Ein Beitrag zur Theorie der Functionen complexer Variabelen [1]

Von **Hermann Frombeck** stud. phil.

(Vorgelegt in der Sitzung am 19. October 1871.)

Die Theorie der Functionen complexer Variabelen gewinnt wesentlich an Klarheit und Vollständigkeit, wenn man ihre Untersuchungen auf Functionen beliebiger nicht gerade complexer Ausdrücke mit einer Mehrzahl von Veränderlichen überträgt. Es ist zu diesem Behufe nothwendig, die Bedingungen, unter welchen die Gleichung gilt

$$F\{f(x, y, z, \ldots)\} = f(\varphi, \psi, \chi, \ldots) \tag{1}$$

zu ermitteln; die Annahme des Zeichens f auch rechter Hand wird hierbei zur eindeutigen, nur von der Charakteristik F abhängigen Bestimmung für die den Variabelen x, y, $z, \ldots$ correspondirenden Functionen φ, ψ, $\chi, \ldots$ in dem einen Fall, wenn

$$f = a\varphi + b\psi + c\chi + \ldots$$

wo die Constanten a, b, $c\ldots$ derart gewählt sind, dass eine Gleichung $f = f_1$ nur durch die speciellen Voraussetzungen $\varphi = \varphi_1$, $\psi = \psi_1$, $\chi = \chi_1, \ldots$ befriedigt wird. Um jene Bedingungen zu erhalten, differenzirt man die Gleichung 1) in Bezug auf alle Argumente; aus dem totalen Differentiale

$$dF =$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \chi} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial x} + \ldots\right) dx +$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \chi} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial y} + \ldots\right) dy +$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \chi} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial z} + \ldots\right) dz + .$$

[1] Im Anschlusse an Schlömilch's Compendium der höheren Analyse, II. Bd. S. 44—68.

$$= Xdx + Ydy + Zdz + .$$

und der Definition

$$df = f'_x dx + f'_y dy + f'_z dz + ..$$

ergibt sich ein eindeutiger Differentialquotient, wie ihn die Gleichung 1), wo F von den Beziehungen der dx, dy, dz,... unter sich unabhängig ist, voraussetzt, wenn sich in dem Ausdrucke

$$\frac{dF}{df} = \frac{X dx + Y dy + Z dz + .}{f'_x dx + f'_y dy + f'_z dz + .}$$

rechter Hand alle dx, dy, dz,... eliminiren lassen. Es führt dies jetzt zu der Annahme

$$\frac{X}{f'_x} = \frac{Y}{f'_y} = \frac{Z}{f'_z} = . \quad . = \frac{dF}{df}, \tag{2}$$

welche in der That die sämmtlichen Bedingungen enthält, mit denen das Bestehen der Gleichung 1) verknüpft ist.

Für das Folgende ist die Untersuchung des speciellen Falles von Interesse, gemäss welchem als Eigenschaften der Function f die Beziehungen gelten

$$p \cdot \frac{\partial f}{\partial x} = q \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = r \cdot \frac{\partial f}{\partial z} = . \tag{3}$$

und zu dem Gleichungen 2) als zugehörige Bedingung die Formeln liefern

$$p\left(\frac{1}{p} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{q} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{1}{r} \quad \frac{\partial \chi}{\partial x} + . \quad \right) = \tag{4}$$

$$q\left(\frac{1}{p} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{1}{q} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial y} + \dots \right) =$$

$$r\left(\frac{1}{p} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{1}{q} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial z} + \dots \right) = \dots$$

Man genügt diesen letzteren unter anderm, wenn man die genannten Eigenschaften der Function f auf die Zeichen φ, ψ, χ,... überträgt und schreibt

$$p \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} = q \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} = r \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} =$$

$$p \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} = q \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} = r \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z} =$$

$$p \cdot \frac{\partial \chi}{\partial x} = q \cdot \frac{\partial \chi}{\partial y} = r \cdot \frac{\partial \chi}{\partial z} =$$

Die bisherige Betrachtung führt nun unmittelbar von dem speciellen Integrale der Gleichungen 3)

$$f = \frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} + .$$

zu dem allgemeinen

$$\varphi, \psi, \chi, .\ .f = F\left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} + ..\ \right),$$

oder auch

$$\varphi, \psi, \chi, \ldots f = F\left(\frac{\varphi_1}{p} + \frac{\psi_1}{q} + \frac{\chi_1}{r} + \ldots\right),$$

dies letztere mit einer den Bedingungen für $\varphi, \psi, \chi, \ldots$ analogen Bedeutung der Functionen $\varphi_1, \psi_1, \chi_1,$

Es ist jetzt leicht, ohne Rücksicht auf das allgemeinste Integral der Gleichungen 4) den im Anfange erwähnten eigenthümlichen Fall zu erledigen, wonach nunmehr die Zahlen $p, q, r, .$ den dort für $a, b, c, \ldots$ aufgestellten Bedingungen entsprechen; der wechselseitigen Quotienten jedoch aus $p, q, r, ..$ halber ist es nothwendig, diese Multiplicatoren näher zu specialisiren. Beschränken wir uns im Folgenden auf die vier Substitutionen

$$\frac{1}{p} = 1, \ \frac{1}{q} = \sqrt{-1} = i, \ \frac{1}{r} = \sqrt[4]{-1} = i', \ \frac{1}{s} = ii',$$

welchen jene Eigenschaft zukommt (siehe Anhang 1.), so erhalten wir mit blosser Rücksicht auf die Worte $+\sqrt{\pm\sqrt{-1}}$ und $+\sqrt{-1}$ für die bezeichneten Quotienten die Ausdrücke

$$\frac{q}{p}=-i\,,\ \frac{r}{p}=\mp ii',\ \frac{s}{p}=\mp i',$$

$$\frac{r}{q}=\pm i',\ \frac{s}{q}=\mp ii',\ \frac{q}{r}=-ii',$$

$$\frac{s}{r}=-i\,,\ \frac{q}{s}=i',\quad \frac{r}{s}=i$$

und es spalten sich die Gleichungen 4) in die folgenden 12

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial y}=\frac{\partial\chi}{\partial z}=\frac{\partial\vartheta}{\partial t}\,,\ \frac{\partial\psi}{\partial x}=-\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{\partial\vartheta}{\partial z}=-\frac{\partial\chi}{\partial t}\,,$$

$$\frac{\partial\chi}{\partial x}=\frac{\partial\vartheta}{\partial y}=\pm\frac{\partial\psi}{\partial z}=\mp\frac{\partial\varphi}{\partial t}\,,\ \frac{\partial\vartheta}{\partial x}=-\frac{\partial\chi}{\partial y}=\mp\frac{\partial\varphi}{\partial z}=\mp\frac{\partial\psi}{\partial t}.$$

Die derart bestimmten Functionen φ, ψ, χ und ϑ besitzen, wie auf dem Wege der Elimination ersichtlich wird, die folgenden gemeinsamen Eigenschaften

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}+\frac{\partial^4 f}{\partial z^4}=\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}+\frac{\partial^4 f}{\partial t^4}=\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}+\frac{\partial^4 f}{\partial z^4}=\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}+\frac{\partial^4 f}{\partial t^4}=0\,,$$

denen schliesslich dem früheren analog das unvollständige Integral

$$f=F(x+iy+i'z+ii't)$$

oder

$$f=F[\varphi(x+iy+i'z+iit)+i\psi(x+iy+i'z+ii't)+$$
$$+i'\chi(x+iy+i'z+ii't)+ii'\vartheta(x+iy+i'z+ii't)]$$

mit den bekannten Ergänzungen

$F_1(x-iy-i'z+ii't)$, $F_2(x-iy+i'z-ii't)$, $F_3(x+iy-i'z-ii't)$

entspricht.

Zu dem Kapitel der Functionentheorie, welches von der Integration längs geschlossener Contoure handelt und zu den weiteren Ausführungen betreffs asynektischer und vieldeutiger Ausdrücke in x und y können jetzt einige sehr wesentliche Ergänzungen gemacht werden. Es bedarf hiezu einer Verallgemeinerung des Abschnitt IV, S. 52 a. a. O. aufgestellten Hilfssatzes über Doppelintegrale, welche, eines speciellen Beweises nicht bedürftig, sofort durch die folgende unmittelbar einleuchtende Formel vergegenwärtigt werden möge.

$$(n-1)\int(\Phi_1 dx'+\Phi_2 dx''+\Phi_3 dx'''+\ldots+\Phi_n dx^{(n)}) = \qquad 5)$$

$$\iint\Bigg[\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial x''}dx''+\frac{\partial\Phi_1}{\partial x'''}dx'''+\ldots+\frac{\partial\Phi_1}{\partial x^{(n)}}dx^{(n)}\right)dx'$$

$$+\left(\frac{\partial\Phi_2}{\partial x'''}dx'''+\frac{\partial\Phi_2}{\partial x^{(4)}}dx^{(4)}+\ldots-\frac{\partial\Phi_2}{\partial x'}dx'\right)dx''$$

$$+\left(\frac{\partial\Phi_3}{\partial x^{(4)}}dx^{(4)}+\ldots-\frac{\partial\Phi_3}{\partial x'}dx'-\frac{\partial\Phi_3}{\partial x''}dx''\right)dx'''$$

$$+$$

$$+\left(-\frac{\partial\Phi_n}{\partial x'}dx'-\frac{\partial\Phi_n}{\partial x''}dx''-\ldots-\frac{\partial\Phi_n}{\partial x^{(n-1)}}dx^{(n-1)}\right)dx^{(n)}\Bigg]$$

Wenige Bemerkungen genügen zur Erklärung dieser Formel. Die Doppelintegrale rechter Hand nach dx', dann dx'', dx''', ..., endlich nach $dx^{(n)}$ sind wesentlich einander gleich, nur die Art ihrer Entstehung ist verschieden; es ist hiebei zu unterscheiden, ob $n-1$, $n-2$, ... oder ob z. B. blos eine Gleichung zwischen den n Veränderlichen vorliegt. Im ersten Falle, wenn $n-1$ specielle Beziehungen gegeben sind

$$x' = \varphi_2(x'') = \varphi_3(x''') = \qquad = \varphi_n(x^{(n)}),$$

stellen die Integrale

$$\iint\frac{\partial\Phi_1}{\partial x''}dx''dx',\ \iint\frac{\partial\Phi_1}{\partial x'''}dx'''dx',\ldots\ \iint\frac{\partial\Phi_1}{\partial x^{(n)}}dx^{(n)}dx'$$

sämmtlich das gleiche Resultat der Integration längs eines (analytischen) Contours $n-1$ter Krümmung vor, mag derselbe gesetzmässig oder ungesetzmässig verlaufen (die Zeichen φ_2, φ_3, .. φ_n vertreten die Function in ihrer grössten Allgemeinheit); um die einmalige Integration längs dieses geschlossenen Contours, den jene $n-1$ Gleichungen definiren, oder den Ausdruck $\int \Phi_1 dx'$ zu erhalten, muss die Summe der Doppelintegrale durch $n-1$ dividirt werden. Das gleiche gilt nun auch von allen die Functionen Φ_2, $\Phi_3, \ldots \Phi_n$ betreffenden Integrationen; nur ist selbstverständlich eine Integrationenfolge $x^{(q)}$, $x^{(p)}$, da alles längs desselben Contours zu erfolgen hat, mit dem entgegengesetzten Zeichen der Folge $x^{(p)}$, $x^{(q)}$ zu versehen. Der zweite Fall, welcher wie alle folgenden durch den ersten direct erklärt wird, hat es nunmehr zu thun mit einem durch $n-2$ Gleichungen definirten Integrationsorte; den Relationen gemäss

$$x = \psi_3(x'', x''') = \psi_4(x'', x^{(4)}) = \ldots = \psi_n(x'', x^{(n)})$$

erfolgt die Summirung auf einer Fläche im allgemeinen $n-1$ter Krümmung, ohne dass in Bezug auf die Zeichenwahl eine Änderung einträte. Gleiches gilt für den dritten Fall

$$x' = \chi_4(x'', x''', x^{(4)}) = \chi_5(x'', x''', x^{(5)}) = \ldots = \chi_n(x'', x''', x^{(n)}),$$

für den vierten, fünften u. s. f., endlich für den letzten

$$x' = \nu_n(x'', x''', \ldots x^{(n)}),$$

bei welchen die specielle Bezeichnung des Integrationsortes in geometrischen Verhältnissen keine Analogie mehr findet.

Zufolge dieser Erläuterung ist es jetzt möglich, Sinn und Werth eines Integrales $\int F(f)\,df$ zu ermitteln, wenn f eine Function der n Veränderlichen $x', x'', \ldots x^{(n)}$ vorstellt, die der Gleichung 1) genügt, die Integration aber an irgend einen der vorerwähnten analytischen Orte gebunden ist, bei welchen als gemeinschaftliche wesentliche Merkmale erstens ein ununterbrochener Durchgang der Function F von einem Werthe F_0 durch alle Veränderlichen nach F_0 zurück, zweitens Continuität, Endlichkeit und Eindeutigkeit der Function selbst im Innern und an der Oberfläche des also durchwanderten Werthcomplexes stattfinden. Schreibt man nämlich

$$\int F(f)\,df =$$

$$\int F(f) \left\{ \frac{\partial f}{\partial x'}\,dx' + \frac{\partial f}{\partial x''}\,dx'' + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x^{(n)}}\,dx^{(n)} \right\},$$

so erhellt die Anwendbarkeit der Gleichung 5); man hat unter Berücksichtigung der Relation 1)

$$\int F(f)\,df =$$

$$\frac{1}{n-1}\iint\Bigg[\left(\frac{\partial F}{\partial x''}dx'' + \frac{\partial F}{\partial x'''}dx''' + \ldots + \frac{\partial F}{\partial x^{(n)}}dx^{(n)}\right)\frac{\partial f}{\partial x'}dx'$$

$$+\left(\frac{\partial F}{\partial x'''}dx''' + \frac{\partial F}{\partial x^{(4)}}dx^{(4)} + \ldots - \frac{\partial F}{\partial x'}dx'\right)\frac{\partial f}{\partial x''}dx''$$

$$+\left(\frac{\partial F}{\partial x^{(4)}}dx^{(4)} + \ldots - \frac{\partial F}{\partial x'}dx' - \frac{\partial F}{\partial x''}dx''\right)\frac{\partial f}{\partial x'''}dx''' + \ldots$$

$$+\left(-\frac{\partial F}{\partial x'}dx' - \frac{\partial F}{\partial x''}dx'' - \ldots - \frac{\partial F}{\partial x^{(n-1)}}dx^{(n-1)}\right)\frac{\partial f}{\partial x^{(n)}}dx^{(n)}$$

$$+F(f)\Bigg\{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x'\partial x''}dx'' + \frac{\partial^2 f}{\partial x'\partial x'''}dx''' + \ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial x'\partial x^{(n)}}dx^{(n)}\right)dx'$$

$$+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x''\partial x'''}dx''' + \frac{\partial^2 f}{\partial x''\partial x^{(4)}}dx^{(4)} + \ldots - \frac{\partial^2 f}{\partial x''\partial x'}dx'\right)dx''$$

$$+$$

$$+\left(-\frac{\partial^2 f}{\partial x^{(n)}\partial x'}dx' - \frac{\partial^2 f}{\partial x^{(n)}\partial x''}dx'' - \ldots - \frac{\partial^2 f}{\partial x^{(n)}\partial x^{(n-1)}}dx^{(n-1)}\right)dx^{(n)}\Bigg\}\Bigg].$$

Die Doppelintegrale rechter Hand verschwinden sämmtlich, jene, welche die Differentialquotienten der Function F enthalten, gemäss den Gleichungen 2), die übrigen nach dem Satze, welcher die Umkehrung der Differentiationenfolge erlaubt; es bleibt mithin als Resultat

$$\int F(f)\,df = 0.$$

Mit der erweiterten Bedeutung dieser letzteren Formel erlangen die Consequenzen derselben gleichfalls einen allgemeineren, mannigfaltige Fälle umfassenden Sinn. Die wichtigste Anwendung vor allem, wonach hinsichtlich eines Integrationsortes $A_0P_0A_1P_1A_0$

$$I[A_0P_0A_1] = I[A_0P_1A_1]$$

gilt jetzt nicht blos für Theile einer geschlossenen Curve oder irgend welchen beliebigen Contours (verschiedener Ordnung, vorerwähnter erster Fall), sondern auch für zusammenschliessende Theile jedes andern geschlossenen Werthsystems, welche durch Werthgruppen der nächst niederen Ordnung von einander geschieden sind. Hievon ist z. B. bereits eine einfache Folge die Möglichkeit, unter den angegebenen Bedingungen die Reihenfolge der Integrationen in Doppel- und mehrfachen bestimmten Integralen beliebig zu ordnen.

1. Die folgenden Anwendungen beschränken sich auf den mehrerwähnten ersten Fall (Definirung eines Integrationsortes durch $n-1$ Gleichungen zwischen n Variabelen); dem Integrationsorte selbst möge dabei die doppelte (reelle und imaginäre) Dimension des Zahlengebietes zu Grunde gelegt werden, indem die Summirung an Parallelogramme, beziehungsweise Rechtecke mit den Winkeln 45° und 90° und mit den Seiten a, bi', bez. a, bi gebunden gedacht wird. Der Annahme eines Rechteckes entspricht die bekannte Gleichung

$$\int_0^a f(x)dx+i\int_0^b f(a+iy)dy=i\int_0^b f(iy)dy+\int_0^a f(ib+x)dx$$
$$=\frac{a+ib}{a}\int_0^a f\left(\frac{a+ib}{a}x\right)dx,$$

welche wir dahin modificiren, dass wir $i'_1=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ und $i'_2=\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ an die Stelle von i treten lassen, wodurch jenes Rechteck in ein Rhomboid mit dem Winkelmasse $\frac{\pi}{4}$ übergeht. Da dieser Fall einiges Interesse gewährt, so möge also hier in Kurzem zunächst blos die congruirende Formel

$$\int_0^a f(x)dx+i'\int_0^b f(a+i'y)dy=i'\int_0^b f(i'y)dy+\int_0^a f(x+i'b)dx$$
$$=\frac{a+i'b}{a}\int_0^a f\left(\frac{a+i'b}{a}x\right)dx \qquad 6)$$

mit Berücksichtigung des Werthes i_1' discutirt werden. Wir beschränken uns dabei auf den Fall parer und imparer Functionen und erhalten für beide Functionsarten gleichmässig aus der letzten Gleichung, in der wir $-x$ an die Stelle von x, dem entsprechend $-a$ an die Stelle von a treten lassen, die neue Gleichung

$$\int_0^a f(x)dx - i'\int_0^b f(x-i'y)dy = -i'\int_0^b f(-i'y)dy + \int_0^a f(x-i'b)dx$$

$$= \frac{a-i'b}{a}\int_0^a f\left(\frac{a-i'b}{a}\,x\right)dx. \tag{7}$$

Obwohl dieselbe gerade so wie 6) allgemein für beliebige Functionsarten unter den Bedingungen der Gleichung 6) giltig bleibt, so bildet sie eine werthvolle Ergänzung zu 6) allein bei der Beschränkung auf die Fälle gerader oder ungerader Functionen, wie sogleich hervorgeht, wenn die verschiedenen Functionen f unter den Integralzeichen nach dx und dy in complexe Summen reeller Ausdrücke in x und y nach dem allgemeinen Schema

$$F(x+iy+i'z+ii't) = \Phi(x, y, z, t) + i\Phi_1 + i'\Phi_2 + ii'\Phi_3$$

verwandelt werden. Hiefür liefert nun Nr. 2 des Anhangs die nöthigen Formeln, wonach, den Fall $i' = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ vorausgesetzt, Gleichung 6) die folgende complicirte Gestalt annimmt

$$2\int_0^a \varphi(x,o)dx + i'\int_0^b \Bigg[\left\{\varphi\left(a+\frac{y}{\sqrt{2}}, \frac{y}{\sqrt{2}}\right) + \varphi_1\left(a-\frac{y}{\sqrt{2}}, -\frac{y}{\sqrt{2}}\right)\right\}$$

$$+i\left\{\psi\left(a+\frac{y}{\sqrt{2}}, \frac{y}{\sqrt{2}}\right) + \psi_1\left(a-\frac{y}{\sqrt{2}}, -\frac{y}{\sqrt{2}}\right)\right\} \tag{8}$$

$$+\frac{i'}{\sqrt{2}}\left\{\varphi-\varphi_1+\psi-\psi_1\right\} + \frac{ii'}{\sqrt{2}}\left\{-\varphi+\varphi_1+\psi-\psi_1\right\}\Bigg]\,dy =$$

$$i'\int_0^b\Big[\Big\{\varphi\Big(\frac{y}{\sqrt{2}},\frac{y}{\sqrt{2}}\Big)+\varphi_1\Big\}+i\Big\{\psi\Big(\frac{y}{\sqrt{2}},\frac{y}{\sqrt{2}}\Big)+\psi_1\Big\}$$

$$+\frac{i'}{\sqrt{2}}\Big\{\varphi-\varphi_1+\psi-\psi_1\Big\}+\frac{ii'}{\sqrt{2}}\Big\{-\varphi+\varphi_1+\psi-\psi_1\Big\}\Big]\,dy$$

$$+\int_0^a\Big[\Big\{\varphi\Big(x+\frac{b}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}}\Big)+\varphi_1\Big\}+i\Big\{\psi\Big(x+\frac{b}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}}\Big)+\psi_1\Big\}$$

$$+\frac{i'}{\sqrt{2}}\Big\{\varphi-\varphi_1+\psi-\psi_1\Big\}+\frac{ii'}{\sqrt{2}}\Big\{-\varphi+\varphi_1+\psi-\psi_1\Big\}\Big]\,dx$$

$$=\frac{a+i'b}{a}\int_0^a\Big[\Big\{\varphi\Big(x+\frac{b}{a\sqrt{2}}x,\frac{b}{a\sqrt{2}}x\Big)+\varphi_1\Big\}+i\Big\{\psi+\psi_1\Big\}$$

$$+\frac{i'}{\sqrt{2}}\Big\{\varphi-\varphi_1+\psi-\psi_1\Big\}+\frac{ii'}{\sqrt{2}}\Big\{-\varphi+\varphi_1+\psi-\psi_1\Big\}\Big]\,dy$$

