Über die Construction des Durchschnittes zweier krummen Flächen unter Anwendung von Kugeln und Rotations-Flächen.

Von **R. Niemtschik,**

Professor am k. k. polytechnischen Institute in Wien.

(Mit 1 Tafel.)

1. Der Durchschnitt D einer Rotationsfläche F mit einer Fläche (F), welche letztere durch die Bewegung eines Kreises erzeugt wird, dessen Mittelpunkt in einer durch die Rotationsaxe von F gelegten Ebene E eine Gerade oder eine Curve durchlauft und dessen Ebene in jeder Lage auf E senkrecht steht, kann auf folgende Weise construirt werden.

Man lege durch einen, die Rotationsfläche F schneidenden Kreis (k) von (F) eine Kugel K, deren Mittelpunkt in der Rotationsaxe von F liegt, bestimme den Durchschnittskreis k der Flächen K, F und dann die gemeinschaftlichen Punkte der Kreise (k), k als dem fraglichen Durchschnitte D angehörig. Diesen Vorgang wende man bei entsprechend vielen Kreisen der Fläche (F) an und ziehe durch die erhaltenen Punkte die Linie D.

Von den vielen Fällen, welche auf die vorstehende Aufgabe sich zurückführen lassen, wollen wir nur den folgenden weiter behandeln.

2. Es soll der Durchschnitt 128 der Rotationsfläche $abcd$ mit dem dreiaxigen Ellipsoide $AB..EF$ Fig. 1 dargestellt werden.

AB, CD, EF sind Axen des Ellipsoides; AB steht auf der horizontalen und EF auf der verticalen Projectionsebene senkrecht, folglich ist CD mit der Projectionsaxe $X(X)$ parallel. Die Axe ab der Rotationsfläche liegt in der Ebene des mittleren Hauptschnittes $ABCD$ des Ellipsoides. $a''b''c''d''$ ist der Vertical-Umriss und $e'f'g'h'$ der Horizontal-Umriss der Rotationsfläche.

Man beschreibe aus M mit dem Halbmesser $ME = MF$ eine Kugel; dieselbe schneidet die Ellipse $ABCD$ in den Punkten G, H, I, K und das Ellipsoid ABF in den grössten (nicht gezeichneten) Kreisen $EFGH$ und $EFIK$, deren verticale Projectionen als Durchmesser $G''H''$, $I''K''$ der Ellipse $A''B''C''D''$ erscheinen. $M''G'' = M''H'' = M''I'' = M''K'' = M'E'$.

Nun ist bekannt, dass die verticalen Projectionen der Kreise des Ellipsoides ABF beziehungsweise mit $G''H''$ und mit $I''K''$ parallele Sehnen der Ellipse $A''B''C''D''$ sind und dass diese Sehnen die Längen der Durchmesser jener Kreise darstellen. Ferner ist bekannt, dass die Mittelpunkte der Kreise in den mit GH und IK verwandten Durchmessern $(G)(H)$, $(I)(K)$ der Ellipse $ABCD$ liegen.

Der Meridian $abcd$ und die Ellipse $ABCD$ treffen sich in den Punkten 1, 2, weshalb diese Punkte der Linie 1 2 8 angehören. Nur jene Kreise des Ellipsoides, welche durch Punkte des Bogens $1D2$ gezogen werden können, schneiden die Rotationsfläche abd.

Um nun die Durchschnittspunkte 3, 4 eines beliebigen Kreises LNO des Ellipsoides mit der Rotationsfläche zu finden, ziehe man durch den Kreis-Mittelpunkt N die zu der Ebene LNO senkrechte Gerade Nr, bis sie die Rotationsaxe ab in dem Punkte r trifft; dann schneide man die Rotationsfläche mit der durch den Kreis LNO gelegten Kugel, welche r als Mittelpunkt hat, wodurch der Kreis lno erhalten wird, und bestimme die gemeinschaftlichen Punkte 3, 4 der Kreise LNO, lno.

Die Geraden $L''N''O''$ ($\| G''H''$) und $l''n''o''$ ($N''r'' \perp G''H''$, $r''l'' = r''o'' = r''L'' = r''O''$) sind die verticalen Projectionen der Kreise LNO und lno; folglich bildet der Begegnungspunkt dieser Geraden die verticalen Projectionen $3''$, $4''$ der Punkte 3, 4. Die horizontalen Projectionen $3'$, $4'$ ergeben sich aber, wenn die Entfernung $3''(3)$ des Punktes 3 (oder 4) von der Ebene ABb bestimmt, also etwa $3''(3) \perp l''o''$ gezogen, $n''(3) = n''l''$ und $t'3' = t'4' = 3''(3)$ gemacht wird.

