Über die Identität von Constructionen in perspectivischer, schiefer und orthogonaler Projection.

Von Dr. **Rudolf Staudigl,**

Professor am k. k. polytechn. Institute in Wien.

(Mit 1 Tafel.)

Nicht selten stösst man bei der Auflösung von Aufgaben aus dem Gebiete der darstellenden Geometrie auf Fälle, in welchen ganz dieselbe Construction, dieselbe Zusammenstellung von Linien zum Ziele führt, man mag in perspectivischer, schiefer oder axonometrischer Projection arbeiten. Eine und dieselbe Figur kann als graphische Lösung der betreffenden Aufgabe für jede der genannten drei Projectionsarten betrachtet werden. Die Möglichkeit dieser Thatsache findet ihre Erklärung in folgendem, für die darstellende Geometrie gewiss sehr wichtigen Satze, den wir beweisen, und durch einige Beispiele erläutern wollen:

Alle Aufgaben der darstellenden Geometrie, bei denen weder ein Längen-, noch ein Winkelmass in Betracht kommt, also alle Aufgaben, welche der Geometrie der Lage angehören, können auf ganz gleiche Weise, durch ganz dieselben Liniencombinationen sowohl in perspectivischer, wie in schiefer, als auch in orthogonaler (axonometrischer) Projection gelöst werden [1].

---

[1] Eine Abhandlung des Herrn H. Anton, die sich im 54. Bande der Sitzungsberichte d. k. Akad. d. Wissensch. Jhrg. 1866 unter dem Titel: „Die Grenzebene" findet, sowie auch die im 58. Bande Jhrg. 1871 aufgenommene Abhandlung des Herrn Prof. R. Niemtschik: „Allgemeine Methoden zur Darstellung der Durchschnitte von Ebenen mit Kegel- und Cylinderflächen, von Geraden mit Kegelschnittslinien und von confocalen Kegelschnittslinien unter sich," enthalten Erklärungen von Constructionen, welche als An-

Zu diesen Aufgaben gehören unter anderen folgende, wenn bei denselben keine bestimmten Abmessungen oder Dimensionsverhältnisse vorausgesetzt werden.

Bestimmung des Durchschnittes einer Geraden mit einer Ebene.

Schnitt zweier Ebenen.

Durchdringung von körperlichen Gebilden, welche von Ebenen begrenzt sind.

Schnitt einer Geraden oder Ebene mit einer Kegel- oder Cylinderfläche, abwickelbaren oder windschiefen Fläche.

Construction von Tangenten und tangirenden Ebenen.

Selbst- und Schlagschattenbestimmungen bei centralen oder parallelen Lichtstrahlen.

Schnitt zweier Kegelflächen, zweier Flächen zweiter Ordnung, überhaupt irgend zweier Flächen, u. s. w.

Um den Beweis für unseren Satz herzustellen, nehmen wir an, E (Fig. 1—3) sei die Projectionsebene, in der wir uns irgend eine der bezeichneten Aufgaben bereits ausgeführt denken. Die auf E gezeichnete Figur sei für das Projectionscentrum O construirt, welches auch in irgend einer Richtung unendlich ferne liegend gedacht werden kann. Letztere Figur fassen wir im Sinne der neueren Geometrie als ein ebenes System S auf und betrachten also — unseren Annahmen gemäss — S als eine centrale, schiefe, oder orthogonale Projection irgend eines räumlichen Systemes Σ auf E aus dem Projectionscentrum O. Σ wird in Fig. 1—3 durch das Dreieck ABC, und S durch die Projection abc von ABC repräsentirt.

Das Centrum O und das ebene System S kann man als Bestandtheile des räumlichen Systemes Σ ansehen.

Es lässt sich nun ein zweites räumliches System Σ_1 construiren, welches gegen Σ perspectivisch liegt, und zwar derart, dass E zur Collineationsebene wird. Dabei ist es gestattet, zu irgend zwei Punkten von Σ die zwei entsprechenden von Σ_1 beliebig anzunehmen, wie aus dem bekannten Lehrsatze folgt,

---

wendungen des obigen Satzes auf specielle Fälle zu betrachten sind. Das diesen Constructionen zu Grunde liegende allgemeine Princip scheint bisher nicht erkannt worden zu sein.

dass, wenn man zwei räumliche Systeme collinear auf einander beziehen will, fünf beliebige Punkte des einen Systemes, von denen keine vier derselben Ebene angehören, irgend solchen fünf Punkten des anderen Systemes als entsprechend zugewiesen werden können. Drei Paare sich selbst entsprechender Punkte liegen in E und weitere zwei Paare sind noch beliebig zu wählen. Wir nehmen nun an, den Punkten O und A in Σ sollen beziehungsweise O_1 und A_1 in Σ_1 entsprechen.

