

Über die Bedingungen der algebraischen Theilbarkeit eines ganzen Ausdruckes von  $n^2$  willkürlichen Elementen durch die Determinante der letzteren.

Von **F. Mertens.**

Wenn ein ganzer Ausdruck  $A$  der Elemente

$$\begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{array} \quad (1)$$

$$e_1 \ e_2 \ \dots \ e_n,$$

welche  $n$  Zeilen und  $n$  Spalten bilden, durch die  $m^{\text{te}}$  Potenz der Determinante

$$(ab \dots e) = \Sigma \pm a_1 b_2 \dots e_n$$

algebraisch theilbar ist, so wird, wenn man allgemein  $e_i$  durch

$$pa_i + qb_i + \dots + te_i$$

ersetzt, wo unter  $p, q, \dots, t$  willkürliche Elemente zu verstehen sind,  $A$  durch  $t^m$  algebraisch theilbar. Diese Eigenschaft ist aber auch hinreichend, um schliessen zu können, dass  $A$  durch  $(ab \dots e)^m$  algebraisch theilbar ist.

Um dies zu beweisen, sei  $A$  zunächst homogen und zwar vom Grade  $k$  in Bezug auf  $e_1, e_2, \dots, e_n$ . Setzt man dann statt  $e_1, e_2, \dots, e_n$  andere Elemente  $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$  und hierauf

$$p = (-1)^n (bc \dots ee') \quad q = (-1)^{n-1} (ac \dots ee') \dots t = (ab \dots e),$$

so wird nach einer bekannten Identität

$$pa_i + qb_i + \dots + te'_i \equiv (ab \dots e') e_i$$

und man hat nach der Annahme eine Identität von der Form

$$(ab \dots e')^k A \equiv (ab \dots e)^m P,$$

wo unter  $P$  ein ganzer Ausdruck der Elemente (1) und der Elemente  $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$  zu verstehen ist. Man setze nun

$$e'_1 = e'_2 = \dots = e'_{n-1} = 0, \quad e'_n = 1,$$

wodurch  $P$  in  $Q$  übergehen möge und bezeichne die Determinante des Elementensystems

$$\begin{array}{c} a_1 a_2 \dots a_{n-1} \\ b_1 b_2 \dots b_{n-1} \end{array} \quad (2)$$

$$d_1 d_2 \dots d_{n-1},$$

welches aus (1) durch Streichung der  $n^{\text{ten}}$  Zeile und  $n^{\text{ten}}$  Spalte entspringt, mit  $(ab \dots d)$ . Es wird dann

$$(ab \dots d)^k A \equiv (ab \dots e)^m Q. \quad (3)$$

Gilt nun die obige Behauptung bereits für ein System von  $n-1$  Zeilen mit je  $n-1$  Elementen, wie (2), so ersetze man in der Identität (3), wenn  $i$  einen der Zeiger  $1, 2, \dots, n-1$  bezeichnet,  $d_i$  allgemein durch

$$p a_i + q b_i + \dots + s d_i.$$

Es wird dann  $(ab \dots d)^k$  durch  $s^k$ ,  $(ab \dots e)^m$  aber nicht durch  $s$  theilbar. Daher muss  $Q$  algebraisch durch  $s^k$  theilbar werden und mithin durch  $(ab \dots d)^k$  theilbar sein, woraus dann

$$A \equiv (ab \dots e)^m R$$

folgt, wo  $R$  einen ganzen Ausdruck der Elemente (1) bezeichnet.

Ist  $A$  nicht homogen in Bezug auf  $e_1, e_2, \dots, e_n$ , so muss, wenn in  $A$   $e_i$  durch

$$p a_i + q b_i + \dots + t e_i$$

ersetzt und in Folge dessen  $A$  durch  $t^m$  theilbar wird, dasselbe mit jedem homogenen Bestandtheile von  $A$  der Fall sein; es muss also jeder dieser homogenen Bestandtheile durch  $(ab \dots e)^m$  algebraisch theilbar sein und mithin auch  $A$ .

Ist nun  $n = 2$ , so ist die Identität (3) von der Form

$$a_1^k A \equiv (ab)^m Q$$

und kann nur bestehen, wenn jedes einzelne Glied von  $Q$  den Factor  $a_1^k$  enthält.