Weil die Ebene ABb sowohl die Rotationsfläche als auch das Ellipsoid in symmetrische Hälften theilt, so ist $AB\,ab$ ebenfalls eine Symmetrieebene für die Durchschnittslinie 1 2 8.

Die Tangente $T3$ der Schnittlinie $1\,2\,8$ ergibt sich als Durchschnitt der Ebenen $3pT$ und $3PT$, welche in dem Punkte 3 beziehungsweise die Rotationsfläche und das Ellipsoid berühren.

Die Ebene $3pT$ ist durch die Tangente $3p$ des Kreises lno und senkrecht zu der Normalen 3ρ der Rotationsfläche gelegt; p bildet den Durchschnittspunkt der Tangente $3p$ mit der Ebene ABb und pT die Durchschnittslinie der Ebenen $3pT$ und ABb. $(3)p'' \perp n''(3)$; $p''T'' \perp 3''\rho''$. $3pT$ ist auch eine Berührungsebene des die Rotationsfläche längs des Kreises lno berührenden Kegels, dessen Scheitel s im Durchschnitte der Axe ab mit der dem Punkte l (oder o) des Meridianes abd entsprechenden Tangente ls (oder os) erhalten wird. pT und s liegen also in der Ebene $3pT$ sowie auch in der Ebene ABb, folglich liegt s gleichfalls in der Geraden pT. Deshalb kann die Gerade $p''T''$ auch dadurch gefunden werden, dass man p'' mit dem Durchschnittspunkte s'' der Axe $a''b''$ und der Tangente $l''s''$ (oder $o''s''$) des Umrisses $a''b''d''$ verbindet.

Die Ebene $3PT$ ist aber durch die Tangenten $3P$, $3Q$ der durch den Punkt 3 gezogenen Kreise $O3L$ und $R3S$ des Ellipsoides bestimmt. P, Q sind Durchschnittspunkte der Tangenten $3P$, $3Q$ mit der Ebene ABb und daher ist PQ die Durchschnittslinie der Ebenen $3PT$ und ABb. $3''[3] \perp O''L''$, $3''[3] = 3''(3)$, $N''[3] = N''O''$, $[3]P'' \perp N''[3]$; $3''\{3\} \perp R''S''$, $3''\{3\} = 3''(3)$, $R''U'' = U''S''$, $\{3\}Q'' \perp U''\{3\}$. Die Trace $P''Q''$ steht wieder senkrecht auf der verticalen Projection der dem Punkte 3 des Ellipsoides entsprechenden Normalen und geht auch durch die verticalen Projectionen σ'', (σ'') der Spitzen σ, (σ) jener Kegel, welche das Ellipsoid längs der Kreise $R3S$ und LNO berühren.

Der gemeinschaftliche Punkt T der Tracen pT und PQ gehört den beiden Berührungsebenen $3pT$ und $3PT$, also auch der Tangente $3T$, als der Durchschnittslinie dieser Ebenen an.

Weil T in der Symmetrieebene ABb liegt und 3, 4 symmetrische Punkte der Schnittlinie $1\,2\,8$ sind; so ist $T4$ die dem Punkte 4 entsprechende Tangente.

In den Durchschnitten der Linien $1''2''3''$ und $C''D''$ ergeben sich die verticalen Projectionen $5''$, $6''$ von den in der Ellipse CDF befindlichen Punkten 5, 6 der Linie $1\,2\,8$; weshalb $5'$, $6'$ Berührungspunkte der Linien $1'2'8'$ und $C'D'E'F'$ sind.

In den Durchschnitten der Linie $1''3''2''$ mit der verticalen Projection $g''\;.h''$ des Horizontal-Umrisses *efgh* liegen aber die verticalen Projectionen $7''$, $8''$ der gemeinschaftlichen Punkte 7, 8 von 1 2 8 und *efgh*, weshalb wieder $7'$, $8'$ Berührungspunkte der Linien $1'2'8'$ und $e'f'g'h'$ bilden.