Behält man die Bedeutung der Zeichen dieser ersten Formel bei — ein beigefügter Index 1 an die Zeichen φ und ψ in

$$f(u+iv)=\varphi(u,v)+i\psi(u,v)$$

zeigt an, dass in den für u und v eintretenden Argumenten statt $+\frac{y}{\sqrt{2}}$ und $+\frac{b}{\sqrt{2}}$ bezüglich die negativen Werthe zu setzen sind, während jene Argumente immer so eingeschaltet werden, wie es unmittelbar hinter dem zugehörigen Integralzeichen angegeben ist — so lautet die wesentliche Ergänzung, Gleichung 7) in analoger Form

$$2\int_0^a\varphi(x,o)dx-i'\int_0^b\Big[\Big\{\varphi\Big(a-\frac{y}{\sqrt{2}},-\frac{y}{\sqrt{2}}\Big)+\varphi_1\Big(a+\frac{y}{\sqrt{2}},\frac{y}{\sqrt{2}}\Big)\Big\}$$

$$+i\Big\{\psi\Big(a-\frac{y}{\sqrt{2}},-\frac{y}{\sqrt{2}}\Big)+\psi_1\Big(a+\frac{y}{\sqrt{2}},\frac{y}{\sqrt{2}}\Big)\Big\} \qquad 9)$$

$$+\frac{i'}{\sqrt{2}}\Big\{\varphi-\varphi_1+\psi-\psi_1\Big\}+\frac{ii'}{\sqrt{2}}\Big\{-\varphi+\varphi_1+\psi-\psi_1\Big\}\Big]\,dy=$$

$$-i'\int_0^b\left[\left\{\varphi\left(-\frac{y}{\sqrt{2}},-\frac{y}{\sqrt{2}}\right)+\varphi_1\right\}+i\left\{\psi\left(-\frac{y}{\sqrt{2}},-\frac{y}{\sqrt{2}}\right)+\psi_1\right\}\right.$$

$$\left.+\frac{i'}{\sqrt{2}}\left\{\varphi-\varphi_1+\psi-\psi_1\right\}+\frac{ii'}{\sqrt{2}}\left\{-\varphi+\varphi_1+\psi-\psi_1\right\}\right]dy$$

$$+\int_0^a\left[\left\{\varphi\left(x-\frac{b}{\sqrt{2}},-\frac{b}{\sqrt{2}}\right)+\varphi_1\right\}+i\left\{\psi\left(x-\frac{b}{\sqrt{2}},-\frac{b}{\sqrt{2}}\right)+\psi_1\right\}\right.$$

$$\left.+\frac{i'}{\sqrt{2}}\left\{\varphi-\varphi_1+\psi-\psi_1\right\}+\frac{ii'}{\sqrt{2}}\left\{-\varphi+\varphi_1+\psi-\psi_1\right\}\right]dy$$

$$=\frac{a-i'b}{a}\int_0^a\left[\left\{\varphi\left(x-\frac{b}{a\sqrt{2}}x,-\frac{b}{a\sqrt{2}}x\right)+\varphi_1\right\}+i\left\{\psi+\psi_1\right\}+\dots\right]dx,$$

im allgemeinen

$$A=B=o.$$

In 8) lassen sich die Grössen A und B zu dem complexen Ausdrucke $p+iq+i'r+ii's=o$, hier in 9) zu dem Ausdrucke $p+iq-i'r-ii's=o$ transformiren, wo p, q, r und s reell sind; abstrahirt man dabei vorläufig von der speciellen Bedeutung dieser Factoren, so enthalten die zugehörigen Gleichungen lediglich eine der Bedingungen, unter welchen es erlaubt ist

$$p=q=r=s=o$$

anzunehmen — die Einführung von $i_2'=-ii_1'$ in die Rechnung (siehe Anhang 1. und 2.) ergibt

$$p-iq+i_2'r-ii_2's=p-iq-i_2'r+ii_2's=o$$

mit der nämlichen Wirkung. Das zweite Integral nach y in den Formeln 8) und 9) beeinträchtigt unter den gemachten Voraussetzungen die Giltigkeit dieses Schlusses nicht, wie es auf den ersten Blick hin scheinen könnte, indem sich im Falle parer Functionen die mit i' und ii' multiplicirten Glieder, im Falle imparer Functionen die mit 1 und $\sqrt{-1}$ multiplicirten Glieder desselben tilgen; zugleich liegt hierin die Nothwendigkeit der

Unterscheidung zwischen beiden Functionsarten, wenn man daran geht, in dem Resultate $p=q=r=s=o$ für die Nullwerthe ihre ursprüngliche Bedeutung zu restituiren. Es leitet jetzt dies auf die gewünschten Relationen, über deren Schreibweise die früheren Bestimmungen gelten mögen.

Erster Theil der Doppelgleichungen in 8) und 9); Fall $A=o$.

α) Gerade Functionen.

$$1)\int_0^a\left[\varphi\left(x+\frac{c}{\sqrt{2}},\frac{c}{\sqrt{2}}\right)+\varphi_1\left(x-\frac{c}{\sqrt{2}},-\frac{c}{\sqrt{2}}\right)-2\varphi(x,o)\right]dx= \qquad 10)$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^c\left[-\varphi\left(a+\frac{z}{\sqrt{2}},\frac{z}{\sqrt{2}}\right)+\varphi_1+\psi\left(a+\frac{z}{\sqrt{2}},\frac{z}{\sqrt{2}}\right)-\psi_1\right]dz,$$

$$2)\quad\int_0^a\left[\psi\left(x+\frac{c}{\sqrt{2}},\frac{c}{\sqrt{2}}\right)+\psi_1\left(x-\frac{c}{\sqrt{2}},-\frac{c}{\sqrt{2}}\right)\right]dx=$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^c\left[\varphi\left(a+\frac{z}{\sqrt{2}},\frac{z}{\sqrt{2}}\right)-\varphi_1+\psi-\psi_1\right]dz,$$

$$3)\quad\int_0^c\left[\varphi\left(a+\frac{z}{\sqrt{2}},\frac{z}{\sqrt{2}}\right)+\varphi_1-2\varphi\left(\frac{z}{\sqrt{2}},\frac{z}{\sqrt{2}}\right)\right]dz=$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^a\left[\varphi\left(x+\frac{c}{\sqrt{2}},\frac{c}{\sqrt{2}}\right)-\varphi_1+\psi-\psi_1\right]dx,$$

$$4)\quad\int_0^c\left[\psi\left(a+\frac{z}{\sqrt{2}},\frac{z}{\sqrt{2}}\right)+\psi_1-2\psi\left(\frac{z}{\sqrt{2}},\frac{z}{\sqrt{2}}\right)\right]dz=$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^a\left[-\varphi\left(x+\frac{c}{\sqrt{2}},\frac{c}{\sqrt{2}}\right)+\varphi_1+\psi-\psi_1\right]dx.$$

β) Ungerade Functionen.

$$1)\int_0^a\left[\varphi\left(x+\frac{c}{\sqrt{2}},\frac{c}{\sqrt{2}}\right)+\varphi_1\left(x-\frac{c}{\sqrt{2}},-\frac{c}{\sqrt{2}}\right)-2\varphi(x,o)\right]dx=$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^c\left[-\varphi\left(a+\frac{z}{\sqrt{2}},\frac{z}{\sqrt{2}}\right)+\varphi_1+\psi-\psi_1+2\varphi\left(\frac{z}{\sqrt{2}},\frac{z}{\sqrt{2}}\right)\right.$$
$$\left.-2\psi\left(\frac{z}{\sqrt{2}},\frac{z}{\sqrt{2}}\right)\right]dz\,,$$

2) $$\int_0^a\left[\psi\left(x+\frac{c}{\sqrt{2}},\frac{c}{\sqrt{2}}\right)+\psi_1\left(x-\frac{c}{\sqrt{2}},-\frac{c}{\sqrt{2}}\right)\right]dx=$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^c\left[\varphi\left(a+\frac{z}{\sqrt{2}},\frac{z}{\sqrt{2}}\right)-\varphi_1+\psi-\psi_1-2\varphi\left(\frac{z}{\sqrt{2}},\frac{z}{\sqrt{2}}\right)\right.$$
$$\left.-2\psi\left(\frac{z}{\sqrt{2}},\frac{z}{\sqrt{2}}\right)\right]dz\,,$$

3) $$\int_0^c\left[\varphi\left(a+\frac{z}{\sqrt{2}},\frac{z}{\sqrt{2}}\right)+\varphi_1\left(a-\frac{z}{\sqrt{2}},-\frac{z}{\sqrt{2}}\right)\right]dz=$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^a\left[\varphi\left(x+\frac{c}{\sqrt{2}},\frac{c}{\sqrt{2}}\right)-\varphi_1+\psi-\psi_1\right]dx\,,$$

4) $$\int_0^c\left[\psi\left(a+\frac{z}{\sqrt{2}},\frac{z}{\sqrt{2}}\right)+\psi_1\left(a-\frac{z}{\sqrt{2}},-\frac{z}{\sqrt{2}}\right)\right]dz=$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^a\left[-\varphi\left(x+\frac{c}{\sqrt{2}},\frac{c}{\sqrt{2}}\right)+\varphi_1+\psi-\psi_1\right]dx\,.$$

Zweiter Theil der Doppelgleichungen 8) und 9); Fall $B=o$, giltig für beliebige Functionen.

1) $$\int_0^a\left[\left(1+\frac{b}{a\sqrt{2}}\right)\varphi\left(x+x\frac{b}{a\sqrt{2}},x\frac{b}{a\sqrt{2}}\right)\right.$$
$$+\left(1-\frac{b}{a\sqrt{2}}\right)\varphi_1\left(x-x\frac{b}{a\sqrt{2}},-\frac{b}{a\sqrt{2}}x\right)-2\varphi(x,o)$$
$$\left.+\frac{b}{a\sqrt{2}}\left\{\psi\left(x+x\frac{b}{a\sqrt{2}},\frac{b}{a\sqrt{2}}x\right)-\psi_1\right\}\right]dx$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^b \left[-\varphi\left(a+\frac{y}{\sqrt{2}}, \frac{y}{\sqrt{2}}\right)+\varphi_1+\psi\left(a+\frac{y}{\sqrt{2}}, \frac{y}{\sqrt{2}}\right)-\psi_1\right\}\Bigg] dy,$$

2) $$\int_0^a \Bigg[\left(1+\frac{b}{a\sqrt{2}}\right)\psi\left(x+x\frac{b}{a\sqrt{2}}, x\frac{b}{a\sqrt{2}}\right)+\left(1-\frac{b}{a\sqrt{2}}\right)$$

$$\psi_1\left(x-x\frac{b}{a\sqrt{2}}, -x\frac{b}{a\sqrt{2}}\right)+\frac{b}{a\sqrt{2}}\left\{\varphi\left(x+x\frac{b}{a\sqrt{2}}, x\frac{b}{a\sqrt{2}}\right)-\varphi_1\right\}\Bigg] dx$$

$$= +\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^b \left[\varphi\left(a+\frac{y}{\sqrt{2}}, \frac{y}{\sqrt{2}}\right)-\varphi_1+\psi\left(a+\frac{y}{\sqrt{2}}, \frac{y}{\sqrt{2}}\right)-\psi_1\right] dy,$$

3) $$\int_0^a \Bigg[\left(\frac{b}{a}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\varphi\left(x+x\frac{b}{a\sqrt{2}}, x\frac{b}{a\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{b}{a}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\varphi_1\left(x-x\frac{b}{a\sqrt{2}}, -x\frac{b}{a\sqrt{2}}\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi-\psi_1)\Bigg] dx =$$

$$\int_0^b \left[\varphi\left(a+\frac{y}{\sqrt{2}}, \frac{y}{\sqrt{2}}\right)+\varphi_1\left(a-\frac{y}{\sqrt{2}}, -\frac{y}{\sqrt{2}}\right)\right] dy,$$

4) $$\int_0^a \Bigg[\left(\frac{b}{a}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\psi\left(x+x\frac{b}{a\sqrt{2}}, x\frac{b}{a\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{b}{a}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\psi_1$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2}}(-\varphi+\varphi_1)\Bigg] dx =$$

$$\int_0^b \left[\psi\left(a+\frac{y}{\sqrt{2}}, \frac{y}{\sqrt{2}}\right)+\psi_1\left(a-\frac{y}{\sqrt{2}}, -\frac{y}{\sqrt{2}}\right)\right] dy.$$

Eine sehr interessante Anwendung gestatten diese Formeln für den Fall $f(t) = e^{-t^2}$, $(a = \infty)$, woraus sich

$$\varphi(u, v) = e^{-u^2+v^2}\cos 2uv, \quad \psi(u, v) = -e^{-u^2+v^2}\sin 2uv$$

ergibt; da die Rechnung nichts Besonderes darbietet, so genügt die Angabe der Resultate, man erhält aus den Formeln 10, α) das folgende System

$$\int_0^\infty \left\{ e^{-x^2-\sqrt{2}cx} \cos(\sqrt{2}cx+c^2) + e^{-x^2+\sqrt{2}cx} \cos(\sqrt{2}cx-c^2) \right\} dx = \sqrt{\pi}, \tag{11}$$

$$\int_0^\infty \left\{ e^{-x^2-\sqrt{2}cx} \cos(\sqrt{2}cx+c^2) - e^{-x^2+\sqrt{2}cx} \sin(\sqrt{2}cx-c^2) \right\} dx = 0$$

$$\int_0^\infty \left\{ e^{-x^2-\sqrt{2}cx} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \sqrt{2}cx+c^2\right) - e^{-x^2+\sqrt{2}cx} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \sqrt{2}cx+c^2\right) \right\} dx = 2\int_0^c \cos(z^2)\, dz,$$

$$\int_0^\infty \left\{ e^{-x^2-\sqrt{2}cx} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \sqrt{2}cx+c^2\right) - e^{-x^2+\sqrt{2}cx} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \sqrt{2}cx+c^2\right) \right\} dx = 2\int_0^c \sin(z^2)\, dz.$$

Einerseits führt dasselbe zu bekannten Integralformeln; dies erstere bei der Substitution $\sqrt{2}cx+c^2$ und $\sqrt{2}cx-c^2=z$, wodurch die beiden ersten Gleichungen in die folgenden übergehen

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-az^2} \cos z\, dz = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\frac{1}{4a}}; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-az^2} \sin z\, dz = 0,$$

während durch Addition und Subtraction der übrigen

$$\int_0^c \cos(z^2) dz + \int_0^c \sin(z^2) dz = \sqrt{\frac{\pi}{2}} - 2\frac{e^{\frac{c^2}{2}}}{c} \int_{c^2}^\infty e^{-\frac{z^2}{2c^2}} \cos z\, dz,$$

$$\int_0^c \cos(z^2) dz - \int_0^c \sin(z^2) dz = 2\frac{e^{\frac{c^2}{2}}}{c} \int_{c^2}^\infty e^{-\frac{z^2}{2c^2}} \sin z\, dz$$

und ($c=\infty$ gesetzt)

$$\int_0^\infty \cos(z^2)\,dz = \int_0^\infty \sin(z^2)\,dz = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

gewonnen wird. Andererseits erweist sich die Substitution der unendlichen Reihen für die Ausdrücke $e^{-\sqrt{2cx}}$, $\cos\sqrt{2cx}$ und $\sin\sqrt{2cx}$ in den Formeln 11) von bedeutendem Vortheil, indem ausser der inductiven Werthbestimmung des Integrales $\int_0^\infty e^{-x^2} x^p\,dx$, hieraus convergente Reihenentwicklungen für die Integrale $\int_0^c \cos(z^2)\,dz$ und $\int_0^c \sin(z^2)\,dz$ namentlich bei kleinen c entspringen. Den Relationen entsprechend

$$\int_0^e \cos(z^2)dz = \cos(c^2)\int_0^\infty e^{-x^2}\left\{\frac{2cx}{1} - \frac{(2cx)^5}{5\,!} + \frac{(2cx)^9}{9\,!} - \ldots\right\}dx$$

$$+\sin(c^2)\int_0^\infty e^{-x^2}\left\{\frac{(2cx)^3}{3\,!} - \frac{(2cx)^7}{7\,!} + \qquad\qquad\right\}dx,$$

$$\int_0^c \sin(z^2)dz = -\cos(c^2)\int_0^\infty e^{-x^2}\left\{\frac{(2cx)^3}{3\,!} - \frac{(2cx)^7}{7\,!} + \qquad\qquad\right\}dx$$

$$+\sin(c^2)\int_0^\infty e^{-x^2}\left\{\frac{2ex}{1} - \frac{(2cx)^5}{5\,!} + \frac{(2cx)^9}{9\,!} - \ldots\right\}dx$$

lauten diese Entwicklungen zunächst in Bezug auf die Werthe, welche sie paarweise annehmen

$$2\int_0^c \cos(z^2)\,dz = \cos(c^2)\left\{\frac{2c}{1} - \frac{(2c)^5}{3.4.5} + \frac{(2c)^9}{5.6.7.8.9} - \ldots\right\}$$

$$+\sin(c^2)\left\{\frac{(2c)^3}{2.3} - \frac{(2c)^7}{4.5.6.7} + \frac{(2c)^{11}}{6.7.8.9.10.11} - \ldots\right\}$$

$$2\int_0^c \sin(z^2)dz = -\cos(c^2)\left\{\frac{(2c)^3}{2.3} - \frac{(2c)^7}{4.5.6.7} + \frac{(2c)^{11}}{6.7.8.9.10.11} - \ldots\right\}$$

$$+\sin(c^2)\left\{\frac{2c}{1} - \frac{(2c)^5}{3.4.5} + \frac{(2c)^9}{5.6.7.8.9} - \ldots\right\}$$

sodann isolirt

$$2\int_0^b \cos(b^2-y^2)\,dy = \frac{2b}{1} - \frac{(2b)^5}{3.4.5} + \frac{(2b)^9}{5.6.7.8.9} - .\ \ . =$$

$$2\int_0^b \frac{y\cos(y^2)}{\sqrt{b^2-y^2}}\,dy,$$

$$2\int_0^b \sin(b^2-y^2)\,dy = \frac{(2b)^3}{2.3} - \frac{(2b)^7}{4.5.6.7} + \frac{(2b)^{11}}{6.7.8.9.10.11} - \ldots =$$

$$2\int_0^b \frac{y\sin(y^2)}{\sqrt{b^2-y^2}}\,dy.$$

2. Von der Function e^{-t^2} gehen wir zur allgemeinen Substitution in 6) über

$$f(t) = tf(t);$$

die bezeichnete Formel lautet in diesem Falle

$$\int_0^a xf(x)dx + i'\int_0^b (a+i'y)f(a+i'y)\,dy = \tag{12}$$

$$i'\int_0^b i'yf(i'y)\,dy + \int_0^a (x+i'b)f(x+i'b)\,dx$$

Bei Ansicht dieser letzteren drängt sich die Frage nach den Änderungen auf, die eine Einführung der Factoren $a-i'y$, $-i'y$ und $x-i'b$ anstatt $a+i'y$, $+i'y$, $x+i'b$ unter den drei letzten Integralzeichen mit sich führt. Der Fall ist, wie leicht zu ersehen, von den bisher betrachteten grundverschieden, da es sich hier nicht mehr um ein Integral $\int F(f)\,df$, sondern um Integrale von der Form $\int F(f_1, f_2)\, df_1$ oder $\int F(f_1, f_2)\, df_2$ handelt, worin f_2, sowie f_1 Functionen derselben Veränderlichen, allerdings von geringer Verschiedenheit bedeuten. Die letzteren Integrale, auf einen geschlossenen Integrationsort bezogen, reduciren sich nicht nothwendig auf Null. Man hat vielmehr, f_1 und f_2 als Functionen zweier Veränderlichen vorausgesetzt, nach 5)

$$\int F(f_1, f_2) df_1 = \int F(f_1, f_2) \left\{ \frac{\partial f_1}{\partial x} dx + \frac{\partial f_1}{\partial y} dy \right\} =$$

$$\iint \left[\left(\frac{\partial F}{\partial f_1} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial f_2} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial y} \right) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x} dx dy - \left(\frac{\partial F}{\partial f_1} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial f_2} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x} \right) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial y} dy dx \right.$$

$$\left. + F(f_1, f_2) \left\{ \frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial y} dx dy - \frac{\partial^2 f_1}{\partial y \partial x} dy dx \right\} \right],$$

$$\int F(f_1, f_2)\, df_2 = \int F(f_1, f_2) \left\{ \frac{\partial f_2}{\partial x} dx + \frac{\partial f_2}{\partial y} dy \right\} =$$

$$\iint \left[\left(\frac{\partial F}{\partial f_1} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial f_2} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial y} \right) \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x} dx dy - \left(\frac{\partial F}{\partial f_1} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial f_2} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x} \right) \cdot \frac{\partial f_2}{\partial y} dy dx \right.$$

$$\left. + F(f_1, f_2) \left\{ \frac{\partial^2 f_2}{\partial x \partial y} dx dy - \frac{\partial^2 f_2}{\partial y \partial x} dy dx \right\} \right],$$

d. h. im speciellen Falle

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial x}, \; \frac{\partial f_2}{\partial y} = -\frac{\partial f_1}{\partial y}$$

$$\int F(f_1, f_2)\, df_1 = 2 \iint \frac{\partial F}{\partial f_2} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial y} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x} dy dx = -2 \iint \frac{\partial F}{\partial f_2} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial y} dx dy, \quad 13)$$

$$\int F(f_1, f_2)\, df_2 = 2 \iint \frac{\partial F}{\partial f_1} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial y} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x} dy dx = -2 \iint \frac{\partial F}{\partial f_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial y} dx dy.$$