Um die Brauchbarkeit des vorstehenden Kennzeichens zu zeigen, will ich einige Anwendungen hersetzen.

I. Der Beweis der Multiplicationsregel gestaltet sich mit Hilfe des erwähnten Kennzeichens sehr einfach.

Es seien

$$\begin{array}{ccc} a_1 a_2 \dots a_n & & \xi_1 \xi_2 \dots \xi_n \\ b_1 b_2 \dots b_n & (1) & \eta_1 \eta_2 \dots \eta_n \end{array} \quad (2)$$

$$e_1 e_2 \dots e_n \quad \mathfrak{S}_1 \mathfrak{S}_2 \dots \mathfrak{S}_n$$

zwei Systeme von je  $n$  Zeilen mit  $n$  Elementen und zur Abkürzung

$$\begin{aligned} a_\xi &\equiv a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + \dots + a_n \xi_n \\ b_\xi &\equiv b_1 \xi_1 + b_2 \xi_2 + \dots + b_n \xi_n \end{aligned}$$

Ersetzt man in der Determinante

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} a_\xi a_\eta \dots a_\vartheta \\ b_\xi b_\eta \dots b_\vartheta \\ e_\xi e_\eta \dots e_\vartheta \end{vmatrix}$$

$e_i$  allgemein durch

$$p a_i + q b_i + \dots + t e_i,$$

so gehen  $e_\xi, e_\eta, \dots, e_\vartheta$  beziehungsweise über in

$$p a_\xi + q b_\xi + \dots + t e_\xi$$

$$p a_\eta + q b_\eta + \dots + t e_\eta$$

$$p a_\vartheta + q b_\vartheta + \dots + t e_\vartheta$$

und die Determinante  $\Delta$ , wenn man die erste Zeile mit  $-p$ , die

zweite mit  $-g, \dots$  multiplicirt und zu der letzten Zeile addirt, in  $t\Delta$ . Es muss also  $\Delta$  durch die Determinante  $(ab \dots e)$  theilbar sein und wenn man

$$\Delta \equiv P(ab \dots e)$$

setzt, so kann  $P$  nicht mehr die Elemente (1) enthalten. Man kann daher zur Bestimmung von  $P$   $a_1 = b_2 = \dots = e_n = 1$  und alle übrigen Elemente des Systems (1) = 0 setzen, wodurch  $\Delta$  in  $(\xi\eta \dots \mathcal{S})$  und  $(ab \dots e)$  in 1 übergeht. Man hat daher

$$P \equiv (\xi\eta \dots \mathcal{S})$$

und somit

$$\Delta \equiv (ab \dots e) (\xi\eta \dots \mathcal{S}).$$

II. Man denke sich alle Zusammenstellungen von  $m$  verschiedenen Zeigern der Reihe 1, 2... $n$  gebildet und setze unter denselben eine bestimmte Reihenfolge fest. Bezeichnet man dann diejenige Unterdeterminante  $m^{\text{ten}}$  Grades

$$\begin{vmatrix} a_{\alpha\alpha'} & a_{\alpha\beta'} & \dots & a_{\alpha\varepsilon'} \\ a_{\beta\alpha'} & a_{\beta\beta'} & \dots & a_{\beta\varepsilon'} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{\varepsilon\alpha'} & a_{\varepsilon\beta'} & \dots & a_{\varepsilon\varepsilon'} \end{vmatrix}$$

der Determinante  $A$  des Elementensystems

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{matrix}, \tag{1}$$

in welcher die Zeiger  $\alpha\beta \dots \varepsilon$  die  $i^{\text{te}}$ ,  $\alpha'\beta'$  die  $k^{\text{te}}$  Zusammenstellung bilden, mit  $d_{ik}$ , so ist die Determinante

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1\mu} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2\mu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{\mu 1} & d_{\mu 2} & \dots & d_{\mu \mu} \end{vmatrix},$$

wo zur Abkürzung  $\binom{n}{m} = \mu$  gesetzt worden ist, eine Potenz von  $A$ .<sup>1</sup>

