaum praktisch verwendet werden dürfte, weil die Anwendung des Brianchon'schen Satzes noch einfacher zum Ziele führt. Auch für die Verzeichnung der Parabel aus vier ihrer Punkte liefert die neue Geometrie einfachere Lösungen. Ich hätte wohl unschwer vorerst auf Grundlage der Kreisprojection den Brianchon'schen Satz nachweisen und ihn sodann benützen können, allein ich hielt es nicht für zweckmässig, auf Umwegen zum Ziele zu gelangen, wenn sich directe Lösungen erhalten lassen.

Etwas anders bin ich bei der Verfassung meiner früher erwähnten Arbeit über die „Construction der Kegelschnittslinien aus Punkten und Tangenten", auf welche sich vorliegende Abhandlung stützt, zu Werke gegangen, indem ich dort überhaupt die Ergebnisse meiner Forschungen auf diesem Gebiete zusammenzustellen, zum Theil auch blos anzudeuten versuchte. Es finden sich daher in der ersteren Abhandlung einige Lösungen angeführt, die eben nur ein wissenschaftliches Interesse bieten; so namentlich die Auflösungen mit Benützung von Hilfscurven in den §§. 5, 8, 10, 13, 20. Bei den Parabelconstructionen bin ich der Benützung von Hilfscurven, die eine punktweise Bestimmung erfordern, gänzlich aus dem Wege gegangen, und bemerke in dieser Hinsicht nur, dass man auch hier, insbesondere bei gegebenen 4 Punkten oder 4 Tangenten, oder 3 Tangenten und 1 Punkt durch Benützung solcher Curven auf nicht uninteressante Lösungen stösst, welche durchzuführen nach dem in der citirten Abhandlung Gegebenen durchaus keinen Schwierigkeiten unterliegt.

E. Koutny, Beschreibung der Parabel aus gegebenen Punkten.



Autor del. — M. Fehmbacher lith.

Druck von Jos. Wagner.