Wählt man hierin für f_1 und f_2, wie es z. B. oben verlangt wird, die Zahlen $x + \zeta_h y$ und $x - \zeta_h y$, wo ζ_h eine der stets complexen Wurzeln der Gleichung $x^h \pm 1 = 0$ bedeutet, so erhält man sogleich die Resultate

$$\int F(x+\zeta_h y,\, x-\zeta_h y)\,d(x+\zeta_h y) =$$
$$-2\zeta_h \int\!\!\int F'_{x-\zeta_h y}(x+\zeta_h y,\, x-\zeta_h y)\,dx\,dy,$$

$$\int F(x+\zeta_h y,\, x-\zeta_h y)\,d(x-\zeta_h y) =$$
$$+2\zeta_h \int\!\!\int F'_{x+\zeta_h y}(x+\zeta_h y,\, x-\zeta_h y)\,dx\,dy,$$

und damit auch die gewünschte Ergänzung zu der Formel 12), nämlich

$$\int_0^a xf(x)\,dx + i'\int_0^b (a-i'y)f(a+i'y)\,dy = i'\int_0^b i'yf(i'y)\,dy$$
$$+\int_0^a (x-i'b)f(x+i'b)\,dx - 2i'\int_0^a\!\!\int_0^b f(x+i'y)\,dx\,dy,$$

$$\int_0^a xf(x)\,dx + i'\int_0^b (a+i'y)f(a-i'y)\,dy = i\int_0^b yf(-i'y)\,dy$$
$$+\int_0^a (x+i'b)f(x-i'b)\,dx - 2i'\int_0^a\!\!\int_0^b (x+i'y)\,f_{x-i'y}(x-i'y)\,dx\,dy.$$

Da noch häufiger als $zf(z)$, die Function $\frac{f(z)}{z}$, welche möglicherweise discontinuirlich ist, angewendet werden kann, um Integralformeln zu erhalten, so ist es von Vortheil, den gegenwärtigen Fall allgemein aufzufassen und demgemäss die Gleichung

$$\int_0^a F(x,x)\,dx + i'\int_0^b F(a+i'y,\, a-i'y)\,dy = i'\int_0^b F(i'y,\, -i'y)\,dy \tag{14}$$
$$+\int_0^a F(x+i'b,\, x-i'b)\,dx - 2i'\int_0^a\!\!\int_0^b F'_{x-i'y}(x+i'y,\, x-i'y)\,dx\,dy$$

analog wie Gleichung 6) zu discutiren. Wie aus den Definitionen

$$F(u+iv, u-iv) = \Phi(u, v; u-iv) + i\Psi(u, v; u-iv);$$

$$\Phi(u, v;\ u-iv) = \varphi(u, v; u, -v) + i\psi(u, v; u, -v),$$

$$\Psi(u, v;\ u-iv) = \varphi'(u, v; u, -v) + i\psi'(u, v; u, -v)$$

hervorgeht, besteht die einzige Änderung des Verfahrens nunmehr darin, dass an die Stelle des früheren φ jetzt die in den vorhergehenden Gleichungen bestimmte Function $\varphi-\psi'$, dagegen für ψ jetzt $\psi+\varphi'$ zu stehen kommt, während die Bedeutung des Index 1 unverändert bleibt. Bestimmt man noch, dass

$$F'_{x-i'y}(x+i'y; x-i'y) = \Phi'_{x-i'y}\left(x+\frac{y}{\sqrt{2}}, \frac{y}{\sqrt{2}}; x-i'y\right) + i\Psi'(\ldots.)$$
$$= f_1 + if_2 + i'f_3 + ii'f_4,$$

so zerfällt die Gleichung 14) ganz wie 6) in vier partielle Gleichungen, indem die mit 1, i, i' und ii' multiplicirten Ausdrücke derselben jeder für sich verschwinden, für alle solche Functionen F, welche einer der Bedingungen $F(\xi; \eta) = F(-\xi; -\eta)$ oder $F(\xi; \eta) = -F(-\xi; -\eta)$ genügen.

Jene Nullwerthe nun erhalten durch Transposition der Glieder die folgenden geordneten Formen von 8 Relationen zur Auswerthung bestimmter Doppelintegrale

α) Bedingung $F(\xi; \eta) = F(-\xi; -\eta)$

1) $$\int_0^a \Bigg[\varphi\left(x+\frac{b}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}; x-\frac{b}{\sqrt{2}}, -\frac{b}{\sqrt{2}}\right) - \psi'$$

$$+\varphi_1\left(x-\frac{b}{\sqrt{2}}, -\frac{b}{\sqrt{2}}; x+\frac{b}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right) - \psi'_1 - 2\varphi(x, o; x, o)\Bigg]\, dx =$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^b \Bigg[\left\{-\varphi\left(a+\frac{y}{\sqrt{2}}, \frac{y}{\sqrt{2}}; a-\frac{y}{\sqrt{2}}, -\frac{y}{\sqrt{2}}\right) + \psi' + \varphi_1 - \psi'_1\right\}$$

$$+\left\{\psi + \varphi' - \psi_1 - \varphi'_1\right\}\Bigg]\, dy - 4\int_0^a\!\!\int_0^b f_4\, dx\, dy,$$

2) $$\int_0^a\left[\psi\left(x+\frac{b}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}};x-\frac{b}{\sqrt{2}},-\frac{b}{\sqrt{2}}\right)+\varphi'+\psi_1+\varphi_1'\right]dx=$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^b\left[\left\{\varphi\left(a+\frac{y}{\sqrt{2}},\frac{y}{\sqrt{2}};a-\frac{y}{\sqrt{2}},-\frac{y}{\sqrt{2}}\right)-\psi'+\psi_1'-\varphi_1\right\}\right.$$

$$\left.+\left\{\psi+\varphi'-\psi_1-\varphi_1'\right\}\right]dy+4\int_0^a\int_0^b f_3\,dx\,dy,$$

3) $$\int_0^b\left[\left\{\varphi\left(a+\frac{y}{\sqrt{2}},\frac{y}{\sqrt{2}};a-\frac{y}{\sqrt{2}},-\frac{y}{\sqrt{2}}\right)-\psi'+\varphi_1-\psi_1'\right\}-\right.$$

$$\left.2\left\{\varphi\left(\frac{y}{\sqrt{2}},\frac{y}{\sqrt{2}};-\frac{y}{\sqrt{2}},-\frac{y}{\sqrt{2}}\right)-\psi'\left(\frac{y}{\sqrt{2}},\frac{y}{\sqrt{2}};-\frac{y}{\sqrt{2}},-\frac{y}{\sqrt{2}}\right)\right\}\right]dy$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^a\left[\left\{\varphi\left(x+\frac{b}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}};x-\frac{b}{\sqrt{2}},-\frac{b}{\sqrt{2}}\right)-\psi'-\varphi_1+\psi_1'\right\}\right.$$

$$\left.+\left\{\psi+\varphi'-\psi_1-\varphi_1'\right\}\right]dx-4\int_0^a\int_0^b f_1\,dx\,dy,$$

4) $$\int_0^b\left[\left\{\psi\left(a+\frac{y}{\sqrt{2}},\frac{y}{\sqrt{2}};a-\frac{y}{\sqrt{2}},-\frac{y}{\sqrt{2}}\right)+\varphi'+\psi_1+\varphi_1'\right\}-\right.$$

$$\left.2\left\{\psi\left(\frac{y}{\sqrt{2}},\frac{y}{\sqrt{2}};-\frac{y}{\sqrt{2}},-\frac{y}{\sqrt{2}}\right)+\varphi'\left(\frac{y}{\sqrt{2}},\frac{y}{\sqrt{2}};-\frac{y}{\sqrt{2}},-\frac{y}{\sqrt{2}}\right)\right\}\right]dy$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^a\left[\left\{-\varphi\left(x+\frac{b}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}};x-\frac{b}{\sqrt{2}},-\frac{b}{\sqrt{2}}\right)+\psi'+\varphi_1-\psi_1'\right\}\right.$$

$$\left.+\left\{\psi+\varphi'-\psi_1-\varphi_1'\right\}\right]dx-4\int_0^a\int_0^b f_2\,dx\,dy.$$

β) Bedingung $F(\xi;\eta) = -F(-\xi;-\eta)$.

1)
$$\int_0^a\Bigg[\varphi\left(x+\frac{b}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}};\,x-\frac{b}{\sqrt{2}},-\frac{b}{\sqrt{2}}\right)-\psi'$$

$$+\varphi_1\left(x-\frac{b}{\sqrt{2}},-\frac{b}{\sqrt{2}};\,x+\frac{b}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}}\right)-\psi_1'-2\varphi(x,o;\,x,o)\Bigg]\,dx =$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^b\Bigg[\left\{-\varphi\left(a+\frac{y}{\sqrt{2}},\frac{y}{\sqrt{2}};\,a-\frac{y}{\sqrt{2}},-\frac{y}{\sqrt{2}}\right)+\psi'+\varphi_1-\psi_1'\right\}$$

$$+\left\{\psi+\varphi'-\psi_1-\psi_1'\right\}$$

$$+2\left\{\varphi\left(\frac{y}{\sqrt{2}},\frac{y}{\sqrt{2}};\,-\frac{y}{\sqrt{2}},-\frac{y}{\sqrt{2}}\right)-\psi'\right\}$$

$$-2\left\{\psi\left(\frac{y}{\sqrt{2}},\frac{y}{\sqrt{2}};\,-\frac{y}{\sqrt{2}},-\frac{y}{\sqrt{2}}\right)+\varphi'\right\}\Bigg]\,dy-4\int_0^a\!\!\int_0^b f_4\,dx\,dy\,,$$

2)
$$\int_0^a\left[\psi\left(x+\frac{b}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}};\,x-\frac{b}{\sqrt{2}},-\frac{b}{\sqrt{2}}\right)+\varphi'+\psi_1+\varphi_1'\right]dx =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^b\Bigg[\left\{\varphi\left(a+\frac{y}{\sqrt{2}},\frac{y}{\sqrt{2}};\,a-\frac{y}{\sqrt{2}},-\frac{y}{\sqrt{2}}\right)-\psi'+\psi_1'-\varphi_1\right\}$$

$$+\left\{\psi+\varphi'-\psi_1-\varphi_1'\right\}$$

$$+2\left\{\varphi\left(\frac{y}{\sqrt{2}},\frac{y}{\sqrt{2}};\,-\frac{y}{\sqrt{2}},-\frac{y}{\sqrt{2}}\right)-\psi'\right\}$$

$$-2\left\{\psi\left(\frac{y}{\sqrt{2}},\frac{y}{\sqrt{2}};\,-\frac{y}{\sqrt{2}},-\frac{y}{\sqrt{2}}\right)+\varphi'\right\}\Bigg]dy+4\int_0^a\!\!\int_0^b f_3\,dx\,dy\,,$$

3) $$\int_0^b \left[\left\{\varphi\left(a+\frac{y}{\sqrt{2}}, \frac{y}{\sqrt{2}}; a-\frac{y}{\sqrt{2}}, -\frac{y}{\sqrt{2}}\right)-\psi' + \varphi_1\left(a-\frac{y}{\sqrt{2}}, -\frac{y}{\sqrt{2}}; a+\frac{y}{\sqrt{2}}, +\frac{y}{\sqrt{2}}\right)-\psi_1'\right\}\right] dy =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^a \left[\left\{\varphi\left(x+\frac{b}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}; x-\frac{b}{\sqrt{2}}, -\frac{b}{\sqrt{2}}\right)-\psi'-\varphi_1+\psi_1'\right\} + \left\{\psi+\varphi'-\psi_1-\varphi_1'\right\}\right] dx - 4\int_0^a\int_0^b f_1 dx dy,$$

4) $$\int_0^b \left[\left\{\psi\left(a+\frac{y}{\sqrt{2}}, \frac{y}{\sqrt{2}}; a-\frac{y}{\sqrt{2}}, -\frac{y}{\sqrt{2}}\right)+\varphi' + \psi_1\left(a-\frac{y}{\sqrt{2}}, -\frac{y}{\sqrt{2}}; a+\frac{y}{\sqrt{2}}, \frac{y}{\sqrt{2}}\right)+\varphi_1'\right\}\right] dy =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^a \left[\left\{-\varphi\left(x+\frac{b}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}; x-\frac{b}{\sqrt{2}}, -\frac{b}{\sqrt{2}}\right)+\psi'+\varphi_1-\psi_1'\right\} + \left\{\psi+\varphi'-\psi_1-\varphi_1'\right\}\right] dx - 4\int_0^a\int_0^b f_2 dx\, dy.$$

3. Zur Vervollständigung des bisherigen Formelsystems gehört noch eine kleine Discussion der Integrationsorte mit sogenannten Ausnahmepunkten. Unter der Voraussetzung, dass es sich blos um Integrationen von Differentialen eines einzigen Argumentes nach diesem Argumente handelt, liefert die Cauchy'sche Gleichung

$$\int_{(0_1)} F(z)dz = \int_0^b\int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} F(z)\, dx dy = \int_0^a\int_{\eta-\varepsilon}^{\eta+\varepsilon} F(z) dy dx, \quad \varepsilon = 0,$$

worin der Index (0_1) irgend einen beliebigen Integrationsort mit einem Ausnahmepunkte, rechts das Doppelintegral eine Integration auf der Basis eines Rechtecks mit den Seiten a und b und dem innerhalb des Rechteckes liegenden Ausnahmepunkt ξ, bedeutet, die nöthigen Behelfe; für $\xi = o$ fällt dabei das untere, für $\xi = a$ das obere unendlich kleine ε weg — ebenso bezüglich η. Schon bei der Einführung anderer complexer Wurzeln algebraischer Gleichungen als $+i$ oder $-i$, stösst die Auswerthung jener Doppelintegrale auf Unbestimmtheiten; völlig unbrauchbar wird die Formel bei Functionen mehrerer Argumente, wie sie im Vorhergehenden angewendet sind, wenn eben die Integration blos nach der einen Veränderlichen erfolgt — es muss und kann in diesen Fällen der Integrationsort (o_1) auf einen Kreis mit unendlich kleinem Radius reducirt werden, der den Ausnahmepunkt umschliesst. Bei Functionen eines Arguments kann diese Reduction ohne weiters geschehen, weil die Wahl eines geschlossenen Contours auf das Resultat von keinem Einflusse ist, und führt zur Gleichung

$$\int_{(0_n)} F(z)dz = (\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n) \int_{\vartheta_o}^{\vartheta_o + 2\pi} \frac{-\sin\vartheta + i_k \cos\vartheta}{\cos\vartheta + i_k \sin\vartheta}\, d\vartheta,$$

worin $\lambda_p = Lim[\delta F(\zeta_p + \delta)]$, $\{\delta = o\}$ von ϑ unabhängig ist, i_k eine complexe Wurzel von der Form $\cos\tau \pm i \sin\tau$ bedeutet, während die Integration links auf einen Contour mit n vollkommen eingeschlossenen Ausnahmepunkten $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_n$ bezogen ist. Wenn einer der Ausnahmepunkte auf dem Integrationswege selbst liegt, gilt die vorstehende Formel nicht mehr; die Integration lässt sich dann nur in dem Falle bewerkstelligen, wenn der Ausnahmepunkt entweder auf einer Geraden oder in der Spitze eines Winkels mit dem Bogenmasse τ liegt, wofür bezüglich statt der oberen Grenze $\vartheta_o + 2\pi$, $\vartheta_o + \pi$ oder $(\vartheta_o = o +) \frac{\pi}{2}$ eintritt (entsprechend dem Wegfall des unter den früheren Bedingungen $\xi = o$ und $\eta = o$). Man findet nun (s. Anhang 3.) — und hiermit erledigt sich die Integration discontinuirlicher Functionen eines Arguments $x + i_k y$ — je nachdem $i_k = \cos\tau \pm i \sin\tau$, als Integralwerth für den Weg (o_n)

$$\int_{(0_n)} F(z)dz = \pm ip(\lambda_1+\lambda_2+\ldots\lambda_n) \tag{15}$$

mit den Werthen $p=2\pi$, π oder τ für die vorhin bezeichneten Grenzen $\vartheta_0+2\pi$, $\vartheta_0+\pi$ oder $\frac{\pi}{2}$.

Nicht viel anders gestaltet sich bezüglich des Resultates die Sache bei Functionen zweier Argumente $x+i_ky$ und $x-i_ky$, die nach $x+i_ky$ oder nach $x-i_ky$ zu integriren sind; die Reduction des Integrationsortes (o_n) auf n unendlich kleine Kreise um ζ_1, ζ_2, . . ζ_n ist hier an die Formel gebunden (s. Gleichung 13)

$$\int_{(0_n)} F(x+i_ky, x-i_ky)d(x+i_ky)$$

$$-(\mu_1+\mu_2+\ldots\mu_n)\int_0^{2\pi}\frac{-\sin\vartheta+i_k\cos\vartheta}{\cos\vartheta\pm i_k\sin\vartheta}d\vartheta$$

$$= -2i_k\iint_{(0_n)} F'_{x-i_ky}(x+i_ky, x-i_ky)dx\,dy + Lim$$

$$\left[\int_0^{r1}\int_0^{2\pi} rF'_{r\cos\vartheta-i_kr\sin\vartheta}(r\cos\vartheta+i_kr\sin\vartheta, r\cos\vartheta-i_kr\sin\vartheta)drd\vartheta\right.$$

$$\left.+\int_0^{r_2}\int_0^{2\pi} rF'\,dr\,d\vartheta+.\quad\int_0^{r_n}\int_0^{2\pi} rF'\,dr\,d\vartheta\right],\ \{r_1=r_2=\ldots r_n=o\},$$

d. h. wegen des Verschwindens der mit *Lim* bezeichneten Doppelintegrale

$$\int_{(0_n)} F(x+i_ky, x-i_ky)d(x+i_ky) =$$

$$\pm ip(\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_n) - 2i_k\iint_{(0_n)} F'_{x-i_ky}(x+i_ky, x-i_ky)dx\,dy \tag{16}$$

$$\mu_q = Lim[\delta_o, {}_1F(\xi_q + i_k \eta_q + \delta_o, \xi_q - i_k \eta_q + \delta_1)],$$

$$\begin{cases} \delta_o = Lim\{r(\cos\vartheta + i_k \sin\vartheta)\} \\ \delta_1 = Lim\{r(\cos\vartheta - i_k \sin\vartheta)\}. \end{cases}$$

Die Unterscheidung zwischen dem Factor δ_o und δ_1 in μ_q ist unwesentlich; viel wichtiger ist die genaue Untersuchung der Abhängigkeit von μ_q bezüglich ϑ. Man wird bei richtiger Einführung der Functionen $\xi + r\cos\vartheta$ für x, $\eta + r\sin\vartheta$ für y im Integrale $\int_{(o_n)} F(z)\,dz$ nicht fehlen; bei solchen (meist verwendeten) Functionen, deren algebraischer Nenner zwischen den Integrationsgrenzen den Werth o erreicht, ist es gut zu bemerken, dass überhaupt nur vier verschiedene Fälle denkbar sind, wonach nämlich die Integration längs einer unendlich kleinen Kreisperipherie folgende vier Werthe liefern kann.