Weil in Fig. 1 statt einer allgemeinen Rotationsfläche ein Rotations-Ellipsoid gezeichnet wurde, ist der Umriss $e'f'g'h'$ eine Ellipse und die verticale Projection $g''h''$ desselben eine Gerade.

Wenn die Ebene *ABab* gegen eine oder gegen beide Projectionsebenen geneigt wäre, könnte die Durchschnittslinie 1 2 8 dadurch dargestellt werden, dass man die Ebene *ABb* sammt den in ihr befindlichen Diametralschnitten *ABCD* und *abd* in eine Projectionsebene oder parallel dazu nach $(A)(B)(C)(D)$, $(a)(b)(d)$ dreht, in dieser Lage den Durchschnitt (1)(2)(8) der Flächen $(A)(B)(F)$, $(a)\,(b)\,(f)$ wie in Fig. 1 construirt und dann die Curve (1)(2)(8) um dieselbe Gerade und denselben Winkel zurückdreht, um welche $AB\ldots d$ nach $(A)(B)\,..(d)$ gedreht worden sind.

In dem speciellen Falle, wenn auch *ABF* eine Rotationsfläche mit der Hauptaxe *AB* ist, liegt der gemeinschaftliche Mittelpunkt aller Hilfskugeln im Durchschnitte der Rotationsaxen *AB*, *ab*.

3. Der Durchschnitt *D* einer Rotationsfläche *F* mit einer Fläche (*F*), welche durch Bewegung einer Ellipse erzeugt wird (und nach Kreisen nicht geschnitten werden kann), deren Mittelpunkt in einer durch die Rotationsaxe der Fläche *F* gelegten Ebene *E* eine gerade oder krumme Linie durchlauft und deren eine Axe in jeder Lage senkrecht zu der Ebene *E* steht, ergibt sich einfach auf folgende Weise.

Man construire eine Rotationsfläche, welche die Fläche (*F*) nach einer Ellipse und die Rotationsfläche *F* nach Kreisen schneidet und bestimme die Punkte, welche die Ellipse und die Kreise gemeinschaftlich haben und welche offenbar auch der Linie *D* angehören. Dieses Verfahren ist so oft zu wiederholen, bis die zur Darstellung der Linie *D* erforderlichen Punkte gefunden sind. Um eine grössere Genauigkeit zu erzielen, wird man auch einige Tangenten von *D* im voraus zu ziehen haben.

Als Beispiel diene die nachstehende Aufgabe.

4. Es sollen die Durchschnitte 1 2 6 und I II VI der Rotationsfläche *ab..f* mit der Fläche ***AB..F*** Fig. 2 construirt werden.

Die Rotationsaxe *ab* ist parallel mit der Projectionsaxe $X(X)$. Die Gerade ***AB*** steht senkrecht auf der horizontalen Projectionsebene; ***CD***, ***EF*** sind Axen der Ellipse ***CDEF*** $CD \| X(X)$. Alle horizontalen Schnitte der Fläche ***ABF*** sind mit ***CDEF*** ähnliche und ähnlich liegende Ellipsen, deren Mittelpunkte in der Geraden ***AB*** liegen.

Der Diametralschnitt ***CAD*** der Fläche ***ABF*** und der Meridian *abf* der Rotationsfläche *abf* haben die Punkte I, II, 1, 2 gemeinschaftlich, weshalb diese Punkte den fraglichen Durchschnittslinien angehören.

Um andere Punkte der Linien 1 2 6, I II VI zu erhalten, ziehe man durch einen in dem Bogen $A''C''$, zwischen I″, II″ gelegenen Punkt H'' die mit $X(X)$ parallele Gerade $H''I''K''$ und betrachte sie als verticale Projection der auf der Fläche ***ABF*** befindlichen, also mit ***CDEF*** ähnlichen Ellipse ***HIK***. Diese Ellipse benütze man als Erzeugungslinie sowie die Gerade *ab* als Axe des Rotations-Ellipsoides ***B***. Das Ellipsoid ***R*** hat zum Meridian die mit ***CDEF*** ähnliche Ellipse $\alpha\beta\gamma\delta$ und schneidet die Rotationsfläche *abf* in den Kreisen *ghi* und *klo*; diese beiden Kreise schneiden wieder die Ellipse ***HIK*** in den Punkten 3, 4, III, IV, welche also auch in den Durchschnitten der beiden Flächen *abf* und ***ABF*** liegen.

