Zur Theorie der simultanen Substitutionen in zwei- und dreifachen Integralen.

Von **Franz Unferdinger,**

Lehrer der Mathematik an der öffentlichen Oberrealschule am hohen Markt in Wien.

(Mit 5 Holzschnitten.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 9. März 1871.)

Einleitung.

Bevor wir zu dem besonderen Gegenstand dieser Abhandlung übergehen, sei uns erlaubt, die allgemeinen Gesichtspunkte, welche uns bei Bearbeitung desselben leiteten, in Kürze darzulegen.

Bezeichnen L, M zwei bestimmte Functionen der beiden independenten Variabeln x, y, hingegen F irgend eine Function von L, M und sind in dem Doppelintegrale:

$$u=\int\int F(L,\, M)dxdy, \qquad (a)$$

die Integrationen auf alle reellen Werthe von x, y zu erstrecken, welche zugleich den beiden folgenden Bedingungen entsprechen, mit λ_0, λ_1, μ_0, μ_1 als Constante:

$$\lambda_0<L<\lambda_1,\;\; \mu_0<M<\mu_1, \qquad (b)$$

so führt man zweckmässig statt x, y neue Variabeln λ, μ ein, durch die Substitutionen:

$$L=\lambda,\;\; M=\mu. \qquad (c)$$

Werden diese Gleichungen nach x, y aufgelöset, so folgt:

$$x=\varphi_1(\lambda,\, \mu),\;\; y=\varphi_2(\lambda,\, \mu), \qquad (d)$$

wobei φ_1, φ_2 bestimmte Functionen bezeichnen.

Nun sind die Integrationsgrenzen bezüglich λ und μ beziehungsweise λ_0, λ_1 und μ_0, μ_1, und wenn zur Kürze gesetzt wird:

$$\Omega=\frac{dx}{d\lambda}\frac{dy}{d\mu}-\frac{dx}{d\mu}\frac{dy}{d\lambda}, \qquad (e)$$

wobei die Werthe der partiellen Differentialquotienten aus den Gleichungen (d) zu nehmen sind, so folgt die Transformation:

$$(f)\qquad u=\int_{\lambda_0}^{\lambda_1}\int_{\mu_0}^{\mu_1}F(\lambda,\ \mu)\Omega d\lambda d\mu.\ ^{1}$$

Ω ist eine bestimmte Function von λ, μ, kann aber auch vermöge der Gleichungen (c), als Function von x, y dargestellt werden, und da die Elemente der Integrale (a), (f) absolut gleich sind, so ist gestattet, beiderseits durch Ω zu dividiren, wodurch man erhält:

$$(g)\qquad \iint\frac{F(L,\ M)}{\Omega}dxdy=\int_{\lambda_0}^{\lambda_1}\int_{\mu_0}^{\mu_1}F(\lambda,\ \mu)d\lambda d\mu.$$

Hieraus folgt z. B. für $F(\zeta)=1$:

$$(h)\qquad \iint\frac{dxdy}{\Omega}=(\lambda_1-\lambda_0)(\mu_1-\mu_0).$$

Sollen die Integrationen nach x, y in dem folgenden Integrale, auf alle positiven Werthe von Null bis Unendlich erstreckt werden, so bedient man sich der Substitutionen $x=r\cos\Theta$, $y=r\sin\Theta$, durch welche $\Omega=r$ wird und man hat einerseits, da die Grenzen für r, Θ beziehungsweise $0, \infty$; $0, \frac{1}{2}\pi$ sind:

$$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}dxdy=\frac{\pi}{4},$$

woraus durch Trennung der Variabeln das bekannte Resultat folgt:

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Anderseits ist aber auch $\Omega=\sqrt{x^2+y^2}$, mithin im Sinne der Gleichung (g):

---

[1] Nach den gegebenen Bedingungen hat λ das Intervall von λ_0 bis λ_1, ebenso μ jenes von μ_0 bis μ_1 zu durchlaufen, ob aber λ_0, μ_0 als untere Grenzen zu nehmen sind, bleibt unbestimmt oder mit anderen Worten, die rechte Seite der Gleichung (f) bleibt unbestimmt im Vorzeichen, welches in jedem besonderen Fall nach der Natur der Function F zu ermitteln ist.

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{e^{-(x^2+y^2)}}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy=\frac{\sqrt{\pi^3}}{4} \tag{i}$$

und hierin können die Variabeln nicht mehr getrennt werden.

Dieselben Substitutionen führen auch zu folgenden zwei Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}&\iint F\left(\frac{y}{x}\right)dxdy=\frac{1}{2}\,({\varepsilon_1}^2-{\varepsilon_0}^2)\int_{t_0}^{t_1}F(t)\frac{dt}{1+t^2},\\ &\iint\frac{F\left(\frac{y}{x}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy=(\varepsilon_1-\varepsilon_0)\int_{t_0}^{t_1}F(t)\,\frac{dt}{1+t^2},\end{aligned}\right\} \tag{k}$$

wobei die Integrationen links vom Gleichheitszeichen, sich auf alle reellen Werthe von x,y zu erstrecken haben, welche zugleich den Bedingungen genügen:

$${\varepsilon_0}^2<x^2+y^2<{\varepsilon_1}^2,\ t_0<\frac{y}{x}<t_1, \tag{l}$$

unter ε_0, ε_1, t_0, t_1 reelle Constante gedacht.

In vielen Fällen sind die Substitutionen (c) nicht anwendbar, weil ihre Auflösungen (d) nach x, y nicht einwerthig sind; dann setzt man:

$$L=f_1(\lambda,\mu),\ M=f_2(\lambda,\mu), \tag{m}$$

wobei f_1, f_2 schicklich gewählte Functionen bezeichnen und die Transformation ist als gelungen zu betrachten, wenn die Beziehungen:

$$\lambda_0<f_1(\lambda,\mu)<\lambda_1,\ \mu_0<f_2(\lambda,\mu)<\mu_1 \tag{n}$$

gestatten, aus ihnen die Integrationsgrenzen bezüglich λ, μ zu deriviren.

Betrachtet man x, y als rechtwinkelige Coordinaten, so bezeichnen die vier Gleichungen:

$$L=\lambda_0,\ L=\lambda_1,\ M=\mu_0,\ M=\mu_1 \tag{o}$$

in der Ebene der xy vier bestimmte Curven und die Grenzbedingungen (b) besagen, dass die Integrationen auf alle Punkte auszudehnen sind, welche diese vier Curven umschliessen.

Für das Integrale (8) in §. 1 ist der Integrationsraum ein geradliniges allgemeines Viereck; für das Integrale (21) in §. 4 ist der Integrationsraum begrenzt von zwei Parabeln und zwei durch den Ursprung gehenden Geraden.

Diese beiden Integrale wurden transformirt, durch simultane Substitutionen wie jene (c).

Für das Integrale (45) in §. 7 ist der Integrationsraum begrenzt von zwei Parabeln und zwei beliebigen parallelen Geraden; die zur Reduction dienlichen Substitutionen entsprechen den Gleichungen (m).

Sind L, M, N drei bestimmte Functionen von x, y, z, hingegen F eine willkürliche Function von L, M, N und sollen in dem Integrale:

$$(p) \qquad U = \iiint F(L, M, N)\, dx dy dz,$$

die Integrationen nach x, y, z auf alle reellen Werthe dieser Veränderlichen ausgedehnt werden, welche zugleich den Bedingungen entsprechen:

$$(q) \qquad \lambda_0 < L < \lambda_1, \ \mu_0 < M < \mu_1, \ \nu_0 < N < \nu_1,$$

unter $\lambda_0, \lambda_1, \mu_0, \mu_1, \nu_0, \nu_1$ constante Grössen verstanden, so ist es zweckmässig, statt x, y, z neue veränderliche λ, μ, ν einzuführen durch die Gleichungen:

$$(r) \qquad L = \lambda, \ M = \mu, \ N = \nu,$$

vorausgesetzt, dass die Auflösungen derselben nach x, y, z einwerthig sind:

$$(s) \qquad x = \varphi_1(\lambda, \mu, \nu), \ y = \varphi_2(\lambda, \mu, \nu), \ z = \varphi_3(\lambda, \mu, \nu).$$

Die Integrationsgrenzen bezüglich λ, μ, ν sind nun respective $\lambda_0, \lambda_1; \mu_0, \mu_1; \nu_0, \nu_1$ und wenn zur Abkürzung gesetzt wird:

$$(t) \qquad \Omega = \frac{dx}{d\lambda}\left(\frac{dy}{d\mu}\frac{dz}{d\nu} - \frac{dy}{d\nu}\frac{dz}{d\mu}\right) + \frac{dy}{d\lambda}\left(\frac{dz}{d\mu}\frac{dx}{d\nu} - \frac{dz}{d\nu}\frac{dx}{d\mu}\right) + \frac{dz}{d\lambda}\left(\frac{dx}{d\mu}\frac{dy}{d\nu} - \frac{dx}{d\nu}\frac{dy}{d\mu}\right),$$

so folgt die Transformation:

$$(u) \qquad U = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1}\int_{\mu_0}^{\mu_1}\int_{\nu_0}^{\nu_1} F(\lambda, \mu, \nu)\Omega d\lambda d\mu d\nu.$$

Die in (t) zur Berechnung der Functionsdeterminante Ω erforderlichen partiellen Differentialquotienten werden aus den Gleichungen (s) abgeleitet, so dass Ω als eine bestimmte Function von λ, μ, ν zu betrachten ist.

