Über die Bedingungen der algebraischen Theilbarkeit eines ganzen Ausdruckes von n^2 willkürlichen Elementen durch die Determinante der letzteren.

Von **F. Mertens.**

Wenn ein ganzer Ausdruck A der Elemente

$$\begin{matrix} a_1\, a_2 \ldots a_n \\ b_1\, b_2 \,\ldots b_n \\ \\ e_1\, e_2 \,\ldots e_n, \end{matrix} \qquad (1)$$

welche n Zeilen und n Spalten bilden, durch die m^{te} Potenz der Determinante

$$(ab\ldots e) = \Sigma \pm a_1 b_2 \ldots e_n$$

algebraisch theilbar ist, so wird, wenn man allgemein e_i durch

$$p a_i + q b_i + \ldots + t e_i$$

ersetzt, wo unter $p, q, \ldots t$ willkürliche Elemente zu verstehen sind, A durch t^m algebraisch theilbar. Diese Eigenschaft ist aber auch hinreichend, um schliessen zu können, dass A durch $(ab\ldots e)^m$ algebraisch theilbar ist.

Um dies zu beweisen, sei A zunächst homogen und zwar vom Grade k in Bezug auf $e_1, e_2 \ldots e_n$. Setzt man dann statt $e_1, e_2, \ldots e_n$ andere Elemente $e'_1, e'_2, \ldots e'_n$ und hierauf

$$p = (-1)^n (bc\ldots ee') \quad q = (-1)^{n-1} (ac\ldots ee') \ldots t = (ab\ldots e),$$

so wird nach einer bekannten Identität

$$p a_i + q b_i + \ldots + t e'_i \equiv (ab\ldots e') e_i$$

und man hat nach der Annahme eine Identität von der Form

$$(ab\ldots e')^k A \equiv (ab\ldots e)^m P,$$

wo unter P ein ganzer Ausdruck der Elemente (1) und der Elemente $e'_1, e'_2, \ldots e'_n$ zu verstehen ist. Man setze nun

$$e'_1 = e'_2 = \ldots = e'_{n-1} = 0,\ e'_n = 1,$$

wodurch P in Q übergehen möge und bezeichne die Determinante des Elementensystems

$$\begin{matrix} a_1\, a_2 \ldots a_{n-1} \\ b_1\, b_2 \ldots b_{n-1} \\ \\ d_1\, d_2 \ldots d_{n-1}, \end{matrix} \tag{2}$$

welches aus (1) durch Streichung der n^{ten} Zeile und n^{ten} Spalte entspringt, mit $(ab\ldots d)$. Es wird dann

$$(ab\ldots d)^k A \equiv (ab\ldots e)^m Q. \tag{3}$$

Gilt nun die obige Behauptung bereits für ein System von $n-1$ Zeilen mit je $n-1$ Elementen, wie (2), so ersetze man in der Identität (3), wenn i einen der Zeiger $1, 2, \ldots n-1$ bezeichnet, d_i allgemein durch

$$pa_i + qb_i + \ldots + sd_i.$$

Es wird dann $(ab\ldots d)^k$ durch s^k, $(ab\ldots e)^m$ aber nicht durch s theilbar. Daher muss Q algebraisch durch s^k theilbar werden und mithin durch $(ab\ldots d)^k$ theilbar sein, woraus dann

$$A \equiv (ab\ldots e)^m R$$

folgt, wo R einen ganzen Ausdruck der Elemente (1) bezeichnet.

Ist A nicht homogen in Bezug auf $e_1, e_2, \ldots e_n$, so muss, wenn in A e_i durch

$$pa_i + qb_i + \ldots + te_i$$

ersetzt und in Folge dessen A durch t^m theilbar wird, dasselbe mit jedem homogenen Bestandtheile von A der Fall sein; es muss also jeder dieser homogenen Bestandtheile durch $(ab\ldots e)^m$ algebraisch theilbar sein und mithin auch A.

Ist nun $n=2$, so ist die Identität (3) von der Form

$$a_1^k A \equiv (a\,b)^m Q$$

und kann nur bestehen, wenn jedes einzelne Glied von Q den Factor a_1^k enthält.