Zieht man $K''\varepsilon \| E'D'$; so ist $I''\varepsilon$ gleich der zu ***HK*** senkrechten Halbaxe der Ellipse ***HIK***. Macht man $I''\varphi = I''\varepsilon$, $G''\alpha = G''\beta = G''\varphi$, $\alpha\delta \| E'D'$ und $G''\gamma = G''\delta$, so sind $\alpha\beta$, $\gamma\delta$ die Axen des zur verticalen Projectionsebene parallelen Meridianes des Ellipsoides ***R***. Bestimmt man die Durchschnittspunkte g'', k'' (oder h'', l'') der Ellipse $\alpha\beta\gamma\delta$ mit dem Meridiane $a''b''f''$ und zieht die Geraden $g''i''h''$ und $k''o''l'' \perp a''b''$; so bilden $g''h''$, $k''l''$ die verticalen Projectionen der Durchschnittskreise *gih* und *klo* der Flächen ***B*** und *abf*, sowie 3″, 4″, III″, IV″ die gleichnamigen Projectionen der Punkte 3, 4, III, IV, welche die Ellipse ***HIK*** beziehungsweise mit dem Kreise *klo* und jenem *gih* gemeinschaftlich hat.

Um die horizontalen Projectionen 3′, 4′, III′, IV′ zu erhalten, hat man die Abstände 3″(3), III″(III) der Punkte 3, 4, III, IV von der Ebene *CAD* zu bestimmen, [$o''(3) = o''k''$, $i''(\mathrm{III}) = i''g'$] und $o'3' = o'4' = 3''(3)$, sowie $i'\mathrm{III}' = i'\mathrm{IV}' = \mathrm{III}''(\mathrm{III})$ zu machen.

Wie die Durchschnittspunkte der Ellipse *HIK* mit der Rotationsfläche *ab f* bestimmt wurden, so können auch die Durchschnittspunkte III, IV eines beliebigen Kreises *gih* der Rotationsfläche *abf* mit der Fläche *ABF* gefunden werden, wenn man nämlich *gih* als Parallelkreis eines Rotations-Ellipsoides *R* betrachtet, welches *ab* zur Axe, *G* zum Mittelpunkt hat und dessen Meridian $\alpha\beta\gamma\delta$ eine mit *CDEF* ähnliche Ellipse ist.

Das Ellipsoid *R* schneidet die Fläche *ABF* in einer horizontalen, mit *CDEF* ähnlichen Ellipse *HIK* und diese schneidet den Kreis wieder in den Punkten III, IV.

Demnach hat man $A'L' \| G''g''$, $g''\beta \| L'F'$, $\beta\delta \| F'D'$ zu ziehen, $G''\alpha = G''\beta$, $G''\gamma = G''\delta$ zu machen, den Durchschnittspunkt H'' (oder K'') der Ellipse $\alpha\beta\gamma\delta$ mit $C''A''$ (oder $D''A''$) zu bestimmen und die Gerade $H''K'' \| X(X)$ zu ziehen. Die Geraden $H''K''$ und $g''k''$, als verticale Projectionen der Ellipse *HIK* und des Kreises *gih* schneiden sich in einem Punkte, welcher die verticalen Projectionen III$''$, IV$''$ der Durchschnittspunkte III, IV der genannten Linien bezeichnet. Die horizontalen Projectionen III$'$, IV$'$ können aber wie bei dem ersten Vorgange gefunden werden.

Weil die Ebene *aAb* die beiden Flächen *abf* und *ABF* symmetrisch theilt, so sind auch die Curven 1 2 6 und I II VI symmetrisch mit Bezug auf jene Ebene, und da dieselbe auf der horizontalen Projectionsebene senkrecht steht, so erscheinen auch die Projectionen $1'\ 2'\ 6'$ und I$'$ II$'$ VI$'$ symmetrisch gegen $a'b'$.

Die Tangente *t* III der Curve I II VI ergibt sich als Durchschnittslinie der Ebenen III*mn* und III*MN*, von denen die erstere die Rotationsfläche *abf*, die letztere die Fläche *ABF* in demselben Punkte III berührt.