1. Integration nach $x + i_k y$:

$$\varphi(\xi + i_k \eta, \xi - i_k \eta) \int_0^{2\pi;\ \pi,\ \frac{1}{2}\pi} \frac{-\sin\vartheta + i_k \cos\vartheta}{\cos\vartheta + i_k \sin\vartheta}\, d\vartheta;$$

$$\varphi(\xi + i_k \eta, \xi - i_k \eta) \int_0^{2\pi;\ \pi,\ \frac{1}{2}\pi} \frac{-\sin\vartheta + i_k \cos\vartheta}{\cos\vartheta - i_k \sin\vartheta}\, d\vartheta =$$

$$+ \frac{1 - \sin\tau}{\cos\tau} . (2\pi . \varphi;\ \pi . \varphi),\ \frac{1 - 2\sin\tau}{\cos\tau} . \frac{\pi}{2} \varphi + \tau \tan\tau\,\varphi;\ \left(\tau \lesseqqgtr \frac{\pi}{2}\right).$$

2. Integration nach $x - i_k y$:

$$\varphi(\xi + i_k \eta, \xi - i_k \eta) \int_0^{2\pi;\ \pi,\ \frac{1}{2}\pi} \frac{-\sin\vartheta - i_k \cos\vartheta}{\cos\vartheta + i_k \sin\vartheta}\, d\vartheta =$$

$$- \frac{1 - \sin\tau}{\cos\tau} . (2\pi . \varphi;\ \pi . \varphi),\ - \frac{1 - 2\sin\tau}{\cos\tau} . \frac{\pi}{2} \varphi - \tau \tan\tau\,\varphi;\ \left(\tau \lesseqqgtr \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\varphi(\xi+i_k\eta,\ \xi-i_k\eta)\int_0^{2\pi;\ \pi,\ \frac{1}{2}\pi}\frac{-\sin\vartheta-i_k\cos\vartheta}{\cos\vartheta-i_k\sin\vartheta}\,d\vartheta=$$

$$-2i\pi.\varphi,\ (-\pi.i.\varphi,\ \mp\tau.i.\varphi).$$

Zur Illustrirung dieser wenigen Elemente einer möglicherweise sehr verzweigten Theorie diene uns die einfachste discontinuirliche Function $F(z)=\frac{f(z)}{z}$, $f(o)\gtrless o$, welche wir somit den allgemeinen Formeln 15) und 16) anpassen: bezüglich der letzteren bestimmen wir $\frac{f(z)}{z}=\frac{f(x+iy)}{x-iy}$ und integriren dieselbe einmal nach $x+iy$, sodann nach $x-iy$; die Integrationsbasis bilde in diesen drei Fällen, wie bisher, das Parallelogramm, hier speciell das Rechteck mit den Seiten a und b und den Diagonaleckpunkten o und ab. Als Integrationsgrenzen nach ϑ sind o und $\frac{\pi}{2}$ einzuführen, wonach jetzt die Formeln 15) und 16) in die folgenden übergehen

$$\int_0^a\frac{f(x)}{x}\,dx+i\int_0^b\frac{f(a+iy)}{a+iy}\,dy=\int_0^b\frac{f(iy)}{y}\,dy+\int_0^a\frac{f(x+ib)}{x+ib}\,dx$$

$$+\frac{\pi}{2}\,if(o)\,, \tag{17)}$$

$$\int_0^a\frac{f(x)}{x}\,dx+\int_0^b\frac{f(a+iy)}{a-iy}\,dy=-\int_0^b\frac{f(iy)}{y}\,dy+\int_0^a\frac{f(x+ib)}{x-ib}\,dx$$

$$-f(o)+2i\int_0^a\!\!\int_0^b\frac{f(x+iy)}{(x-iy)^2}\,dxdy\,,$$

$$\int_0^a\frac{f(x)}{x}\,dx-i\int_0^b\frac{f(a+iy)}{a-iy}\,dy=+\int_0^b\frac{f(iy)}{y}\,dy+\int_0^a\frac{f(x+ib)}{x-ib}\,dx$$

$$-\frac{\pi}{2}\,if(o)-2i\int_0^a\!\!\int_0^b\frac{f'_{x+iy}(x+iy)}{x-iy}\,dxdy.$$

Der erste und einzige Schritt, der sich mit Beibehaltung der Allgemeinheit dieser Gleichungen darbietet, ist die additive und subtractive Verbindung derselben, und zwar der ersten mit den beiden letzten, wie folgt:

$$\int_0^a \frac{f(x)}{x}\,dx + \frac{1}{2}f(o)\left(1-\frac{\pi}{2}i\right) = \int_0^a \frac{xf(x+ib)}{x^2+b^2}\,dx \tag{18}$$

$$-ia\int_0^b \frac{f(a+iy)}{a^2+y^2}\,dy + i\int_0^a\int_0^b \frac{f(x+iy)}{(x-iy)^2}\,dx\,dy\,,$$

$$\int_0^a \frac{f(x)}{x}\,dx - \int_0^b \frac{f(iy)}{y}\,dy = \int_0^a \frac{xf(x+ib)}{x^2+b^2}\,dx$$

$$-\int_0^b \frac{yf(a+iy)}{a^2+y^2}\,dy - i\int_0^a\int_0^b \frac{f'(x+iy)}{x-iy}\,dx\,dy\,,$$

$$\int_0^b \frac{f(iy)}{y}\,dy + \frac{1}{2}f(o)\left(1+\frac{\pi}{2}i\right) = \int_0^a ib\frac{f(x+ib)}{x^2+b^2}\,dx$$

$$+\int_0^b \frac{yf(a+iy)}{a^2+y^2}\,dy + i\int_0^a\int_0^b \frac{f(x+iy)}{(x-iy)^2}\,dx\,dy\,,$$

$$a\int_0^b \frac{f(a+iy)}{a^2+y^2}\,dy + b\int_0^a \frac{f(x+ib)}{x^2+b^2}\,dx = \int_0^a\int_0^b \frac{f'(x+iy)}{x-iy}\,dx\,dy + \frac{\pi}{2}f(o).$$

Ein Musterbeispiel der Analyse liefert zu diesem System die Function $f(x+iy)=e^{-(x+iy)}$. Für $Lim\, a=\infty$ geht in diesem speciellen Falle die erste der Gleichungen 17) in den reellen Theil (siehe Anhang 5.)

$$\int_0^\infty \frac{b\sin b - x\cos b}{x^2+b^2}\,e^{-x}dx = C + \int_{(0)}^{(b)} \frac{\cos y}{y}\,dy\,, \tag{19}$$

$$\int_{(0)}^{(\infty)} \frac{e^{-x}}{x}\, dx = -C = -0{\cdot}5772156649.$$

worin, wie in allen folgenden Fällen das Integral

$$\int_0^b \frac{\cos y}{y}\, dy$$

seinen sogenannten Hauptwerth besitzt, — und in den imaginären Theil über

$$\int_0^\infty \frac{b\cos b + x\sin b}{x^2+b^2}\, e^{-x} dx = \frac{\pi}{2} - \int_0^b \frac{\sin y}{y}\, dy.$$

Die einzelnen Summanden unter den linksseitigen Integralzeichen lassen sich hier isoliren; es führt dies zu den Reductionen

$$\int_0^\infty \frac{xe^{-x}}{x^2+b^2}\, dx = -C\cos b + \frac{\pi}{2}\sin b - \int_{(0)}^{(b)} \frac{\cos(b-y)}{y}\, dy, \qquad 20)$$

$$\int_0^\infty \frac{be^{-x}}{x^2+b^2}\, dx = C \quad \sin b + \frac{\pi}{2}\cos b + \int_{(0)}^{(b)} \frac{\sin(b-y)}{y}\, dy.$$

Die diesen Resultaten parallel laufenden Relationen aus den beiden letzten Formeln 17) sind die folgenden

$$\int_0^\infty \frac{b\sin b + x\cos b}{x^2+b^2}\, e^{-x} dx = 1 - C + \int_{(0)}^{(b)} \frac{\cos y}{y}\, dy \qquad 21)$$

$$+2\int_0^\infty \int_{(0)}^{(b)} \frac{2xy\cos y - (x^2-y^2)\sin y}{(x^2+y^2)^2}\, e^{-x} dx dy$$

$$= -C - \int_{(0)}^{(b)} \frac{\cos y}{y}\, dy + 2\int_0^\infty \int_0^b \frac{y\cos y - x\sin y}{x^2+y^2}\, e^{-x} dx dy,$$

$$\int_0^\infty \frac{b\cos b - x\sin b}{x^2+b^2}\, e^{-x} dx = -\int_0^b \frac{\sin y}{y}\, dy$$

$$-2\int_0^\infty\int_0^b \frac{(x^2-y^2)\cos y + 2xy\sin y}{(x^2+y^2)^2}\, e^{-x} dx dy$$

$$= \frac{\pi}{2} + \int_0^b \frac{\sin y}{y}\, dy - 2\int_0^\infty\int_0^b \frac{x\cos y + y\sin y}{x^2+y^2}\, e^{-x} dx dy\,;$$

$$\int_0^\infty \frac{xe^{-x}}{x^2+b^2}\, dx = \cos b\,(1-C) + \int_{(0)}^{(b)} \frac{\cos(b-y)}{y}\, dy \tag{22}$$

$$+2\int_0^\infty\int_{(0)}^{(b)} \frac{2xy\cos(b-y)+(x^2-y^2)\sin(b-y)}{(x^2+y^2)^2}\, e^{-x} dx dy$$

$$= -C\cos b - \frac{\pi}{2}\sin b - \int_{(0)}^{(b)} \frac{\cos(b-y)}{y}\, dy$$

$$+2\int_0^\infty\int_0^b \frac{y\cos(b-y)+x\sin(b-y)}{x^2+y^2}\, e^{-x} dx dy\,,$$

$$\int_0^\infty \frac{be^{-x}}{x^2+b^2}\, dx = \sin b\,(1-C) + \int_{(0)}^{(b)} \frac{\cos(b-y)}{y}\, dy$$

$$+2\int_0^\infty\int_{(0)}^{(b)} \frac{2xy\sin(b-y)-(x^2-y^2)\cos(b-y)}{(x^2+y^2)^2}\, e^{-x} dx dy$$

$$= -C\sin b + \frac{\pi}{2}\cos b - \int_{(0)}^{(b)} \frac{\sin(b-y)}{y}\, dy$$

$$+2\int_0^\infty\int_0^b \frac{y\sin(b-y)-x\cos(b-y)}{x^2+y^2}\, e^{-x} dx dy\,;$$

schliesslich können die Gleichungen 19) und 21) verbunden werden und liefern

$$\int_0^\infty \frac{x\cos b}{x^2+b^2}\, e^{-x} dx = -\frac{1}{2}(2C-1) \tag{23}$$

$$+\int_0^\infty\int_{(0)}^{(b)} \frac{2xy\cos y-(x^2-y^2)\sin y}{(x^2+y^2)^2}\, e^{-x} dx\, dy$$

$$= -C - \int_{(0)}^{(b)} \frac{\cos y}{y}\, dy + \int_0^\infty\int_0^b \frac{y\cos y - x\sin y}{x^2+y^2}\, e^{-x} dx\, dy,$$

$$\int_0^\infty \frac{x\sin b}{x^2+b^2}\, e^{-x} dx = \frac{\pi}{4}$$

$$+\int_0^\infty\int_0^b \frac{(x^2-y^2)\cos y+2xy\sin y}{(x^2+y^2)^2}\, e^{-x} dx\, dy$$

$$= -\int_0^b \frac{\sin y}{y}\, dy + \int_0^\infty\int_0^b \frac{x\cos y + y\sin y}{x^2+y^2}\, e^{-x} dx\, dy;$$

$$\int_0^\infty \frac{b\cos b}{x^2+b^2}\, e^{-x} dx = \frac{\pi}{4} - \int_0^b \frac{\sin y}{y}\, dy$$

$$+\int_0^\infty\int_0^b \frac{(x^2-y^2)\cos y+2xy\sin y}{(x^2+y^2)^2}\, e^{-x} dx\, dy$$

$$= \frac{\pi}{2} - \int_0^\infty\int_0^b \frac{x\cos y + y\sin y}{x^2+y^2}\, e^{-x} dx\, dy,$$

$$\int_0^\infty \frac{b\sin b}{x^2+b^2}\, e^{-x} dx = \frac{1}{2} + \int_{(0)}^{(b)} \frac{\cos y}{y}\, dy$$

$$+\int_0^\infty\int_{(0)}^{(b)}\frac{2xy\cos y-(x^2-y^2)\sin y}{(x^2+y^2)^2}\,e^{-x}dx\,dy$$

$$=\int_0^\infty\int_0^b\frac{y\cos y-x\sin y}{x^2+y^2}\,e^{-x}dx\,dy.$$

Die Gleichungen 22) und 23) bilden den Apparat, der zur Kenntniss der einfachsten Reduction der acht rechtsseitigen Doppelintegrale, ja (im Falle $b=\infty$) ihres in endlichen Ausdrücken bestimmten Werthes führt — man hat nur die Integrale

$$\int_0^\infty\frac{e^{-x}}{x^2+b^2}\,dx \quad \text{und} \quad \int_0^\infty\frac{xe^{-x}}{x^2+b^2}\,dx$$

aus 23) und 20), resp. 22) und 20) zu eliminiren. Danach bestimmen sich die Doppelintegrale in 23) in folgender Weise

$$\int_0^\infty\int_0^b\frac{x\cos y+y\sin y}{x^2+y^2}\,e^{-x}dx\,dy=\frac{\pi}{2}\sin^2 b-C.\cos b\sin b \tag{24}$$

$$+\cos^2 b\int_0^b\frac{\sin y}{y}\,dy-\sin b\cos b\int_{(0)}^{(b)}\frac{\cos y}{y}\,dy,$$

$$\int_0^\infty\int_0^b\frac{(x^2-y^2)\cos y+2xy\sin y}{(x^2+y^2)^2}\,e^{-x}dx\,dy=\frac{\pi}{2}\sin^2 b-C.\cos b\sin b$$

$$-\frac{\pi}{4}-\sin b\int_{(0)}^{(b)}\frac{\cos(b-y)}{y}\,dy,$$

$$\int_0^\infty\int_0^b\frac{y\cos y-x\sin y}{x^2+y^2}\,e^{-x}dx\,dy=C.\sin^2 b+\frac{\pi}{2}\sin b\cos b$$

$$+\sin b\int_{(0)}^{(b)}\frac{\sin(b-y)}{y}\,dy,$$

$$\int_0^\infty \int_{(0)}^{(b)} \frac{2xy\cos y-(x^2-y^2)\sin y}{(x^2+y^2)^2} e^{-x} dx\, dy = C.\sin^2 b + \frac{\pi}{2}\sin b\cos b$$

$$-\frac{1}{2}-\cos b\int_{(0)}^{(b)} \frac{\cos(b-y)}{y}\, dy.$$

Durch umgekehrte Integration gewinnt man für $b=\infty$ den Werth des ersten dieser Doppelintegrale

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{x\cos y+y\sin y}{x^2+y^2} e^{-x} dx dy = \frac{\pi}{2}$$

und zwar ist dabei das unendliche Anwachsen des b an keine specielle Bedingung gebunden.

Dasselbe gilt von dem in der ersten der vorhergehenden Gleichungen rechts vorkommenden Integrale

$$\int_0^b \frac{\sin y}{y}\, dy;$$

es ist

$$\int_0^\infty \frac{\sin y}{y}\, dy = \frac{\pi}{2}$$

und

$$\sin^2 b\,\frac{\pi}{2} + \cos^2 b\int_0^b \frac{\sin y}{y}\, dy$$

für $b=\infty$ dem Werth $\frac{\pi}{2}$ gleich. Demnach reducirt sich der übrig bleibende Theil der Gleichung, d. h.

$$Lim\left\{-\cos b\sin b\left[C+\int_{(0)}^{(b)} \frac{\cos y}{y}\, dy\right]\right\}$$

auf Null; und da b beliebig unendlich gross gedacht werden muss, findet sich

$$\int_{(0)}^{(\infty)} \frac{\cos y}{y}\, dy = -C.$$

Es ist dies der vorhin erwähnte Hauptwerth des linksseitigen Integrales, welcher somit dem Hauptwerthe von

$$\int_{0}^{\infty} \frac{e^{-x}}{x}\, dx$$

gleich kommt.

Nun führt aber dieser Hauptwerth auch zur endlichen Werthbestimmung der übrigen Doppelintegrale in 24) für $b=\infty$, nämlich

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{(x^2-y^2)\cos y + 2xy \sin y}{(x^2+y^2)^2}\, e^{-x}\, dx\, dy = \qquad 25)$$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \left\{ x \frac{x\cos y + y \sin y}{(x^2+y^2)^2} - y \frac{y \cos y - x \sin y}{(x^2+y^2)^2} \right\} e^{-x} dx\, dy = -\frac{\pi}{4},$$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{y\cos y - x\sin y}{x^2+y^2}\, e^{-x}\, dx\, dy = 0,$$

$$\int_0^\infty \int_{(0)}^{(\infty)} \frac{2xy\cos y - (x^2-y^2)\sin y}{(x^2+y^2)^2}\, e^{-x}\, dx\, dy =$$

$$\int_0^\infty \int_{(0)}^{(\infty)} \left\{ y \frac{x\cos y + y\sin y}{(x^2+y^2)^2} + x \frac{y\cos y - x\sin y}{(x^2+y^2)^2} \right\} e^{-x} dx dy = \frac{1}{2}(2C-1).$$

Diejenigen Doppelintegrale, welche den Ausdruck x^2+y^2 in erster Potenz im Nenner enthalten, lassen eine bemerkenswerthe Transformation zu, wenn man die Integration nach x den Formeln 20) entsprechend ausführt; man erhält dann die Relationen

$$\int_0^\infty\int_0^b \frac{y\cos y - x\sin y}{x^2+y^2} e^{-x} dx dy = \frac{\sin b}{2}\left\{\pi\cos b + 2C.\sin b\right\}$$

$$+\int_0^b dy \int_{(0)}^{(y)} \frac{\sin(2y-z)}{z} dz,$$

$$\int_0^\infty\int_0^b \frac{x\cos y + y\sin y}{x^2+y^2} e^{-x} dx dy = \frac{\sin b}{2}\left\{\pi\sin b - 2C.\cos b\right\}$$

$$-\int_0^b dy \int_{(0)}^{(y)} \frac{\cos(2y-z)}{z} dz;$$

$$\int_0^\infty\int_0^b \frac{y\cos(b-y) + x\sin(b-y)}{x^2+y^2} e^{-x} dx dy = \frac{\pi}{2}\sin b$$

$$-\int_0^b dy \int_{(0)}^{(y)} \frac{\sin(b-2y+z)}{z} dz,$$

$$\int_0^\infty\int_0^b \frac{x\cos(b-y) - y\sin(b-y)}{x^2+y^2} e^{-x} dx dy = -C.\sin b$$

$$-\int_0^b dy \int_{(0)}^{(y)} \frac{\cos(b-2y+z)}{z} dz;$$

daraus

$$\int_0^b dy \int_{(0)}^{(y)} \frac{\sin(2y-z)}{z} dz = \sin b \int_{(0)}^{(b)} \frac{\sin(b-y)}{y} dy,$$

$$\int_0^b dy \int_{(0)}^{(y)} \frac{\cos(2y-z)}{z} dz = \cos b \int_{(0)}^{(b)} \frac{\sin(b-y)}{y} dy;$$

$$\int_0^b dy \int_{(0)}^{(y)} \frac{\sin(b-2y+z)}{z} dz = 0,$$

$$\int_0^b dy \int_{(0)}^{(y)} \frac{\cos(b-2y+z)}{z} dz = \int_{(0)}^{(b)} \frac{\sin(b-y)}{y} dy.$$

Die Annahme $Lim\, b = \infty$ leitet hier auf oscillirende Integrale; in den einfachsten Fällen

$$Lim\, b = m\pi \quad \text{und} \quad Lim\, b = \frac{2m+1}{2}\pi, \quad m = \infty$$

findet man leicht die respectiven Werthe

$$Lim \int_0^{m\pi} dy \int_{(0)}^{(y)} \frac{\sin(2y-z)}{z} dz = 0,$$

$$Lim \int_0^{m\pi} dy \int_{(0)}^{(y)} \frac{\cos(2y-z)}{z} dz = -\frac{\pi}{2};$$

$$Lim \int_0^{\frac{2m+1}{2}\pi} dy \int_{(0)}^{(y)} \frac{\sin(2y-z)}{z} dz = C,$$

$$Lim \int_0^{\frac{2m+1}{2}\pi} dy \int_{(0)}^{(y)} \frac{\cos(2y-z)}{z} dz = 0.$$

Weniger Biegsamkeit als das eben behandelte Beispiel $f = e^{-z}$ besitzt die Function $f = e^{-z^2}$, wofür die erste der Formeln 17) die hauptsächlichsten Beziehungen liefert

$$\int_0^\infty \frac{b \sin 2bx - x \cos 2bx}{b^2+x^2} e^{-x^2} dx = \frac{e^{-b^2} li(e^{+b^2})}{2}$$

$$\int_0^\infty \frac{b\cos 2bx+x\sin 2bx}{b^2+x^2}\,e^{-x^2}dx=\frac{\pi}{2}\,e^{-b^2}$$

Es käme eben auf die Isolirung der Summanden unter dem Integralzeichen linker Hand auch hier an, welche aber blos in einem Falle und auch da nur indirect und unvollständig gelingt. Aus der bekannten Doppelgleichung

$$\frac{e^{+b^2}li\,(e^{-b^2})}{2}=-\int_0^\infty \frac{ze^{-z^2}}{b^2+z^2}\,dz=-\int_0^\infty \frac{z\cos bz+b\sin bz}{b^2+z^2}\,dz$$

geht die Integralformel hervor

$$-\int_0^\infty \frac{e^{+b^2}li\,(e^{-b^2})}{2}\,db=\frac{\pi}{2}\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{\pi\sqrt{\pi}}{4};$$

dagegen hat man

$$\int_0^\infty db\int_0^\infty \frac{b\sin 2bx+x\cos 2bx}{b^2+x^2}\,e^{-x^2}dx=\pi\int_0^\infty e^{-3x^2}dx=\frac{\pi}{2\sqrt{3}}\sqrt{\pi}$$