Mit Hilfe der Gleichungen (r) kann aber dieselbe auch leicht in eine bestimmte Function von x, y, z umgewandelt werden und da die Elemente der beiden Integrale (p) und (u) absolut gleich sind, so ist es gestattet, mit Ω beiderseits unter den Integralzeichen zu dividiren, wodurch man erhält:

$$\iiint \frac{F(L,\, M,\, N)}{\Omega}\, dx dy dz = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1}\int_{\mu_0}^{\mu_1}\int_{\nu_0}^{\nu_1} F(\lambda,\, \mu,\, \nu)\, d\lambda d\mu d\nu. \qquad (v)$$

Ist speciell $F(\zeta) = 1$, so folgt hieraus:

$$\iiint \frac{dx dy dz}{\Omega} = (\lambda_1 - \lambda_0)(\mu_1 - \mu_0)(\nu_1 - \nu_0). \qquad (w)$$

Sind die Auflösungen (s) der Gleichungen (r) nach x, y, z nicht einwerthig, so setzt man:

$$L = f_1(\lambda,\, \mu,\, \nu),\quad M = f_2(\lambda,\, \mu,\, \nu),\quad N = f_3(\lambda,\, \mu,\, \nu), \qquad (x)$$

wobei f_1, f_2, f_3 zweckmässig erwählte bestimmte Functionen bezeichnen und die Transformation des Integrals ist als gelungen zu betrachten, wenn die Relationen:

$$\lambda_0 < f_1(\lambda,\, \mu,\, \nu) < \lambda_1,\quad \mu_0 < f_2(\lambda,\, \mu,\, \nu) < \mu_1,\quad \nu_0 < f_3(\lambda,\, \mu,\, \nu) < \nu_1, \qquad (y)$$

gestatten aus ihnen die Integrationsgrenzen bezüglich λ, μ, ν abzuleiten.

Betrachtet man x, y, z als rechtwinkelige Raumcoordinaten so bezeichnen die Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} L = \lambda_0,\; M = \mu_0,\; N = \nu_0, \\ L = \lambda_1,\; M = \mu_1,\; N = \nu_1, \end{array}\right\} \qquad (z)$$

sechs krumme Oberflächen, und die Integrationen sind zu erstrecken auf alle Punkte des Raumes, welcher von denselben umschlossen wird.

Für das Integrale (57) in §. 10 ist der Integrationsraum begrenzt von sechs Ebenen und die hierbei verwendeten Substitutionen entsprechen den Gleichungen (r) [1].

Für das Integrale (102) in §. 23 ist der Integrationsraum gebildet von zwei elliptischen Paraboloiden, zwei beliebigen parallelen und zwei sich schneidenden Ebenen; die in Anwendung gebrachten Substitutionen entsprechen den Gleichungen (x).

Die folgenden Untersuchungen zwei- und dreifacher Integrale, mittelst simultaner Substitutionen sind durchaus analytisch. Die Auffassung der Variabeln als Punktcoordinaten ist weder zur Herstellung der Functionsdeterminante Ω, noch zur Discussion und Bestimmung der Integrationsgrenzen nothwendig. Die in unserer Darstellung überall durchführbare Umsetzung der Integrationsbedingungen in den geometrischen Begriff des Integrationsraumes ist für die practische Anwendung der erlangten Resultate auf Probleme der Physik und analytischen Mechanik vortheilhaft.

§. 1.

Bezeichnet man mit x, y die unabhängigen Variabeln und setzt zur Abkürzung:

(2) $$t = 1 - x - y,$$

so wird das Integrale:

(1) $$u = \iint F\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}\right) dx dy$$

durch die beiden Substitutionen:

(3) $$x = \lambda t, \quad y = \mu t,$$

in die Form umgewandelt:

(4) $$u = \iint \frac{F(\lambda, \mu)}{(1 + \lambda + \mu)^3} d\lambda d\mu,$$

---

[1] Im LXI. Band der Sitzungsberichte haben wir zwei dreifache Integrale untersucht, deren Integrationsräume begrenzt werden von zwei concentrischen Ellipsoiden oder zwei solchen Hyperboloiden, zwei beliebigen parallelen und zwei durch den Ursprung gehenden Ebenen.

denn es folgt mit Bezug auf (2):

$$\left.\begin{aligned}
&t=\frac{1}{1+\lambda+\mu},\\
&\frac{dx}{d\lambda}=t+\lambda\frac{dt}{d\lambda},\ \frac{dx}{d\mu}=\lambda\frac{dt}{d\mu},\\
&\frac{dy}{d\lambda}=\mu\frac{dt}{d\lambda},\ \frac{dy}{d\mu}=t+\mu\frac{dt}{d\mu},\\
&\frac{dt}{d\lambda}=\frac{dt}{d\mu}=-t^2,\ \Omega=t^3.
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Ersetzt man in (1) x, y durch $\frac{x}{a}$, $\frac{y}{b}$ unter a, b positive Constante gedacht, indem nunmehr:

$$t=1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}, \qquad (6) \qquad\qquad x=a\lambda t,\ y=b\mu t, \qquad (7)$$

so entsteht für das allgemeinere Integrale:

$$U=\iint F\left(\frac{x}{at}, \frac{y}{bt}\right)dxdy, \tag{8}$$

die Beziehung $U=abu$, und wenn die Integrationen auf alle reellen Werthe von x, y ausgedehnt werden, für welche mit λ_0, λ_1, μ_0, μ_1 als bestimmte constante Grössen:

$$\lambda_0<\frac{x}{at}<\lambda_1,\ \mu_0<\frac{y}{bt}<\mu_1, \tag{9}$$

so wird:

$$U=ab\int_{\lambda_0}^{\lambda_1}\int_{\mu_0}^{\mu_1}\frac{F(\lambda, \mu)}{(1+\lambda+\mu)^3}d\lambda d\mu. \tag{10}$$

Die Brauchbarkeit dieser Formel unterliegt aber der Bedingung, dass für die Intervalle der Integrationen $1+\lambda+\mu$ nicht Null wird.

§. 2.

Die Grenzbedingungen (9) erlangen eine geometrische Bedeutung, wenn man x, y als rechtwinkelige Coordinaten betrachtet.

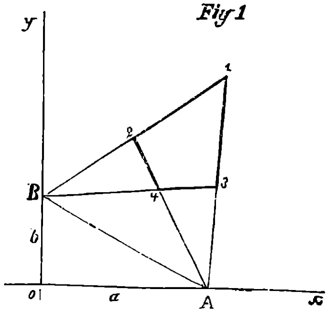
Die Gleichungen (7), welche auch so geschrieben werden können:

$$(11)\qquad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1-\frac{x}{a\lambda},\quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1-\frac{y}{b\mu},$$

bezeichnen zwei Gerade, deren Durchschnittspunkt die Coordinaten hat:

$$(12)\qquad x=\frac{a\lambda}{1+\lambda+\mu},\ y=\frac{b\mu}{1+\lambda+\mu};$$

Fig 1



jedem Werthsystem λ, μ entsprechen zwei solche Gerade, welche die Lage des Punktes (xy) bestimmen. Diese zwei Geraden gehen beziehungsweise und unabhängig von den besonderen Werthen von λ, μ durch zwei feste Punkte B und A (Fig. 1), deren Coordinaten sind:

$$x=o,\ y=b,\ x=a.\ y=o.$$

Würde in einem besonderen Fall $1+\lambda+\mu=o$, so ist $x=\infty$, $y=\infty$ und die Geraden (11) laufen parallel.

Die Integrationen in (8) sind nun im Sinne der Relationen (9) auf alle Punkte in der Ebene der Coordinaten zu erstrecken, welche zwischen den vier Geraden enthalten sind:

$$1.)\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1-\frac{x}{a\lambda_0},\qquad 3.)\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1-\frac{y}{b\mu_0},$$

$$2.)\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1-\frac{x}{a\lambda_1},\qquad 4.)\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1-\frac{y}{b\mu_1}.$$

Die Geraden 1.), 2.) gehen durch den Punkt B, jene 3.), 4.) durch den Punkt A und der Integrationsraum ist das allgemeine Viereck 1234.

§. 3.

Wird in (8) der zweite Ausdruck unter dem Functionszeichen F weggelassen, so kann in der entsprechenden Transformation (10) die auf μ bezügliche Integration vollzogen werden und man erhält für:

$$V=\iint F\left(\frac{x}{at}\right)dx dy, \tag{13}$$

wobei t die Bedeutung (6) hat und die Grenzbedingungen (9) unverändert bleiben:

$$V=\tfrac{1}{2}ab\int_{\lambda_0}^{\lambda_1}\left\{\frac{1}{(1+\lambda+\mu_0)^2}-\frac{1}{(1+\lambda+\mu_1)^2}\right\}F(\lambda)d\lambda. \tag{14}$$

Für $F(\lambda)=1$ erhält man hieraus den Inhalt v des Integrationsraumes und zwar wird, da jetzt auch nach λ integrirt werden kann:

$$v=\tfrac{1}{2}ab\left\{\frac{1}{1+\lambda_0+\mu_0}-\frac{1}{1+\lambda_1+\mu_0}-\frac{1}{1+\lambda_0+\mu_1}+\frac{1}{1+\lambda_1+\mu_1}\right\}. \tag{15}$$

Für $\lambda_0=\lambda$, $\mu_0=\mu$, $\lambda_1=\infty$, $\mu_1=\infty$ erhält man hieraus als Inhalt τ des von den Geraden:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1-\frac{x}{a\lambda},\quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1-\frac{y}{b\mu},\quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \tag{16}$$

formirten Dreiecks den Ausdruck:

$$\tau=\tfrac{1}{2}\frac{ab}{1+\lambda+\mu}. \tag{17}$$

Für diesen Integrationsraum wird nach (14):

$$V=\tfrac{1}{2}ab\int_{\lambda}^{\infty}\frac{F(\lambda)}{(1+\lambda+\mu)^2}d\lambda \text{ oder auch } V=\tfrac{1}{2}ab\int_{o}^{\infty}\frac{F(\lambda+u)}{(1+\lambda+\mu+u)^2}du. \tag{18}$$

Ist endlich $\lambda_0=0$, $\mu_0=0$, $\lambda_1=\infty$, $\mu_1=\infty$, so fallen die Geraden 2.), 4.) mit AB zusammen; 1.), 3.) bilden die Coordinatenaxen und man erhält die Fläche des Dreieckes $OAB=\frac{1}{2}ab$. Für diesen Integrationsraum wird nach (14):

$$V=\tfrac{1}{2}ab\int_{o}^{\infty}\frac{F(\lambda)}{(1+\lambda)^2}d\lambda. \tag{19}$$

In diesem letzteren Fall lassen sich die Integrationsgrenzen für x, y in (13), auf welche Formel sich die Gleichung (19) bezieht, auch direct angeben. Der Integrationsraum OAB wird offenbar erfüllt, wenn man zuerst nach y integrirt, von $y=o$ bis $y=b\left(1-\frac{x}{a}\right)$ und dann nach x, von $x=o$ bis $x=a$; man kann daher auch schreiben:

$$(20)\qquad \int_o^a\int_o^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)} F\left(\frac{x}{at}\right)dxdy=\tfrac{1}{2}\,ab\int_o^\infty\frac{F(\lambda)}{(1+\lambda)^2}d\lambda,$$

wobei t den Werth aus (b) hat.