Um die Brauchbarkeit des vorstehenden Kennzeichens zu zeigen, will ich einige Anwendungen hersetzen.

I. Der Beweis der Multiplicationsregel gestaltet sich mit Hülfe des erwähnten Kennzeichens sehr einfach.

Es seien

$$\begin{matrix} a_1\, a_2 \ldots a_n \\ b_1\, b_2 \ldots b_n \\ \\ e_1\, e_2 \ldots e_n \end{matrix} \qquad (1) \qquad\qquad \begin{matrix} \xi_1\, \xi_2 \ldots \xi_n \\ \eta_1\, \eta_2 \ldots \eta_n \\ \\ \vartheta_1\, \vartheta_2 \ldots \vartheta_n \end{matrix} \qquad (2)$$

zwei Systeme von je n Zeilen mit n Elementen und zur Abkürzung

$$\begin{aligned} a_\xi &\equiv a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + \ldots + a_n\xi_n \\ b_\xi &\equiv b_1\xi_1 + b_2\xi_2 + \ldots + b_n\xi_n \end{aligned}$$

Ersetzt man in der Determinante

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} a_\xi\, a_\eta \ldots a_\vartheta \\ b_\xi\, b_\eta \ldots b_\vartheta \\ \\ e_\xi\, e_\eta \ldots e_\vartheta \end{vmatrix}$$

e_i allgemein durch

$$p a_i + q b_i + \ldots + t e_i,$$

so gehen $e_\xi, e_\eta, \ldots e_\vartheta$ beziehungsweise über in

$$\begin{matrix} p a_\xi + q b_\xi + \ldots + t e_\xi \\ p a_\eta + q b_\eta + \ldots + t e_\eta \\ \\ p a_\vartheta + q b_\vartheta + \ldots + t e_\vartheta \end{matrix}$$

und die Determinante Δ, wenn man die erste Zeile mit $-p$, die zweite mit $-q,\dots$ multiplicirt und zu der letzten Zeile addirt, in $t\Delta$. Es muss also Δ durch die Determinante $(ab\dots e)$ theilbar sein und wenn man

$$\Delta \equiv P(ab\dots e)$$

setzt, so kann P nicht mehr die Elemente (1) enthalten. Man kann daher zur Bestimmung von P $a_1 = b_2 = \dots = e_n = 1$ und alle übrigen Elemente des Systems (1) $= 0$ setzen, wodurch Δ in $(\xi\eta\dots\vartheta)$ und $(ab\dots e)$ in 1 übergeht. Man hat daher

$$P \equiv (\xi\eta\dots\vartheta)$$

und somit

$$\Delta \equiv (ab\dots e)(\xi\eta\dots\vartheta).$$

II. Man denke sich alle Zusammenstellungen von m verschiedenen Zeigern der Reihe $1, 2\dots n$ gebildet und setze unter denselben eine bestimmte Reihenfolge fest. Bezeichnet man dann diejenige Unterdeterminante m^{ten} Grades

$$\begin{vmatrix} a_{\alpha\alpha'} & a_{\alpha\beta'} & \dots & a_{\alpha\varepsilon'} \\ a_{\beta\alpha'} & a_{\beta\beta'} & \dots & a_{\beta\varepsilon'} \\ & & & \\ a_{\varepsilon\alpha'} & a_{\varepsilon\beta'} & \dots & a_{\varepsilon\varepsilon'} \end{vmatrix}$$

der Determinante A des Elementensystems

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}, \end{matrix} \qquad (1)$$

in welcher die Zeiger $\alpha\beta\dots\varepsilon$ die i^{te}, $\alpha'\beta'$ die k^{te} Zusammenstellung bilden, mit d_{ik}, so ist die Determinante

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1\mu} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2\mu} \\ & & & \\ d_{\mu 1} & d_{\mu 2} & \dots & d_{\mu\mu} \end{vmatrix},$$

wo zur Abkürzung $\binom{n}{m} = \mu$ gesetzt worden ist, eine Potenz von A.[1]

