©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Zur Construction der Schmiegungsebene der Durchdringungscurve zweier Flächen zweiter Ordnung.

Von **Heinrich Drasch,**

Professor an der k. k. Oberrealschule in Steyr.

(Mit 1 Tafel.)

Unter den Singularitäten der Projection einer Raumcurve bietet der Rückkehrpunkt dann ein besonderes Interesse, wenn er nicht einem stationären Punkte der Raumcurve entspricht, sondern wenn er sein Entstehen dem Umstande verdankt, dass das Projectionscentrum auf einer Tangente der Raumcurve liegt.

Der Berührungspunkt dieser Tangente entspricht dann dem Rückkehrpunkte im Bilde und die Rückkehrtangente ist dann bekanntlich die Spur der Schmiegungsebene des dem Rückkehrpunkte entsprechenden Punktes der Raumcurve in der Projectionsebene. Die Construction der Rückkehrtangente der Projection fällt demnach zusammen mit der Construction der Schmiegungsebene für einen bestimmten Punkt der Raumcurve.

Die analytische Geometrie gibt die Gleichung der Schmiegungsebene für einen Punkt der Durchdringungscurve zweier Flächen zweiter Ordnung als solche vom ersten Grad für die Coordinaten des Berührungspunktes.

Zweck vorliegender Abhandlung ist nun die Entwicklung dieser Aufgabe auf rein synthetische Art, wodurch speciell für die graphische Lösung dieses Problems Anhaltspunkte gewonnen werden, welche vielleicht nicht ganz ohne Interesse sind.

Die Methode der Entwicklung, welche nur auf der allgemeinsten Eigenschaft der Raumcurve basirt werden soll, wird auf diese Weise zugleich den Character der allgemeinen Anwendbarkeit gewinnen.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Da diese Durchdringungscurve eine Curve vierter Ordnung ist, so wird sie von jeder Ebene in vier Punkten, demnach von jeder eine Tangente t enthaltenden Ebene in noch zwei Punkten α und β geschnitten; die Verbindungsgerade dieser zwei Punkte wird die Tangente t in einem bestimmten Punkte p schneiden. Macht man nun die Tangente t zum Träger eines Ebenenbüschels, so wird auf die erwähnte Art jeder Ebenenlage eindeutig eine Punktlage p zugewiesen. Fällt nun einer der beiden Punkte α und β mit dem Berührungspunkte b der Tangente t zusammen, so sind in b drei unendlich nahe gelegene Curvenpunkte vereinigt und die betreffende Ebene des Ebenenbüschels t wird nun zur Schmiegungsebene des Curvenpunktes b.

Nun sind aber der Ebenenbüschel t und die in dem Träger t liegende Punktreihe p projectivisch, weil jeder Ebenenlage eindeutig eine Punktlage und auch umgekehrt jeder Punktlage p eindeutig eine Ebenenlage entspricht, welch' letztere Behauptung in folgender Weise gerechtfertigt erscheint; jeder Punkt im Raume bestimmt mit der Durchdringungscurve eine Fläche zweiter Ordnung, welche sie ganz enthält; diese Fläche ist eine Regelfläche, wenn der Raumpunkt auf einer Curventangente liegt.

Durch jeden Punkt der Reihe p geht demnach ausser der Erzeugenden des einen Systems t nur noch eine Erzeugende des andern Systems, welche also die Raumcurve in zwei Punkten schneidet, welche zwei Punkte mit t eine Ebene eindeutig bestimmen.

Auch eine andere Betrachtung, die besonders der constructiven Behandlung dieser Aufgabe mit Vortheil zu Grunde gelegt werden kann, zeigt, dass jeder Punktlage p nur eine einzige Ebene des Büschels t entspricht.