§. 4.

Zur Reduction des Integrals:

$$(21)\qquad \iint F\left(\sqrt{x^2+y^2}+x,\ \frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{y}\right)dxdy,$$

in welchem F eine willkürliche Function der unter diesem Zeichen stehenden Complexe bedeutet, bedienen wir uns der Substitutionen:

$$(22)\qquad \sqrt{x^2+y^2}+x=\lambda,\quad \sqrt{x^2+y^2}-x=\mu y,$$

um statt der unabhängigen Variabeln x, y jene λ, μ einzuführen. Hierdurch wird:

$$(23)\qquad y^2=\lambda^2-2\lambda x,\quad y=\frac{2\mu}{1-\mu^2}x,\qquad (24)\qquad \Omega=\tfrac{1}{2}\lambda(1+\mu^2)$$

und man gelangt zur Transformation:

$$(25)\qquad \tfrac{1}{2}\iint F(\lambda,\ \mu)\lambda(1+\mu^2)d\lambda d\mu.$$

Indem λ_0, λ_1, μ_0, μ_1 gegebene Constante bezeichnen, sollen in (21) die Integrationen auf alle reellen Werthe von x, y ausgedehnt werden, welche zugleich die Bedingungen erfüllen:

$$(26)\qquad \lambda_0<\sqrt{x^2+y^2}+x<\lambda_1,\quad \mu_0<\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{y}<\mu_1;$$

dadurch werden die Integrationsgrenzen für λ und μ, beziehungsweise λ_0, λ_1 und μ_0, μ_1; man hat also die Gleichung:

$$\iint F\left(\sqrt{x^2+y^2}+x, \frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{y}\right)dxdy=\frac{1}{2}\int_{\lambda_0}^{\lambda_1}\int_{\mu_0}^{\mu_1}F(\lambda, \mu)\lambda(1+\mu^2)d\lambda d\mu. \quad (27)$$

Lässt man unter dem Functionszeichen F in (21) den zweiten Ausdruck weg und dividirt im Sinne der Gleichung (g) der Einleitung beiderseits mit $\Omega=\sqrt{x^2+y^2}$, so kann rechts die Integration nach μ vollzogen werden und gelangt zu folgender Reduction:

$$\iint\frac{F(\sqrt{x^2+y^2}+x)}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy=(\mu_1-\mu_0)\int_{\lambda_0}^{\lambda_1}F(\lambda)d\lambda. \quad (28)$$

§. 5.

Betrachtet man x, y als rechtwinkelige Coordinaten, so haben die vorstehenden Integrationen eine bestimmte geometrische Bedeutung. Der Integrationsraum ist begrenzt von den beiden Parabeln:

$$y^2=\lambda_0^2-2\lambda_0 x, \quad y^2=\lambda_1^2-2\lambda_1 x \quad (29)$$

und von den beiden durch den Ursprung gehenden Geraden:

$$y=\frac{2\mu_0}{1-\mu_0^2}x, \quad y=\frac{2\mu_1}{1-\mu_1^2}x. \quad (30)$$

Diese Grenzparabeln haben die x-Axe zur Axe der Symmetrie und ihre Scheitel liegen beziehungsweise im Abstand $\frac{1}{2}\lambda_0$, $\frac{1}{2}\lambda_1$ vom Ursprung, so dass letzterer der gemeinschaftliche Brennpunkt ist.

Bezeichnen α_0, α_1 die Winkel, welche die Geraden (30) mit der positiven Seite der x-Axe einschliessen, so bestehen noch die Beziehungen:

$$\mu_0=tg\tfrac{1}{2}\alpha_0, \quad \mu_1=tg\tfrac{1}{2}\alpha_1. \quad (31)$$

Für $F(\lambda)=1$ gibt die Formel (27) den Flächeninhalt f des Integrationsraumes:

$$f=\frac{1}{12}(\lambda_1^2-\lambda_0^2)\{3(\mu_1-\mu_0)+\mu_1^3-\mu_0^3\}. \quad (32)$$

§. 6.

Wir gehen aus von folgendem Doppelintegrale, in welchem F wieder eine beliebige Function, aber λ eine reelle Constante bezeichnet:

(33) $$u=\iint F(x-y^2,\ x-2\lambda y)dxdy$$

und führen statt der Variabeln x, y jene p, r ein, durch die Substitutionen:

(34) $$x=\lambda^2+p+2\lambda r,\ \ y=\lambda+r;$$

hierdurch wird:

(35) $$x-y^2=p-r^2,\ x-2\lambda y=p-\lambda^2,$$ (36) $$\Omega=1$$

und man gelangt sofort zu folgender Transformation:

(37) $$u=\iint F(p-r^2,\ \ p-\lambda^2)dpdr.$$

Damit dieses Integrale einen bestimmten Werth erhält, setzen wir fest, dass die Integrationen in (33) auf alle jene reellen Werthe von x, y erstreckt werden sollen, für welche zugleich die beiden Bedingungen erfüllt sind:

(38) $$o<x-y^2<\varepsilon,\ \ g_0<\lambda^2+x-2\lambda y<g_1,$$

wobei ε, g_0, g_1 positive Constante bezeichnen sollen.

§. 7.

Nach den Gleichungen (35) sind dann die entsprechenden Bedingungen nach p, r:

(39) $$o<p-r^2<\varepsilon,\ \ g_0<p<g_1,$$

von welchen die erstere auch in der Form geschrieben werden kann:

(40) $$\sqrt{p-\varepsilon}<r<\sqrt{p}$$

und wenn die Wurzeln im absoluten Sinne genommen werden, so ist r in seinem Intervall beständig positiv.

Da g_0, g_1 unabhängig von sind, so kann nach den vorstehenden Bedingungen (39), (40) $\sqrt{p-\varepsilon}$ zuweilen imaginär werden und wir unterscheiden daher zum Zweck der Umsetzung dieser Bedingungen in Integrationsgrenzen nach p, r, folgende drei Fälle, indem zuerst nach r, dann nach p integrirt werden soll:

$$\varepsilon < g_0,\quad g_0 < \varepsilon < g_1,\quad \varepsilon > g. \tag{41}$$

Im ersten Fall ist $p-\varepsilon$ beständig positiv, die Bedingungen (40) sind daher stets reell erfüllbar und es wird:

$$u = \int_{g_0}^{g_1}\int_{\sqrt{p-\varepsilon}}^{\sqrt{p}} F(p-r^2,\ p-\lambda^2)\,dp\,dr. \tag{42}$$

Im zweiten Fall liegt ε zwischen g_0, g_1 und wir theilen daher das Intervall nach p in die zwei Theile:

$$\varepsilon < p < g_1,\quad g_0 < p < \varepsilon.$$

Im ersten Theil ist $p-\varepsilon$ stets positiv, daher sind die reellen Grenzen für r wie früher $\sqrt{p-\varepsilon}$, $\sqrt{p}$; im zweiten Theil ist $p-\varepsilon$ beständig negativ, die reellen Grenzen für r, welche auch der zweiten Bedingung in (39) genügen, sind daher o, $\sqrt{p}$. Man hat daher:

$$u = \int_{\varepsilon}^{g_1}\int_{\sqrt{p-\varepsilon}}^{\sqrt{p}} F(p-r^2,\ p-\lambda^2)\,dp\,dr + \int_{g_0}^{\varepsilon}\int_{o}^{\sqrt{p}} F(p-r^2,\ p-\lambda^2)\,dp\,dr. \tag{43}$$

Im dritten Fall ist $p-\varepsilon$ stets negativ, daher sind die reellen Werthe von r, so wie im zweiten Integral des vorigen Falls o, $\sqrt{p}$, also:

$$u = \int_{g_0}^{g_1}\int_{o}^{\sqrt{p}} F(p-r^2,\ p-\lambda^2)\,dp\,dr. \tag{44}$$

Diese Resultate gestatten noch eine beträchtliche Verallgemeinerung, indem man in dem Integrale (33) neue Variabeln einführend, $\frac{x}{a}, \frac{y}{b}$ statt x, y setzt und gleichzeitig überall $\frac{b\lambda}{a}$ statt λ schreibt, unter a, b positive Constante gedacht. Hierdurch wird aus u in (33), nach Multiplication mit ab:

$$U = \iint F\left(\frac{x}{a} - \frac{y^2}{b^2}, \frac{x-2\lambda y}{a}\right) dx dy; \tag{45}$$

die Grenzbedingungen sind nun folgende:

$$o < \frac{x}{a} - \frac{y^2}{b^2} < \varepsilon, \quad a(g_0 - \lambda^2) < x - 2\lambda y < a(g_1 - \lambda^2) \tag{46}$$

und zwar ist:

$$U = ab.\ u, \tag{47}$$

worin für u die Werthe (42), (43), (44) zu setzen sind, entsprechend den drei in (41) unterschiedenen Fällen.

§. 8.