Ersetzt man nämlich allgemein a_{ni} durch

$$t_1 a_{1i} + t_2 a_{2i} + \ldots + t_n a_{ni},$$

so verwandelt sich jede Determinante d_{pq}, welche die Elemente $a_{n1}, a_{n2}, \ldots a_{nn}$ enthält, in

$$t_n d_{pq} \pm t_\rho d_{\alpha q} \pm t_\sigma d_{\beta q} \pm \ldots$$

wo $\rho, \alpha, \sigma, \beta, .$ für jedes q dieselben bleiben und $d_{\alpha q}, d_{\beta q}, ..$ die Elemente $a_{n1}, a_{n2}, \ldots a_{nn}$ nicht enthalten. Da man nun in der Determinante Δ irgend eine Zeile mit einem beliebigen Factor multipliciren und dann von einer anderen Zeile abziehen darf, ohne diese Determinante zu ändern, so kann man aus der p^{ten} und allen ähnlichen Zeilen die Glieder $t_\rho d_{\alpha q}, t_\sigma d_{\beta q}, \ldots$ wegbringen, worauf dann alle diese $\binom{n-1}{m-1}$ Zeilen den Factor t_n enthalten werden. Es ist daher die Determinante Δ durch $A^{\binom{n-1}{m-1}}$ theilbar. Da aber Δ in Bezug auf jede Zeile des Elementensystems (1) vom Grade $\binom{n-1}{m-1}$ ist, so kann sich Δ von $A^{\binom{n-1}{m-1}}$ nur durch einen Zahlenfactor ε unterscheiden. Um denselben zu bestimmen, setze man $a_{11} = a_{22} = \ldots = a_{nn} = 1$ und alle übrigen Elemente $= 0$; es wird dann $d_{11} = d_{22} = \ldots = d_{\mu\mu} = 1$ und alle übrigen Determinanten $d_{12}, \ldots d_{\mu-1,\mu} = 0$. Daher ist $\varepsilon = 1$ und

$$\Delta = A^{\binom{n-1}{m-1}}.$$

Es ist z. B.

$$\begin{vmatrix} (ab)_{12}, (ab)_{13}, (ab)_{14}, (ab)_{23}, (ab)_{24}, (ab)_{34} \\ (ac)_{12}, \ldots\ldots\ldots\ldots \\ (ad)_{12}, \ldots \\ (bc)_{12}, \\ (bd)_{12}, \ldots\ldots\ldots \\ (cd)_{12}, \ldots \end{vmatrix} = (abcd)^3$$

[1] Franke, Crelle's J. Bd. 61. Baltzer's Theorie der Determinanten. §. 76.

III. Fasst man die Determinante

$$f \equiv \begin{vmatrix} x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_2 x_3 & x_3 x_1 & x_1 x_2 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 & \alpha_2 \alpha_3 & \alpha_3 \alpha_1 & \alpha_1 \alpha_2 \\ \beta_1^2 & \beta_2^2 & \beta_3^2 & \beta_2 \beta_3 & \beta_3 \beta_1 & \beta_1 \beta_2 \\ \gamma_1^2 & \gamma_2^2 & \gamma_3^2 & \gamma_2 \gamma_3 & \gamma_3 \gamma_1 & \gamma_1 \gamma_2 \\ \delta_1^2 & \delta_2^2 & \delta_3^2 & \delta_2 \delta_3 & \delta_3 \delta_1 & \delta_1 \delta_2 \\ \varepsilon_1^2 & \varepsilon_2^2 & \varepsilon_3^2 & \varepsilon_2 \varepsilon_3 & \varepsilon_3 \varepsilon_1 & \varepsilon_1 \varepsilon_2 \end{vmatrix}$$

als quadratische Form von x_1, x_2, x_3 auf, so kann die Discriminante D dieser Form in folgender Weise bestimmt werden. Man ersetze α_i durch $p\alpha_i + q\beta_i + r\gamma_i$, wodurch f in f^0 übergehen möge. Es verwandelt sich dann allgemein $\alpha_i \alpha_k$ in