Es würde also daraus durch einen Rückschluss

$$\int_0^\infty \frac{b\sin 2bx+x\cos 2bx}{b^2+x^2}\,e^{-x^2}dx=-\frac{e^{+b^2}li\,(e^{-b^2})}{2}+\varphi(b),$$

$$\int_0^\infty \varphi(b)db=\pi\int_0^\infty (e^{-3x^2}-e^{-4x^2})dx$$

zu folgern und als wahrscheinlich

$$\varphi(b)=\frac{\pi}{2}\,(e^{-\frac{3}{4}b^2}-e^{-b^2})$$

anzunehmen sein. Die einzige brauchbare Formel, welche jetzt die übrigen Gleichungen 17) hiezu enthalten, und welche durch ihre Analogie mit einer später zu gewinnenden Beziehung von Interesse ist, lautet

$$e^{-b^2}\int_0^\infty\!\!\int_0^b \frac{(x^2-y^2)\sin 2xy-2xy\cos 2xy}{x^2+y^2}\,e^{-x^2+y^2}\,dx\,dy=$$

$$\frac{1}{8}\left\{e^{-b^2}li(e^{+b^2})+e^{+b^2}li(e^{-b^2})\right\}-\frac{\varphi(b)}{4}$$

Um auch ein Beispiel der Anwendung der vierten Wurzel aus -1, wenn auch nur des Interesses wegen, das sich an die Transformation der Functionen und Integrale in diesem Falle knüpft, zu geben, betrachten wir im Folgenden noch die Functionen

$$\frac{e^{-z^p}}{a\mp z},\quad \frac{e^{-z^p}}{a^2+z^2},\quad \frac{ze^{-z^p}}{a^2+z^2}$$

für $p=1$ und $p=2$. Zur Vereinfachung der Resultate ist es hier von Vortheil, in der ersten der Gleichungen 17) blos die Integrale

$$\int_0^a \frac{f(x)}{x}\,dx \quad \text{und} \quad i'\int_0^b \frac{f(i'y)}{y}\,dy$$

für $a=b=\infty$ beizubehalten und den übrigen Theil des Rhomboids durch einen Bogen zu ersetzen, welcher durch die Substitution

$$z=R(\cos\vartheta+i'\sin\vartheta),\ R=\infty$$

definirt ist, indem, wie leicht zu ersehen, die auf diesen Theil des Integrationsortes entfallende Integration (eine Integration nach ϑ zwischen o und $\frac{\pi}{2}$) den Werth o erhält. Da der Ausnahmepunkt hier auf einer Seitenlinie des Rhomboides liegt (Fall $\frac{e^{-z^p}}{a-z}$; die übrigen Functionen besitzen hier keinen Ausnahmepunkt), so hat das übrig bleibende Integral den Werth $i\pi e^{-a}$; wir bekommen somit $\left(p=1,\ f=\frac{e^{-z}}{a-z}\right)$

$$i'\int_0^\infty \frac{e^{-i'z}}{a-i'z}\,dz-\pi\, i\, e^{-a}=\int_0^{a-0}\frac{e^{-z}}{a-z}\,dz+\int_{a+0}^\infty \frac{e^{-z}}{a-z}\,dz,$$

sodann aus $f=\frac{e^{-z}}{a+z}$

$$i'\int_0^\infty \frac{e^{-i'z}}{a+i'z}\,dz=\int_0^\infty \frac{e^{-z}}{a+z}\,dz.$$

Es ist hier nicht erlaubt, nach dem Schema

$$p+iq+i'_1r+ii'_1s=0$$

die einzelnen Glieder p, q, r und s jeder dieser Gleichungen für sich gleich 0 zu setzen, sondern die gewünschten Resultate gehen hier erst aus der Verbindung der beiden Formeln hervor und lauten mit der Modification $b=\frac{a}{\sqrt{2}}$

$$\int_0^\infty \frac{b^2z\sin z-z^3\cos z}{b^4+z^4}\,e^{-z}dz= \tag{26 a)}$$

$$\frac{1}{2}\left\{e^{+b\sqrt{2}}\,li\left(e^{-b\sqrt{2}}\right)+e^{-b\sqrt{2}}\,li\left(e^{+b\sqrt{2}}\right)\right\},$$

$$\int_0^\infty \frac{b^2z\cos z+z^3\sin z}{b^4+z^4}\,e^{-z}dz=\frac{\pi}{2}e^{-b\sqrt{2}},$$

$$\int_0^\infty \frac{b^2\cos z+z^2\sin z}{b^4+z^4}\,e^{-z}dz=$$

$$\frac{\pi}{2b\sqrt{2}}e^{-b\sqrt{2}}+\frac{1}{2b\sqrt{2}}\left\{e^{-b\sqrt{2}}\,li\left(e^{+b\sqrt{2}}\right)-e^{+b\sqrt{2}}\,li\left(e^{-b\sqrt{2}}\right)\right\},$$

$$\int_0^\infty \frac{z^2\cos z-b^2\sin z}{b^4+z^4}\,e^{-z}dz=$$

$$\frac{\pi}{2b\sqrt{2}}e^{-b\sqrt{2}}-\frac{1}{2b\sqrt{2}}\left\{e^{-b\sqrt{2}}\,li\left(e^{+b\sqrt{2}}\right)-e^{+b\sqrt{2}}\,li\left(e^{-b\sqrt{2}}\right)\right\}.$$

Hiezu correlative Integralformeln ergeben sich aus der Anwendung der Functionen

$$\frac{e^{-z}}{a^2+z^2} \text{ und } \frac{ze^{-z}}{a^2+z^2} \text{ statt } \frac{e^{-z}}{a\mp z};$$

aus den Grundgleichungen

$$i'\int_0^\infty \frac{e^{-i'z}}{a^2+iz^2}\,dz = \int_0^\infty \frac{e^{-z}}{a^2+z^2}\,dz,$$

$$i\int_0^\infty \frac{ze^{-i'z}}{a^2+iz^2}\,dz = \int_0^\infty \frac{ze^{-z}}{a^2+z^2}\,dz$$

gewinnt man ohne Mühe

$$\int_0^\infty \frac{b^2\cos z - z^2\sin z}{b^4+z^4}\,e^{-z}dz = \int_0^\infty \frac{z^2\cos z + b^2\sin z}{b^4+z^4}\,e^{-z}dz = \qquad 26\text{ b)}$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-z}}{2b^2+z^2}\,dz,$$

$$\int_0^\infty \frac{b^2 z\sin z + z^3\cos z}{b^4+z^4}\,e^{-z}dz = \int_0^\infty \frac{ze^{-z}}{2b^2+z^2}\,dz,$$

$$\int_0^\infty \frac{b^2 z\cos z - z^3\sin z}{b^4+z^4}\,e^{-z}dz = 0.$$

Die Integrale

$$\int_0^\infty \frac{e^{-z}}{2b^2+z^2}\,dz \text{ und } \int_0^\infty \frac{ze^{-z}}{2b^2+z^2}\,dz$$

können hier den bekannten weiteren Reductionen (Formeln 20) unterworfen werden.

Bei der völlig gleichen Behandlung der Functionen

$$\frac{e^{-z^2}}{a-z}, \quad \frac{e^{-z^2}}{a+z}, \quad \frac{e^{-z^2}}{a^2+z^2}, \quad \frac{ze^{-z^2}}{a^2+z^2}$$

genügt es, die schliesslichen Bestimmungen der Werthe (resp. Hauptwerthe) anzugeben, die sich hier aus der wechselseitigen Verbindung der entsprechenden Grundformeln und mit Benützung der beiden leicht beweisbaren Beziehungen

$$\int_0^\infty \frac{ze^{-z^2}}{a^2+z^2}\cdot dz = -\frac{e^{+a^2}li(e^{-a^2})}{2},$$

$$\int_0^\infty \frac{ze^{-z^2}}{a^2-z^2}\, dz = +\frac{e^{-a^2}li(e^{+a^2})}{2}$$

ableiten lassen, speciell ausser den bekannten Formeln für

$$\int_0^\infty \frac{\sin z}{a^2+z^2}\, dz, \int_0^\infty \frac{z\sin z}{a^2+z^2}\, dz, \int_0^\infty \frac{\cos z}{a^2+z^2}\, dz, \int_0^\infty \frac{z\cos z}{a^2+z^2}\, dz$$

die folgenden Reductionen

$$\int_0^\infty \frac{\cos(z^2)}{a^4+z^4}\, dz = \frac{\pi}{4\sqrt{2}a^3}e^{-a^2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^\infty \frac{e^{-x^2}}{a^4-x^4}\, dx,$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin(z^2)}{a^4+z^4}\, dz = -\frac{\pi}{4\sqrt{2}a^3}e^{-a^2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^\infty \frac{e^{-x^2}}{a^4-x^4}\, dx;$$

$$\int_0^\infty \frac{z^2\cos(z^2)}{a^4+z^4}\, dz = \frac{\pi}{4\sqrt{2}a}e^{-a^2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^\infty \frac{x^2e^{-x^2}}{a^4-x^4}dx,$$

$$\int_0^\infty \frac{z^2\sin(z^2)}{a^4+z^4}\, dz = \frac{\pi}{4\sqrt{2}a}e^{-a^2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^\infty \frac{x^2e^{-x^2}}{a^4-x^4}dx.$$

Man erkennt leicht, wie sich diese Ergebnisse bei Anwendung der 8. Wurzel aus —1, der 16. Wurzel aus —1, etc. in beliebigem Grade vermehren lassen; die beiden letzten Formeln 17) jedoch würden der allzu grossen Complication wegen zur Werthbestimmung der Doppelintegrale auf diesem Wege blosser Transformation zu keinem brauchbaren Resultate führen.

Schon die einfach scheinende Gleichung, die man z. B. aus der letzten der Formeln 17) unter der obigen Modification des Integrationsweges als Ergänzung zu den Gleichungen 25) erhält, nämlich

$$i_k\int_0^\infty\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-(r\cos\vartheta+i_k r\sin\vartheta)}}{a-(r\cos\vartheta-i_k r\sin\vartheta)}\,r\,dr\,d\vartheta = i_k\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{e^{-(x+i_k y)}}{a-(x-i_k y)}\,dx\,dy =$$

$$-\frac{\pi}{2}ie^{-a}+a\int_0^\infty\frac{e^{-z}}{a^2-z^2}\,dz,\quad i_k=\cos\tau+i\sin\tau$$

sowie andere ihr ähnliche sind höchstens für $i_k=i$ zu verwenden; man erhält so z. B.

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{(a-x)\cos y-y\sin y}{(a-x)^2+y^2}\,e^{-x}\,dx\,dy=$$

$$-\int_{-a}^\infty\int_0^\infty e^{-a}.\frac{t\cos y+y\sin y}{t^2+y^2}\,e^{-t}\,dt\,dy=-\frac{\pi}{2}e^{-a}$$

was unmittelbar evident ist, ausserdem aber

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{y\cos y+(a-x)\sin y}{(a-x)^2+y^2}\,e^{-x}\,dx\,dy=$$

$$e^{-a}\int_{-a}^\infty\int_0^\infty\frac{y\cos y-t\sin y}{t^2+y^2}\,e^{-t}\,dt\,dy=a\int_0^\infty\frac{e^{-z}}{a^2-z^2}\,dz \qquad 27)$$

$$=\tfrac{1}{2}\{e^{-a}li(e^{+a})-e^{+a}li(e^{-a})\}=e^{-a}\int_0^a\int_0^\infty\frac{y\cos y+t\sin y}{t^2+y^2}e^t\,dt\,dy;$$

indessen haben alle diese Integralformeln nur mehr ein secundäres Interesse.

Die letzte Integralformel ist übrigens der folgenden, wie bereits bemerkt, analog:

$$e^{-b^2}\int_0^\infty\int_0^b\frac{(x^2-y^2)\sin 2xy-2xy\cos 2xy}{x^2+y^2}e^{-x^2+y^2}\,dx\,dy=$$

$$e^{-b^2}\int_0^\infty\int_0^b\left\{x\frac{x\sin 2xy-y\cos 2xy}{x^2+y^2}-y\frac{y\sin 2xy+x\cos 2xy}{x^2+y^2}\right\}\times$$

$$e^{-x^2+y^2}\,dx\,dy=$$

$$\frac{1}{8}\{e^{-b^2}li(e^{+b^2})+e^{+b^2}li(e^{-b^2})\}-\frac{\varphi(b)}{4},$$

$$\int_0^\infty\varphi(b)db=\pi\int_0^\infty(e^{-3x^2}-e^{-4x^2})\,dx.$$

Beachtet man die Beziehungen

$$\int_0^\infty\frac{e^{+b^2}li(e^{-b^2})}{2}db=-\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{ze^{-z^2}}{b^2+z^2}\,dz\,db=$$

$$-\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{z\cos bz+b\sin bz}{b^2+z^2}\,dz\,db=-\frac{\pi\sqrt{\pi}}{4},$$

$$\int_0^\infty\frac{e^{-b^2}li(e^{+b^2})}{2}db=\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{1}{2}\,\frac{x\cos bx-b\sin bx}{b^2+x^2}\,dx\,db=$$

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{b\sin 2bx-x\cos 2bx}{b^2+x^2}e^{-x^2}\,dx\,db=0,$$

so erhält man

$$4\int_0^\infty\int_0^b\int_0^\infty \frac{(x^2-y^2)\sin 2xy-2xy\cos 2xy}{x^2+y^2}\,e^{-x^2+y^2-b^2}\,dx\,dy\,db=-\frac{\pi\sqrt{\pi}}{2\sqrt{3}}.$$

Alle diese Integrationen sind erlaubt, da sämmtliche discontinuirliche Integrale dem Sinne der Theorie gemäss durch ihre Hauptwerthe zu ersetzen sind; sie finden dann z. B. auch durch die folgende Congruenz eine weitere Bekräftigung:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-b^2}li(e^{+b^2})}{2}\,db=\int_0^\infty \left\{C+2lb+\frac{b^2}{1.1!}+\frac{b^4}{2.2!}+\frac{b^6}{3.3!}+\ldots\right\}\frac{e^{-b^2}}{2}\,db$$

$$=\int_0^\infty db\int_0^\infty \frac{ze^{-z^2}}{b^2-z^2}\,dz=0.$$

Während der den letzten Ausführungen zu Grunde gelegte Integrationsweg eines Kreisquadranten mit unendlich grossem Radius zur Werthbestimmung von Doppelintegralen nach den Gleichungen 17) wenig verwendbar ist, bietet sich für diese Lücke insofern wieder ein Ersatz, dass die meisten der auf die bezeichnete Weise ermittelten, im Vorhergehenden enthaltenen einfachen Integralformeln nach der in denselbsn vorkommenden Constante noch einmal integrirt werden können. Es wird dies zum Theil ermöglicht durch die folgende, leicht beweisbare Relation

$$\int_0^\infty \{e^{-x}li(e^{+x})+e^{+x}li(e^{-x})\}\,dx=0\,, \qquad 28)$$

zu deren Kenntniss man sehr leicht durch die Benützung der Definitionen

$$\int_0^\infty e^{-x}li(e^{+x})dx=$$

$$\int_0^\infty \left\{C+lx+\frac{1}{1}\cdot\frac{x}{1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{1.2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{1.2.3}+\ldots\right\}e^{-x}dx,$$

$$-\int_0^\infty e^{+x} li(e^{-x})dx = \int_0^\infty dx \int_0^\infty \frac{e^{-z}}{x+z}\,dz = \int_0^\infty dx \int_x^\infty \frac{e^{x-t}}{t}\,dt$$

gelangt. Die Integralformeln 26 *a*) liefern jetzt die Doppelintegrale

$$\int_0^\infty db \int_0^\infty \frac{b^2 z \sin z - z^3 \cos z}{b^4+z^4} e^{-z} dz = 0\,,$$

$$\int_0^\infty db \int_0^\infty \frac{b^2 z \cos z + z^3 \sin z}{b^4+z^4} e^{-z} dz = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\,,$$

$$\int_0^\infty db \int_0^\infty \frac{b^3 z \cos z + z^3 b \sin z}{b^4+z^4} e^{-z} dz = \frac{\pi}{4}\,,$$

$$\int_0^\infty db \int_{(0)}^{(\infty)} \left\{ \frac{b^2 \cos z + z^2 \sin z}{b^4+z^4} + \frac{z^2 \cos z - b^2 \sin z}{b^4+z^4} \right\} e^{-z}\,dz$$

$$= -\frac{\pi}{\sqrt{2}}\left(C + \frac{1}{2}\,l2\right) = -\frac{\pi}{\sqrt{2}} \quad 0{\cdot}9237892\,.$$

$$\int_0^\infty db \int_0^\infty \left\{ \frac{b^3 \cos z + z^2 b \sin z}{b^4+z^4} + \frac{z^2 b \cos z - b^3 \sin z}{{}^4b+z^4} \right\} e^{-z} dz = \frac{\pi}{2}\,,$$

zu denen die folgenden aus den Gleichungen 26) *b*) zu gewinnenden treten

$$\int_0^\infty \int_{(0)}^{(\infty)} \frac{b^2 \cos z - z^2 \sin z}{b^4+z^4} e^{-z} dz\,db =$$

$$\int_0^\infty \int_{(0)}^{(\infty)} \frac{z^2 \cos z + b^2 \sin z}{b^4+z^4} e^{-z} dz\,db = -\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\left(C + \frac{1}{2}\,l2\right)$$

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{b^2 z \sin z + z^3 \cos z}{b^4+z^4} e^{-z} dz\, db = \frac{\pi}{2\sqrt{2}},$$

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{b^2 z \cos z - z^3 \sin z}{b^4+z^4} e^{-z} dz\, db = 0\,,$$

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \left\{\frac{b^3 \cos z - z^2 b \sin z}{b^4+z^4} e^{-z} dz\, db - \right.$$

$$\left. \frac{b^3 z \sin z + z^3 b \cos z}{b^4+z^4} e^{-z} dz\, db \right\} = \frac{1}{2},$$

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \left\{\frac{z^2 b \cos z + b^3 \sin z}{b^4+z^4} e^{-z} dz\, db - \right.$$

$$\left. \frac{b^3 z \sin z + z^3 b \cos z}{b^4+z^4} e^{-z} dz\, db \right\} = \frac{1}{2}.$$

Durch umgekehrte Integration erhält man nun wieder rückwärts schliessend die Formeln (siehe Anhang 3 und 5).

$$\int_0^\infty lz\, e^{-z} \cos z dz = \frac{1}{2}\left(-C - \frac{1}{2} l2\right) - \frac{\pi}{8}$$

$$\int_0^\infty lz\, e^{-z} \sin z dz = \frac{1}{2}\left(-C - \frac{1}{2} l2\right) + \frac{\pi}{8},$$

$$\int_0^\infty z lz\, e^{-z} \sin z dz = \frac{1}{2}\left(1 - C - \frac{1}{2} l2\right),$$

$$\int_0^\infty z lz\, e^{-z} \cos z dz = \frac{\pi}{8}, \quad \int_0^\infty \frac{\sin z\, e^{-z}}{z} dz = \frac{\pi}{4},$$

sowie den Hauptwerth

$$\frac{1}{2}\,l2+\int_{(0)}^{(\infty)}\frac{\cos z\, e^{-z}}{z}\,dz=-C=\int_{(0)}^{(\infty)}\frac{e^{-z}}{z}\,dz=\int_{(0)}^{(\infty)}\frac{\cos z}{z}\,dz.$$

Anhang.

1.

Nach dem Satze, welcher in einer Gleichung die Sonderung des reellen und imaginären Theiles gestattet, ergibt sich aus

$$a+ib+i_1'c+ii_1'd=0\,,\ \ i_1'=\frac{1+i}{\sqrt{2}} \tag{1}$$

zunächst zur Bestimmung der vier Grössen a, b, c und d nur die Doppelgleichung

$$a+\frac{c-d}{\sqrt{2}}=0\,,\ \ b+\frac{c+d}{\sqrt{2}}=0. \tag{2}$$

Dagegen lassen sich z. B. jene Ausdrücke bereits isoliren, wenn vorkommenden Falles in der Gleichung 1) auch die Einführung von $i_2'=\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ statthaft ist, denn dann ist nach demselben Satze wie früher auch

$$a+\frac{c+d}{\sqrt{2}}=0\,,\ \ b-\frac{c-d}{\sqrt{2}}=0 \tag{3}$$

und aus der Verbindung der Gleichungen 2) und 3) erhält man jetzt die Werthe der einzelnen reellen Ausdrücke a, b, c, d; man erfährt, dass die Gleichung 1) neben 2) nur durch den gemeinschaftlichen Nullwerth dieser Ausdrücke befriedigt werden kann.

Es entsteht hieraus von selbst die Frage nach der Summe der eventuellen Fälle, in welchen die Annahme

$$a = b = c = d = 0 \tag{4}$$

geboten ist. Das Natürlichste ist, von den Gleichungen 2) und 3) auszugehen und die Ergänzungen derselben aufzusuchen; man bemerkt bald, dass die verschiedenen Wege zur Annahme 4) zu gelangen, sich zur vierfachen Gleichung vereinigen lassen

$$a + \frac{c+d}{\sqrt{2}} = a + \frac{c-d}{\sqrt{2}} = a - \frac{c+d}{\sqrt{2}} = a - \frac{c-d}{\sqrt{2}} = 0 \tag{5}$$

womit der Reihe nach die Gleichungen

$$b - \frac{c-d}{\sqrt{2}} = b + \frac{c+d}{\sqrt{2}} = b + \frac{c-d}{\sqrt{2}} = b - \frac{c+d}{\sqrt{2}} = 0 \tag{6}$$

coincidiren. Um von diesem System den Rückschluss auf die zugehörigen Formeln nach dem Schema 1) zu bewerkstelligen, hat man jetzt nur jeden einzelnen Theil der Gleichung 6) mit i zu multipliciren und mit dem unmittelbar oberhalb desselben befindlichen Theil der Gleichung 5) durch Subtraction oder Addition zu verbinden; es liefert dies zufolge den Definitionen von i'_1 und i'_2 folgende sechs Bedingungen, deren jede zu der Annahme 4) führt:

$$a+ib+i'_1c+ii'_1d = a-ib+i'_1c-ii'_1d =$$
$$a-ib-i'_1c+ii'_1d = a+ib-i'_1c-ii'_1d = 0,$$

$$a-ib+i'_1c-ii'_1d =$$
$$a-ib-i'_1c+ii'_1d = a+ib-i'_1c-ii'_1d = 0,$$
$$a-ib-i'_1c+ii'_1d = a+ib-i'_1c-ii'_1d = 0;$$

$$a-ib+i'_2c-ii'_2d = a+ib+i'_2c+ii'_2d =$$
$$a+ib-i'_2c-ii'_2d = a-ib-i'_2c+ii'_2d = 0,$$

$$a+ib+i'_2c+ii'_2d =$$
$$a+ib-i'_2c-ii'_2d = a-ib-i'_2c+ii'_2d = 0,$$
$$a+ib-i'_2c-ii'_2d = a-ib-i'_2c+ii'_2d = 0.$$

2.