Betrachtet man x, y als rechtwinkelige Coordinaten, so erlangen die Bedingungen (46) folgende geometrische Bedeutung: Die Integrationen sind auszudehnen auf alle Punkte der Ebene der xy, welche enthalten sind zwischen den beiden Parabeln:

$$x = \frac{ay^2}{b^2}, \quad x = \frac{ay^2}{b^2} + a\varepsilon \tag{48}$$

und zwischen den beiden parallelen Geraden:

$$x - 2\lambda y = a(g_0 - \lambda^2), \quad x - 2\lambda y = a(g_1 - \lambda^2). \tag{49}$$

Die erste Parabel geht durch den Ursprung und hat die x-Axe zur Axe der Symmetrie. Wird dieselbe im positiven Sinn, um den Betrag $a\varepsilon$ auf der x-Axe verschoben, so erhält man die zweite Grenzparabel. Diese Curven sind zu einander asymptotisch.

Die nebenstehenden Fig. 2, 3, 4 zeigen die drei in (41) unterschiedenen Fälle.

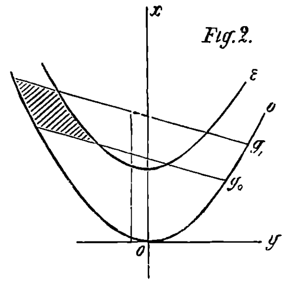


Fig. 2.

Für $r=o$ wird nach (34) mit Rücksicht auf die neuen Substitutionen $y=b\lambda$, d. h. alle Punkte, welchen $r=o$ entspricht, liegen auf einer zur Axe der x parallelen Geraden. Wie man leicht erkennt, ist dieselbe der Durchmesser jenes Sehnensystems, welches zu den Grenzgeraden (49) parallel lauft.

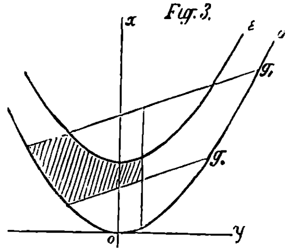
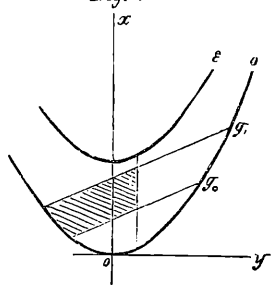


Fig. 3.

Da wir bei den vorhergehenden Integrationen nur positive Werthe von r zugelassen, so beziehen sich die Formeln (42), (43), (44) nur auf die eine Seite des Integrationsraumes, welche der genannte Durchmesser begrenzt, wie in den Figuren angedeutet ist.

Fig. 4


§. 9.

Setzt man in (45) $F(\zeta)=1$, so erhält man die Fläche des Integrationsraumes; nun können die Integrationen nach r, p vollzogen werden und man erhält, entsprechend den drei in (41) abgesonderten Fällen:

$$\left.\begin{aligned} f_1 &= \tfrac{2}{3}\,ab\,\{\sqrt{g_1^3}-\sqrt{g_0^3}-\sqrt{(g_1-\varepsilon)^3}+\sqrt{(g_0-\varepsilon)^3}\}, \\ f_2 &= \tfrac{2}{3}\,ab\,\{\sqrt{g_1^3}-\sqrt{g_0^3}-\sqrt{(g_1-\varepsilon)^3}\}, \\ f_3 &= \tfrac{2}{3}\,ab\,\{\sqrt{g_1^3}-\sqrt{g_0^3}\}. \end{aligned}\right\} \tag{50}$$

§. 10.

Sind x, y, z die unabhängigen Veränderlichen und bezeichnet F eine beliebige Function in dem dreifachen Integrale:

$$u=\iiint F\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}\right) dx\,dy\,dz, \tag{51}$$

mit:

(52) $$t=1-x-y-z,$$

so ist es zweckmässig, neue Variabeln λ, μ, ν einzuführen, durch die simultanen Substitutionen:

(53) $$x=t\lambda,\ y=t\mu,\ z=t\nu.$$

Werden diese drei Gleichungen addirt, so folgt mit Rücksicht auf (52):

(54) $$t=\frac{1}{1+\lambda+\mu+\nu},$$

womit die Hilfsvariabele t durch die neuen Veränderlichen dargestellt wird, und von nun an betrachten wir die rechten Seiten in (53) als reine Functionen von λ, μ, ν.

Die partielle Differentiation derselben gibt unmittelbar:

$$\frac{dx}{d\lambda}=t+\lambda\frac{dt}{d\lambda},\quad \frac{dx}{d\mu}=\lambda\frac{dt}{d\mu},\quad \frac{dx}{d\nu}=\lambda\frac{dt}{d\nu},$$
$$\frac{dy}{d\lambda}=\mu\frac{dt}{d\lambda},\quad \frac{dy}{d\mu}=t+\mu\frac{dt}{d\mu},\quad \frac{dy}{d\nu}=\mu\frac{dt}{d\nu},$$
$$\frac{dz}{d\lambda}=\nu\frac{dt}{d\lambda},\quad \frac{dz}{d\mu}=\nu\frac{dt}{d\mu},\quad \frac{dz}{d\nu}=t+\nu\frac{dt}{d\nu}$$

und hiermit wird:

$$\frac{dy}{d\mu}\frac{dz}{d\nu}-\frac{dy}{d\nu}\frac{dz}{d\mu}=t\left(t+\mu\frac{dt}{d\mu}+\nu\frac{dt}{d\nu}\right),$$
$$\frac{dz}{d\mu}\frac{dx}{d\nu}-\frac{dz}{d\nu}\frac{dx}{d\mu}=-\lambda t\frac{dt}{d\mu},$$
$$\frac{dx}{d\mu}\frac{dy}{d\nu}-\frac{dx}{d\nu}\frac{dy}{d\mu}=-\lambda t\frac{dt}{d\nu}.$$

Multiplicirt man diese drei Gleichungen mit $\frac{dx}{d\lambda}$, $\frac{dy}{d\lambda}$, $\frac{dz}{d\lambda}$ und addirt die entstehenden Producte, so folgt, da nach (54):

$$\frac{dt}{d\lambda}=\frac{dt}{d\mu}=\frac{dt}{d\nu}=-t^2,$$

nach kurzer Rechnung für die Functionsdeterminante Ω im Sinne der Gleichung (t) der Einleitung der Werth:

(55) $$\Omega=t^4$$

und hiermit erhält man als Transformation des Integrals (51):

$$u = \iiint \frac{F(\lambda, \mu, \nu)}{(1+\lambda+\mu+\nu)^4} d\lambda d\mu d\nu. \tag{56}$$

Um das folgende allgemeinere Integrale, in welchem a, b, c positive Constante bezeichnen und

$$t = 1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b} - \frac{z}{c} \tag{58}$$

ist,

$$U = \iiint F\left(\frac{x}{at}, \frac{y}{bt}, \frac{z}{ct}\right) dx dy dz, \tag{57}$$

zu transformiren, setzen wir in (51) neue Variabeln einführend, $\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}$, statt x, y, z, wodurch bekanntlich die entsprechende Functionsdeterminante $\Omega = \frac{1}{abc}$ wird und es zeigt sich die Beziehung:

$$U = abc.\, u; \tag{59}$$

wenn von nun an statt (53) die Gleichungen gelten:

$$\frac{x}{a} = \lambda t,\ \frac{y}{b} = \mu t,\ \frac{z}{c} = \nu t. \tag{60}$$

§. 11.

Damit das Integrale U einen bestimmten Werth erlangt, setzen wir fest, die drei Integrationen in (57) sind auf alle jene reellen Werthe von x, y, z zu erstrecken, welche zugleich die Bedingungen erfüllen:

$$\lambda_0 < \frac{x}{at} < \lambda_1,\ \mu_0 < \frac{y}{bt} < \mu_1,\ \nu_0 < \frac{z}{ct} < \nu_1, \tag{61}$$

in welchen λ_0, λ_1, μ_0, μ_1, ν_0, ν_1 gegebene reelle Constante bezeichnen. Dann sind, im Sinne der Gleichungen (60) in dem transformirten Integrale (56) die Grenzen für die Variabeln λ, μ, ν beziehungsweise λ_0, λ_1; μ_0, μ_1; ν_0, ν_1 und es wird:

$$U = abc \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \int_{\mu_0}^{\mu_1} \int_{\nu_0}^{\nu_1} \frac{F(\lambda, \mu, \nu)}{(1+\lambda+\mu+\nu)^4} d\lambda d\mu d\nu. \tag{62}$$

Die Anwendbarkeit dieser Formel wird nur durch die Bedingung beschränkt, dass innerhalb der Integrationsgrenzen der Ausdruck $1+\lambda+\mu+\nu$ von Null verschieden ist, denn für $1+\lambda+\mu+\nu=0$ wird die Function unter den Integralzeichen unstetig.

§. 12.

Denkt man sich x, y, z als rechtwinkelige Coordinaten eines Punktes im Raum, so sind mit Rücksicht auf (58) die Gleichungen (60), durch welche die neuen Variabeln λ, μ, ν eingeführt werden und die Grenzbedingungen (61), folgender geometrischen Deutung fähig: Die Gleichungen (60), welche auch in der Form geschrieben werden können:

$$(63) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c} &= 1-\frac{x}{a\lambda}, \\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c} &= 1-\frac{y}{b\mu}, \\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c} &= 1-\frac{z}{c\nu} \end{aligned} \right.$$

bezeichnen drei Ebenen, deren Durchschnittspunkt die Coordinaten x, y, z hat und jedem Werthsystem von λ, μ, ν entsprechen drei solche Ebenen, welche die Lage des Punktes (xyz) im Raum bestimmen.

