# Zur dynamischen Theorie der Gase.

Von dem w. M. **Viktor v. Lang.**

Es liegt der Gedanke nahe zu versuchen, die Gleichungen, welche Clausius für die Wärmeleitung, Maxwell und Meyer für die innere Reibung der Gase erhielten, auf demselben einfachen Weg abzuleiten, auf welchem Krönig die Expansivkraft der Gase aus der fortschreitenden Bewegung ihrer Moleküle erklärte, so den Grund zur neueren Gastheorie legend. Krönig lässt nämlich die sich in Wirklichkeit nach allen möglichen Richtungen bewegenden Moleküle nur nach drei zu einander senkrechten Axen fortschreiten.

Das angegebene Problem lässt sich nun wirklich ausführen, wenn man noch folgende Betrachtung zu Hilfe nimmt. Statt nämlich in der ganzen Ausdehnung des Gases diejenigen Moleküle aufzusuchen, die einen bestimmten Querschnitt erreichen, kann man gleich von vorne herein allen Molekülen die gleiche mittlere Weglänge $l$ ertheilen. Dann braucht man die Moleküle, deren Entfernung von jenem Querschnitt grösser als $l$ ist, nicht weiter zu betrachten, da sie den Querschnitt ohnedem nicht erreichen. Dagegen werden alle Moleküle, die innerhalb der Entfernung $l$ liegen, den Querschnitt treffen.

Bevor ich nun die Formeln für die Wärmeleitung und die innere Reibung ableite, will ich noch den Druck auf die Gefässwände in Hinsicht auf die zuletzt gemachte Bemerkung in Betracht ziehen.

## Druck auf die Gefässwand.

Wir nehmen den betrachteten Theil der Gefässwand zur $xy$-Ebene und lassen die Moleküle sich nach den drei rechtwinkligen Coordinatenaxen bewegen. Bedeutet $n$ die Anzahl der

Moleküle in der Volumseinheit, $\theta$ die Zeit, die zwischen zwei Zusammenstössen eines Moleküls verfliesst, so wird eine zur $xy$-Ebene parallele Gasschicht in der Entfernung $z$ und von der Dicke $dz$ auf die Volumseinheit $ndz$ Moleküle enthalten. Von diesen wird nur der dritte Theil gegen die Flächeneinheit der $xy$-Ebene stossen, und da jedes Molekül in der Zeiteinheit $\frac{1}{\theta}$ mal zusammenstösst, so haben wir im Ganzen den Effect von $\frac{n}{3\theta}\,dz$ Molekülen auf die $xy$-Ebene in Betracht zu ziehen. Da nun jedes Molekül der Wand die Bewegungsquantität $mc$ mittheilt, wo $m$ die Masse des Moleküls, $c$ aber die Geschwindigkeit seiner fortschreitenden Bewegung bedeutet, so ist der Druck, welcher von der Schichte $dz$ auf die Gefässwand ausgeübt wird,

$$\frac{nmc}{3\theta}\,dz = \frac{nmc^2}{3l}\,dz,$$

da ja die mittlere Weglänge $l = c\theta$ sein muss. Um nun den ganzen Druck $p$ auf die Gefässwand zu finden, braucht man den letzten Ausdruck nur von 0 bis $l$ zu integriren und erhält so die bekannte Formel

$$(1) \qquad p = \int_0^l \frac{nmc^2}{3l}\,dz = \frac{nmc^2}{3}.$$

Bedeutet $N$ die in dem Volumen $v$ enthaltene Anzahl von Molekülen und setzt man die lebendige Kraft der fortschreitenden Bewegung

$$(2) \qquad \frac{mc^2}{2} = qT$$

d. i. proportional der absoluten Temperatur, so gibt die letzte Gleichung

$$(3) \qquad \frac{pv}{T} = \frac{2}{3}\,Nq$$

oder das vereinigte Mariotte, Gay-Lussac'sche Gesetz.

## Innere Reibung.

Wir berechnen die Reibung wieder mit Bezug auf die Flächeneinheit der $xy$-Ebene, indem wir annehmen, dass das Gas sich parallel der $x$-Axe bewege, und zwar mit einer Geschwindigkeit, die in der $xy$-Ebene gleich $u$, in der kleinen Entfernung $z$ von dieser Ebene aber gleich $u+\frac{du}{dz}z$ ist. Die Schichte $dz$ in dieser Entfernung enthält per Flächen- und Zeiteinheit $\frac{n}{3\theta}\,dz$ Moleküle, welche in Folge der Bewegung nach der $x$-Axe die Bewegungsquantität

$$\frac{nm}{3\theta}\left[u+\frac{du}{dz}z\right]dz$$

besitzen. Ist nun $z<l$, so gehen diese Moleküle alle durch die $xy$-Ebene, bis sie in eine Entfernung $z-l$ gelangen, in welcher sie nach dem Vorhergehenden die Bewegungsquantität