Die Ebene III*mn* kann entweder durch die Tangente III*z* des Kreises *gih* und die Spitze *s* des die Rotationsfläche *abf* längs des Kreises *gih* berührenden Kegels, oder durch den Punkt III und die zur Normalen IIIμ der Rotationsfläche *abf* senkrechte Lage bestimmt werden. Zur Bestimmung der Ebene III*MN* kann man wieder entweder die Tangente III*T* der Ellipse *HIK* und den Scheitel *S* des die Fläche *ABF* längs der Ellipse

HIK berührenden Kegels, oder die dem Punkte III entsprechende Normale der Fläche *ABF* benützen.

Zieht man (III)$q \perp i''$(III) und macht $i'z' = z''q$, so ist z als Durchschnitt der Tangente IIIz des Kreises *gih* mit der horizontalen Projectionsebene ein Punkt der Horizontaltrace *mn* der Ebene III*mn*; zieht man aber die Normale $v'\mu'$ an den Umriss $a'b'd'$ und dann III$'\mu'$, so ist III$'\mu'$ die horizontale Projection der Normalen IIIμ zur Rotationsfläche *abf*. Demnach kann die Trace $mn \perp$ III$'\mu'$ gezogen werden.

Bei der Bestimmung der Horizontaltrace *MN* der Ebene III*MN* ist zu berücksichtigen, dass sie mit der Tangente III*T* der Ellipse *HIK* parallel ist; diese Tangente ist aber wieder parallel mit der Tangente *px*, welche an die Ellipse *CDEF* durch deren Schnittpunkt *p* mit der Ebene III*AB* gezogen werden kann, folglich ist auch $MN \| px$. Ein Punkt w' dieser Trace ergibt sich im Durchschnitte der Geraden *S*III mit der horizontalen Projectionsebene. Ohne Benützung des Scheitels *S* kann w' dadurch gefunden werden, dass man zuerst die Tangente $H''u''$ an den Hauptschnitt $C''A''$ zieht, u'' nach u' projicirt und dann den Durchschnittspunkt w' der Geraden A'III$'$ und der zu $C'p'$ parallelen Geraden $u'w'$ bestimmt.

Die Tracen *mn* und *MN* treffen sich in dem Punkte *t*, weshalb also t'III$'$, t''III$''$ die Projectionen der Tangente *t*III bilden. Bezeichnet (*t*) den Durchschnittspunkt der Tangente *t*III mit der Symmetrieebene *abAB*, dann ist selbstverständlich (*t*)IV die mit *t*III symmetrisch gelegene Tangente der Linie I II VI.

Die in dem Umrisse $a'b'd'$ gelegenen Punkte $5'$, $6'$, V$'$, VI$'$ können nach dem gewöhnlichen Vorgange, nämlich als horizontale Projectionen der Durchschnitte 5, 6, V, VI des Meridianes *abd* und der mit *CDEF* ähnlichen Schnittlinie (*C*)(*D*)(*E*)(*F*) der Ebene *abd* mit der Fläche *ABF* dargestellt werden.

Die verticalen Projectionen $5''$, $6''$, V$''$, VI$''$ ergeben sich dann als Durchschnitte der Geraden $a''b''$ mit den Projectionsstrahlen $5'$, $5''$ und V$'$, V$''$.

Man kann aber auch zuerst die verticalen Projectionen $5''$, $6''$, V$''$, VI$''$ auf die für die Bestimmung der Punkte $3''$, $4''$, III$''$, IV$''$ angegebene Weise ermitteln und nachher die horizontalen Projectionen $5'$, $6'$, V$'$, VI$'$ bestimmen.

Wenn durch die Axe ab einer Rotationsfläche F und die Axe $\alpha\beta$ einer symmetrischen Curve C eine Ebene gelegt werden kann, welche auf der Ebene von C senkrecht steht, dann ist es in den meisten Fällen vortheilhaft, die Durchschnittspunkte von C mit F durch Anwendung einer Rotationsfläche (F) zu bestimmen, welche ab als Axe und die Curve C als Erzeugungslinie hat. Die Flächen F (F) schneiden sich nach Kreisen und diese treffen die Curve C in den fraglichen Punkten.

Bei einer anderen Gelegenheit wollen wir die Fälle behandeln, in welchen die bezügliche Linie C der zweiten Ordnung angehört und die Axen ab, $\alpha\beta$ sich schneiden.

R. Niemtschik. Constr. d. Durchschnitte zweier kr. Flächen m. Benützung v. Kugeln etc.

Fig. 1.