Diese Ebenen gehen beziehungsweise durch drei feste Gerade in der Ebene yz, zx, xy, deren Gleichungen sind:

$$\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1, \quad \frac{x}{a}+\frac{z}{c}=1, \quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

Werden in der That die Gleichungen (63) nach x, y, z aufgelöst, so folgt:

$$(64) \qquad x=\frac{a\lambda}{1+\lambda+\mu+\nu}, \quad y=\frac{b\mu}{1+\lambda+\mu+\nu}, \quad z=\frac{c\nu}{1+\lambda+\mu+\nu};$$

für $1+\lambda+\mu+\nu=0$, wird $x=\infty$, $y=\infty$, $z=\infty$, d. h. die drei Ebenen (63) schneiden sich in parallelen Geraden, der Punkt (xyz) liegt in unendlicher Entfernung vom Ursprung.

§. 13.

Die Integrationen in (57) sind auf alle Punkte des Raumes auszudehnen, welche zwischen den sechs Ebenen enthalten sind, deren Gleichungen lauten:

1.) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1-\frac{x}{a\lambda_0}$, 3.) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1-\frac{y}{b\mu_0}$,

2.) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1-\frac{x}{a\lambda_1}$, 4.) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1-\frac{y}{b\mu_1}$,

5.) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1-\frac{z}{c\nu_0}$,

6.) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1-\frac{z}{c\nu_1}$.

Je vier dieser Ebenen gehen durch einen Punkt und zwar 1.), 2.), 3.), 4.) durch den Punkt:

$$x=o,\ y=o,\ z=c,$$

1.), 2.), 5.), 6.) durch den Punkt:

$$x=o,\ y=b,\ z=o$$

und 3.), 4.), 5.), 6.) durch den Punkt:

$$x=a,\ y=o,\ z=o.$$

Diese drei Punkte liegen beziehungsweise in der Axe der z, y, x in den Abständen c, b, a vom Ursprung und die Gleichung der Ebene des durch sie formirten Dreieckes ABC (Fig. 5) lautet:

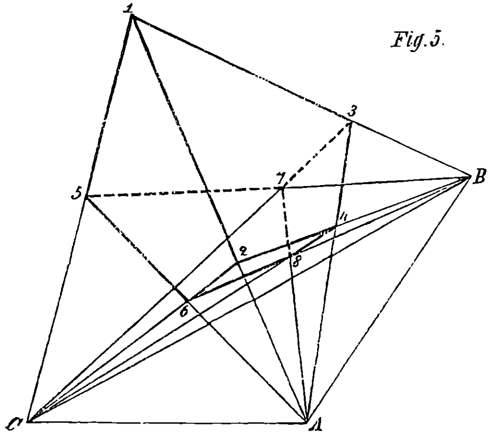


Fig. 5.

$$(65) \qquad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,$$

die Lage dieser Ebene ist also unabhängig von den speciellen Werthen λ_0, λ_1, μ_0, etc.

Die Ebenen 1.) bis 6.), welche den Integrationsraum begrenzen, gehen paarweise durch die Seiten des Dreieckes ABC und zwar 1.), 2.) durch die Seite BC, 3.), 4.) durch die Seite AC und 5.), 6.) durch die Seite AB.

Fig. 5 zeigt die Gestalt des Integrationsraumes über der Ebene ABC als schief abgestutzte vierseitige Pyramide.

§. 14.

Bezeichnen α, β, γ die nicht 180° übersteigenden Winkel, welche die Ebene (65) des Dreieckes ABC mit den Coordinatenebenen yz, zx, xy einschliesst, so findet man nach den Lehren der analytischen Geometrie des Raumes:

$$(66) \qquad \mathrm{tg}\alpha=\frac{a\sqrt{b^2+c^2}}{bc}, \quad \mathrm{tg}\beta=\frac{b\sqrt{a^2+c^2}}{ac}, \quad \mathrm{tg}\gamma=\frac{c\sqrt{a^2+b^2}}{ab}.$$

Sind θ_0, θ_1 die Neigungswinkel der Grenzebenen 1.), 2.) zur Ebene yz, so folgt aus ihren Gleichungen ebenso:

$$\mathrm{tg}\theta_0=\frac{\lambda_0}{1+\lambda_0}\cdot\frac{a\sqrt{b^2+c^2}}{bc}, \quad \mathrm{tg}\theta_1=\frac{\lambda_1}{1+\lambda_1}\cdot\frac{a\sqrt{b^2+c^2}}{bc}$$

oder mit Rücksicht auf die erste der Gleichungen (65):

$$\mathrm{tg}\theta_0=\frac{\lambda_0}{1+\lambda_0}\,\mathrm{tg}\alpha, \; tg\theta_1=\frac{\lambda_1}{1+\lambda_1}\,\mathrm{tg}\alpha.$$

Sind analog η_0, η_1 die Neigungswinkel der Grenzebenen 3.), 4.) zur Ebene zx und ζ_0, ζ_1 jene der Grenzebenen 5.), 6.) zur Ebene xy, so gelten für diese Winkel ähnliche Gleichungen und man gelangt leicht zu folgendem System:

$$\left.\begin{aligned}
tg\theta_0 &= \frac{\lambda_0}{1+\lambda_0} tg\alpha, \; tg\theta_1 = \frac{\lambda_1}{1+\lambda_1} tg\alpha, \\
tg\eta_0 &= \frac{\mu_0}{1+\mu_0} tg\beta, \; tg\eta = \frac{\mu_1}{1+\mu_1} tg\beta, \\
tg\zeta_0 &= \frac{\nu_0}{1+\nu_0} tg\gamma, \; tg\zeta = \frac{\nu_1}{1+\nu_1} tg\gamma,
\end{aligned}\right\} \tag{67}$$

durch welches die Richtungen der sechs Grenzebenen aus den Integrationsgrenzen λ_0, λ_1, μ_0 etc. und den Constanten a, b, c des vorgelegten Integrals (57) bestimmt werden.

§. 15.

Lässt man in (57) die zwei letzten Complexe unter dem Functionszeichen F weg, handelt es sich also um das Integrale:

$$V = \iiint F\left(\frac{x}{at}\right) dx dy dz, \tag{68}$$

mit der Bedeutung von t aus (58) und behält die Grenzbedingungen (61) unverändert bei, so können in der auf λ, μ, ν bezüglichen Transformation (62) die zwei Integrationen nach ν, μ nach und nach ausgeführt werden und es folgt nach kurzer Rechnung:

$$V = \frac{1}{6}\,abc. \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \left\{ \frac{1}{(1+\lambda+\mu_0+\nu_0)^2} - \frac{1}{(1+\lambda+\mu_1+\nu_0)^2} - \frac{1}{(1+\lambda+\mu_0+\nu_1)^2} + \frac{1}{(1+\lambda+\mu_1+\nu_1)^2} \right\} F(\lambda) d\lambda. \tag{69}$$

Setzt man hierin $F(\lambda)=1$, so erhält man den Inhalt v des Integrationsraumes; jetzt kann auch die Integration nach λ vollzogen werden und es wird:

$$v = \frac{1}{6}\,abc. \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{1+\lambda_0+\mu_0+\nu_0} - \frac{1}{1+\lambda_1+\mu_0+\nu_0} - \frac{1}{1+\lambda_0+\mu_1+\nu_0} + \frac{1}{1+\lambda_1+\mu_1+\nu_0} \\ -&\frac{1}{1+\lambda_0+\mu_0+\nu_1} + \frac{1}{1+\lambda_1+\mu_0+\nu_1} + \frac{1}{1+\lambda_0+\mu_1+\nu_1} - \frac{1}{1+\lambda_1+\mu_1+\nu_1} \end{aligned} \right\}. \tag{70}$$

Dieser merkwürdige Ausdruck gibt den Inhalt der schief abgestutzten vierseitigen Pyramide 123456 (Fig. 5), deren Grenzebenen durch die Gleichungen 1.) bis 6.) bestimmt sind.

In der Figur haben diese Ebenen folgende Bezeichnung:

$$(71)\qquad \begin{cases} 1.)\ \ldots(1357), & 4.)\ \ldots(3478), \\ 2.)\ \ldots(2468), & 5.)\ \ldots(1234), \\ 3.)\ \ldots(1256), & 6.)\ \ \ .(5678). \end{cases}$$

§. 16.

Ist $\nu_1=\infty$, so fällt die Ebene (6) mit jener (65) des Dreieckes *ABC* zusammen, die Seitenfläche (5678) wird zum Punkt *C* und man erhält aus (70) den Inhalt *P* der vierseitigen ganzen Pyramide *C* (1234):

$$(72)\quad P=\tfrac{1}{6}\,abc.\left\{\frac{1}{1+\lambda_0+\mu_0+\nu_0}-\frac{1}{1+\lambda_1+\mu_0+\nu_0}-\frac{1}{1+\lambda_0+\mu_1+\nu_0}-\frac{1}{1+\lambda_1+\mu_1+\nu_0}\right\}.$$

Ist $\nu_1=\infty$, $\mu_1=\infty$, so fällt in der Pyramide *C* (1234) die Ebene (4) mit jener (65) des Dreieckes *ABC* zusammen, die Seitenfläche (3478) wird zum Punkt *B* und man erhält aus (72) den Inhalt *p* der dreiseitigen Pyramide 2*BC*1:

$$(73)\qquad p=\tfrac{1}{6}\,abc.\left\{\frac{1}{1+\lambda_0+\mu_0+\nu_0}-\frac{1}{1+\lambda_1+\mu_0+\nu_0}\right\}.$$

Ist endlich $\nu_1=\infty$, $\mu_1=\infty$, $\lambda_1=\infty$, $\nu_0=\nu$, $\mu_0=\mu$, $\lambda_0=\lambda$, so fällt in der Pyramide 2*BC*1 die Ebene 2.), 2*BC* mit jener *ABC* zusammen und man erhält aus (73) den Inhalt *T* der dreiseitigen Pyramide 1*ABC*:

$$(74)\qquad T=\tfrac{1}{6}\,\frac{abc}{1+\lambda+\mu+\nu},$$

deren vier Grenzebenen die Gleichungen haben:

$$(75)\qquad \begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1-\dfrac{x}{a\lambda}, \\[2ex] \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1-\dfrac{y}{b\mu}, \\[2ex] \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1-\dfrac{z}{c\nu}, \\[2ex] \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1. \end{cases}$$

Für diesen Integrationsraum ist nach (69):

$$V=\tfrac{1}{6}\,abc\int_{\lambda}^{\infty}\frac{F(\lambda)}{(1+\lambda+\mu+\nu)^2}\,d\lambda$$

oder (76)

$$V=\tfrac{1}{6}\,abc\int_{o}^{\infty}\frac{F(\lambda+u)}{(1+\lambda+\mu+\nu+u)^2}\,du.$$

Für $\lambda_1=\infty$, $\mu_1=\infty$ $\nu_1=\infty$, $\lambda_0=o$, $\mu_0=o$, $\nu_0=o$ fallen die Ebenen 2.), 4.), 6.) mit jener (65) des Dreieckes ABC zusammen, jene 1.), 3.), 5.) sind jetzt beziehungsweise die Coordinatenebenen yz, xz, xy und man erhält für den Inhalt t des Raumes, welchen die Ebene:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \tag{65}$$

vom Coordinatenwinkel abschneidet, den bekannten Ausdruck:

$$\mathfrak{t}=\tfrac{1}{6}\,abc. \tag{77}$$

Für diesen Integrationsraum wird endlich nach (69):

$$V=\tfrac{1}{6}\,abc.\int_{o}^{\infty}\frac{F(\lambda)}{(1+\lambda)^2}\,d\lambda. \tag{78}$$

§. 17.

