Über eine Relation zwischen den singulären Elementen cubischer Involutionen.

Von **C. Le Paige**,

Professor der Mathematik und höheren Geometrie an der Universität in Lüttich.

Herr Prof. Em. Weyr entwickelt in der am 6. Mai 1876 der kaiserlichen Akademie vorgelegten Abhandlung: „Über die projectivische Beziehung zwischen den singulären Elementen einer cubischen Involution“ eine Relation zwischen den Doppelelementen und den Verzweigungselementen einer cubischen Involution. Es dürfte daher nicht unpassend sein, an dieser Stelle auf eine bemerkenswerthe involutorische Relation zwischen den singulären Elementen zweier cubischen Involutionen mit gemeinsamen Doppelelementen hinzuweisen.

Es seien:

$$a_x^3 = a_0x^3 + 3a_1x^2y + 3a_2xy^2 + a_3y^3 = 0,$$
$$b_x^3 = b_0x^3 + 3b_1x^2y + 3b_2xy^2 + b_3y^3 = 0,$$

die Gleichungen zweier Tripel einer cubischen Involution:

$$a_x^3 + \lambda b_x^3 = 0 \tag{1}$$

Bekanntlich ergeben sich die vier Doppelelemente $d_1 d_2 d_3 d_4$ dieser Involution aus der Gleichung:

$$J_x^4 = (ab)a_x^2 b_x^2 = 0.$$ [1]

Bezeichnet man mit I die Invariante $(ab)^3$, mit p und π zwei lineare Covarianten des Systemes der beiden cubischen Formen

[1] Em. Weyr: Erzeugung der algebraischen Curven durch projectivische Involutionen. Mathem. Ann. Bd. III. Seite 35.

a_x^3, b_x^3,[1] so erhält man die Verzweigungselemente $v_1 v_2 v_3 v_4$ unserer Involution aus der Gleichung:

$$\Psi_x^4 = -3(IJ_x^4 + 3pa_x^3 + 3\pi b_x^3) = 0.$$

Nun kann man eine cubische Involution in folgender Art definiren:

Die gemeinschaftlichen Tripel der beiden cubischen Involutionen zweiter Stufe:

$$\left.\begin{aligned} a_0 xx_1x_2 + a_1(xx_1y_2 + yx_1x_2 + y_1xx_2) + a_2(xy_1y_2 + x_1yy_2 \\ + x_2yy_1) + a_3yy_1y_2 = 0, \\ b_0 xx_1x_2 + b_1(xx_1y_2 + yx_1x_2 + y_1xx_2) + b_2(xy_1y_2 + x_1yy_2 \\ + x_2yy_1) + b_3yy_1y_2 = 0. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

bilden eine cubische Involution erster Stufe. Denn eliminirt man z. B. $\frac{x}{y}$ aus diesen beiden Gleichungen, so erkennt man sofort, dass zwischen den Elementen $\frac{x_1}{y_1}$, $\frac{x_2}{y_2}$ die Relation besteht:

$$\begin{vmatrix} a_0x_1x_2 + a_1(x_1y_2 + x_2y_1) + a_2y_1y_2, & a_1x_1x_2 + a_2(x_1y_2 + x_2y_1) + a_3y_1y_2, \\ b_0x_1x_2 + b_1(x_1y_2 + x_2y_1) + b_2y_1y_2, & b_1x_1x_2 + b_2(x_1y_2 + x_2y_1) + b_3y_1y_2, \end{vmatrix} =$$

oder wenn man entwickelt:

$$\begin{aligned} & x_1^2[(a_0b_1 - a_1b_0)x_2^2 + (a_0b_2 - a_2b_0)x_2y_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)y_2^2] \\ & + x_1y_1[(a_0b_2 - a_2b_0)x_2^2 + (a_0b_3 - a_3b_0)x_2y_2 + (a_1b_3 - a_3b_1)y_2^2] \\ & + y_1^2[(a_1b_2 - a_2b_1)x_2^2 + (a_1b_3 - a_3b_1)x_2y_2 + (a_2b_3 - a_3b_2)y_2^2] = 0 \quad (3) \end{aligned}$$

Um die Doppelelemente dieser Involution zu erhalten, genügt es, $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ zu setzen, wodurch man erhält:

$$\begin{aligned} & x_1^4(a_0b_1 - a_1b_0) + 2x_1^3y_1(a_0b_2 - a_2b_0) + x_1^2y_1^2[3(a_1b_2 - a_2b_1) + \\ & + (a_0b_3 - a_3b_0)] + 2x_1y_1^3(a_1b_3 - a_3b_1) + y_1^4(a_2b_3 - a_3b_2) = 0 \quad (4) \end{aligned}$$

Es besitzt somit die Involution (2) dieselben Doppelpunkte wie die Involution (1), da die Gleichung (4) offenbar identisch ist mit der Gleichung $(ab)a_x^2b_x^2 = 0$.

---

[1] Die Bezeichnungen sind nach Clebsch gewählt. Theorie der algebr. Formen S. 223.

Was nun die Verzweigungselemente dieser neuen cubischen Involution betrifft, so erhält man sie, wenn man die Discriminante von (3) als quadratischer Form von x_1, y_1 verschwinden lässt, denn das ist die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass einem Elemente $\frac{x_2}{y_2}$ zwei zusammenfallende Elemente $\frac{x_1}{y_1}$ entsprechen.

Setzt man:

$$\theta_x^2 = (ab)^2 a_x b_x, \quad \Delta_x = (aa')^2 a_x a'_x, \quad \nabla_x = (bb')b_x b'_x,$$

so ergibt sich als Gleichung für die Verzweigungselemente der Involution (2):

$$\varphi_x^4 = [\theta_x^2]^2 - \Delta_x^2 \nabla_x^2 = 0.$$

Da man leicht nachweist, dass:

$$\Psi_x^4 - 9\varphi_x^4 + 12 IJ_x^4 \equiv 0$$

ist, so hat man das folgende Theorem:

„Die Verzweigungselemente $v_1 v_2 v_3 v_4$, $v'_1 v'_2 v'_3 v'_4$ zweier cubischen Involutionen mit gemeinschaftlichen Doppelelementen $d_1 d_2 d_3 d_4$ und diese Doppelelemente selbst sind drei Quadrupel einer biquadratischen Involution".