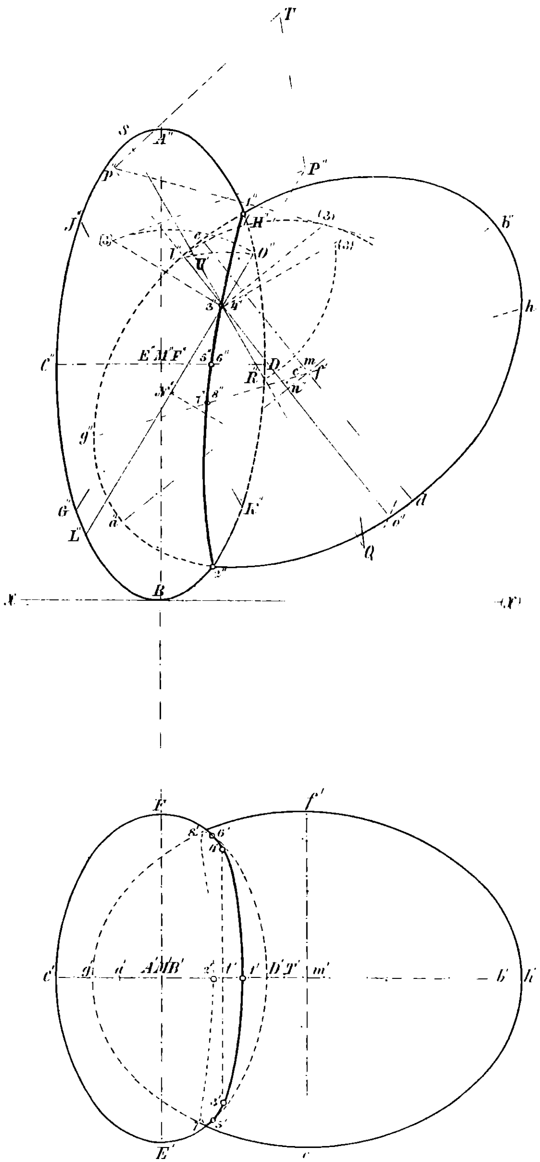
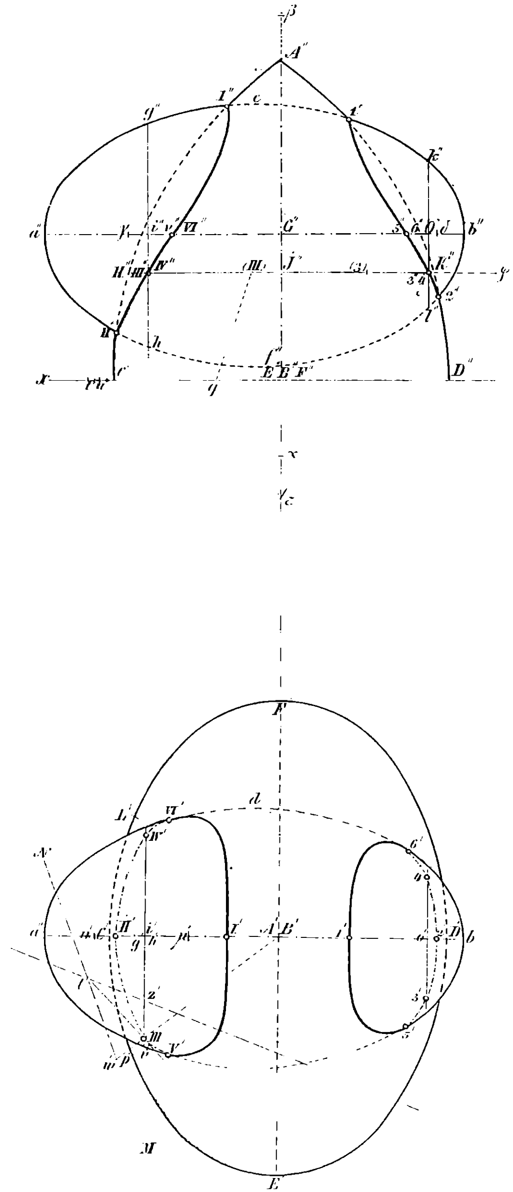


Fig. 2.



R. Niemtschik. Druck v. Jos. M. Fohmbacher lith.