In diesem letzten Fall lassen sich die Grenzen für x, y, z in der Formel (68), worauf sich die Reduction (78) bezieht, auch direct beurtheilen. Der Integrationsraum $OABC$ wird nach der Gleichung (65) offenbar durchmessen, wenn man zuerst nach z integrirt von $z=o$ bis $z=c\left(1-\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}\right)$, hierauf nach y von $y=o$ bis $y=b\left(1-\dfrac{x}{a}\right)$, endlich nach x von $x=o$ bis $x=a$; es ist also:

$$\int_o^a\int_o^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)}\int_o^{c\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)}F\left(\frac{x}{at}\right)dx\,dy\,dz=\tfrac{1}{6}\,abc.\int_o^{\infty}\frac{F(\lambda)}{(1+\lambda)^2}\,d\lambda, \tag{79}$$

worin t den Werth aus (58) hat[1].

---

[1] Ist der Raum $OABC$ mit Materie erfüllt, deren Dichte im Punkt $(x\mathfrak{z})$ gemessen wird durch den Werth der Function F, so bestimmt das

Durch diese Gleichung wird das dreifache Integrale mit variablen Grenzen und einer willkürlichen Function, auf ein einfaches mit constanten Grenzen reducirt.

Bekanntlich ist für $0<r<1$:

$$\int_0^\infty \frac{\lambda^r}{(1+\lambda)^2}\,d\lambda = \frac{r\pi}{\sin r\pi},$$

setzt man also in (79) mit derselben Bedingung $F(\lambda)=\lambda^r$, so wird auch:

(80) $$\int_0^a\int_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)}\int_0^{c\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)}\left(\frac{x}{at}\right)^r dx\,dy\,dz = \tfrac{1}{6}\,abc\,\frac{r\pi}{\sin r\pi}.$$

§. 18.

Die Richtigkeit der Formel (74) für den Rauminhalt des allgemeinen Tetraeders, kann auch auf deductivem Weg erwiesen werden, wie folgt.

Betrachtet man das Dreieck ABC in der vierten Ebene (75) als Basis und bezeichnet den Inhalt desselben mit B, so ist offenbar, wenn α, β, γ dieselbe Bedeutung haben, wie in (66):

$$B=\tfrac{1}{2}\,bc\cos\alpha+\tfrac{1}{2}\,ac\cos\beta+\tfrac{1}{2}\,ab\cos\gamma,$$

$$B=\tfrac{1}{2}\,abc\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}.$$

Der Scheitel der Pyramide über dieser Basis ist der Durchschnittspunkt der drei ersten Ebenen in (75) und hat die Coordinaten (64). Die Entfernung H dieses Punktes von der Ebene

---

vorstehende Integrale die Masse des Integrationsraumes. Bezeichnet λ irgend einen besonderen Werth des Bruches $\frac{x}{at}$, so ist die Dichte constant in allen Punkten der Ebene, deren Gleichung:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1-\frac{x}{a\lambda}$$

und alle Ebenen constanter Dichte gehen durch die Gerade BC.

ABC wird, nach den Lehren der analytischen Geometrie durch die Formel bestimmt:

$$H = \frac{1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b} - \frac{z}{c}}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}} = \frac{1}{(1+\lambda+\mu+\nu)\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}},$$

mithin ist:

$$T = \tfrac{1}{3} BH = \tfrac{1}{6} \frac{abc}{1+\lambda+\mu+\nu}. \tag{74}$$

§. 19.

Der Vergleich dieses Ausdrucks mit jenem für v in (70) zeigt, dass der Inhalt der schief abgestutzten vierseitigen Pyramide zu betrachten ist, als die algebraische Summe von acht Tetraedern, welche alle das Dreieck ABC in der Ebene (65) zur gemeinschaftlichen Basis haben.

Auch dieses Resultat ist leicht deductiv aus der Figur zu erkennen; denn es ist unmittelbar:

$$v = \text{Pyr. } C(1234) - \text{Pyr. } C(5678).$$

Bezeichnen wir die Pyramiden über der gemeinschaftlichen Basis ABC mit den Nummern ihrer Scheitel, so ist:

$$\text{Pyr. } C(1234) = (1) - (2) - (3) + (4),$$
$$\text{Pyr. } C(5678) = (5) - (6) - (7) + (8),$$

folglich:

$$v = (1) - (2) - (3) + (4) - (5) + (6) + (7) - (8). \tag{81}$$

Die diesen acht Pyramiden entsprechenden Werthsysteme von λ, μ, ν sind nun nach den Gleichungen 1.) bis 6.) und nach den Bezeichnungen (71) folgende:

$$\begin{array}{ll}
(1)\ldots\lambda_0,\ \mu_0,\ \nu_0, & (5)\ldots\lambda_0,\ \mu_0,\ \nu_1, \\
(2)\ldots\lambda_1,\ \mu_0,\ \nu_0, & (6)\ldots\lambda_1,\ \mu_0,\ \nu_1, \\
(3)\ldots\lambda_0,\ \mu_1,\ \nu_0, & (7)\ldots\lambda_0,\ \mu_1,\ \nu_1, \\
(4)\ldots\lambda_1,\ \mu_1,\ \nu_0, & (8)\ldots\lambda_1,\ \mu_1,\ \nu_1\,;
\end{array}$$

hiermit gibt die Formel (74) die entsprechenden Volumina und deren Substitution in (81) führt genau zur Gleichung (70).

§. 20.

Wir gehen nun über zu dem folgenden dreifachen Integrale, in welchem wieder F eine beliebige Function und λ, μ constante Zahlen bezeichnen:

(82) $$u = \iiint F(x - y^2 - z^2,\ x - 2\lambda y - 2\mu z)\,dx\,dy\,dz$$

und führen zur Erläuterung unserer Methode, statt der independenten Veränderlichen x, y, z, solche p, r, Θ ein, durch die simultanen Substitutionen:

(83) $$\begin{cases} x = \rho + p + 2r(\lambda \cos\Theta + \mu \sin\Theta), \\ y = \lambda + r\cos\Theta, \\ z = \mu + r\sin\Theta, \end{cases}$$

in welchen:

(84) $$\rho = \lambda^2 + \mu^2.$$

Eine einfache Rechnung lehrt, dass:

(85) $$x - y^2 - z^2 = p - r^2,$$

(86) $$x - 2\lambda y - 2\mu z = p - \rho,$$

(87) $$\operatorname{tg}\Theta = \frac{z-\mu}{y-\lambda}.$$

Das Element $dx\,dy\,dz$ in (82) ist nach Lagrange durch $\Omega\,dp\,dr\,d\Theta$ zu ersetzen, wobei die Functionsdeterminante Ω den Werth hat:

$$\Omega = \frac{dx}{dp}\left(\frac{dy}{dr}\frac{dz}{d\Theta} - \frac{dy}{d\Theta}\frac{dz}{dr}\right) + \frac{dy}{dp}\left(\frac{dz}{dr}\frac{dx}{d\Theta} - \frac{dz}{d\Theta}\frac{dx}{dr}\right) + \frac{dz}{dp}\left(\frac{dx}{dr}\frac{dy}{d\Theta} - \frac{dx}{d\Theta}\frac{dy}{dr}\right).$$

Da y, z von p unabhängig sind, so verschwinden die beiden letzten Glieder, ferner ist:

$$\frac{dx}{dp} = 1,\ \frac{dy}{dr} = \cos\Theta,\ \frac{dz}{dr} = \sin\Theta,\ \frac{dy}{d\Theta} = -r\sin\Theta,\ \frac{dz}{d\Theta} = r\cos\Theta$$

und hiermit wird:

(88) $$\Omega = r,$$

so dass das transformirte Integrale nunmehr lautet:

$$u = \int\int\int F(p-r^2,\ p-\rho)\,dp\,r\,dr\,d\Theta. \tag{89}$$

§. 21.

Damit das Integrale (82) einen bestimmten Werth erlangt, setzen wir fest, das die Integrationen auf alle reellen Werthe von x, y, z zu erstrecken sind, welche zugleich den drei Bedingungen entsprechen:

$$\left.\begin{aligned} &o < x - y^2 - z^2 < \varepsilon, \\ &g_0 < \rho + x - 2\lambda y - 2\mu z < g_1, \\ &t_0 < \frac{z-\mu}{y-\lambda} < t_1, \end{aligned}\right\} \tag{90}$$

in welchen ε, g_0, g_1 positive Constante, t_0, t_1 beliebige reelle Constante bezeichnen.