Wird nämlich die Raumcurve aus einem Punkte der Reihe p projicirt, so hat die Projection auf eine beliebige Ebene nur einen Doppelpunkt, weil sich durch jeden Punkt im Raume nur zwei Gerade ziehen lassen, welche die Eigenschaft haben, die Raumcurve zweimal zu schneiden, die Tangente aber, als eine dieser zwei Geraden, keinen Doppelpunkt im Bilde der Raumcurve hervorbringt. Obwohl nun dieser eine Doppelpunkt isolirt werden kann, so ist doch der denselben projicirende Strahl reell,

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

weil er eigentlich nur die gemeinschaftliche Secante zweier Kegelschnitte ist, die sich in einem Punkte berühren. Denkt man sich nämlich beide Flächen zweiter Ordnung durch den Ebenenbüschel geschnitten, so ergeben sich die Punkte der Durchdringungscurve zu je zweien als die gemeinschaftlichen Punkte zweier Kegelschnitte, welche sich im Berührungspunkte b der Tangente t mit der Raumcurve berühren, deren gemeinschaftliche Secante daher immer reell ist, wenn auch die gemeinsamen Punkte imaginär sind. Nachdem so die Projectivität zwischen der Punktreihe p und dem Ebenenbüschel t nachgewiesen ist, ergibt sich die Schmiegungsebene des Punktes b als die demselben entsprechende Ebene des Büschels t. Drei Ebenen und die denselben entsprechenden Punkte bestimmen die Projectivität.

Für die constructive Behandlung erscheint es im Allgemeinen am zweckmässigsten zu sein, die zwei Berührungsebenen zu benützen, welche man durch den Punkt b an beide Flächen zweiter Ordnung legen kann, weil dann wenigstens der eine der beiden Kegelschnitte sich auf zwei Gerade reducirt.

Es sei uns nun gestattet, die hier angegebene theoretische Entwicklung an einem Beispiele constructiv zur Durchführung zu bringen.

Die zwei Flächen zweiter Ordnung seien zwei Kegelflächen, s und S (Fig. 1.) ihre Spitzen und die zwei in der ersten Projectionsebene liegenden Kreise k und K ihre Leitlinien. Da die Curventangente des Punktes b als Schnittlinie der zwei verticalprojicirenden Berührungsebenen A und C (A_h, A_v und C_h, C_v ihre Tracen in den beiden Projectionsebenen) auch verticalprojicirend ist, so ist b'' Rückkehrpunkt für die verticale Projection der Durchdringungscurve. Um nun die Projectivität zwischen dem Ebenenbüschel t und der Punktreihe t herzustellen, wählen wir die drei Ebenen A, C und M, von welchen A und C an je eine Fläche berührend gelegt sind, die dritte M, parallel zur Ebene der beiden Leitlinien, beide Flächen in Kreisen schneidet. Die Ebene A berührt den Kegel s längs der Erzeugenden sd und schneidet den Kegel S in einer Curve, welche jedoch nicht verzeichnet zu werden braucht; denn die gemeinschaftliche Secante der beiden in der Ebene A liegenden Kegelschnitte reducirt sich hier auf die Tangente desjenigen Punktes e, in welchem die Er-

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

zeugende sd obige Curve schneidet; diese Tangente ergibt sich aber einfach als die Schnittlinie von zwei Berührungsebenen, von welchen die eine den Kegel s längs der Erzeugenden sd, die andere den Kegel S längs der Erzeugenden Sr berührt, welche mit sd in einer Ebene liegt und demnach von ihr geschnitten wird.

α ist der Schnitt der Horizontaltracen der beiden Berührungsebenen, welcher mit e' verbunden, die verlangte Tangente (Secante) gibt und welche im Schnittpunkte a' mit t' den der Ebene A entsprechenden Punkt liefert.

Ähnliches gilt auch für die Construction des der Ebene C entsprechenden Punktes c'; die Ebene C berührt den Kegel S längs der Erzeugenden Sb und schneidet den Kegel s nach einer Curve; die gemeinschaftliche Secante ist wieder die Tangente des Punktes h', in welchem die Curve von der Erzeugenden Sb geschnitten wird, sie ist somit die Schnittlinie zweier Berührungsebenen, deren eine den Kegel S längs der Erzeugenden Sb, die andere den Kegel s längs der Erzeugenden su berührt, welche mit der Erzeugenden Sb in einer Ebene liegt und daher von ihr geschnitten wird; β ist der Schnitt der Horizontaltracen, welcher mit h' verbunden, im Schnitt c' mit t' den der Ebene C entsprechenden Punkt gibt.