Ersetzt man nämlich  $\binom{n}{m}$  allgemein  $a_{ni}$  durch

$$t_1 a_{1i} + t_2 a_{2i} + \dots + t_n a_{ni},$$

so verwandelt sich jede Determinante  $d_{pq}$ , welche die Elemente  $a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nn}$  enthält, in

$$t_n d_{pq} \pm t_\rho d_{\alpha q} \pm t_\sigma d_{\beta q} \pm \dots$$

wo  $\rho, \alpha, \sigma, \beta, \dots$  für jedes  $q$  dieselben bleiben und  $d_{\alpha q}, d_{\beta q}, \dots$  die Elemente  $a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nn}$  nicht enthalten. Da man nun in der Determinante  $\Delta$  irgend eine Zeile mit einem beliebigen Factor multipliciren und dann von einer anderen Zeile abziehen darf, ohne diese Determinante zu ändern, so kann man aus der  $p^{\text{ten}}$  und allen ähnlichen Zeilen die Glieder  $t_\rho d_{\alpha q}, t_\sigma d_{\beta q}, \dots$  wegbringen, worauf dann alle diese  $\binom{n-1}{m-1}$  Zeilen den Factor  $t_n$  ent-

halten werden. Es ist daher die Determinante  $\Delta$  durch  $A^{\binom{n-1}{m-1}}$  theilbar. Da aber  $\Delta$  in Bezug auf jede Zeile des Elementensystems (1) vom Grade  $\binom{n-1}{m-1}$  ist, so kann sich  $\Delta$  von  $A^{\binom{n-1}{m-1}}$  nur durch einen Zahlenfactor  $\varepsilon$  unterscheiden. Um denselben zu bestimmen, setze man  $a_{11} = a_{22} = \dots = a_{nn} = 1$  und alle übrigen Elemente  $= 0$ ; es wird dann  $d_{11} = d_{22} = \dots = d_{\mu\mu} = 1$  und alle übrigen Determinanten  $d_{12}, \dots, d_{\mu-1, \mu} = 0$ . Daher ist  $\varepsilon = 1$  und

$$\Delta \equiv A^{\binom{n-1}{m-1}}.$$

Es ist z. B.

$$\begin{vmatrix} (ab)_{12}, (ab)_{13}, (ab)_{14}, (ab)_{23}, (ab)_{24}, (ab)_{34} \\ (ac)_{12}, \dots \dots \dots \\ (ad)_{12}, \dots \\ (bc)_{12}, \\ (bd)_{12}, \dots \dots \dots \\ (cd)_{12}, \dots \end{vmatrix} = (abcd)^3$$

<sup>1</sup> Franke, Crelle's J. Bd. 61. Baltzer's Theorie der Determinanten. §. 76.

III. Fasst man die Determinante

$$f \equiv \begin{vmatrix} x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_2 x_3 & x_3 x_1 & x_1 x_2 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 & \alpha_2 \alpha_3 & \alpha_3 \alpha_1 & \alpha_1 \alpha_2 \\ \beta_1^2 & \beta_2^2 & \beta_3^2 & \beta_2 \beta_3 & \beta_3 \beta_1 & \beta_1 \beta_2 \\ \gamma_1^2 & \gamma_2^2 & \gamma_3^2 & \gamma_2 \gamma_3 & \gamma_3 \gamma_1 & \gamma_1 \gamma_2 \\ \delta_1^2 & \delta_2^2 & \delta_3^2 & \delta_2 \delta_3 & \delta_3 \delta_1 & \delta_1 \delta_2 \\ \varepsilon_1^2 & \varepsilon_2^2 & \varepsilon_3^2 & \varepsilon_2 \varepsilon_3 & \varepsilon_3 \varepsilon_1 & \varepsilon_1 \varepsilon_2 \end{vmatrix}$$

als quadratische Form von  $x_1, x_2, x_3$  auf, so kann die Discriminante  $D$  dieser Form in folgender Weise bestimmt werden. Man ersetze  $\alpha_i$  durch  $p\alpha_i + q\beta_i + r\gamma_i$ , wodurch  $f$  in  $f^0$  übergehen möge. Es verwandelt sich dann allgemein  $\alpha_i \alpha_k$  in