Hierdurch werden die Grenzbedingungen für die neuen Variabeln:

$$o < p - r^2 < \varepsilon,\ \ g_0 < p < g_1,\ \ \Theta_0 < \Theta < \Theta_1, \tag{91}$$

wenn zur Abkürzung gesetzt wird:

$$\Theta_0 = \text{Arc. tg}\ t_0,\ \ \Theta_1 = \text{Arc. tg}\ t_1. \tag{92}$$

Zur Bestimmung der Integrationsgrenzen für das transformirte Integrale (89), unterscheiden wir drei Fälle, je nachdem:

$$\varepsilon < g_0,\ \ g_0 < \varepsilon < g_1,\ \ \varepsilon > g_1. \tag{93}$$

Die erste Bedingung in (91) kann auch die Form annehmen:

$$\sqrt{p-\varepsilon} < r < \sqrt{p}, \tag{94}$$

wobei, wenn die Wurzelgrössen im absoluten Sinn genommen werden, r nur positive Werthe erhält; da nun p immer zwischen g_0 und g_1 liegt, so ist im ersten Fall in (93) $p-\varepsilon$ beständig positiv und die Grenzbedingung (94) durchaus reell erfüllbar, man hat nach Integration in Bezug auf Θ:

$$u = (\Theta_1 - \Theta_0)\int_{g_0}^{g_1}\int_{\sqrt{p-\varepsilon}}^{\sqrt{p}} F(p-r^2,\ p-\rho)\,dp\,r\,dr. \tag{95}$$

Findet in (93) der zweite Fall statt, so theilen wir das Intervall von p in zwei Theile im Sinne der Relationen:

$$\varepsilon < p < g_1, \quad g_0 < p < \varepsilon,$$

im ersten Theil ist $p - \varepsilon$ stets positiv, also sind die reellen Grenzen für r wie früher:

$$\sqrt{p-\varepsilon} < r < \sqrt{p};$$

im zweiten Theil ist $p - \varepsilon$ beständig negativ, daher sind die reellen Grenzen für r:

$$o < r < \sqrt{p}.$$

Man hat hiernach, mit Integration nach Θ:

$$(96) \quad u = (\Theta_1 - \Theta_0) \left\{ \int_{\varepsilon}^{g_1} \int_{\sqrt{p-\varepsilon}}^{\sqrt{p}} F(p-r^2, p-\rho)\, dp\, r\, dr + \int_{g_0}^{\varepsilon} \int_{o}^{\sqrt{p}} F(p-r^2, p-\rho)\, dp\, r\, dr \right\}.$$

Im dritten Fall in (93) ist $p - \varepsilon$ beständig negativ, daher sind die reellen Grenzen für r, wie im zweiten Theil der vorigen Discussion:

$$o < r < \sqrt{p}$$

und es folgt, wenn wieder die Integration nach Θ vollzogen wird:

$$(97) \qquad u = (\Theta_1 - \Theta_0) \int_{g_0}^{g_1} \int_{o}^{\sqrt{p}} F(p-r^2, p-\rho,)\, dp\, r\, dr.$$

§. 22.

Wären wir unter übrigens gleichen Umständen von dem allgemeineren Integrale ausgegangen:

$$(98) \quad U = \iiint F\left(x - y^2 - z^2,\ x - 2\lambda y - 2\mu z,\ \frac{z-\mu}{y-\lambda}\right) dx\, dy\, dz,$$

so erhielten wir als Transformation:

$$U = \iiint F(p - r^2,\ p - \rho,\ \operatorname{tg} \Theta)\, dp\, r\, dr\, d\Theta;$$

die Integration nach Θ kann nun nicht ausgeführt werden und an die Stelle der Gleichungen (95), (96), (97), treten die folgenden, welche wieder der Ordnung nach den drei Voraussetzungen (93) entsprechen:

$$U=\int_{g_0}^{g_1}\int_{\sqrt{p-\varepsilon}}^{\sqrt{p}}\int_{\Theta_0}^{\Theta_1}F(p-r^2,\ p-\rho,\ \operatorname{tg}\Theta)dprdrd\Theta, \tag{99}$$

$$U=\int_{\varepsilon}^{g_1}\int_{\sqrt{p-\varepsilon}}^{\sqrt{p}}\int_{\Theta_0}^{\Theta_1}F(p-r^2,\ p-\rho,\ \operatorname{tg}\Theta)dprdrd\Theta+\int_{g_0}^{\varepsilon}\int_{o}^{\sqrt{p}}\int_{\Theta_0}^{\Theta_1}F(p-r^2,\ p-\rho,\ \operatorname{tg}\Theta)dprdrd\Theta, \tag{100}$$

$$U=\int_{g_0}^{g_1}\int_{o}^{\sqrt{p}}\int_{\Theta_0}^{\Theta_1}F(p-r^2,\ p-\rho,\ \operatorname{tg}\Theta)dprdrd\Theta. \tag{101}$$

§. 23.

Diese Resultate lassen sich noch erheblich verallgemeinern, wenn man in dem Integrale (98) neue Variabeln einführend $\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}$ statt x, y, z setzt, unter a, b, c positive Constante gedacht und gleichzeitig die Constanten λ,μ in $\frac{b\lambda}{a}, \frac{c\mu}{a}$ verwandelt. Man erhält so statt (98) nach Multiplication mit abc:

$$V=\iiint F\left(\frac{x}{a}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2},\ \ \frac{x-2\lambda y-2\mu z}{a},\ \ \frac{b(az-c^2\mu)}{c(ay-b^2\lambda)}\right)dxdydz \tag{102}$$

und hierin sind die Integrationen auf alle reellen Werthe von x, y, z auszudehnen, welche zugleich den drei Bedingungen entsprechen:

$$\left.\begin{aligned} o<\frac{x}{a}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}<\varepsilon, \\ a(g_0-\rho)<x-2\lambda y-2\mu z<a(g_1-\rho), \\ t_0<\frac{b(az-c^2\mu)}{c(ay-b^2\lambda)}<t_1 \end{aligned}\right\} \tag{103}$$

mit:

$$\rho = \frac{b^2\lambda^2 + c^2\mu^2}{a^2}. \tag{104}$$

Mit diesem Werth von ρ sind nun auf das Integrale V die Formeln (99), (100), (101) unmittelbar anzuwenden, denn nach (85), (86), (87) wird jetzt:

$$\frac{x}{a} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = p - r^2, \tag{105}$$

$$x - 2\lambda y - 2\mu z = a(p - \rho), \tag{106}$$

$$\operatorname{tg}\Theta = \frac{b(az - c^2\mu)}{c(ay - b^2\lambda)} \tag{107}$$

und man hat:

$$V = abc.\,U; \tag{108}$$

die drei in U unterschiedenen Fälle entsprechen auch hier den drei Voraussetzungen (93).

§. 24.

Betrachtet man in geometrischer Auffassung x, y, z als rechtwinkelige Coordinaten, so sind nach den Bedingungen (103) die Integrationen in V (102) auf alle Punkte des Raumes auszudehnen, welche enthalten sind zwischen den beiden elliptischen Paraboloiden:

$$\frac{x}{a} = \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}, \tag{109}$$

$$\frac{x}{a} = \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + \varepsilon, \tag{110}$$

zwischen den beiden parallelen Ebenen:

$$x - 2\lambda y - 2\mu z = a(g_0 - \rho), \tag{111}$$

$$x - 2\lambda y - 2\mu z = a(g_1 - \rho) \tag{112}$$

und zwischen den beiden auf der yz senkrecht stehenden Ebenen:

$$\left\{ \begin{aligned} b(az - c^2\mu) &= ct_0(ay - b^2\lambda), \\ b(az - c^2\mu) &= ct_1(ay - b^2\lambda). \end{aligned} \right. \tag{113}$$

Das Paraboloid (109), welches durch den Ursprung geht, hat seine Hauptaxe in der Axe der x und ein im Abstand a parallel zur Ebene yz geführter Schnitt ist eine Ellipse mit den Halbaxen b, c. Wird diese Fläche im Sinne der positiven x um den Betrag $a\varepsilon$ verschoben, so dass alle Punkte derselben Parallele zur Axe der x beschreiben, so entspricht diese Stellung der Gleichung (110). Das zweite Paraboloid wird vom ersten umschlossen und beide Flächen verlaufen asymptotisch. Die Berührungspunkte paralleler, die beiden Paraboloide (109), (110) tangirenden Ebenen, liegen also in einer auf der Ebene yz senkrechten Geraden.

§. 25.

Die Gleichung einer das elliptische Paraboloid (109) berührenden Ebene, welche parallel zu den Grenzebenen (111), (112) ist, lautet:

$$x - 2\lambda y - 2\mu z = -a\rho \tag{114}$$

und die Coordinaten des Berührungspunktes sind:

$$x_1 = a\rho,\ y_1 = \frac{b^2\lambda}{a},\ z_1 = \frac{c^2\mu}{a}. \tag{115}$$

Die zwei letzteren Werthe leisten den Gleichungen (113) identisch Genüge, folglich gehen die damit bezeichneten Grenzebenen durch diesen Punkt; sie schneiden sich überhaupt in einer Geraden, parallel zur Axe der x, welche die Mittelpunkte aller elliptischen Schnitte enthält, deren Ebenen parallel zu den Grenzebenen (111), (112) sind.

Mit den Werthen (115) verwandeln sich die Gleichungen (107), (113) in:

$$\operatorname{tg}\Theta = \frac{b(z - z_1)}{c(y - y_1)}, \tag{116}$$

$$\left.\begin{aligned} b(z - z_1) &= ct_0(y - y_1), \\ b(z - z_1) &= ct_1(y - y_1), \end{aligned}\right\} \tag{117}$$

und die dritte Bedingung in (103) lautet nun:

$$t_0 < \frac{b(z - z_1)}{c(y - y_1)} < t_1. \tag{118}$$

Bezeichnen η_0, η_1 die Neigungswinkel der Keilebenen (117) zur Ebene xy, so folgt aus ihren Gleichungen, mit Rücksicht auf (92):

$$\text{(119)} \qquad \operatorname{tg} \Theta_0 = \frac{b}{c} \operatorname{tg} \eta_0, \quad \operatorname{tg} \Theta_1 = \frac{b}{c} \operatorname{tg} \eta_1$$

und der Neigungswinkel der Keilebenen (113) ist $\eta_1 - \eta_0$ [1].