$$\frac{nm}{3\theta}\left[u+\frac{du}{dz}(z-l)\right]dz$$

besitzen. Dieselben haben also die Differenz dieser Quantitäten oder

$$\frac{nm}{3\theta}\,l\,\frac{du}{dz}\,dz$$

beim Durchgange verloren. Integrirt man den letzten Ausdruck von 0 bis $l$, so erhält man den Gesammtverlust für die Flächeneinheit der $xy$-Ebene oder die Reibung $R$ an dieser Stelle. Da bei der Integration $\frac{du}{dz}$ als constant betrachtet werden kann, so gibt dieselbe

$$(4)\qquad R=\int_0^l\frac{nm}{3\theta}\,l\,\frac{du}{dz}\,dz=\frac{1}{3}\,\frac{nm}{\theta}\,l^2\,\frac{du}{dz}$$

und für den Reibungscoëfficienten die Maxwell'sche Formel

$$(5)\qquad \eta=\frac{nm}{3\theta}\,l^2.$$

## Wärmeleitung.

Ändert sich die absolute Temperatur senkrecht zur $xy$-Ebene, so dass sie in dieser Ebene gleich $T$, in der Entfernung $z$ aber gleich $T_z$ ist, so ändern sich die Grössen $n$, $c$, $l$, $\theta$ ebenfalls und man hat nach den Gleichungen (2) und (3)

$$n_z = \frac{T}{T_z} n, \quad c_z = \sqrt{\frac{T_z}{T}}\, c,$$

ferner hat man, da nach Clausius

$$l = \frac{3}{4} \frac{1}{\pi s^2 n} \tag{6}$$

ist, unter $s$ der Radius der Wirkungssphäre eines Moleküls verstanden,

$$l_z = \frac{n}{n_z} l = \frac{T_z}{T} l$$

$$\theta_z = \frac{l_z}{c_z} = \sqrt{\frac{T_z}{T}} \cdot \frac{l}{c}.$$

Ist die Entfernung $z$ klein, so kann man

$$T_z = T + \frac{dT}{dz} z$$

setzen und hat somit für die lebendige Kraft derjenigen Moleküle der Schichte $dz$, welche sich senkrecht zur $xy$-Ebene bewegen, per Flächen- und Zeiteinheit

$$\frac{m n_z c_z^2}{6\theta_z} dz = \frac{mnc^3}{6l} \sqrt{\frac{T}{T_z}}\, dz = \frac{mnc^3}{6l} \left[1 + \frac{1}{T} \frac{dT}{dz} z\right]^{-\frac{1}{2}} dz$$

und bei Vernachlässigung zweiter und höherer Potenzen der kleinen Grösse $\frac{1}{T} \frac{dT}{dz} z$

$$\frac{mnc^3}{6l} \left[1 - \frac{1}{2T} \frac{dT}{dz} z\right] dz.$$

Ist $z < l$, so gehen diese Theilchen alle durch die $xy$-Ebene bis zur Entfernung $(z—l)$ und haben an dieser Stelle die lebendige Kraft

$$\frac{mnc^3}{6l}\left[1-\frac{1}{2T}\frac{dT}{dz}(z-l)\right]dz$$

haben somit bei ihrem Durchgange die lebendige Kraft

$$-\frac{mnc^3}{12}\frac{1}{T}\frac{dT}{dz}dz$$

verloren. Integrirt man noch von 0 bis $l$, wobei $\frac{dT}{dz}$ als constant betrachtet werden kann, so erhält man für die ganze der $xy$-Ebene mitgetheilte lebendige Kraft

$$-\frac{mnc^3}{12}\frac{l}{T}\frac{dT}{dz},$$

welche durch Multiplication mit einem constanten Factor $k$ die Wärmemenge $Q$ gibt, welche in der Zeiteinheit durch die Flächeneinheit fliesst. Es ist also

$$Q=-k\frac{mnc^3}{12}\frac{l}{T}\frac{dT}{dz}. \tag{7}$$

Will man noch die von $T$ abhängigen Grössen $n$, $c$, $l$ auf die Normaltemperatur $T_0$ reduciren, so hat man

$$n=\frac{T_0}{T}n_0,\quad c=\sqrt{\frac{T}{T_0}}c_0,\quad l=\frac{T}{T_0}l_0$$

und daher

$$Q=-k\frac{mn_0c_0{}^3}{12T_0}\sqrt{\frac{T}{T_0}}\frac{dT}{dz}l_0, \tag{8}$$

welche Formel mit der von Clausius bis auf den Factor $\frac{1}{12}$ stimmt, für welchen derselbe $\frac{5}{24}$ findet.