$$p^2 \alpha_i \alpha_k + q^2 \beta_i \beta_k + r^2 \gamma_i \gamma_k + qr(\beta_i \gamma_k + \gamma_i \beta_k) + rp(\gamma_i \alpha_k + \alpha_i \gamma_k) + pq(\alpha_i \beta_k + \beta_i \alpha_k)$$

und wenn man die beziehungsweise mit  $-q^2, -r^2$  multiplicirte dritte und vierte Zeile von  $f^0$  zur zweiten addirt, so kann man durch Zusammenfassung aller den Factor  $p$  enthaltenden Glieder  $f^0$  in die Form  $f^0 \equiv p\varphi + qr\psi$  setzen, wo

$$\psi \equiv \begin{vmatrix} x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_2 x_3 & x_3 x_1 & x_1 x_2 \\ 2\beta_1 \gamma_1 & & & \beta_2 \gamma_3 + \beta_3 \gamma_2 & \dots & \\ \beta_1^2 & & & \beta_2 \beta_3 & & \\ \gamma_1^2 & & & \gamma_2 \gamma_3 & & \\ \delta_1^2 & & & \delta_2 \delta_3 & & \\ \varepsilon_1^2 & & & \varepsilon_2 \varepsilon_3 & & \end{vmatrix}$$

ist. Es ist nun leicht zu zeigen, dass  $\psi$  in zwei lineare Factoren zerfällt; multiplicirt man nämlich die Spalten von  $\psi$  beziehungsweise mit den Coëfficienten, mit welchen  $x_1^2, x_2^2 \dots x_1 x_2$  in dem Ausdrücke  $(\beta \gamma x)$   $(\delta \varepsilon x)$  behaftet sind und addirt hierauf zu der ersten Spalte alle übrigen, so ergibt sich

$$(\beta \gamma)_{23} (\delta \varepsilon)_{23} \psi \equiv \begin{vmatrix} (\beta \gamma x) (\delta \varepsilon x) & x_2^2 \\ 0 & 2\beta_2 \gamma_2 \\ 0 & \beta_2^2 \\ 0 & \gamma_2^2 \\ 0 & \delta_2^2 & \dots \\ 0 & \varepsilon_2^2 \end{vmatrix}.$$

Da hiernach die Discriminante von  $\psi$  identisch verschwindet, so enthält die Discriminante von  $p\varphi + qr\psi$  den Factor  $p$ . Es ist daher  $D$  durch  $(\alpha\beta\gamma)$  theilbar. In derselben Weise ergibt sich, dass  $D$  durch  $(\alpha\beta\delta)$ ,  $(\alpha\beta\varepsilon)$  . . . theilbar ist. Es kann sich daher  $D$  von dem Producte der zehn Determinanten

$$(\alpha\beta\gamma), (\alpha\beta\delta), (\alpha\beta\varepsilon), (\alpha\gamma\delta), (\alpha\gamma\varepsilon), (\alpha\delta\varepsilon), (\beta\gamma\delta), (\beta\gamma\varepsilon), (\beta\delta\varepsilon), (\gamma\delta\varepsilon)$$

nur durch einen Zahlenfactor unterscheiden.

IV. Es seien zwei Systeme von je neun Elementen

$$\begin{array}{ccc} p_1 p_2 p_3 & & p'_1 p'_2 p'_3 \\ q_1 q_2 q_3 & (1) & q'_1 q'_2 q'_3 \\ r_1 r_2 r_3 & & r'_1 r'_2 r'_3 \end{array} \quad (2)$$

gegeben. Es sei identisch

$$\begin{array}{lll} (qr u) \equiv u_\xi, & (rp u) \equiv u_\eta, & (pq u) \equiv u_\zeta, \\ (q'r' u) \equiv u_{\xi'}, & (r'p' u) \equiv u_{\eta'}, & (p'q' u) \equiv u_{\zeta'}, \end{array}$$

so, dass also  $\xi_1, \xi_2, \dots$  nichts weiter als zur Abkürzung die Determinanten  $(qr)_{23}, (qr)_{31}, \dots$  bezeichnen, und