Um in dem Schema

$$F(x+iy+i'z+ii't)=f(x, y, z, t)+if_1+i'f_2+ii'f_3, \qquad 0)$$

das der Gleichung

$$F(x+iy)=\Phi(x, y)+i\Psi(x, y) \qquad 1)$$

nachgebildet ist, die Functionen f, f_1, f_2, f_3 zu bestimmen, hat man zunächst gemäss 1)

$$F(x+iy+i'_1z+ii'_1t)=F\left\{\left(x+\frac{z-t}{\sqrt{2}}\right)+i\left(y+\frac{z+t}{\sqrt{2}}\right)\right\} \qquad 2)$$

$$=\Phi(a, c)+i\Psi(a, c),$$

$$F(x+iy+i'_2z+ii'_2t)=F\left\{\left(x+\frac{z+t}{\sqrt{2}}\right)+i\left(y-\frac{z-t}{\sqrt{2}}\right)\right\}$$

$$=\Phi(b, d)+i\Psi(b, d),$$

wobei

$$a=x+\frac{z-t}{\sqrt{2}}, \quad b=x+\frac{z+t}{\sqrt{2}};$$

$$c=y+\frac{z+t}{\sqrt{2}}, \quad d=y-\frac{z-t}{\sqrt{2}}$$

zur Abkürzung gesetzt ist. Den zwei demgemäss zur Ermittlung von f, f_1, f_2, f_3 vorliegenden Gleichungen müssen zwei andere willkürlich zu wählende zur Seite gestellt werden. Der einfachste Gedanke nun ist hier derjenige, bezüglich der Formel 0) auch die negativen vierten Wurzeln aus -1 oder

$$-i'_1=-\frac{1+i}{\sqrt{2}}, \quad -i'_2=-\frac{1-i}{\sqrt{2}}$$

als statthaft anzusehen; d. h.

$$F(x+iy-i'z-ii't)=f(x, y, z, t)+if_1-i'f_2-ii'f_3$$

anzunehmen. In den Ausdrücken Φ und Ψ gehen dadurch die Argumente a, b, c und d in

$$a' = x - \frac{z-t}{\sqrt{2}}, \quad b' = x - \frac{z+t}{\sqrt{2}};$$

$$c' = y - \frac{z+t}{\sqrt{2}}, \quad d' = y + \frac{z-t}{\sqrt{2}}$$

über und aus der additiven und subtractiven Verbindung der jetzigen modificirten mit den Gleichungen 2) resultiren die Definitionen von f, f_1 etc., je nachdem

$$i' = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \quad \text{oder} \quad i' = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$$

ist, nach folgenden Formeln

a) $i' = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$

$$2f = \Phi(a, c) + \Phi(a', c'),$$

$$2f_1 = \Psi(a, c) + \Psi(a', c');$$

$$2\sqrt{2}f_2 = \Phi(a, c) - \Phi(a', c') + \Psi(a, c) - \Psi(a', c'),$$

$$2\sqrt{2}f_3 = -\Phi(a, c) + \Phi(a', c') + \Psi(a, c) - \Psi(a', c');$$

b) $i' = \dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$

$$2f = \Phi(b, d) + \Phi(b', d'),$$

$$2f_1 = \Psi(b, d) + \Psi(b', d');$$

$$2\sqrt{2}f_2 = \Phi(b, d) - \Phi(b', d') - \Psi(b, d) + \Psi(b', d'),$$

$$2\sqrt{2}f_3 = \Phi(b, d) - \Phi(b', d') + \Psi(b, d) - \Psi(b', d').$$

Wie eine Vergleichung der Ausdrücke b und d mit a und c, resp. b' und d' mit a' und c' zeigt, gehen die Formeln b) aus den Formeln a) einfach durch Substitution von t für z, $-z$ für t und entsprechend ii_2' für i_1', $-i_2'$ für ii_1' hervor. Nachstehend die Berechnungen der Gleichung 0) für die zumeist verwendeten Functionen $\frac{1}{z}$, e^z und lz.

A.

$$\frac{1}{x+iy+i_1'z+ii_1't}=$$

$$\frac{x(x^2+y^2)-y(z^2-t^2)+2xzt}{(x^2+y^2)^2+(z^2+t^2)^2-4xy(z^2-t^2)+4zt(x^2-y^2)}$$

$$+i\,\frac{x(z^2-t^2)-y(x^2+y^2)+2yzt}{(x^2+y^2)^2+(z^2+t^2)^2-4xy(z^2-t^2)+4zt(x^2-y^2)}$$

$$+i_1'\,\frac{-z(x^2-y^2)-t(z^2+t^2)-2xyt}{(x^2+y^2)^2+(z^2+t^2)^2-4xy(z^2-t^2)+4zt(x^2-y^2)}$$

$$+ii_1'\,\frac{-t(x^2-y^2)-z(z^2+t^2)+2xyz}{(x^2+y^2)^2+(z^2+t^2)^2-4xy(z^2-t^2)+4zt(x^2-y^2)}$$

B.

$$2e^{x+iy+i_1'z+ii_1't}=$$

$$e^{x+\frac{z-t}{\sqrt{2}}}\cos\left(y+\frac{z+t}{\sqrt{2}}\right)+e^{x-\frac{z-t}{\sqrt{2}}}\cos\left(y-\frac{z+t}{\sqrt{2}}\right)$$

$$+i\left\{e^{x+\frac{z-t}{\sqrt{2}}}\sin\left(y+\frac{z+t}{\sqrt{2}}\right)+e^{x-\frac{z-t}{\sqrt{2}}}\sin\left(y-\frac{z+t}{\sqrt{2}}\right)\right\}$$

$$+i_1'\left\{e^{x+\frac{z-t}{\sqrt{2}}}\cos\left(y+\frac{z+t}{\sqrt{2}}-\frac{\pi}{4}\right)-e^{x-\frac{z-t}{\sqrt{2}}}\cos\left(y-\frac{z+t}{\sqrt{2}}-\frac{\pi}{4}\right)\right\}$$

$$+ii_1'\left\{e^{x+\frac{z-t}{\sqrt{2}}}\sin\left(y+\frac{z+t}{\sqrt{2}}-\frac{\pi}{4}\right)-e^{x-\frac{z-t}{\sqrt{2}}}\sin\left(y-\frac{z+t}{\sqrt{2}}-\frac{\pi}{4}\right)\right\}.$$

C.

$$2l(x+iy+i_1'z+ii_1t)=$$

$$\frac{1}{2}\,l\,\{(x^2+y^2)^2+(z^2+t^2)^2-4xy(z^2-t^2)+4zt(x^2-y^2)\}$$

$$+i\left\{arc\tan\frac{2xy-z^2+t^2}{2zt+x^2-y^2}+p\pi\right\}$$

$$+\frac{i_1'}{\sqrt{2}}\left[l\,\frac{x^2+z^2+y^2+t^2+\sqrt{2}\,x(z-t)+\sqrt{2}\,y(z+t)}{x^2+z^2+y^2+t^2-\sqrt{2}\,x(z-t)-\sqrt{2}\,y(z+t)}\right.$$

$$\left.+arc\tan\sqrt{2}\,\frac{x(z+t)-y(z-t)}{(x^2+y^2)-(z^2+t^2)}+q\pi\right]$$

$$+\frac{ii_1'}{\sqrt{2}}\left[l\,\frac{x^2+z^2+y^2+t^2-\sqrt{2}\,x(z-t)-\sqrt{2}\,y(z+t)}{x^2+z^2+y^2+t^2+\sqrt{2}\,x(z-t)+\sqrt{2}\,y(z+t)}\right.$$

$$\left.+arc\tan\sqrt{2}\,\frac{x(z+t)-y(z-t)}{(x^2+y^2)-(z^2+t^2)}+q\pi\right],$$

a) $2zt+x^2>y^2$

1) $$\left.\begin{matrix}\sqrt{2}\,x+z>t, & \sqrt{2}\,x+t>z\\ \sqrt{2}\,x+z<t, & \sqrt{2}\,x+t<z\end{matrix}\right\}p=\begin{matrix}\pm 4k\\ \pm(4k+2)\end{matrix}\quad\Big\}q=0,$$

2) $$\left.\begin{matrix}\sqrt{2}\,x+z>t, & \sqrt{2}\,x+t<z\\ \sqrt{2}\,x+z<t, & \sqrt{2}\,x+t>z\end{matrix}\right\}p=\pm(4k+1)\quad\Big\}q=\begin{matrix}\mp 1\\ \pm 1\end{matrix};$$

b) $2zt+x^2<y^2$

1) $$\left.\begin{matrix}\sqrt{2}\,x+z>t, & \sqrt{2}\,x+t>z\\ \sqrt{2}\,x+z<t, & \sqrt{2}\,x+t<z\end{matrix}\right\}p=\begin{matrix}1\pm 4k\\ 1\pm(4k+2)\end{matrix}\quad\Big\}q=0,$$

2) $$\left.\begin{matrix}\sqrt{2}\,x+z>t, & \sqrt{2}\,x+t<z\\ \sqrt{2}\,x+z<t, & \sqrt{2}\,x+t>z\end{matrix}\right\}p=1\pm(4k+1)\quad\Big\}q=\begin{matrix}\mp 1\\ \pm 1\end{matrix}.$$

3.

Die Untersuchungen über Integrale asynektischer Functionen werden zurückgeführt auf die Betrachtung eines einzigen Integrationsortes, der durch die Gleichung bestimmt ist

$$f = Lim\,\{r(\cos\vartheta + \sin\vartheta)\},\quad Lim\, r = 0;$$

die allgemeine Formel der Integration lautet dann

$$\int_{(0_n)} F(z)dz = 2i\pi(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots \lambda_n),$$

wo der Grenzwerth $\lambda_p = Lim\,[\delta F(\zeta_p + \delta)]$ für $Lim\,\delta = 0$ von ϑ unabhängig ist, der Index (o_n) aber einen Integrationsweg mit n Ausnahmepunkten $\zeta_1,\ \zeta_2 \ldots \zeta_n$ andeutet. Man kann sich nun die Aufgabe stellen, Orte wie $f = Lim\,\{r(\cos\vartheta + i'\sin\vartheta)\}$, $f = Lim\,\{r(\cos\vartheta + i''\sin\vartheta)\}$ etc. für $Lim\, r = 0$ zu untersuchen; die analoge Integrationsformel, welche hiebei meistentheils anwendbar ist, lautet sofort

$$\int_{(0\,n)} F(z)dz = (\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n)\int_0^{2\pi} \frac{-\sin\vartheta + i'\cos\vartheta}{\cos\vartheta + i'\sin\vartheta}\,d\vartheta; \qquad \dagger)$$

und zwar ist hierin

$$\lambda_p = Lim\,\{r(\cos\vartheta + i'\sin\vartheta)\,F(\zeta_p + r(\cos\vartheta + i'\sin\vartheta)\}$$

und von ϑ unabhängig — statt i' ist im gegebenen Falle i'' etc. einzuführen. Hier möge von der Beschaffenheit des Integrationsweges linker Hand in $\dagger$) abstrahirt und nur der Auswerthung des rechts stehenden Inregrales und zwar des allgemeineren Integrales

$$\int_0^{\frac{k\pi}{2}} \frac{-\sin\vartheta + (\cos\tau \pm i\sin\tau)\cos\vartheta}{\cos\vartheta + (\cos\tau \pm i\sin\tau)\sin\vartheta}\,d\vartheta$$

unter k eine positive ganze Zahl verstanden, mit einigen Worten gedacht werden.

Zertheilt man auf die gewöhnliche Art die complexe Function unter dem Integralzeichen in einen reellen und imaginären Theil, so erhält unser Integral I die Gestalt

$$I=\int_0^{\frac{k\pi}{2}} \frac{(\cos^2\vartheta-\sin^2\vartheta)\cos\tau}{\cos^2\vartheta+2\cos\tau\sin\vartheta\cos\vartheta+\sin^2\vartheta}\,d\vartheta$$

$$\pm i\int_0^{\frac{k\pi}{2}} \frac{(\cos^2\vartheta+\sin^2\vartheta)\sin\tau}{\cos^2\vartheta+2\cos\tau\sin\vartheta\cos\vartheta+\sin^2\vartheta}\,d\vartheta$$

Der reelle Theil desselben oder

$$\int_0^{\frac{k\pi}{2}} \frac{\cos 2\vartheta\sin\tau}{1+\cos\tau\sin 2\vartheta}\,d\vartheta$$

gibt integrirt den Logarithmus des Ausdruckes $1+\cos\tau\sin 2\vartheta$ und reducirt sich zwischen den Grenzen o und $\frac{k\pi}{2}$ genommen auf 0; der imaginäre Theil lässt sich in der Form schreiben

$$\pm i\int_0^{\frac{k\pi}{2}} \frac{(1+tan^2\vartheta)\sin\tau}{1+2\cos\tau\, tan\,\vartheta+tan^2\vartheta}\,d\vartheta;$$

es führt demnach hier die Substitution $tan\,\vartheta=z$ zum Ziele, wobei jedoch zu unterscheiden, ob k gerade oder ungerade. Bei gerader k findet auf die unbestimmte Integralformel

$$\pm i\int_0^{\frac{k\pi}{2}} \frac{(1+tan^2\vartheta)\sin\tau}{1+2\cos\tau\, tan\,\vartheta+tan^2\vartheta}\,d\vartheta=$$

$$\pm i\left|{}_0^{\frac{k\pi}{2}}\right. arc\,tan\left(\frac{2\,tan\,\vartheta+\cos\tau}{\sin\tau}\right)$$

der Satz Anwendung, wonach

$$\Big|_0^{p\pi} arc\,tan\,(a+b\,tan\,\vartheta) = p\pi$$

bei ganzen p so zu nehmen ist; im Falle ungerader k und zwar speciell für $\frac{k\pi}{2} = p\pi + \frac{\pi}{2}$ ist

$$\pm i \Big|_0^{\frac{k\pi}{2}} arc\,tan(a+b\,tan\,\vartheta) = \pm i \Big\{ \Big|_0^{p\pi} arc\,tan\,(a+b\,tan\,\vartheta) +$$

$$\Big|_{p\pi}^{p\pi+\frac{\pi}{2}} arc\,tan\,(a+b\,tan\,\vartheta)\Big\}$$

$$= \pm i \left\{p\pi + \frac{\pi}{2} - arc\,tan\,a\right\}$$

$$= \pm i \,\{p\pi + arc\,cot\,a\}.$$

Für unser Integral I ergibt sich aus dem bisherigen bei positiver oder negativer Amplitude τ $I = \pm p\pi i$, zwischen o und $p\pi$ genommen, dagegen $I = \pm(p\pi+\tau)i$, wenn der auf $p\pi$ folgende Quadrant mit in die Integration einbezogen wird.

Es ist hier der Ort, dieselbe Frage wenigstens bezüglich der Amplituden $\frac{\pi}{1}$, $\frac{\pi}{8}$, $\frac{\pi}{16}$, etc. inductiv zu lösen, einestheils des Interesses halber, das sich an den Integrationsort $f = tan\,\vartheta$ knüpft, sodann um mit dem gewonnenen Parallelschlusse einige allgemeinere Bemerkungen zu verbinden.

Indem wir jene Amplituden der Einfachheit wegen als positiv voraussetzen, verwandeln wir vor allem das Differential unter dem Integralzeichen oder den Ausdruck

$$\frac{i^{(n)} - tan\,\vartheta}{1 + i^{(n)}\,tan\,\vartheta}\,d\vartheta$$

in eine nach Potenzen von $i^{(n)} = (-1)^{\frac{1}{2^{n+1}}}$ fortschreitende Summe von Gliedern. Für $n = 1$ liefert hiezu die Formel A) der vorigen Nummer

$$\int_0^{p\pi} \frac{i' tan\,\vartheta}{1+i' tan\,\vartheta}\, d\vartheta =$$

$$\int_0^{p\pi} \frac{tan^3\vartheta - tan\,\vartheta - (1+tan^2\vartheta)\{i\,tan\,\vartheta - i' - ii' tan^2\vartheta\}}{1+tan^4\vartheta}\, d\vartheta,$$

$$\int_0^{p\pi} \frac{i'' - tan\,\vartheta}{1+i'' tan\,\vartheta}\, d\vartheta = \int_0^{p\pi} \frac{tan^7\vartheta - tan\,\vartheta}{1+tan^8\vartheta}\, d\vartheta +$$

$$\int_0^{p\pi} \frac{-i\,tan^3\vartheta - i' tan^3\vartheta - ii' tan^5\vartheta}{1+tan^8\vartheta}(1+tan^2\vartheta)\, d\vartheta$$

$$\frac{+i'' + ii'' tan^4\vartheta + i'i'' tan^2\vartheta + ii'i'' tan^6\vartheta}{1+tan^8\vartheta}(1+tan^2\vartheta)\, d\vartheta.$$

Eine ähnliche Sonderung in ein erstes reelles Glied

$$\left(\frac{tan^{2^n-1}\vartheta - tan\vartheta}{1+tan^{2^n}\vartheta}\right)$$

und in ein zweites, welches die übrigen (negativ ungeraden und positiv geraden) Potenzen von $tan\,\vartheta$ im Zähler enthält und mit $1+tan^2\vartheta$ multiplicirt ist, findet in allen nachfolgenden Fällen statt; das constante Auftreten des Factors $1+tan^2\vartheta$ in allen diesen letzteren Gliedern ermöglicht nun aber eine bedeutende Vereinfachung. Schreibt man nämlich für $tan\,\vartheta$ einfach z, so läuft die ganze Untersuchung bezüglich des überwiegenden Theiles der Integration hinaus auf die Ermittlung des Integralwerthes der asynektischen Function

$$\frac{z^r}{1+z^{2^n}},$$

allgemeiner gefasst

$$\frac{z^r}{1+z^{2q}}$$

für den eigenthümlichen Integrationsort $z = tan\,\vartheta$.

Die Auswerthung des ersten Gliedes

$$\int_0^{p\pi} \frac{tan^{2n-1}\vartheta - tan\,\vartheta}{1+tan^{2n}\vartheta}\,d\vartheta$$

könnte auf ähnlichem Wege geschehen und würde auf die Function

$$\frac{z^r}{(1+z^{2q})(1+z^2)}$$

führen, welche noch die Ausnahmepunkte $z=\pm i$ mehr besitzt, fällt aber dabei, wie sich bald zeigt, ganz hinweg.