Diesen Annahmen zufolge entspricht dem das System Σ projicirenden Strahlenbündel mit dem Mittelpunkte O der das System Σ_1 projicirende Bündel mit dem Mittelpunkte O_1. Letztere zwei Bündel liegen perspectivisch; ihr perspectivischer Durchschnitt ist das ebene System S, daher fällt die Projection von Σ aus O auf die Ebene E mit jener von Σ_1 aus O_1 auf dieselbe Ebene zusammen.

Da sowohl O_1 als auch A_1 beliebig gewählt werden konnten, so gibt es für jeden beliebigen Punkt O_1 des Raumes unendlich viele mit Σ collineare räumliche Systeme Σ_1, welche aus O_1 auf E projicirt dieselbe Projection S liefern wie Σ für das Projectionscentrum O.

Aus dem Umstande, dass es gestattet ist O_1 in endlicher oder unendlicher Entfernung beliebig anzunehmen, schliessen wir, dass jede ebene centrale oder Parallel-Projection irgend eines räumlichen Systemes Σ sowohl als eine centrale, als auch eine schiefe oder orthogonale Projection eines mit Σ collinearen räumlichen Systemes für irgend ein beliebiges Projectionscentrum betrachtet werden kann.

Die in der Zeichenfläche E ausgeführte Construction gilt demnach ebensowohl für Σ wie für Σ_1 und diese Construction kann als eine perspectivische, schiefe, oder orthogonale Darstellung gelten.

Hiermit ist obiger Satz bewiesen.

Die Beschränkung, dass die eben nachgewiesenen Beziehungen nur für Aufgaben aus dem Gebiete der Geometrie der Lage bestehen, findet ihre Rechtfertigung in der Allgemeinheit der collinearen Verwandtschaft von Σ und Σ_1. Handelt es sich bei irgend einer Construction um bestimmte Längen- oder Winkelmasse, so gibt es im allgemeinen nicht für jedes beliebige Projectionscentrum O_1 ein System Σ_1, welchem diese Construction entspricht, weil ja bei collinear verwandten Gebilden entsprechende Strecken oder Winkel im allgemeinen nicht gleich gross sind.

Nebenbei sei noch bemerkt, dass das Collineationscentrum M von Σ und Σ_1 stets in der Verbindungslinie von O und O_1 liegen muss, da letztere zwei Punkte sich entsprechen. Befindet sich O in unendlicher Entfernung, ist also S eine Parallelprojection von Σ, so gehört M einer Geraden an, welche durch O_1 geht und parallel zu den Projectionsstrahlen ist. (Fig. 2.)

Liegt sowohl O als auch O_1 in unendlicher Entfernung, so rückt M ebenfalls in unendliche Ferne. Σ und Σ_1 sind dann affin. (Fig. 3.)

Es erübrigt nun noch, den in Rede stehenden Satz durch einige Beispiele zu erläutern.

P sei die axonometrische Projection eines Punktes, P' jene seines Grundrisses, a die axonometrische Projection einer Geraden und a' jene ihres Grundrisses. Es soll der Schnittpunkt S einer zweiten, durch analoge Angaben bestimmten Geraden bb' mit der Ebene von PP', aa' ermittelt werden.

Man zieht durch P eine Parallele c zu b, durch P' eine Parallele c' zu b' und bestimmt auf bekannte Weise, etwa mit Hilfe einer projicirenden Ebene, den Durchschnitt von bb' mit der Ebene der zwei Geraden aa', cc'. — Derselbe Punkt S ergibt sich, wenn man die Angaben als perspectivische oder schiefe Projectionen auffasst. Dieselbe Liniencombination führt also auch bei diesen zwei Projectionsarten zu demselben Ziele.

Hieraus allein kann schon geschlossen werden, dass z. B. die Construction des Bildes der Durchdringung von zwei Pyramiden, oder einer Pyramide und eines Prismas, oder überhaupt von irgend zwei durch Ebenen begrenzten Körpern auf ganz gleiche Weise durchführbar ist, man mag die Bilder dieser räumlichen Objecte als centrale oder Parallel-Projectionen betrachten. Die Projection des Durchdringungs-Polygones ist für jeden Fall eine und dieselbe. — Analoges gilt bezüglich der Darstellung ebener Schnitte von Kegel- oder Cylinderflächen, von abwickelbaren oder windschiefen Flächen. Die Projection der Schnittcurve ist eine und dieselbe für jede der drei Projectionsarten; daher gilt jede Methode, welche die Projection eines solchen Schnittes liefert, ebensowohl für centrale, wie für Parallel-Projection und kann als eine „allgemeine“ bezeichnet werden. Ist man demnach im Stande, z. B. conjugirte Durchmesser der orthogonalen Projection eines ebenen Schnittes einer Kegelfläche zweiter Ordnung direct zu bestimmen, so versteht man es auch, diese Aufgabe bei perspectivischer Darstellung zu lösen.

