

Bemerkung über Herrn C. Le Paige's Abhandlung: „Über eine Relation zwischen den singulären Elementen cubischer Involutionen."

Von **Emil Weyr.**

1. Wenn eine cubische Involution (erster Stufe) J_3 gegeben ist, so besitzt sie vier Doppelelemente $d_1\, d_2\, d_3\, d_4$, welche zugleich Doppelelemente einer ganz bestimmten zweiten cubischen Involution J'_3 sind. In dieser Art ist jeder cubischen Involution eine andere Involution beigeordnet.

Als einander beigeordnete cubische Involutionen hat man somit solche zu betrachten, welche die vier Doppelelemente gemeinschaftlich haben. Ich habe an einer anderen Stelle[1] gezeigt, wie man die beiden Involutionen dritten Grades bestimmen kann, welche durch vier Elementenpaare bestimmt erscheinen (l. c. Art. 40). Sind z. B: vier Punktpaare $a_1\, a_2\; b_1\, b_2\; c_1\, c_2$, $d_1\, d_2$ auf einem Kegelschnitte gegeben, so bestimmen die Verbindungslinien dreier zum Beispiele die Geraden $b_1\, b_2$, $c_1\, c_2$, $d_1\, d_2$ ein Dreiseit, dessen drei Ecken aus a_1 und a_2 auf den Kegelschnitt projicirt drei Punktepaare liefern, welche, als entsprechende Punkte einer projectivischen Beziehung aufgefasst, zwei Doppelpunkte $a_3\, a'_3$ bestimmen. Die Gruppe $a_1\, a_2\, a_3$ gehört dann als Tripel der einen und $a_1 a_2 a'_3$ gehört als Tripel der anderen durch die vier Punktpaare bestimmten cubischen Involution an.

Wenn a_1 und a_2 zusammenfallen, ein Doppelelement der cubischen Involution bildend, so hat man die Ecken des Dreiseits $b_1\, b_2$, $c_1\, c_2$, $d_1\, d_2$ aus a_1 auf den Kegelschnitt zu projiciren, erhält

[1] Grundzüge einer Theorie der cubischen Involutionen. Abhdlg. der k. b. Gesellschaft der Wissenschaften in Prag, 1874.

hierdurch ein neues Dreiseit (Dreieck), welches mit ersterem perspectivisch liegt und die Perspectivitätsaxe beider trifft den Kegelschnitt in zwei Punkte, welche dem Doppelelemente a_1 a_2 in den beiden Involutionen als Verzweigungselemente zukommen. Fallen auch b_2 c_2 d_2, respective mit b_1 c_1 d_1 zusammen, so hat man auf dem Kegelschnitte die vier Doppelelemente beliebig gelegen. Sie sollen d_1 d_2 d_3 d_4 heissen. Durch sie sind zwei einander beigeordnete cubische Involutionen bestimmt, deren Verzweigungspunkte den Doppelpunkten entsprechend υ_1 υ_2 υ_3 υ_4, υ'_1 υ'_2 υ'_3 υ'_4 respective sein sollen. Man erhält die letzteren, z. B. υ_1 und υ'_1, in folgender Weise:

Die Tangenten des Kegelschnittes in den Punkten $d_2 d_3 d_4$ bilden ein Dreieck, dessen Ecken wir aus d_1 auf den Kegelschnitt projiciren; hiedurch ergibt sich ein mit dem ersteren perspectivisches Dreieck und die Perspectivitätsaxe beider schneidet den Kegelschnitt in den zwei Punkten υ_1 υ'_1.

Genau so erhält man die drei übrigen Paare der Verzweigungselemente.

Nach dem Satze des Herrn Professors Le Paige gehören die vier Gruppen d_1 d_2 d_3 d_4, υ_1 υ_2 υ_3 υ_4, υ'_1 υ'_2 υ'_3 υ'_4, einer Involution vierten Grades an.

2. Beigeordnete Involutionen kann man vortheilhaft an den Curven dritter Classe vierter Ordnung studiren. Es sei C_4^3 eine solche Curve, dieselbe besitzt drei Rückkehrpunkte s_1 s_2 s_3 und eine Doppeltangente, deren Berührungspunkte δ δ' die Doppelelemente der durch s_1 s_2 s_3 bestimmten cyclischen Projectivität sind (oder dreifache Elemente einer cubischen Involution, für welche s_1 s_2 s_3 ein Tripel darstellt). Wählt man auf C_4^3 einen beliebigen Punkt s, dessen Tangente S die Curve in den zwei conjugirten Punkten s' s'' schneiden möge, so ist klar, dass die durch s' gehenden Strahlen auf C_4^3 Punktetripel einer cubischen Involution bestimmen, für welche s s_1 s_2 s_3 die vier Doppelelemente sind; ebenso bestimmen die durch s'' gehenden Strahlen auf C_4^3 eine cubische Involution mit denselben Doppelpunkten. Man hat daher den Satz:

„Die zwei cubischen Punktinvolutionen, welche auf einer Curve vierter Ordnung dritter Classe durch die aus zwei conjugirten Punkten der Curve[1] gezogenen Strahlen auf ihr bestimmt werden, sind einander beigeordnet, das heisst sie haben dieselben vier Doppelpunkte. Diese Doppelpunkte sind: Die drei Rückkehrpunkte der Curve und der Berührungspunkt der Curve mit der Verbindungslinie der beiden conjugirten Punkte."

Diese zwei beigeordneten Involutionen sind ganz allgemeiner Natur, da man von den vier Doppelelementen $d_1\ d_2\ d_3\ d_4$ einer cubischen Involution beliebige drei als Bilder der drei Rückkehrpunkte $s_1\ s_2\ s_3$ einer Curve C^3_4 dritter Classe vierter Ordnung betrachten kann, wodurch das vierte Doppelelement das Bild eines vierten Punktes s der Curve C^3_4 wird und der Fall auf den obigen zurückgeführt erscheint.

Aus der Betrachtung der beiden centralen cubischen Involutionen $s'\ s''$ folgt sofort, dass s'' das dem Doppelelemente s entsprechende Verzweigungselement der centralen Involution s' und ebenso s' das dem s entsprechende Verzweigungselement der centralen Involution s'' ist. Nun sind $s'\ s''$ conjugirte Punkte bilden also mit $\delta\ \delta'$ ein harmonisches System. Aber $\delta\ \delta'$ sind die Doppelelemente der durch $s_1\ s_2\ s_3$ bestimmten cyclischen Projectivität. Wir haben also den Satz:

„Die beiden Verzweigungselemente, welche einem Doppelelemente in zwei beigeordneten cubischen Involutionen entsprechen, werden harmonisch getrennt von den Doppelelementen der cyclischen Projectivität, welche durch die drei übrigen Doppelelemente der beiden cubisch Involutionen bestimmt wird."

Wenn der Punkt s in einen der Punkte $\delta\ \delta'$ fällt, so liegen im anderen die beiden Punkte $s'\ s''$ vereinigt und die beiden beigeordneten Involutionen werden identisch. Also:

„Wenn von den vier Doppelelementen einer cubischen Involution das eine auch ein Doppelelement der durch die drei übrigen bestimmten cyclischen Projectivität ist, so ist die cubische Involution identisch mit ihrer beigeordneten Involution."

---

[1] Berührungspunkte conjugirter, das heisst sich auf der Curve schneidender Tangenten.