Die Einführung des Integrationsortes $z=tan\,\vartheta$ in die Rechnung bietet vorerst die Schwierigkeit, dass er nicht geschlossen ist; zudem muss man ihn, sofern er sich auf eine ganze Peripherie und mehr erstrecken sollte, auf einen doppelten reduciren. Man integrirt nun zunächst von $\vartheta=0$ bis $\vartheta=\pi$ und ersetzt den Sprung $tan\,\frac{\pi}{2}$ von $+\infty$ nach $-\infty$ durch den Integralwerth

$$-\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z^r}{1+z^{2q}}\,dz\,;$$

sodann von $\vartheta=\pi$ bis $\vartheta=2\pi$ etc. mit der nämlichen Einschaltung. Der erstere (analytische) Contour entspricht der Wirkung nach dem Contour $Lim\{r(\cos\vartheta+i\sin\vartheta)\}$, $r=o$ von $\vartheta=o$ bis $\vartheta=2\pi$, wobei blos die Ausnahmepunkte mit positivem imaginären Theile in Betracht kommen, weil diese allein im ersten und zweiten Quadranten liegen; der letztere Contour von π bis 2π (sammt seiner Einschaltung) entspricht dem nämlichen Integrationsort für o bis 2π mit Rücksicht auf die übrigen negativ imaginären Ausnahmepunkte; der letztere ist aber, gemäss der entgegengesetzten Richtung, welche er einschlägt, mit negativem Zeichen zu versehen. Nach bekannten Auseinandersetzungen ist nun

$$\int_{z_0=0}^{z_1=tan\,p\pi} \frac{z^r}{1+z^{2q}}\,dz = p\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z^r}{1+z^{2q}}\,dz.$$

Indem wir die Differentiale

$$\frac{z^r}{1-z^{2q}}\,dz, \quad \frac{z^r}{1+z^{2q+1}}\,dz \text{ und } \frac{z^r}{1-z^{2q+1}}\,dz$$

der gleichen Integration auf die nämliche Weise unterziehen, erhalten wir nach den gewöhnlichen Formeln

$$\int_{z_0=0}^{z_1=\tan p\pi} \frac{z^{2r}}{1+z^{2q}}\,dz = \frac{p\pi}{q}\,csc\,\frac{(2r+1)\pi}{2q},$$

$$\int_{z_0=0}^{z_1=\tan p\pi} \frac{z^{2r}}{1-z^{2q}}\,dz = \frac{p\pi}{q}\,cot\,\frac{(2r+1)\pi}{2q},$$

$$\int_{z_1=0}^{z_3=\tan p\pi} \frac{z^{2r-1}}{1+z^{2q}}\,dz = \int_{z_0=0}^{z_1=\tan p\pi} \frac{z^{2r-1}}{1+z^{2q}}\,dz = 0\,;$$

$$\int_{z_0=0}^{z_1=\tan p\pi} \frac{z^{2r}}{1+z^{2q+1}}\,dz = \frac{p\pi}{2q+1}\,cot\,\frac{(2r+1)\pi}{2(2q+1)},$$

$$\int_{z_0=0}^{z_1=\tan p\pi} \frac{z^{2r-1}}{1+z^{2q+1}}\,dz = \frac{p\pi}{2q+1}\,tan\,\frac{r\pi}{2q+1},$$

$$\int_{z_0=0}^{z_1=\tan p\pi} \frac{z^{2r}}{1-z^{2q+1}}\,dz = \frac{p\pi}{2q+1}\,cot\,\frac{(2r+1)\pi}{2(2q+1)},$$

$$\int_{z_0=0}^{z_1=\tan p\pi} \frac{z^{2r-1}}{1-z^{2q+1}}\,dz = -\frac{p\pi}{2q+1}\,tan\,\frac{r\pi}{2q+1}$$

Die Potenz des Zählers der Differentiale muss hiebei um zwei Grade niedriger sein, als die des betreffenden Nenners. Zur Vollständigkeit des vorstehenden Systemes gehört noch die Angabe des Werthes der Integration längs eines Quadranten;

der Fall erledigt sich hier nach den bekannten für ganze positive q und $r<q+1$ geltenden Formeln [1].

$$\int_0^\infty \frac{z^r}{1+z^q}\,dz=\frac{\pi}{q}\,csc\,\frac{(r+1)\pi}{q},\quad \int_0^\infty \frac{z^r}{1-z^q}\,dz=\frac{\pi}{q}\,cot\,\frac{(r+1)\pi}{q}.$$

Kehren wir nunmehr zu den Integralen I zurück, so haben wir

$$\int_0^{p\pi}\frac{i'-tan\vartheta}{1+i'tan\vartheta}\,d\vartheta=\int_0^{p\pi}\frac{tan^3\vartheta-tan\,\vartheta}{1+tan^4\vartheta}\,d\vartheta$$

$$+\left\{i'\frac{p\pi}{2\sin\frac{\pi}{4}}+ii'\frac{p\pi}{2\sin\frac{3\pi}{4}}=i'\frac{1+i}{\sqrt{2}}p\pi=ip\pi\right\},$$

$$\int_0^{p\pi}\frac{i''-tan\vartheta}{1+i''tan\vartheta}\,d\vartheta=\int_0^{p\pi}\frac{tan^7\vartheta-tan\,\vartheta}{1+tan^8\vartheta}\,d\vartheta$$

$$+\left\{i''\frac{p\pi}{4\sin\frac{\pi}{8}}+ii''\frac{p\pi}{4\sin\frac{5\pi}{4}}+i'i''\frac{p\pi}{4\sin\frac{3\pi}{8}}+ii'i''\frac{p\pi}{4\sin\frac{7\pi}{8}}=ip\pi\right\};$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{i'-tan\vartheta}{1+i'tan\vartheta}\,d\vartheta=\frac{\pi}{4}\,i+\int_0^\infty\frac{tan^3\vartheta-tan\,\vartheta}{1+tan^4\vartheta}\,d\vartheta,$$

---

[1] Der Zusammenhang der unbestimmten Integrationen rationaler gebrochener Functionen von der Form $\frac{z^r}{1\pm z^q}$ mit den Wurzeln der Gleichung $1\pm z^{4m}=0$ erhellt aus den folgenden Formeln

$$\int\frac{z^{2r}}{1\pm z^{4q}}\,dz=\frac{(-1)^r}{4q}\sum\left\{(\zeta_h)^{2r+1}arc\,tan\left(\frac{z}{\zeta_h}\right)\right\}_{h=1}^{h=4q}$$

$$\int\frac{z^{2r+1}}{1\pm z^{4q}}\,dz=\frac{(-1)^r}{4q}\sum\left\{(\zeta_h)^{2r+2}\,l\left(1+\left(\frac{z}{\zeta_h}\right)^2\right)\right\}_{h=1}^{h=4q}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{i''-tan\vartheta}{1+i''tan\vartheta}\,d\vartheta = \frac{\pi}{8}\,i + \int_0^{\infty} \frac{tan^7\vartheta - tan\,\vartheta}{1+tan^8\vartheta}\,d\vartheta \text{ etc.}$$

$$\left(i'' = \cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)$$

und erhalten somit bereits Kenntniss von dem Nullwerthe des übrigbleibenden Integrales; ja wir schliessen, dass überhaupt

$$\int_0^{\frac{p\pi}{2}} \frac{tan^{4q-1}\vartheta - tan\,\vartheta}{1+tan^{4q}\,\vartheta}\,d\vartheta = p\int_0^{\infty} \frac{z^{4q-1}-z}{(1+z^{4q})(1+z^2)}\,dz = 0 \qquad \odot)$$

Die Ermittlung des Minuends, sowie des Subtrahends der betreffenden Differenzen ist dabei von derselben Leichtigkeit, wie bei der folgenden früher abgeleiteten Differenz

$$\int_0^{\infty} \frac{1-z^2}{(1+2\cos\tau z+z^2)(1+z^2)}\,dz = 0\,;$$

wie bezüglich dieser letzteren sofort aus der Verbindung derselben mit der correlativen Formel

$$\int_0^{\infty} \frac{1+z^2}{(1+2\cos\tau\, z+z^2)(1+z^2)}\,dz = \frac{\pi}{2\sin\tau}$$

der Doppelwerth hervorgeht

$$\int_0^{\infty} \frac{dz}{(1+2\cos\tau\, z+z^2)(1+z^2)} = \int_0^{\infty} \frac{z^2dz}{(1+2\cos\tau\, z+z^2)(1+z^2)} = \frac{\pi}{4\sin\tau},$$

so leitet man analog aus der Verbindung der bekannten Werthe

$$\int_0^{\infty} \frac{z(z^2+1)}{(1+z^4)(1+z^2)}\,dz = \frac{\pi}{4},$$

$$\int_0^\infty \frac{z(1-z^2+z^4)(1+z^2)}{(1+z^8)(1+z^2)}\,dz = \int_0^\infty \frac{z(1+z^6)}{(1+z^8)\,(1+z^2)}\,dz = \frac{\pi}{8}(\sqrt{2}-1),$$

$$\int_0^\infty \frac{z(z^8-z^6+z^4-z^2+1)(z^2+1)}{(1+z^{12})(1+z^2)}\,dz = \int_0^\infty \frac{z(1+z^{10})}{(1+z^{12})\,(1+z^2)}\,dz =$$

$$\pi\frac{5\sqrt{3}-4}{12\sqrt{3}}, \text{ etc.}$$

mit den Gleichungen $\odot$) die Folgerung ab, dass der Reihe nach

$$\int_0^\infty \frac{z}{(1+z^4)\,(1+z^2)}\,dz = \int_0^\infty \frac{z^3}{(1+z^4)\,(1+z^2)}\,dz = \frac{\pi}{8},$$

$$\int_0^\infty \frac{z}{(1+z^8)\,(1+z^2)}\,dz = \int_0^\infty \frac{z^7}{(1+z^8)\,(1+z^2)}\,dz = \frac{\pi}{16}(\sqrt{2}-1); \quad \text{etc.}$$

endlich allgemein

$$\int_0^\infty \frac{z}{(1+z^{4q})\,(1+z^2)}\,dz = \int_0^\infty \frac{z^{4q-1}}{(1+z^{4q})\,(1+z^2)}\,dz =$$

$$\frac{\pi}{8q}\sum\left\{(-1)^{r+1} csc\,\frac{r\pi}{2q}\right\}_{r=1}^{r=2q-1}$$

Es ist dies die nächste Nutzanwendung, die aus solchen inductiven Schlüssen gezogen werden kann; eine weitere besteht z. B. darin, die Differentiale mit i''

$$\left(\frac{i''-tan\,\vartheta}{1+i''tan\,\vartheta}\,d\vartheta\right),$$

ferner mit

$$i''' = \cos\frac{\pi}{16} + i\sin\frac{\pi}{16} \quad \text{etc.}$$

so zu transformiren, dass i'', i''' in Function von i' und ii' ausgedrückt und danach jene Differentiale nach Potenzen von i' und ii' entwickelt werden, wodurch Integralformeln mit der 6. Potenz von $z = tan\,\vartheta$ im Nenner gewonnen werden. Von der Betrachtung der Integration

$$\int_0^{\frac{p\pi}{2}} \frac{\zeta_k - tan\vartheta}{1+\zeta_k tan\vartheta}\, d\vartheta, \quad \zeta_k = \cos k + i \sin k$$

lässt sich der Übergang bewerkstelligen zu den ähnlichen Beispielen

$$\int_0^{\frac{p\pi}{2}} \frac{\zeta_k - tan\,\vartheta}{1-\zeta_k\, tan\,\vartheta}\, d\vartheta, \int_0^{\frac{p\pi}{2}} \frac{\zeta_k + tan\,\vartheta}{1+\zeta_k\, tan\,\vartheta}\, d\vartheta, \int_0^{\frac{p\pi}{2}} \frac{\zeta_k + tan\,\vartheta}{1-\zeta_k\, tan\,\vartheta}\, d\vartheta, \text{ etc.,}$$

die auf dem nämlichen Wege blosser Transformation zu neuen Resultaten führen müssen. Es genüge hier, angedeutet zu haben, wie man inductiv zur Kenntniss der allgemeinen Integralformel

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)dx = \pi \sum \frac{b - Aa}{\sqrt{B^2 - A^2}},$$

$$F(x) = \sum \frac{ax + b}{x^2 + 2Ax + B}$$

für den Fall blos complexer Wurzeln der einzelnen Gleichungen $x^2 + 2Ax + B = 0$ gelangen, oder wenigstens specielle Fälle derselben schneller erledigen kann, als es mit Hilfe dieser complicirten Formel möglich wäre.

4.

Den Gegenstand des vorliegenden Absatzes bildet die Anwendung eines Satzes aus der Theorie der Fourier'schen Doppelintegrale auf die Lehre von der Integration längs geschlossener Curven oder blosser Theile derselben. In den Grundformeln für die Fourier'schen Integrale, nämlich

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos xu du \int_a^b \cos ut f(t) dt, \quad a < x < b$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin xu du \int_a^b \sin ut f(t)\, dt, \quad a < x < b$$

substituiren wir für die Function $f(x)$ das Product zweier Functionen $\varphi(x) . \psi(x)$; dadurch gehen jene Formeln in die folgenden über

$$\varphi(x).\psi(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty du \cos, \sin xu \int_a^b \cos, \sin ut \varphi(t) \quad \psi(t) dt,$$

welche wir nunmehr mit dx multipliciren und von a bis b integriren. Die neue Gleichung

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x) dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty du \int_a^b \cos, \sin ux\, dx \int_a^b \cos, \sin ut \varphi(t)\psi(t) dt$$

besitzt eine merkwürdige Eigenschaft; sie erlaubt nämlich, wie man sich leicht überzeugt, in einer der Functionen φ oder ψ rechter Hand x statt t einzuführen und statt nach t nach x zu integriren — man kann also auch

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x) dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty du \int_a^b \cos, \sin ux \varphi(x) dx \int_a^b \cos, \sin ut \psi(t) dt$$

oder besser

$$\int_a^b \varphi(z)\psi(z) dz = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty du \int_a^b \cos, \sin ux \varphi(x) dx \int_a^b \cos, \sin uy \psi(y) dy, \quad \text{A)}$$

setzen. Denn, schreibt man die rechte Seite der vorstehenden Formel in der folgenden geänderten Weise

$$\int_0^\infty du \int_a^b \varphi(x) \int_a^b \cos, \sin xu \cos, \sin uy \psi(y) dx dy =$$

$$\int_a^b \varphi(x) \int_0^\infty \cos, \sin xu\, du \int_a^b \cos, \sin uy \psi(y) dy dx\,,$$

so vereinigt sich das Integral

$$\int_0^\infty \cos, \sin xu du \int_a^b \cos, \sin uy \psi(y) dy$$

zur Function $\frac{\pi}{2}\psi(x)$ und man hat identisch

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx = \int_a^b \varphi(z)\psi(z)dz.$$

Ein paar allgemeinere Substitutionen in A) sind die folgenden

1) $\varphi(x) = \psi(x)$

$$\int_a^b [\varphi(z)^2] dz = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty du \,[\int_a^b \cos, \sin ux\varphi(x)dx]^2, \qquad \text{Aa)}$$

2) $\varphi(x) = \frac{1}{\psi(x)}$

$$b - a = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty du \int_a^b \cos, \sin ux\varphi(x)dx \int_a^b \cos, \sin uy \frac{1}{\varphi(y)} dy\,,$$

3) $\psi(x) = x$

$$\int_a^b z\varphi(z)dz =$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty du \left\{\frac{a \cos ua - b \cos ub}{u} + \frac{\sin ub - \sin ua}{u^2}\right\} \int_a^b \sin ux\varphi(x)dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty du \left\{\frac{b\sin bu - a\sin au}{u} + \frac{\cos bu - \cos au}{u^2}\right\}\int_a^b \cos ux\varphi(x)\,dx,$$

4) $\psi(x) = \sin x, \cos x$

$$\int_a^b \sin z\varphi(z)\,dz = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty du \left\{\frac{u(\sin b\cos bu - \sin a\cos au)}{1-u^2}\right.$$

$$\left.\frac{-\cos b\sin bu - \cos a\sin au}{1-u^2}\right\}\int_a^b \sin ux\varphi(x)\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty du \left\{\frac{\cos a\cos au - \cos b\cos bu}{1-u^2}\right.$$

$$\left.\frac{-u(\sin b\sin bu - \sin a\sin au)}{1-u^2}\right\}\int_a^b \cos ux\varphi(x)\,dx,$$

$$\int_a^b \cos z\varphi(z)\,dz = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty du \left\{\frac{\sin b\sin bu - \sin a\sin au}{1-u^2}\right.$$

$$\left.\frac{-u(\cos a\cos au - \cos b\cos bu)}{1-u^2}\right\}\int_a^b \sin ux\varphi(x)\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty du \left\{\frac{\sin b\cos bu - \sin a\cos au}{1-u^2}\right.$$

$$\left.\frac{-u(\cos b\sin bu - \cos a\sin au)}{1-u^2}\right\}\int_a^b \cos ux\varphi(x)\,dx.$$

Ähnlich wie in diesen Fällen eine Integration von a bis b, lässt sich irgend eine andere Integrationsbasis (0_n) in die Gleichung 1) substituiren; man hat überhaupt

$$\int_{(0n)} \varphi(z)\,\psi(z)\,dz = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty du \int_{(0n)} \cos, \sin ux\varphi(x)\,dx \int_{(0n)} \cos, \sin uy\,\psi(y)\,dy$$

unter den unerlässlichen Bedingungen der Endlichkeit und Stetigkeit der Functionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ auf der Integrationsbasis (0_n). So liesse sich die Formel für den kreisförmigen Contour

$$\int_{(0_n)} F(z)dz = \int_0^{2\pi} F(r\{\cos\vartheta + i\sin\vartheta\})\,[-r\sin\vartheta + ir\cos\vartheta]\,d\vartheta$$

für

$$\varphi = F\{r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)\},\quad \psi = -r(\sin\vartheta - i\cos\vartheta)$$

verwenden; nimmt man

$$F = \frac{1}{r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)},$$

sodann nach A) a) noch

$$\varphi(z) = \psi(z) = \cos\vartheta \pm i\sin\vartheta,$$

und integrirt von 0 bis ϑ, so erhält man durch Combination der Resultate die nämlichen Integralformeln, die sich aus den früheren Gleichungen für

$$\int_a^b \cos, \sin z\varphi(z)\,dz$$

unter den Voraussetzungen

$$\varphi(z) = \cos, \sin z \quad \text{oder} \quad \varphi(z) = \sin, \cos z$$

ergeben, nämlich

$$\int_0^\infty \left\{\frac{\cos\vartheta\cos\vartheta u - 1 + u\sin\vartheta\sin\vartheta u}{1-u^2}\right\}^2 du$$

$$= \frac{\pi}{4}\cdot\frac{2\vartheta - \sin 2\vartheta}{2},$$

$$\int_0^\infty \left\{\frac{u(\cos\vartheta\cos\vartheta u-1)+\sin\vartheta\cos\vartheta u}{1-u^2}\right\}^2 du$$

$$=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{2\vartheta+\sin 2\vartheta}{2};$$

$$\int_0^\infty \left\{\frac{\sin\vartheta\cos\vartheta u-u\cos\vartheta\sin\vartheta u}{1-u^2}\right\}^2 du$$

$$=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{2\vartheta+\sin 2\vartheta}{2},$$

$$\int_0^\infty \left\{\frac{\cos\vartheta\sin\vartheta u-u\sin\vartheta\cos\vartheta u}{1-u^2}\right\}^2 du$$

$$=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{2\vartheta-\sin 2\vartheta}{2};$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos\vartheta u-\cos\vartheta}{1-u^2}\, du=\frac{\pi}{2}.\sin\vartheta,$$

$$\int_0^\infty \frac{(1+u^2)(\sin 2\vartheta\cos 2\vartheta u-2\sin\vartheta\cos\vartheta u)}{(1-u^2)^2}\, du$$

$$+\int_0^\infty \frac{-2u(\cos 2\vartheta\sin 2\vartheta u-2\cos\vartheta\sin\vartheta u)}{(1-u^2)^2}\, du=0.$$

Zum Beschlusse mögen hier noch einige Specialisirungen der Gleichung A) a) Platz finden; es betrifft dies die Functionen

$$\varphi(z)=\psi(z)=z^{\mu-1}.e^{-az}$$

und

$$\varphi(z)=\psi(z)=z^{\mu-1}.lze^{-az}, \quad 0<\mu.$$

1) $\varphi(x) = z^{\mu-1} e^{az}$

$$\int_0^\infty \frac{\cos^2\left(\mu \, arc\,tan \frac{z}{a}\right)}{(a^2+z^2)^\mu} dz = \int_0^\infty \frac{\sin^2\left(\mu \, arc\,tan \frac{z}{a}\right)}{(a^2+z^2)^\mu} dz =$$

$$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{(2\mu-1)(2a)^{2\mu-1}} \cdot \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma(\mu).\Gamma(\mu)}.$$

2) $\psi(z) = z^{\mu-1} lze^{-az}$

$$\int_0^\infty \left\{\left(arc\,tan \frac{z}{a}\right)^2 + \left(\frac{dl\Gamma(\mu)}{d\mu} - \frac{1}{2} l\{a^2+z^2\}\right)^2\right\} \frac{dz}{(a^2+z^2)^\mu} =$$

$$\pi \cdot \frac{1}{(2\mu-1)\,(2a)^{\mu-1}} \cdot \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma(\mu).\Gamma(\mu)} \cdot \left\{\left(\frac{dl\Gamma\,(2\mu-1)}{d(2\mu-1)} - l2a\right)^2 \right.$$

$$\left. + \frac{d^2 l\Gamma\,(2\mu-1)}{d(2\mu-1)^2}\right\}$$

$$\int_0^\infty \left\{\left(arc\,tan \frac{z}{a}\right)^2 + \frac{1}{4} l^2[e^{2C}(a^2+z^2)]\right\} \frac{dz}{a^2+z^2} = \frac{\pi}{2a}\left(\frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{4} l^2\, 2ae^{4C}\right),$$

$$\frac{1}{4}\int_0^\infty \frac{l^2\,(a^2+z^2)}{a^2+z^2} dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(l\sec\vartheta + la)}{a} d\vartheta = \frac{\pi^3}{24a} + \frac{\pi}{2a}(l2a)^2,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (l\cos\vartheta)^2\, d\vartheta = 2\left(\frac{1}{1^3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3^3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{5^3} + \ldots\right) = \frac{\pi^3}{24} + \frac{\pi}{2}(l2)^2.$$

3) $\varphi(z) = e^{-az}$

$$\int_0^\infty \frac{a^2}{(a^2+z^2)^2} dz = \int_0^\infty \frac{z^2}{(a^2+z^2)^2} dz = \frac{\pi}{4a},$$

4) $\varphi(z) = ze^{-az}$

$$\int_0^\infty \frac{(a^2-z^2)^2}{(a^2+z^2)^4}\,dz = \int_0^\infty \frac{4a^2z^2}{(a^2+z^2)^4}\,dz = \frac{\pi}{8a^3},$$

5) $\varphi(z) = z^2e^{-az}$

$$\int_0^\infty \frac{a^2(a^2-3z^2)^2}{a^2+z^2)^6}\,dz = \frac{3\pi}{32a^5}, \quad \int_0^\infty \frac{z^2(3a^2-z^2)^2}{a^2+z^2)^6}\,dz = \frac{3\pi}{32a^5},$$

6) $\varphi(z) = z^{p-1}e^{-az}$

$$\int_0^\infty \frac{(a^p-(p)_2\,a^{p-2}z^2+(p)_4a^{p-4}z^4-\ldots)^2}{(a^2+z^2)^{2p}}\,dz =$$

$$\int_0^\infty \frac{((p)_1a^{p-1}z-(p)_3\,a^{p-3}z^3+\ldots)^2}{(a^2+z^2)^{2p}}\,dz$$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{(2p-1)(2a)^{2p-1}}\cdot\frac{\Gamma(2p)}{\Gamma(p)\cdot\Gamma(p)},$$

$$a^\mu-(\mu)_2a^{\mu-2}z^2+(\mu)_4a^{\mu-4}z^4-\ldots = (a^2+z^2)^{\frac{\mu}{2}}\cos\left(\mu\, arc\, tan\frac{z}{a}\right),$$

$$(\mu)_1a^{\mu-1}z-(\mu)_3a^{\mu-3}z^3+\ldots = (a^2+z^2)^{\frac{\mu}{2}}\sin\left(\mu\, arc\, tan\frac{z}{a}\right).$$

5.