Bekanntlich ist eine Fläche zweiter Ordnung durch zwei Kegelschnitte, welche sich in zwei Punkten schneiden, und durch einen ausserhalb den Ebenen dieser Curven liegenden Punkt vollkommen bestimmt. Sind nun z. B. die centralen Bilder K, K_1 von zwei solchen Kegelschnitten und die centralen Bilder K', K_1' ihrer Grundrisse, ferner das centrale Bild P eines Punktes und jenes P' seines Grundrisses gegeben, so könnten die Projectionen der Schnittpunkte irgend einer Geraden aa' mit der durch die zwei Kegelschnitte und den Punkt bestimmten Fläche zweiter Ordnung genau ebenso wie in schiefer oder axonometrischer Projection ermittelt werden. Man legt nämlich durch PP' und die Gerade aa' eine Ebene, sucht die Schnittpunkte A, B, C, D der letzteren mit den beiden Kegelschnitten und construirt die durch A, B, C, D, P bestimmte Curve zweiter Ordnung. Diese Curve schneidet a in den verlangten Punkten.

Die Projection der Durchdringungscurve einer auf solche Weise bestimmten Fläche zweiter Ordnung mit irgend einer im Bilde gegebenen Kegelfläche ändert sich daher nicht, es mag centrale, schiefe oder orthogonale Projection vorausgesetzt werden.

Dass auch z. B. das Bild der Selbstschattengrenze einer auf solche Weise gegebenen Fläche zweiter Ordnung für jede Projectionsart eine und dieselbe Curve zweiter Ordnung sein muss, bedarf wohl keiner weiteren Erklärung.

Schon aus diesen wenigen Beispielen dürfte die Wichtigkeit des nachgewiesenen Satzes klar werden.

Fig. 1.

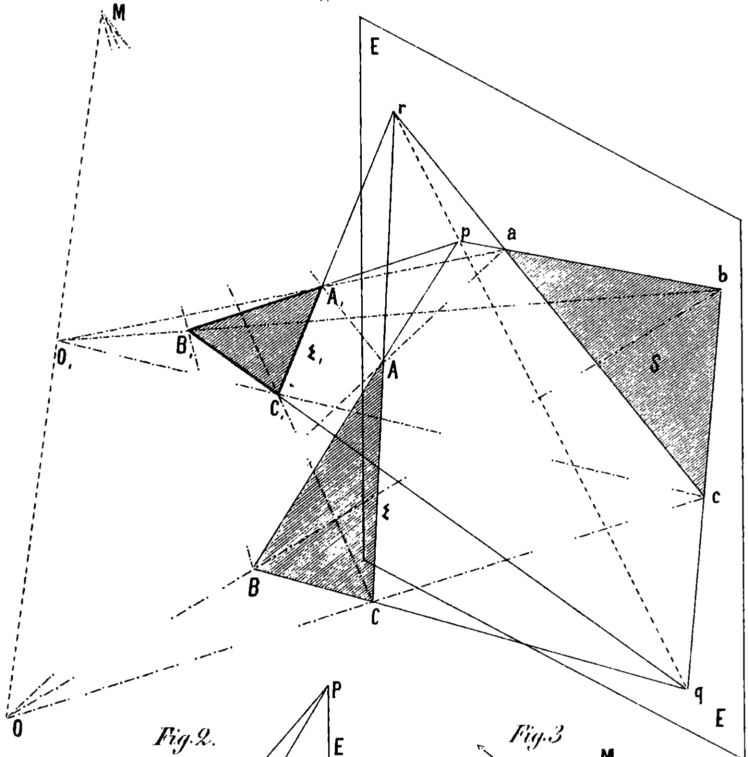


Fig. 2.

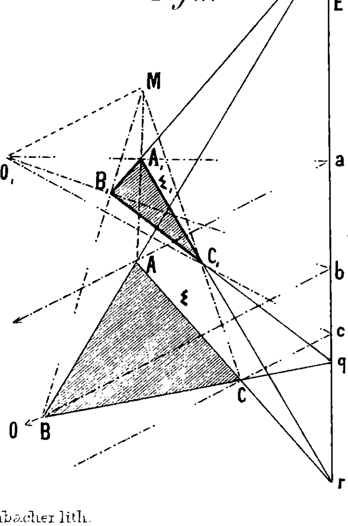
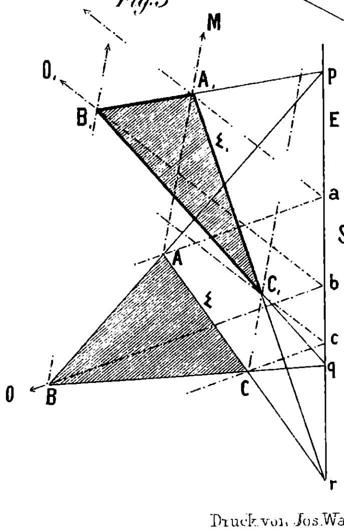


Fig. 3



M Fahrnbacher lith. Druck von Jos. Wagner