

Bemerkung über Herrn C. Le Paige's Abhandlung: „Über eine Relation zwischen den singulären Ele- menten cubischer Involutionen.“

Von Emil Weyr.

1. Wenn eine cubische Involution (erster Stufe) J_3 gegeben ist, so besitzt sie vier Doppelemente $d_1 d_2 d_3 d_4$, welche zugleich Doppelemente einer ganz bestimmten zweiten cubischen Involution J'_3 sind. In dieser Art ist jeder cubischen Involution eine andere Involution beigeordnet.

Als einander beigeordnete cubische Involutionen hat man somit solche zu betrachten, welche die vier Doppelemente gemeinschaftlich haben. Ich habe an einer anderen Stelle¹ gezeigt, wie man die beiden Involutionen dritten Grades bestimmen kann, welche durch vier Elementenpaare bestimmt erscheinen (l. c. Art. 40). Sind z. B: vier Punktpaare $a_1 a_2 b_1 b_2 c_1 c_2, d_1 d_2$ auf einem Kegelschnitte gegeben, so bestimmen die Verbindungslinien dreier zum Beispiele die Geraden $b_1 b_2, c_1 c_2, d_1 d_2$ ein Dreiseit, dessen drei Ecken aus a_1 und a_2 auf den Kegelschnitt projicirt drei Punktpaare liefern, welche, als entsprechende Punkte einer projectivischen Beziehung aufgefasst, zwei Doppelpunkte $a_3 a'_3$ bestimmen. Die Gruppe $a_1 a_2 a_3$ gehört dann als Tripel der einen und $a_1 a_2 a'_3$ gehört als Tripel der anderen durch die vier Punktpaare bestimmten cubischen Involution an.

Wenn a_1 und a_2 zusammenfallen, ein Doppelement der cubischen Involution bildend, so hat man die Ecken des Dreiseits $b_1 b_2, c_1 c_2, d_1 d_2$ aus a , auf den Kegelschnitt zu projiciren, erhält

¹ Grundzüge einer Theorie der cubischen Involutionen. Abhdlg. der k. b. Gesellschaft der Wissenschaften in Prag, 1874.

hierdurch ein neues Dreieck (Dreieck), welches mit ersterem perspectivisch liegt und die Perspectivitätsaxe beider trifft den Kegelschnitt in zwei Punkte, welche dem Doppелеlemente $a_1 a_2$ in den beiden Involutionen als Verzweigungselemente zukommen. Fallen auch $b_2 c_2 d_2$, respective mit $b_1 c_1 d_1$ zusammen, so hat man auf dem Kegelschnitte die vier Doppелеlemente beliebig gelegen. Sie sollen $d_1 d_2 d_3 d_4$ heissen. Durch sie sind zwei einander beigeordnete cubische Involutionen bestimmt, deren Verzweigungspunkte den Doppelpunkten entsprechend $v_1 v_2 v_3 v_4, v'_1 v'_2 v'_3 v'_4$ respective sein sollen. Man erhält die letzteren, z. B. v_1 und v'_1 , in folgender Weise:

Die Tangenten des Kegelschnittes in den Punkten $d_2 d_3 d_4$ bilden ein Dreieck, dessen Ecken wir aus d_1 auf den Kegelschnitt projiciren; hiedurch ergibt sich ein mit dem ersteren perspectivisches Dreieck und die Perspectivitätsaxe beider schneidet den Kegelschnitt in den zwei Punkten $v_1 v'_1$.

Genau so erhält man die drei übrigen Paare der Verzweigungselemente.

Nach dem Satze des Herrn Professors Le Paige gehören die vier Gruppen $d_1 d_2 d_3 d_4, v_1 v_2 v_3 v_4, v'_1 v'_2 v'_3 v'_4$, einer Involution vierten Grades an.

2. Beigeordnete Involutionen kann man vortheilhaft an den Curven dritter Classe vierter Ordnung studiren. Es sei C_4^3 eine solche Curve, dieselbe besitzt drei Rückkehrpunkte $s_1 s_2 s_3$ und eine Doppeltangente, deren Berührungspunkte $\delta \delta'$ die Doppелеlemente der durch $s_1 s_2 s_3$ bestimmten cyclischen Projectivität sind (oder dreifache Elemente einer cubischen Involution, für welche $s_1 s_2 s_3$ ein Tripel darstellt). Wählt man auf C_4^3 einen beliebigen Punkt s , dessen Tangente S die Curve in den zwei conjugirten Punkten $s' s''$ schneiden möge, so ist klar, dass die durch s' gehenden Strahlen auf C_4^3 Punktetripel einer cubischen Involution bestimmen, für welche $s s_1 s_2 s_3$ die vier Doppелеlemente sind; ebenso bestimmen die durch s'' gehenden Strahlen auf C_4^3 eine cubische Involution mit denselben Doppelpunkten. Man hat daher den Satz:

„Die zwei cubischen Punktinvolutionen, welche auf einer Curve vierter Ordnung dritter Classe durch die aus zwei con-

jugirten Punkten der Curve¹ gezogenen Strahlen auf ihr bestimmt werden, sind einander beigeordnet, das heisst sie haben dieselben vier Doppelpunkte. Diese Doppelpunkte sind: Die drei Rückkehrpunkte der Curve und der Berührungspunkt der Curve mit der Verbindungslinie der beiden conjugirten Punkte.“

Diese zwei beigeordneten Involutionen sind ganz allgemeiner Natur, da man von den vier Doppelementen $d_1 d_2 d_3 d_4$ einer cubischen Involution beliebige drei als Bilder der drei Rückkehrpunkte $s_1 s_2 s_3$ einer Curve C_4^3 dritter Classe vierter Ordnung betrachten kann, wodurch das vierte Doppelement das Bild eines vierten Punktes s der Curve C_4^3 wird und der Fall auf den obigen zurückgeführt erscheint.

Aus der Betrachtung der beiden centralen cubischen Involutionen $s' s''$ folgt sofort, dass s'' das dem Doppelemente s entsprechende Verzweigungselement der centralen Involution s' und ebenso s' das dem s entsprechende Verzweigungselement der centralen Involution s'' ist. Nun sind $s' s''$ conjugirte Punkte bilden also mit $\delta \delta'$ ein harmonisches System. Aber $\delta \delta'$ sind die Doppelemente der durch $s_1 s_2 s_3$ bestimmten cyclischen Projectivität. Wir haben also den Satz:

„Die beiden Verzweigungselemente, welche einem Doppelemente in zwei beigeordneten cubischen Involutionen entsprechen, werden harmonisch getrennt von den Doppelementen der cyclischen Projectivität, welche durch die drei übrigen Doppelemente der beiden cubisch Involutionen bestimmt wird.“

Wenn der Punkt s in einen der Punkte $\delta \delta'$ fällt, so liegen im anderen die beiden Punkte $s' s''$ vereinigt und die beiden beigeordneten Involutionen werden identisch. Also:

„Wenn von den vier Doppelementen einer cubischen Involution das eine auch ein Doppelement der durch die drei übrigen bestimmten cyclischen Projectivität ist, so ist die cubische Involution identisch mit ihrer beigeordneten Involution.“

Berührungspunkte conjugirter, das heisst sich auf der Curve schneidender Tangenten.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse](#)

Jahr/Year: 1880

Band/Volume: [81_2](#)

Autor(en)/Author(s): Weyr Emil

Artikel/Article: [Bemerkung über Herrn C. Le Paige's Abhandlung: "Über eine Relation zwischen den singulären Elementen cubischer Involutionen." 162-164](#)