Es erübrigt hier noch, eine kleine Bemerkung über die in Nr. 3 des Textes vorkommende Hauptwerthsdefinition, wie sie in der Formel auftritt

$$\int_{(0)}^{(\infty)} \frac{e^{-x}}{x}\,dx = \int_{(0)}^{(\infty)} \frac{\cos x}{x}\,dx = \int_{(0)}^{(\infty)} \frac{e^{-x}\cos x}{x}\,dx + \frac{1}{2}\,l2 =$$

$$-C = -0\cdot 5772156649\ldots$$

nachzutragen. Eine Relation aus der Lehre von den Gammafunctionen zeigt nämlich, dass diese gegenwärtige Definition von der gewöhnlichen abweicht. Aus der Gleichung

$$\int_0^\infty \left\{ e^{-x} - \frac{x e^{-\mu x}}{1-e^{-x}} \right\} \frac{dx}{x} = \frac{dl\Gamma(\mu)}{d\mu},$$

erhält man für $\mu = 1$

$$\int_0^\infty \left\{ \frac{e^{-x}}{x} - \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} \right\} dx = -C$$

und hieraus geht sogleich hervor, dass bei der willkürlichen Annahme

$$\int_{(0)}^{(\infty)} \frac{e^{-x}}{x} dx = -C$$

als unbestimmter, unendlich grosser Werth des Integrales die Reihe

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \qquad \textit{in inf.}$$

vernachlässigt wird. Dieselbe Vernachlässigung findet nun auch bei den übrigen Integralen

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x} dx, \quad \int_0^\infty \frac{e^{-x}\cos x}{x} dx + \frac{1}{2} l2 =$$

statt, deren Gleichwerthigkeit mit

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{x} dx$$

die Analyse der Integrationswege (Rechteck oder Rhomboid mit unendlich grosser Seite, Kreisquadrant mit unendlich grossem Radius) lehrt.

Es ist daher die Hauptwerthsformel

$$\int_{(0)}^{(\infty)} \frac{e^{-x}}{x}\, dx = -C$$

identisch mit der folgenden Beziehung

$$\frac{e^{-\delta}}{1} + \frac{e^{-2\delta}}{2} + \frac{e^{-3\delta}}{3} + \ldots$$

$$-\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots\right) = -C$$

und ebenso würde sich finden

$$Lim\left\{\frac{\cos\delta}{1} + \frac{\cos 2\delta}{2} + \frac{\cos 3\delta}{3} + \ldots\right\} - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots\right) =$$

$$Lim\left\{\frac{e^{-\delta}\cos\delta}{1} + \frac{e^{-2\delta}\cos 2\delta}{2} + \frac{e^{-3\delta}\cos 3\delta}{3} + \ldots\right\} + \frac{1}{2}\, l2$$

$$-\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots\right) = -C.$$

Die Summen der mit *Lim* bezeichneten Reihen lauten gemäss bekannten Formeln

$$\frac{e^{-\delta}}{1} + \frac{e^{-2\delta}}{2} + \frac{e^{-3\delta}}{3} + \qquad = -l(1 - e^{-\delta}),$$

$$\frac{\cos\delta}{1} + \frac{\cos 2\delta}{2} + \frac{\cos 3\delta}{3} + \qquad = -l(2\sin\tfrac{1}{2}\delta),$$

$$\frac{e^{-\delta}\cos\delta}{1} + \frac{e^{-2\delta}\cos 2\delta}{2} + \frac{e^{-3\delta}\cos 3\delta}{3} + \qquad . =$$

$$-\frac{1}{2}\, l(1 - 2e^{-\delta}\cos\delta + e^{-2\delta});$$

man hat daher übereinstimmend

$$\frac{1}{2}\,l\,\frac{1-2\,e^{-\delta}\cos\delta+e^{-2\delta}}{1-2e^{-\delta}+e^{-2\delta}}=\frac{1}{2}\,l\,\frac{1-2\,e^{-\delta}\cos\delta+e^{-2\delta}}{4\sin^2\frac{1}{2}\delta}=\frac{1}{2}\,l2.$$

Der Integrallogarithmus $li(e^{+x})$, wie er in der bekannten Gleichung definirt wird, ist dagegen selbst ein Hauptwerth von der gewöhnlichen Bedeutung; er ist

$$li(e^{+x})=-\int_{-x}^{\infty}\frac{e^{-x}}{x}\,dx\,,$$

und wird auf ähnliche Art durch Vernachlässigung eines unbestimmten Werthes $0\cdot\infty$ gewonnen wie der Hauptwerth

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos\vartheta u}{1-u^2}\,du=\frac{\pi}{2}\sin\vartheta$$

dessen zugehörige continuirliche Integralformel

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos\vartheta u-\cos\vartheta}{1-u^2}\,du=\frac{\pi}{2}\sin\vartheta$$

lautet; den Nutzen auch dieser Hauptwerthe mag das einfache Beispiel zeigen

$$\int_0^{\infty}\left\{\frac{1}{2(1-u^2)}+\frac{\cos 2\vartheta u}{2(1-u^2)}-\frac{\cos\vartheta u\cos\vartheta}{1-u^2}\right\}du$$

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos\vartheta u\,(\cos\vartheta u-\cos\vartheta)}{1-u^2}\,du=0\,,$$

welches wieder eine continuirliche Formel ist, und durch subtractive Verbindung zweier früheren Integralformeln leicht erhärtet wird.

Auf die nämliche Weise, wie die sehr speciellen Beispiele

$$\int_0^\infty \frac{\cos \vartheta u - \cos \vartheta}{1-u^2}\, du \quad \text{und} \quad \int_0^\infty \frac{\cos \vartheta u\,(\cos \vartheta u - \cos \vartheta)}{1-u^2}\, du$$

lässt sich die Integralformel

$$\int_0^\infty \frac{\varphi(u)}{1-u^2}\, du$$

jederzeit ihrem Werthe nach bestimmen, sobald $\varphi(u)$ in endliche oder unendliche Reihen

$$a_0 + a_1 \cos \alpha_1 u + a_2 \cos \alpha_2 u + \ldots$$

$$a_0 + u(a_1 \sin \alpha_1 u + a_2 \sin \alpha_2 u + \ldots)$$

entwickelbar ist, die für $u=1$ verschwinden und von $u=0$ bis $u=\infty$ gelten.

Es möge hier noch eines Mittels zur Gewinnung continuirlicher Integralformeln aus discontinuirlichen gedacht werden, welches sich direct an die entsprechenden Werthe der letzteren wendet. Handelt es sich um eine Integration von der Form

$$\int f(\mu, a, b, c, \ldots u)\, du = \varphi(\mu) \cdot \psi(\mu, a, b, c \ldots)$$

und beachtet man blos rechter Hand die beiden Functionen φ und ψ, so zeigt sich bald der Fall von Interesse, wo $\varphi(\mu)$ für irgend einen Werth μ_1 unendlich gross, dagegen eine beliebige Differenz

$$\varphi(\mu_1, a, b, c \ldots) - \psi(\mu_1, a', b', c' \ldots)$$

unendlich klein wird. Man kann nämlich dann den Grenzfall $0 \cdot \infty$ nach der bekannten Methode bestimmen und hat

$$Lim\, \{\varphi(\mu) \cdot [\psi(\mu, a, b, c, \ldots - \psi(\mu, a', b', c' \ldots)]\} =$$

$$Lim\left\{\frac{\psi(\mu, a, b, c, \ldots) - \psi(\mu, a', b', c' \ldots)}{\frac{1}{\varphi(\mu)}}\right\} =$$

$$Lim\left\{\frac{\psi'_\mu(a, b, c \ldots \mu) - \psi'_\mu(a', b', c' \ \ldots \mu)}{-\frac{\varphi'_\mu(\mu)}{\varphi(\mu)^2}}\right\}; \; Lim\, \mu = \mu_1.$$

Linker Hand entspricht diesem Vorgange die Integralformel

$$Lim \int [f(a, b, c, \ldots \mu, u) - f(a', b', c' \ldots \mu, u)]\, du,$$

so dass schliesslich die Beziehung aufgestellt werden darf

$$Lim \int [f(a, b, c, \ldots \mu, u) - f(a', b', c' \ldots \mu, u)]\, du =$$

$$Lim\left\{-\frac{[\psi'_\mu(a, b, c, \ldots \mu) - \psi'_\mu(a', b', c' \ldots \mu)]\{\varphi(\mu)\}^2}{\varphi'_\mu(\mu)}\right\}. \qquad 1)$$

Im Folgenden sei stets $\varphi(\mu) = \Gamma(\mu)$, also $Lim\, \mu = 0$. Die Relation 1) verlangt zunächst blos die Kenntniss des Grenzwerthes

$$\frac{d\left(\frac{1}{\Gamma(\mu)}\right)}{d\mu}$$

für $\mu = 0$ oder die Entwicklung von

$$Lim \frac{\Gamma'(\mu)}{\Gamma(\mu)^2}.$$

Aus

$$\Gamma'(\mu) = \Gamma(\mu)\left\{\int_0^1 \frac{1 - t^{\mu-1}}{1-t}\, dt - C\right\} \quad C = 0\cdot5772156649\ldots$$

erhält man

$$Lim\, \Gamma'(\mu)_0 = \Gamma(0)\left\{-\int_0^1 \frac{1}{t}\, dt - C\right\} = \Gamma(0)\left\{-1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \ldots - C\right\};$$

anderseits ist

$$\Gamma(0) = \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{x}\, dx = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots - C,$$

wonach nunmehr der Grenzwerth $\dfrac{d\left(\frac{1}{\Gamma(\mu)}\right)_0}{d\mu}$ die folgende Gestalt annimmt

$$Lim\, \frac{d\left(\frac{1}{\Gamma(\mu)}\right)}{d\mu} = -\, \frac{-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots in\ inf.\right) - C}{+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots in\ inf.\right) - C}.$$

Hier sind rechts im Zähler und Nenner Zahlen, die in übereinstimmender Weise unendlich anwachsen; dividirt man durch dieselben Zähler und Nenner, so ergibt sich sogleich das Resultat

$$Lim\, \frac{d\left(\frac{1}{\Gamma(\mu)}\right)}{d\mu} = 1, \quad \mu = 0.$$

Auf analoge sehr einfache Weise gelangt man zur Kenntniss der Beziehungen

$$Lim\, D_p \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} = Lim\, D_q \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} = 1, \quad p=0, \quad q=0,$$

$$Lim\, D_k \frac{\Gamma(k+l+m+n+\ldots)}{\Gamma(k)\Gamma(l)\Gamma(m)\Gamma(n)\ldots} = \frac{\Gamma(l+m+n+\ldots)}{\Gamma(l)\Gamma(m)\Gamma(n)\ldots};$$

Dieselben bilden den ziemlich ergiebigen Apparat, continuirliche Integralformeln zu erhalten, wofür zum Schlusse einige Beispiele folgen mögen.

1. $$f(u) = u^{\mu-1} e^{-(p+iq)u};$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-(p+iq)x} - e^{-(p'+iq')x}}{x}\, dx = l\, \frac{p'+iq'}{p+iq},$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-px}\cos qx - e^{-rx}\cos sx}{x}\,dx = \tfrac{1}{2}\, l\, \frac{r^2+s^2}{p^2+q^2},$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-px}\sin qx}{x}\,dx = arc\,tan\,\frac{q}{p}.$$

2. $$f(u) = u^{\mu-1} lu\, e^{-au} \sin\left(\mu\, arc\,tan\,\frac{b}{a} - bu\right);$$

$$\int_0^\infty lx\, \frac{arc\,tan\,\frac{b'}{a'}\, e^{-ax}\sin bx - arc\,tan\,\frac{b}{a}\, e^{-a'x}\sin b'x}{x}\,dx =$$

$$\frac{1}{2}\, arc\,tan\,\frac{b}{a}\, arc\,tan\,\frac{b'}{a'}\,.\, l\frac{a'^2+b'^2}{a^2+b^2},$$

$$\int_0^\infty lx \frac{e^{-ax}\sin ax - e^{-bx}\sin bx}{x}\,dx = \frac{\pi}{4}\, l\, \frac{b}{a} = \frac{1}{2}\int_0^\infty lx\, \frac{\sin ax - \sin bx}{x}\,dx.$$

3. $$f(u) = \frac{u^{p-1}}{(au+b)^{p+q}};$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{x}\left\{\frac{b^p}{(ax+b)^p} - \frac{b'^p}{(a'x+b')^p}\right\}dx =$$

$$\int_0^\infty x^{p-1}\left\{\frac{b^p}{(a+bx)^p} - \frac{b'^p}{(a'+b'x)^p}\right\}dx = l\,\frac{a'}{a},$$

$$\int_0^\infty \frac{(Mx+n)^{p-1}}{[(mx+n)\,(m'x+n)]^p}\,dx =$$

$$\int_0^\infty x^{p-1}\,\frac{(M+nx)^{p-1}}{[(m+nx)\,(m'+nx)]^p}\,dx = \frac{1}{n^p}\;\;\frac{lm - lm'}{m - m'},$$

$$\sum\Big[M_q\Big]_{q=1}^{q=p-1} = \sum\Big[\frac{m^q+m^{q-1}m'+m^{q-2}m'^2+\ldots+m'^q}{q+1}\Big]_{q=1}^{q=p-1}, \; M_0=1.$$

4. $$f(u) = \frac{u^\mu}{b^2+2bu\cos\beta+u^2}, \; -\frac{\pi}{2} \leqq \beta \leqq +\frac{\pi}{2};$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(b^2+2bx\cos\alpha+x^2)(b^2+2bx\cos\beta+x^2)} =$$

$$\frac{1}{2b^3} \cdot \frac{\alpha\cot\alpha-\beta\cot\beta}{\cos\alpha-\cos\beta},$$

$$\int_0^\infty \frac{xdx}{(b^2+2bv\cos\alpha+x^2)(b^2+2bx\cos\beta+x^2)} =$$

$$-\frac{1}{2b^2} \cdot \frac{\alpha\csc\alpha-\beta\csc\beta}{\cos\alpha-\cos\beta},$$

$$\int_0^\infty \frac{x^2dx}{(b^2+2bx\cos\alpha+x^2)(b^2+2bx\cos\beta+x^2)} =$$

$$\frac{1}{2b} \; \frac{\alpha\cot\alpha-\beta\cot\beta}{\cos\alpha-\cos\beta}, \; \alpha \underset{>}{\leqq} \beta.$$

5. $$f(u) = u^{\mu-1}(1-u)^{a-\mu-1}F(\alpha u), \; a>0.$$

$$F(\alpha) = A_0+A_1\alpha+A_2\alpha^2+A_3\alpha^3+\ldots, \; \alpha \leqq 1,$$

$$\frac{\Gamma(a)}{\Gamma(\mu)\Gamma(a-\mu)} \int_0^1 u^{\mu-1}(1-u)^{a-\mu-1}F(\alpha u)du =$$

$$A_0+\frac{\mu}{a}A_1\alpha+\frac{\mu(\mu+1)}{a(a+1)}A_2\alpha^2+\frac{\mu(\mu+1)(\mu+2)}{a(a+1)(a+2)}A_3\alpha^3+\ldots;$$

I. $$\int_0 \frac{(1-x)^{a-1}}{x}\{F(\alpha_1 x)-F(\alpha_0 x)\}\,dx=$$

$$\frac{A_1}{a}(\alpha_1-\alpha_0)+\frac{1!A_2}{a(a+1)}(\alpha_1^2-\alpha_0^2)$$

$$+\frac{2!A_3}{a(a+1)(a+2)}(\alpha_1^3-\alpha_0^3)+$$

$$\int_0^{arc\sin\alpha}\tau\cot\tau d\tau=\frac{\alpha}{1}+\frac{1}{2}\frac{\alpha^3}{3^2}+\frac{1.3}{2.4}\frac{\alpha^5}{5^2}+$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\,arc\tan\alpha}\tau\csc\tau d\tau=\frac{\alpha}{1}-\frac{\alpha^3}{3^2}+\frac{\alpha^5}{5^2}-$$

II. $$\int_0^1\frac{1}{x}\{(1-x)^{a_1-1}F(\alpha_1 x)-(1-x)^{a_0-1}F(\alpha_0 x)\}\,dx=$$

$$A_0\int_0^1\frac{(1-x)^{a_1-1}-(1-x)^{a_0-1}}{x}\,dx$$

$$+A_1\left(\frac{\alpha_1}{a_1}-\frac{\alpha_0}{a_0}\right)+1!A_2\left(\frac{\alpha_1^2}{a_1(a_1+1)}-\frac{\alpha_0^2}{a_0(a_0+1)}\right)$$

$$+2!A_3\left(\frac{\alpha_1^3}{a_1(a_1+1)(a_1+2)}-\frac{\alpha_0^3}{a_0(a_0+1)(a_0+2)}\right)+$$

$$F(\alpha)=(1-\alpha)^{-c},\quad A_k=(c+k-1)_k,$$

$$\int_0^1\frac{(1-x)^{a-1}\{(1-\alpha x)^{-c}-1\}}{x}\,dx=$$

$$\frac{1}{1}\frac{c}{a}\alpha+\frac{1}{2}\frac{c(c+1)}{a(a+1)}\alpha^2+\frac{1}{3}\frac{c(c+1)(c+2)}{a(a+1)(a+2)}\alpha^3+\ldots,\quad a>c,\quad c>o$$

$$\int_0^1 x^{c-1}(1-x)^{b-1} l(1-\alpha x)\,dx =$$

$$\frac{\Gamma(b)\Gamma(c)}{\Gamma(b+c)}\int_0^1 \frac{(1-x)^{b+c-1}\{1-(1-\alpha x)^{-c}\}}{x}\,dx.$$

$$F(\alpha)=\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^1 y^{p-1}(1-y)^{q-1}(1-\alpha y^r)^{-c}dy,$$

$$A_k=\frac{(c+k-1)_k}{(p+kr)(p+kr+1)\quad .(p+kr+q+1)}$$

$$\int_0^1 x^{c-1}(1-x)^{b-1}\int_0^1 y^{p-1}(1-y)^{q-1}\, l(1-\alpha x y^r)\,dy\,dx =$$

$$\frac{\Gamma(b)\Gamma(c)}{\Gamma(b+c)}\int_0^1 \frac{(1-x)^{b+c-1}}{x}\int_0^1 y^{p-1}(1-y)^{q-1}\{1-(1-\alpha x y^r)^{-c}\}\,dy\,dx,$$

$$p>0,\ q>0;$$

$$\int_0^1 x^{p-r-1}(1-x)^{q-1}(1-\alpha x^r) l(1-\alpha x^r)\,dx =$$

$$-\alpha\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}+\alpha^2\int_0^1 (1-x)\int_0^1 \frac{y^{p+r-1}(1-y)^{q-1}}{1-\alpha x y^r}\,dy\,dx,$$

$$\int_0^1 x^{c-2}(1-x)^{b-1}\int_0^1 y^{p-r-1}(1-y)^{q-1}(1-\alpha x y^r) l(1-\alpha x y^r)\,dy\,dx =$$

$$-\alpha\frac{\Gamma(b)\Gamma(c)}{\Gamma(b+c)}\cdot\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

$$+\alpha^2\int_0^1 (1-x)\int_0^1 y^c(1-y)^{b-1}\int_0^1 \frac{z^{p+r-1}(1-z)^{q-1}}{1-\alpha x y z^r}\,dz\,dy\,dx.$$

6. $$f(u,v)=\frac{u^{\mu-1}v^{\nu-1}(1-u-v)^{\pi-1}}{(\rho+\alpha u+\beta v)^{\mu+\nu+\pi}},\quad \pi=1;$$

$$\int_0^1\int_0^{1-x}\frac{2\rho+x(\alpha'+\alpha)+y(\beta'+\beta)}{(\rho+\alpha x+\beta y)(\rho+\alpha' x+\beta y)(\rho+\alpha x+\beta' y)(\rho+\alpha' x+\beta' y)}\,dxdy=$$

$$\frac{1}{\rho}\;\frac{l(\rho+\alpha')-l(\rho+\alpha)}{\alpha'-\alpha}\cdot\frac{l(\rho+\beta')-l(\rho+\beta)}{\beta'-\beta}.$$

Aus der k. k. Hof- und Staatsdruckerei in Wien.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1871

Band/Volume: 64_2

Autor(en)/Author(s): Frombeck Hermann

Artikel/Article: Ein Beitrag zur Theorie der Functionen complexer Variabelen 495-574