§. 26.

Findet in (93) der erste Fall statt, so schneiden die Parallelebenen (111), (112) beide Paraboloide, im zweiten Fall schneidet die Ebene (111) nur das äussere Paraboloid (109) und im dritten Fall schneiden beide Parallelebenen nur das äussere Paraboloid.

Die obigen Figuren 2, 3, 4 zeigen schematisch diese verschiedenen Begrenzungen des Integrationsraumes.

Die parallelen Grenzebenen (111), (112) sind beziehungsweise tangirende Ebenen der beiden elliptischen Paraboloide:

$$\text{(120)} \qquad \begin{aligned} \frac{x}{a} &= \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + g_0, \\ \frac{x}{a} &= \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + g_1 \end{aligned}$$

und da die auf p, r, Θ bezüglichen Transformationen (99), (100), (101) des Integrals U, nur abhängen von ρ, nicht aber von den

---

[1] Da in der Relation (94) r positiv genommen wurde, so bezieht sich der schliesslich erhaltene Werth des Integrals (102) nur auf einen der verschiedenen Keilräume, welche die beiden Grenzebenen (112) formiren. Bei der periodischen Eigenschaft der Function $\operatorname{tg} \Theta$ gestatten die Gleichungen $\operatorname{tg} \Theta_0 = t_0$, $\operatorname{tg} \Theta_1 = t_1$ verschiedene Auflösungen und die obigen Formeln beziehen sich auf jenen Keilraum, welcher dem für Θ_0, Θ_1 in (92) acceptirten Werthpaar entspricht.

Ist $y = y'$, $z = z'$ ein Werthsystem, welches die Bedingung (118) erfüllt, so leistet auch folgendes Werthsystem Genüge:

$$y = 2y_1 - y', \quad z = 2z_1 - z',$$

aber dieses entspricht der Integration nach Θ von

$$\Theta_0 = \pi + \text{arc. } \operatorname{tg} t_0 \text{ bis } \Theta_1 = \pi + \text{arc. } \operatorname{tg} t_1,$$

deren Intervall dem obigen gleich ist.

besonderen Werthen von λ, μ, so folgt hieraus der bemerkenswerthe Satz, dass das Integrale $V(102)$ denselben Werth behält, für alle Werthe von λ, μ, welche demselben ρ entsprechen oder für alle Parallelebenen seines Integrationsraumes, welche die Paraboloide (120) berühren.

§. 27.

Lässt man in (102) unter dem Functionszeichen F den ersten und dritten Complex weg, so können im transformirten U die Integrationen nach Θ, r vollzogen werden und wenn $\Theta_1-\Theta_0=2\pi$ gesetzt wird, so entfällt in (103) die dritte Bedingung und man erhält den Werth des dreifachen Integrals:

$$W=\iiint F\left(\frac{x-2\lambda y-2\mu z}{a}\right)dxdydz, \tag{121}$$

mit den zwei Grenzbedingungen:

$$\left.\begin{aligned} o<\frac{x}{a}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}<\varepsilon, \\ a(g_0-\rho)<x-2\lambda y-2\mu z<a(g_1-\rho). \end{aligned}\right\} \tag{122}$$

Es wird, entsprechend den drei Fällen in (93):

$$\left.\begin{aligned} W_1 &=\pi abc\varepsilon.\int_{g_0}^{g_1}F(p-\rho)dp, \\ W_2 &=\pi abc.\left\{\int_{g_0}^{\varepsilon}F(p-\rho)pdp+\varepsilon.\int_{\varepsilon}^{g_1}F(p-\rho)dp\right\}. \\ W_3 &=\pi abc.\int_{g_0}^{g_1}F(p-\rho)pdp. \end{aligned}\right\} \tag{123}$$

Der Integrationsraum ist hier begrenzt von den beiden Paraboloiden (109), (110) und den parallelen Ebenen (111), (112) [1].

---

[1] Denkt man sich wieder den Raum mit Materie erfüllt, deren Dichtigkeit an der Stelle (xyz) durch den Werth der Function F gemessen wird, so bezeichnet das Integrale (121) W die Masse des Integrationsraumes. In diesem Falle ist die Dichte in allen Punkten eines zu den Grenzebenen paralellen Schnittes constant.

Ist z. B. $F(\zeta)=\frac{1}{\zeta}$, so wird, wenn $\rho<g_0$ oder $\rho>g_1$:

$$(124)\quad \begin{cases} W=\iiint\frac{a\,dx\,dy\,dz}{x-2\lambda y-2\mu z}, \\ W_1=\pi abc\varepsilon.\ \lg\frac{g_1-\rho}{g_0-\rho}, \\ W_2=\pi abc.\left\{\varepsilon-g_0+\rho\lg\frac{\varepsilon-\rho}{g_0-\rho}+\varepsilon\lg\frac{g_1-\rho}{\varepsilon-\rho}\right\}, \\ W_3=\pi abc.\left\{g_1-g_0+\rho\lg\frac{g_1-\rho}{g_0-\rho}\right\}. \end{cases}$$

Für $a=b=c=1$ und $\lambda=\mu=-\frac{1}{2}$ wird $\rho=\frac{1}{2}$, setzt man noch $\varepsilon=1$ und $g_0+\frac{1}{2}$, $g_1+\frac{1}{2}$ für g_0, g_1, so erhält man den Werth des Integrals:

$$(125)\qquad W=\iiint\frac{dx\,dy\,dz}{x+y+z},$$

mit den Grenzbedingungen:

$$(126)\qquad \begin{gathered} o<x-y^2-z^2<1, \\ g_0<x+y+z<g_1 \end{gathered}$$

und zwar wird:

$$(127)\quad \begin{cases} W_1=\pi(\lg g_1-\lg g_0)\ \text{für}\ g_0>\frac{1}{2},\ g_1>\frac{1}{2}, \\ W_2=\frac{1}{2}\pi(1-2g_0+\lg 2+2\lg g_1-\lg g_0)\ \text{für}\ g_0<\frac{1}{2}<g_1: \\ W_3=\frac{1}{2}\pi(2g_1-2g_0+\lg g_1-\lg g_0)\ \text{für}\ g_0<\frac{1}{2}, g_1<\frac{1}{2}. \end{cases}$$

§. 28.

Setzt man in dem Integrale (102) $F(\zeta)=1$, so gibt die Gleichung (108) mit Hilfe von (99), (100), (101) den Inhalt des Integrationsraumes. In diesem Falle können alle angezeigten Integrationen ausgeführt werden und man erhält, wenn S das gedachte Volumen bezeichnet, entsprechend den drei Fällen (93):

$$(128)\quad \begin{cases} S_1=\frac{1}{2}abc(\Theta_1-\Theta_0)\varepsilon(g_1-g_0), \\ S_2=\frac{1}{4}abc(\Theta_1-\Theta_0)(2\varepsilon g_1-\varepsilon^2-g_0^2), \\ S_3=\frac{1}{4}abc(\Theta_1-\Theta_0)(g_1^2-g_0^2), \end{cases}$$

hierin ist im Sinne der Gleichungen (119):

$$\Theta_1 - \Theta_0 = \text{arc. tg}\left(\frac{b}{c}\operatorname{tg}\eta_1\right) - \text{arc. tg}\left(\frac{b}{c}\operatorname{tg}\eta_0\right). \tag{129}$$

Setzt man im ersten Fall $\Theta_1 - \Theta_0 = 2\pi$, so erhält man den Inhalt R_p des Ringkörpers, zwischen den beiden Paraboloiden (109), (110) und den parallelen Ebenen (111), (112) und zwar wird:

$$R_p = \pi abc\varepsilon(g_1 - g_0). \tag{130}$$

Wenn sich die letzteren Ebenen parallel zu sich selbst verschieben und ihre Distanz beibehalten, so behält $g_1 - g_0$ denselben Werth und nach der Formel (130) bleibt auch das Volumen des Ringkörpers, wie bei gleichliegenden Cylinderflächen constant.

Die erste Formel in (128) gilt noch für $g_0 = \varepsilon$, die letzte noch für $g_1 = \varepsilon$; die Summe der hierfür entstehenden Ausdrücke wird gleich S_2, entsprechend dem geometrischen Sinn dieser Substitutionen.

§. 29.

Für $g_0 = o$ im dritten Fall, geht die Grenzebene (111) in eine das Paraboloid (109) berührende über und für $\Theta_1 - \Theta_0 = 2\pi$, $g_1 = g$ erhält man den Inhalt S_p des Segmentes, welches die Ebene:

$$x - 2\lambda y - 2\mu z = a(g - \rho), \tag{131}$$

von dem elliptischen Paraboloid:

$$\frac{x}{a} = \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}, \tag{109}$$

abschneidet und zwar wird:

$$S_p = \tfrac{1}{2}\pi abc.\, g^2; \tag{132}$$

denselben Inhalt haben alle Segmente, deren Schnittebenen das Paraboloid:

$$\frac{x}{a} = \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + g \tag{133}$$

berühren.

Dieses Ergebniss steht in Übereinstimmung mit den von uns 1857 in Grunert's Archiv, Thl. 29, pag. 209 auf anderem Weg entwickelten Resultaten[1].

[1] S. a. Sitzungsberichte Bd. LX, II. Abth. p. 665.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1871

Band/Volume: 63_2

Autor(en)/Author(s): Unferdinger Franz

Artikel/Article: Zur Theorie der simultanen Substitutionen in zwei- und dreifachen Integralen. 773-808