$$p^2 \alpha_i \alpha_k + q^2 \beta_i \beta_k + r^2 \gamma_i \gamma_k + qr(\beta_i \gamma_k + \gamma_i \beta_k) + \\ + rp(\gamma_i \alpha_k + \alpha_i \gamma_k) + pq(\alpha_i \beta_k + \beta_i \alpha_k)$$

und wenn man die beziehungsweise mit $-q^2$, $-r^2$ multiplicirte dritte und vierte Zeile von f^0 zur zweiten addirt, so kann man durch Zusammenfassung aller den Factor p enthaltenden Glieder f^0 in die Form $f^0 \equiv p\varphi + qr\psi$ setzen, wo

$$\psi \equiv \begin{vmatrix} x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_2 x_3 & x_3 x_1 & x_1 x_2 \\ 2\beta_1\gamma_1 & & & .\beta_2\gamma_3 + \beta_3\gamma_2 \ldots. & & \\ \beta_1^2 & & & \beta_2\beta_3 & & \\ \gamma_1^2 & & & \gamma_2\gamma_3 & & \\ \delta_1^2 & & & \delta_2\delta_3 & & \\ \varepsilon_1^2 & & & \varepsilon_2\varepsilon_3 & & \end{vmatrix}$$

ist. Es ist nun leicht zu zeigen, dass ψ in zwei lineare Factoren zerfällt; multiplicirt man nämlich die Spalten von ψ beziehungsweise mit den Coëfficienten, mit welchen x_1^2, $x_2^2 \ldots x_1 x_2$ in dem Ausdrucke $(\beta\gamma x)(\delta\varepsilon x)$ behaftet sind und addirt hierauf zu der ersten Spalte alle übrigen, so ergibt sich

$$(\beta\gamma)_{23}(\delta\varepsilon)_{23}\psi \equiv \begin{vmatrix} (\beta\gamma x)(\delta\varepsilon x) & x_2^2 & \\ 0 & 2\beta_2\gamma_2 & \\ 0 & \beta_2^2 & \\ 0 & \gamma_2^2 & \\ 0 & \delta_2^2 & \ldots \\ 0 & \varepsilon_2^2 & \end{vmatrix}.$$

Da hiernach die Discriminante von ψ identisch verschwindet, so enthält die Discriminante von $p\varphi + qr\psi$ den Factor p. Es ist daher D durch $(\alpha\beta\gamma)$ theilbar. In derselben Weise ergibt sich, dass D durch $(\alpha\beta\delta)$, $(\alpha\beta\varepsilon)\ldots$ theilbar ist. Es kann sich daher D von dem Producte der zehn Determinanten

$$(\alpha\beta\gamma),\ (\alpha\beta\delta),\ (\alpha\beta\varepsilon),\ (\alpha\gamma\delta),\ (\alpha\gamma\varepsilon),\ (\alpha\delta\varepsilon),\ (\beta\gamma\delta),\ (\beta\gamma\varepsilon),\ (\beta\delta\varepsilon)$$
$$(\gamma\delta\varepsilon)$$

nur durch einen Zahlenfactor unterscheiden.

IV. Es seien zwei Systeme von je neun Elementen

$$\begin{matrix} p_1 p_2 p_3 \\ q_1 q_2 q_3 \\ r_1 r_2 r_3 \end{matrix} \quad (1) \qquad\qquad \begin{matrix} p'_1 p'_2 p'_3 \\ q'_1 q'_2 q'_3 \\ r'_1 r'_2 r'_3 \end{matrix} \quad (2)$$

gegeben. Es sei identisch

$$(qru) \equiv u_\xi, \quad (rpu) \equiv u_\eta, \quad (pqu) \equiv u_\zeta,$$
$$(q'r'u) \equiv u_{\xi'}, \quad (r'p'u) \equiv u_{\eta'}, \quad (p'q'u) \equiv u_{\zeta'},$$