$$\begin{vmatrix} \xi_1^2 & \xi_2^2 & \xi_3^2 & \xi_2 \xi_3 & \xi_3 \xi_1 & \xi_1 \xi_2 \\ \eta_1^2 & \eta_2^2 & \eta_3^2 & \eta_2 \eta_3 & \eta_3 \eta_1 & \eta_1 \eta_2 \\ \zeta_1^2 & \zeta_2^2 & \zeta_3^2 & \zeta_2 \zeta_3 & \zeta_3 \zeta_1 & \zeta_1 \zeta_2 \\ \xi_1'^2 & \xi_2'^2 & \xi_3'^2 & \xi_2' \xi_3' & \xi_3' \xi_1' & \xi_1' \xi_2' \\ \eta_1'^2 & \eta_2'^2 & \eta_3'^2 & \eta_2' \eta_3' & \eta_3' \eta_1' & \eta_1' \eta_2' \\ \zeta_1'^2 & \zeta_2'^2 & \zeta_3'^2 & \zeta_2' \zeta_3' & \zeta_3' \zeta_1' & \zeta_1' \zeta_2' \end{vmatrix} \equiv \Phi.$$

Ersetzt man in  $\Phi$   $p_i$  durch  $\lambda p_i + \mu q_i + \nu r_i$ , wodurch  $\Phi$  in  $\Phi^0$  übergehen möge, so verwandeln sich  $\eta_k, \zeta_k$  in  $\lambda \eta_k - \mu \xi_k, \lambda \zeta_k - \nu \xi_k$  und daher  $\eta_i \eta_k, \zeta_i \zeta_k$  beziehungsweise in

$$\begin{array}{l} \lambda^2 \eta_i \eta_k - \lambda \mu (\eta_i \xi_k + \xi_i \eta_k) + \mu^2 \xi_i \xi_k \\ \lambda^2 \zeta_i \zeta_k - \lambda \nu (\zeta_i \zeta_k + \xi_k \zeta_i) + \nu^2 \xi_i \xi_k. \end{array}$$

Multiplicirt man dann in  $\Phi^0$  die erste Zeile einmal mit  $-\mu^2$ , das andere Mal mit  $-\nu^2$  und addirt dieselbe hierauf beziehungsweise zur zweiten und dritten Zeile, so ergibt sich



nur durch einen Zahlenfactor unterscheiden, welchen man leicht  $= -1$  findet.

V. Es seien  $n + 1$  Zeilen von je  $n$  Elementen

$$\begin{matrix} a_1 a_2 \dots a_n \\ b_1 b_2 \dots b_n \\ \\ g_1 g_2 \dots g_n \\ h_1 h_2 \dots h_n \end{matrix} \tag{1}$$

gegeben und es liege die Determinante

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} a_1 b_1, & a_1 c_1, & \dots g_1 h_1 \\ a_2 b_2, & a_2 c_2, & \dots g_2 h_2 \\ \\ a_n b_n, & a_n c_n, & \dots g_n h_n \\ a_1 b_2 + a_2 b_1, & a_1 c_2 + a_2 c_1, & \dots g_1 h_2 + g_2 h_1 \\ \cdot & & \dots \dots \dots \\ a_{n-1} b_n + a_n b_{n-1}, & a_{n-1} c_n + a_n c_{n-1}, & \dots g_{n-1} h_n + g_n h_{n-1} \end{vmatrix}$$

zur Bestimmung vor.

Man ersetze in derselben allgemein  $a_i$  durch

$$p a_i + q b_i + \dots + t g_i,$$

wodurch  $a_a h_\beta + a_\beta h_a$  in

$$p (a_a h_\beta + a_\beta h_a) + q (b_a h_\beta + b_\beta h_a) + \dots + t (g_a h_\beta + g_\beta h_a)$$

