Über eine Relation zwischen den singulären Elementen cubischer Involutionen.

Von C. Le Paige,

Professor der Mathematik und höheren Geometrie an der Universität in Lüttich.

Herr Prof. Em. Weyr entwickelt in der am 6. Mai 1876 der kaiserlichen Akademie vorgelegten Abhandlung: „Über die projectivische Beziehung zwischen den singulären Elementen einer cubischen Involution“ eine Relation zwischen den Doppelpunkten und den Verzweigungselementen einer cubischen Involution. Es dürfte daher nicht unpassend sein, an dieser Stelle auf eine bemerkenswerthe involutorische Relation zwischen den singulären Elementen zweier cubischen Involutionen mit gemeinsamen Doppelpunkten hinzuweisen.

Es seien:

$$a_x^3 = a_0x^3 + 3a_1x^2y + 3a_2xy^2 + a_3y^3 = 0,$$

$$b_x^3 = b_0x^3 + 3b_1x^2y + 3b_2xy^2 + b_3y^3 = 0,$$

die Gleichungen zweier Tripel einer cubischen Involution:

$$a_x^3 + \lambda b_x^3 = 0 \tag{1}$$

Bekanntlich ergeben sich die vier Doppelpunkte $d_1d_2d_3d_4$ dieser Involution aus der Gleichung:

$$J_x^4 = (ab)a_x^2b_x^2 = 0. \tag{1}$$

Bezeichnet man mit I die Invariante $(ab)^3$, mit p und π zwei lineare Covarianten des Systemes der beiden cubischen Formen

¹ Em. Weyr: Erzeugung der algebraischen Curven durch projectivische Involutionen. Mathem. Ann. Bd. III, Seite 35.

a_x^3, b_x^3 ,⁴ so erhält man die Verzweigungselemente $v_1 v_2 v_3 v_4$ unserer Involution aus der Gleichung:

$$\Psi_x^4 = -3(IJ_x^4 + 3pa_x^3 + 3\pi b_x^3) = 0.$$

Nun kann man eine cubische Involution in folgender Art definiren:

Die gemeinschaftlichen Tripel der beiden cubischen Involuntionen zweiter Stufe:

$$\left. \begin{aligned} a_0 x x_1 x_2 + a_1 (x x_1 y_2 + y x_1 x_2 + y_1 x x_2) + a_2 (x y_1 y_2 + x_1 y y_2) \\ + x_2 y y_1 + a_3 y y_1 y_2 = 0, \\ b_0 x x_1 x_2 + b_1 (x x_1 y_2 + y x_1 x_2 + y_1 x x_2) + b_2 (x y_1 y_2 + x_1 y y_2) \\ + x_2 y y_1 + b_3 y y_1 y_2 = 0. \end{aligned} \right\} (2)$$

bilden eine cubische Involution erster Stufe. Denn eliminirt man

z. B. $\frac{x}{y}$ aus diesen beiden Gleichungen, so erkennt man sofort,

dass zwischen den Elementen $\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}$ die Relation besteht:

$$\left| \begin{array}{ll} a_0 x_1 x_2 + a_1 (x_1 y_2 + x_2 y_1) + a_2 y_1 y_2, & a_1 x_1 x_2 + a_2 (x_1 y_2 + x_2 y_1) + a_3 y_1 y_2, \\ b_0 x_1 x_2 + b_1 (x_1 y_2 + x_2 y_1) + b_2 y_1 y_2, & b_1 x_1 x_2 + b_2 (x_1 y_2 + x_2 y_1) + b_3 y_1 y_2, \end{array} \right| =$$

oder wenn man entwickelt:

$$\begin{aligned} & x_1^2 [(a_0 b_1 - a_1 b_0) x_2^2 + (a_0 b_2 - a_2 b_0) x_2 y_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) y_2^2] \\ & + x_1 y_1 [(a_0 b_2 - a_2 b_0) x_2^2 + (a_0 b_3 - a_3 b_0) x_2 y_2 + (a_1 b_3 - a_3 b_1) y_2^2] \\ & + y_1^2 [(a_1 b_2 - a_2 b_1) x_2^2 + (a_1 b_3 - a_3 b_1) x_2 y_2 + (a_2 b_3 - a_3 b_2) y_2^2] = 0 \quad (3) \end{aligned}$$

Um die Doppelpunkte dieser Involution zu erhalten, genügt es, $x_1 = x_2, y_1 = y_2$ zu setzen, wodurch man erhält:

$$\begin{aligned} & x_1^4 (a_0 b_1 - a_1 b_0) + 2x_1^3 y_1 (a_0 b_2 - a_2 b_0) + x_1^2 y_1^2 [3(a_1 b_2 - a_2 b_1) + \\ & + (a_0 b_3 - a_3 b_0)] + 2x_1 y_1^3 (a_1 b_3 - a_3 b_1) + y_1^4 (a_2 b_3 - a_3 b_2) = 0 \quad (4) \end{aligned}$$

Es besitzt somit die Involution (2) dieselben Doppelpunkte wie die Involution (1), da die Gleichung (4) offenbar identisch ist mit der Gleichung $(ab)a_x^2 b_x^2 = 0$.

⁴ Die Bezeichnungen sind nach Clebsch gewählt. Theorie der algebr. Formen S. 223.

Was nun die Verzweigungselemente dieser neuen cubischen Involution betrifft, so erhält man sie, wenn man die Discriminante von (3) als quadratische Form von x_1, y_1 verschwinden lässt, denn das ist die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass einem Elemente $\frac{x_2}{y_2}$ zwei zusammenfallende Elemente $\frac{x_1}{y_1}$ entsprechen.

Setzt man:

$$\theta_x^2 = (ab)^2 a_x b_x, \quad \Delta_x = (aa')^2 a_x a'_x, \quad \nabla_x = (bb') b_x b'_x,$$

so ergibt sich als Gleichung für die Verzweigungselemente der Involution (2):

$$\varphi_x^4 = [\theta_x^2]^2 - \Delta_x^2 \nabla_x^2 = 0.$$

Da man leicht nachweist, dass:

$$\Psi_x^4 - 9\varphi_x^4 + 12JJ_x^4 \equiv 0$$

ist, so hat man das folgende Theorem:

„Die Verzweigungselemente $v_1 v_2 v_3 v_4, v'_1 v'_2 v'_3 v'_4$ zweier cubischen Involutionen mit gemeinschaftlichen Doppelementen $d_1 d_2 d_3 d_4$ und diese Doppelemente selbst sind drei Quadrupel einer biquadratischen Involution“.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse](#)

Jahr/Year: 1880

Band/Volume: [81_2](#)

Autor(en)/Author(s): Paige C. Le

Artikel/Article: [Über eine Relation zwischen den singulären Elementen cubischer Involutionen. 159-161](#)