so, dass also ξ_1, ξ_2, . nichts weiter als zur Abkürzung die Determinanten $(qr)_{23}$, $(qr)_{31}, \ldots$ bezeichnen, und

$$\begin{vmatrix} \xi_1^2 & \xi_2^2 & \xi_3^2 & \xi_2\xi_3 & \xi_3\xi_1 & \xi_1\xi_2 \\ \eta_1^2 & \eta_2^2 & \eta_3^2 & \eta_2\eta_3 & \eta_3\eta_1 & \eta_1\eta_2 \\ \zeta_1^2 & \zeta_2^2 & \zeta_3^2 & \zeta_2\zeta_3 & \zeta_3\zeta_1 & \zeta_1\zeta_2 \\ \xi_1'^2 & \xi_2'^2 & \xi_3'^2 & \xi'_2\xi'_3 & \xi'_3\xi'_1 & \xi'_1\xi'_2 \\ \eta_1'^2 & \eta_2'^2 & \eta_3'^2 & \eta'_2\eta'_3 & \eta'_3\eta'_1 & \eta'_1\eta'_2 \\ \zeta_1'^2 & \zeta_2'^2 & \zeta_3'^2 & \zeta'_2\zeta'_3 & \zeta'_3\zeta'_1 & \zeta'_1\zeta'_2 \end{vmatrix} \equiv \Phi.$$

Ersetzt man in Φ p_i durch $\lambda p_i + \mu q_i + \nu r_i$, wodurch Φ in Φ^0 übergehen möge, so verwandeln sich η_k, ζ_k in $\lambda\eta_k - \mu\xi_k$, $\lambda\zeta_k - \nu\xi_k$ und daher $\eta_i\eta_k$, $\zeta_i\zeta_k$ beziehungsweise in

$$\lambda^2\eta_i\eta_k - \lambda\mu(\eta_i\xi_k + \xi_i\eta_k) + \mu^2\xi_i\xi_k$$
$$\lambda^2\zeta_i\zeta_k - \lambda\nu(\xi_i\zeta_k + \xi_k\zeta_i) + \nu^2\xi_i\xi_k.$$

Multiplicirt man dann in Φ^0 die erste Zeile einmal mit $-\mu^2$, das andere Mal mit $-\nu^2$ und addirt dieselbe hierauf beziehungsweise zur zweiten und dritten Zeile, so ergibt sich

$$\Phi^0 \equiv \begin{vmatrix} \xi_1^2 & \xi_2^2 & \xi_3^2 & \xi_2\xi_3 & \xi_3\xi_1 & \xi_1\xi_2 \\ \lambda^2\eta_1^2 - 2\lambda\mu\,\xi_1\eta_1 & & & & & \\ \lambda^2\zeta_1^2 - 2\lambda\nu\,\xi_1\zeta_1 & & & & & \\ \xi_1'^2 & & & & & \\ \eta_1'^2 & & & & & \\ \zeta_1'^2 & & & & & \end{vmatrix}. \tag{3}$$

Da hiernach Φ^0 durch λ^2 theilbar ist, so muss Φ durch $(pqr)^2$ algebraisch theilbar sein. Ebenso schliesst man, dass Φ durch $(p'q'r')^2$ theilbar ist. Setzt man daher

$$\Phi \equiv (pqr)^2 (p'q'r')^2 \Psi,$$

so kann Ψ in Bezug auf jede Zeile der Systeme (1) und (2) nur vom zweiten Grade sein. Die Identität (3) lehrt nun noch, dass Ψ^0 sogar durch λ^3 theilbar wird, wenn man μ oder $\nu = 0$ setzt. Es muss also Ψ durch λ theilbar werden, wenn man p_i durch $\lambda p_i + \mu q_i$ oder $\lambda p_i + \nu r_i$ ersetzt, d. h. identisch verschwinden, wenn man p_1, p_2, p_3 durch q_1, q_2, q_3 oder r_1, r_2, r_3 ersetzt. Dasselbe gilt von irgend zwei Zeilen des Systems (2). Es verschwindet aber auch Ψ identisch, wenn man irgend eine Zeile des Systems (2) durch eine Zeile von (1), z. B. p'_1, p'_2, p'_3 durch p_1, p_2, p_3 ersetzt, weil dann Φ verschwindet; um sich hievon zu überzeugen, braucht man nur in Φ die Spalten mit den Coëfficienten des Ausdruckes