Die Ebene M endlich schneidet beide Kegel nach Kreisen; ihre gemeinschaftliche Secante liegt daher im Unendlichen, weshalb der der Ebene M entsprechende Punkt m' auf t' im Unendlichen liegt. Die in der Hauptaxe liegende Punktreihe $(\alpha)\,(\gamma)\,\infty$ ist perspectivisch zum Ebenenbüschel A, C, M; macht man nun auf der Geraden M_v $ac = a'c'$, so ist die Punktreihe $ac\infty$ projectivisch zur Punktreihe $(\alpha)\,(\gamma)\,\infty$ und auch perspectivisch; der Schnittpunkt der Verbindungsgeraden $\bar{a}(\alpha)$ und $\bar{c}(\gamma)$ gibt das perspectivische Centrum σ, durch welches man, wenn noch $ab = a'b'$ gemacht wird, den Punkt x als entsprechend zu b und in xb'' die Verticaltrace der Schmiegungsebene für den Curvenpunkt b als Rückkehrtangente des Punktes b'' erhält.

Es sei uns hier gestattet, auf die reciproke Übertragung dieser ganzen, für die Durchdringungscurve zweier Kegelflächen, gegebenen Entwicklung hinzuweisen, indem in derselben Anhaltspunkte liegen für die constructive Lösung einer auf osculirende

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Kegelschnitte Bezug habende Aufgabe, welche vielleicht auch einiges Interesse verdient.

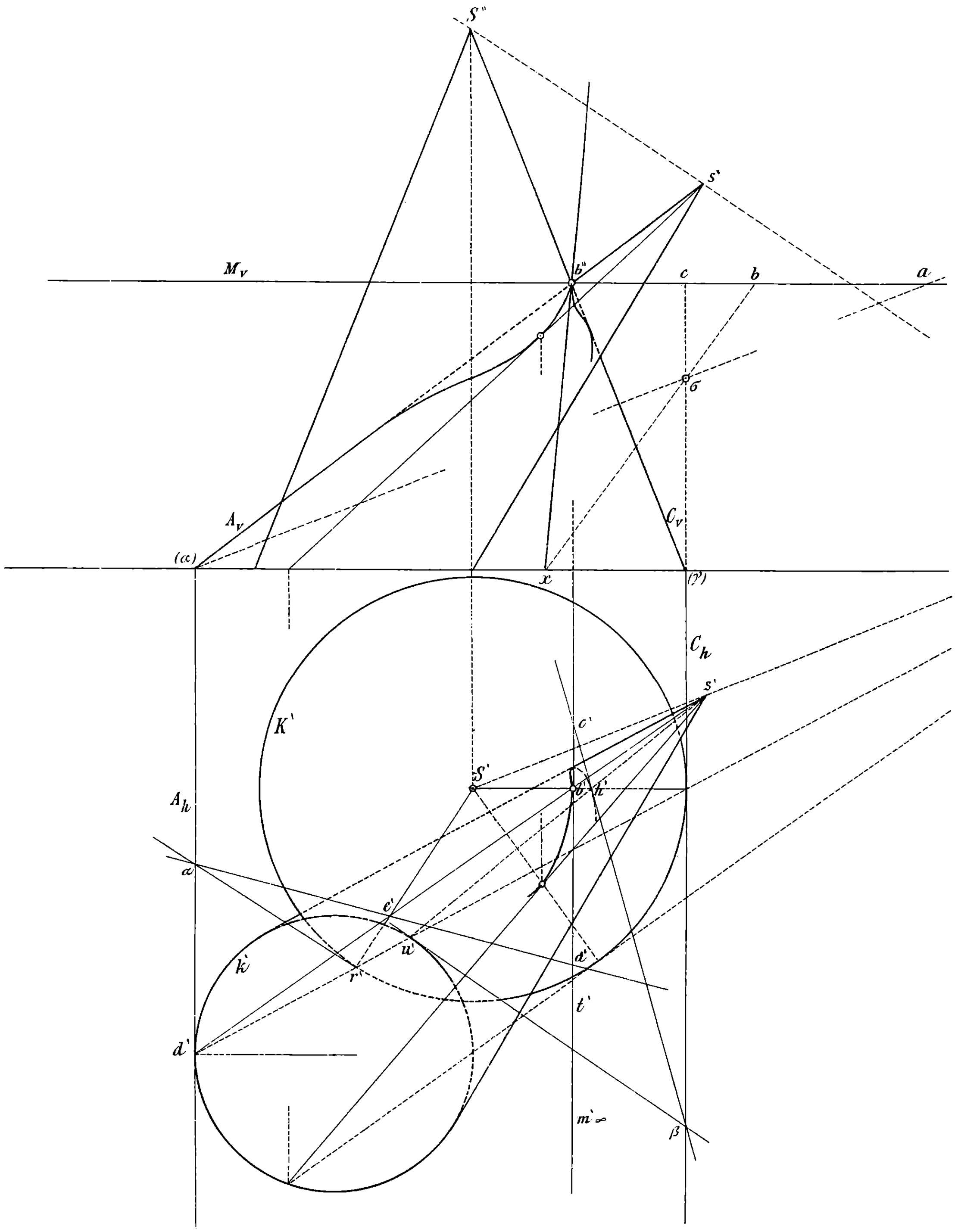
Mit Rücksicht nämlich darauf, dass die Schmiegungsebene beide Kegel nach Curven schneidet, die sich osculiren, finden wir in dieser reciproken Übertragung die Mittel zur Auflösung der Aufgabe, welche die punktweise Bestimmung der Rückkehrcurve einer Developpabeln fordert, welche zweien, in verschiedenen Ebenen liegenden Kegelschnitten umschrieben ist, oder was dasselbe ist, das Projectionscentrum zu finden, welches den einen von zweien, in verschiedenen Ebenen, liegenden Kegelschnitten, so auf die Ebene des andern projicirt, dass diese Projection denselben in einem gegebenen Punkte osculirt. Die entsprechende reciproke Übertragung könnte man vielleicht auf folgende Weise ausdrücken:

Jedem Punkte p einer Erzeugenden e der Developpabeln entspricht eindeutig eine durch e gehende Ebene; denn durch p gehen noch zwei Berührungsebenen der entwickelbaren Fläche, deren Schnittlinie d immer reell ist; projicirt man nämlich den einen Kegelschnitt aus p auf die Ebene des zweiten, so erhält man zwei Kegelschnitte, welche sich in einem Punkte berühren, demnach noch zwei gemeinschaftliche Tangenten haben müssen, deren Schnittpunkt immer reell ist. Die Schnittlinie d, welche eben diesen Schnittpunkt aus p projicirt, bildet mit der Erzeugenden e die erwähnte Ebene. Es entspricht aber auch umgekehrt jeder durch e gehenden Ebene eindeutig ein Punkt p auf e; denn jede durch eine Erzeugende der Developpabeln gehende Ebene enthält nur noch eine Gerade, in welcher sich zwei Berührungsebenen schneiden, welche Gerade somit eindeutig den Punkt p auf e bestimmt. Da nun zwei Kegelschnitte sich in einem Punkte osculiren, wenn sie sich in denselben berühren und nur noch eine reelle gemeinsame Tangente besitzen, so hat man in dem der Berührungsebene durch e entsprechenden Punkte p den auf e liegenden Punkt der Rückkehrcurve oder was dasselbe ist, ein Projectionscentrum gefunden, welches den einen Kegelschnitt auf die Ebene des zweiten so projicirt, dass diese Projection denselben osculirt.

Es sei hier bemerkt, dass die Schmiegungsebene für einen Punkt der Durchdringungscurve zweier Kegelflächen auch gefun-

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Drasch: Zur Construction der Schmiegungs Ebene der Durchdringungscurve zweier Flächen II. Ordnung



F. Schima lith.

Sitzungsb. d. k. Akad. d. W. math. naturw. Cl. LXXXI. Bd. II. Abth. 1880.

Druck v. J. Wagner Wien.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

den werden könnte mit Hilfe eines zweiten Kegels, welcher den einen längs der betreffenden Erzeugenden osculirt und den andern entweder einfach oder doppelt berührt und dass ebenso die Rückkehrcurve der Developpabeln, welche zweien Kegelschnitten in verschiedenen Ebenen umschrieben ist, punktweise bestimmt werden könnte durch Kegelschnitte, welche den einen osculiren und den andern in einem oder in zwei Punkten schneiden, doch dürfte die hier angegebene Methode in mancher Beziehung vielleicht vorzuziehen sein.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1880

Band/Volume: 81_2

Autor(en)/Author(s): Drasch Heinrich

Artikel/Article: Zur Construction der Schmiegungsebene der Durchdringungscurve zweier Flächen zweiter Ordnung. 254-259