$$p_x[(qrr')q'_x - (qrq')r'_x$$

zu multipliciren und zur ersten Spalte die übrigen zu addiren, wodurch alle Elemente jener $= 0$ ausfallen. Es kann sich also[1] Ψ von der Determinante

$$\begin{vmatrix} p_1^2 & p_2^2 & p_3^2 & p_2p_3 & p_3p_1 & p_1p_2 \\ q_1^2 & & & & & \\ r_1^2 & & & & & \\ p_1'^2 & p_2'^2 & p_3'^2 & p'_2p'_3 & p'_3p'_1 & p'_1p'_2 \\ q_1'^2 \cdot\cdot & & & & & \\ r_1'^2 \cdot\cdot & & & & & \end{vmatrix}$$

[1] Borchardt's Journal, Bd. 84, S. 355.

nur durch einen Zahlenfactor unterscheiden, welchen man leicht $= -1$ findet.

V. Es seien $n+1$ Zeilen von je n Elementen

$$\begin{matrix} a_1\, a_2 \ldots a_n \\ b_1\, b_2 \ldots b_n \\ \\ g_1\, g_2 \ldots g_n \\ h_1\, h_2 \ldots h_n \end{matrix} \tag{1}$$

gegeben und es liege die Determinante

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} a_1 b_1, & a_1 c_1, & \ldots g_1 h_1 \\ a_2 b_2, & a_2 c_2, & \ldots g_2 h_2 \\ & & \\ a_n b_n, & a_n c_n, & \ldots g_n h_n \\ a_1 b_2 + a_2 b_1, & a_1 c_2 + a_2 c_1, & \ldots g_1 h_2 + g_2 h_1 \\ \cdot & & \cdots\cdots \\ a_{n-1} b_n + a_n b_{n-1}, & a_{n-1} c_n + a_n c_{n-1}, & \ldots g_{n-1} h_n + g_n h_{n-1} \end{vmatrix}$$

zur Bestimmung vor.

Man ersetze in derselben allgemein a_i durch

$$p a_i + q b_i + \ldots + t g_i,$$

wodurch $a_\alpha h_\beta + a_\beta h_\alpha$ in

$$p(a_\alpha h_\beta + a_\beta h_\alpha) + q(b_\alpha h_\beta + b_\beta h_\alpha) + \ldots + t(g_\alpha h_\beta + g_\beta h_\alpha)$$

übergeht. Bezeichnet man nun zur Abkürzung jede Spalte der Determinante Δ mit den in derselben vorkommenden Buchstaben, also etwa die die Elemente $a_1 a_2 \ldots a_n$ und $b_1 b_2 \ldots b_n$ enthaltende Spalte als Spalte ab und denkt sich die Spalten bh, $ch, \ldots gh$ beziehungsweise mit $-q$, $-r, \ldots -t$ multiplicirt und hierauf zur Spalte ah addirt, so enthalten alle Elemente dieser letzteren den Factor p. Es muss daher Δ durch $(ab \ldots g)$ theilbar sein. In derselben Weise erhellt, dass Δ durch jede der $n+1$ Determinanten n^{ten} Grades des Elementensystems (1) und daher auch durch deren Product

$$P \equiv (ab \ldots g)(ab \ldots h) \ldots (bc \ldots h)$$

algebraisch theilbar ist. Da dieses Product nun in Bezug auf alle Elemente von demselben Grade $n(n+1)$ wie Δ ist, so hat man

$$\Delta \equiv \varepsilon P,$$

wo ε von den Elementen (1) unabhängig ist. Um ε zu bestimmen, nehme man

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_n = b_1 = c_2 = \ldots = h_n = 1$$

und alle übrigen Elemente $= 0$ an; es wird dann

$$\Delta = 1,\ P = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

und daher

$$\varepsilon = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

$$\Delta \equiv (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} P.$$

VI. Es ist ein Elementensystem von $n+1$ Zeilen mit je n Elementen

$$\begin{matrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ b_1 & b_2 & & b_n \\ & & & \\ g_1 & g_2 & \cdot & g_n \\ h_1 & h_2 & \ldots & h_n \end{matrix} \tag{1}$$

gegeben. Hebt man aus demselben die in irgend $n-1$ Zeilen und $n-1$ Spalten stehenden Elemente heraus, so erhält man ein System von $(n-1)^2$ Elementen, dessen Determinante mit $(ab)_i$ bezeichnet werde, wenn in derselben die Elemente

$$a_1, a_2, \ldots a_n, b_1, b_2, \ldots b_n, c_i, \ldots h_i$$

nicht vorkommen. Es soll die Determinante

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} (gh)_1^2 & (gh)_2^2 \cdot & (gh)_n^2 & (gh)_1 (gh)_2 \ldots (gh)_{n-1}(gh)_n \\ \cdots\cdots & & & \\ & & & \\ (ab)_1^2 & (ab)_2^2 \ldots & (ab)_n^2 & (ab)_1 (ab)_2 \ldots (ab)_{n-1}(ab)_n \end{vmatrix}$$

bestimmt werden.

Ersetzt man a_i durch

$$p a_i + q b_i + \ldots + t g_i,$$

wodurch Δ in Δ^0 übergehen möge, so verwandelt sich allgemein $(bh)_i$ in $p(bh)_i+q(ah)_i$ und daher $(bh)_i(bh)_k$ in

$$p^2(bh)_i(bh)_k+pq[(bh)_i(ah)_k+(bh)_k(ah)_i]+q^2(ah)_i(ah)_k.$$

Multiplicirt man dann die Zeile

$$(ah)_1^2\ (ah)_2^2\ldots(ah)_{n-1}(ah)_n$$

von Δ^0 mit q^2 und zieht dieselbe von der Zeile

$$p^2(bh)_1^2+2pq(bh)_1(ah)_1+q^2(ah)_1^2,\ldots$$

ab, so enthalten alle Elemente der letzteren den Factor p. Durch dasselbe Verfahren kann man bewirken, dass alle Elemente der Zeilen

$$(ch)_1^2\ (ch)_2^2$$

$$(gh)_1^2\ (gh)_2^2\ldots,$$

nachdem man a_i durch $pa_i+qb_i+\ldots$ ersetzt hat, den Factor p enthalten. Es wird also Δ^0 durch p^{n-1} und daher Δ durch $(ab\ldots g)^{n-1}$ theilbar. In derselben Weise erhellt, dass Δ durch $(ab\ldots h),^{n-1}\ldots(bc\ldots h)^{n-1}$ theilbar sein muss. Es ist also, wenn man, wie oben

$$(ab\ldots g)(ab\ldots h)\ldots(bc\ldots h)\equiv P$$

setzt, Δ durch P^{n-1} algebraisch theilbar und mithin von P^{n-1} nur durch einen leicht zu bestimmenden Zahlenfactor verschieden.

Es ist z. B.

$$\begin{vmatrix} a_1^2 & a_2^2 & a_1a_2 \\ b_1^2 & b_2^2 & b_1b_2 \\ c_1^2 & c_2^2 & c_1c_2 \end{vmatrix} \equiv (bc)(ca)(ab)$$

$$\begin{vmatrix} (ab)_{23}^2, & (ab)_{31}^2, & (ab)_{12}^2, & (ab)_{31}(ab)_{12}, & (ab)_{12}(ab)_{23}, & (ab)_{23}(ab)_{31} \\ (ac)_{23}^2, & & & & & \\ (ad)_{23}^2, & & & & & \\ (bc)_{23}^2, & & & & & \\ (bd)_{23}^2, & & & & & \\ (cd)_{23}^2, & & & & & \ldots\ldots \end{vmatrix}$$

$$\equiv -(abc)^2(abd)^2(acd)^2(bcd)^2.$$