übergeht. Bezeichnet man nun zur Abkürzung jede Spalte der Determinante  $\Delta$  mit den in derselben vorkommenden Buchstaben, also etwa die die Elemente  $a_1 a_2 \dots a_n$  und  $b_1 b_2 \dots b_n$  enthaltende Spalte als Spalte  $ab$  und denkt sich die Spalten  $bh, ch, \dots gh$  beziehungsweise mit  $-q, -r, \dots -t$  multiplicirt und hierauf zur Spalte  $ah$  addirt, so enthalten alle Elemente dieser letzteren den Factor  $p$ . Es muss daher  $\Delta$  durch  $(ab \dots g)$  theilbar sein. In derselben Weise erhellt, dass  $\Delta$  durch jede der  $n + 1$  Determinanten  $n^{\text{ten}}$  Grades des Elementensystems (1) und daher auch durch deren Product

$$P \equiv (ab \dots g) (ab \dots h) \dots (bc \dots h)$$

algebraisch theilbar ist. Da dieses Product nun in Bezug auf alle Elemente von demselben Grade  $n (n + 1)$  wie  $\Delta$  ist, so hat man

$$\Delta \equiv \varepsilon P,$$

wo  $\varepsilon$  von den Elementen (1) unabhängig ist. Um  $\varepsilon$  zu bestimmen, nehme man

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n = b_1 = c_2 = \dots = h_n = 1$$

und alle übrigen Elemente = 0 an; es wird dann

$$\Delta = 1, P = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

und daher

$$\varepsilon = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

$$\Delta \equiv (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} P.$$

VI. Es ist ein Elementensystem von  $n+1$  Zeilen mit je  $n$  Elementen

$$\begin{matrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & & b_n \end{matrix} \tag{1}$$

$$\begin{matrix} g_1 & g_2 & \dots & g_n \\ h_1 & h_2 & \dots & h_n \end{matrix}$$

gegeben. Hebt man aus demselben die in irgend  $n-1$  Zeilen und  $n-1$  Spalten stehenden Elemente heraus, so erhält man ein System von  $(n-1)^2$  Elementen, dessen Determinante mit  $(ab)_i$  bezeichnet werde, wenn in derselben die Elemente

$$a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n, c_i, \dots, h_i$$

nicht vorkommen. Es soll die Determinante

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} (gh)_1^2 & (gh)_2^2 & \dots & (gh)_n^2 & (gh)_1 & (gh)_2 & \dots & (gh)_{n-1} & (gh)_n \\ \dots & \dots \\ (ab)_1^2 & (ab)_2^2 & \dots & (ab)_n^2 & (ab)_1 & (ab)_2 & \dots & (ab)_{n-1} & (ab)_n \end{vmatrix}$$

bestimmt werden.

Ersetzt man  $a_i$  durch

$$p a_i + q b_i + \dots + t g_i,$$

wodurch  $\Delta$  in  $\Delta^0$  übergehen möge, so verwandelt sich allgemein  $(bh)_i$  in  $p(bh)_i + q(ah)_i$  und daher  $(bh)_i(bh)_k$  in

$$p^2(bh)_i(bh)_k + pq[(bh)_i(ah)_k + (bh)_k(ah)_i] + q^2(ah)_i(ah)_k.$$

Multiplieirt man dann die Zeile

$$(ah)_1^2 (ah)_2^2 \dots (ah)_{n-1} (ah)_n$$

von  $\Delta^0$  mit  $q^2$  und zieht dieselbe von der Zeile

$$p^2(bh)_1^2 + 2pq(bh)_1(ah)_1 + q^2(ah)_1^2, \dots$$

ab, so enthalten alle Elemente der letzteren den Factor  $p$ . Durch dasselbe Verfahren kann man bewirken, dass alle Elemente der Zeilen

$$(ch)_1^2 (ch)_2^2$$

$$(gh)_1^2 (gh)_2^2 \dots,$$

nachdem man  $a_i$  durch  $pa_i + qb_i + \dots$  ersetzt hat, den Factor  $p$  enthalten. Es wird also  $\Delta^0$  durch  $p^{n-1}$  und daher  $\Delta$  durch  $(ab \dots g)^{n-1}$  theilbar. In derselben Weise erhellt, dass  $\Delta$  durch  $(ab \dots h)^{n-1} \dots (bc \dots h)^{n-1}$  theilbar sein muss. Es ist also, wenn man, wie oben

$$(ab \dots g)(ab \dots h) \dots (bc \dots h) \equiv P$$

setzt,  $\Delta$  durch  $P^{n-1}$  algebraisch theilbar und mithin von  $P^{n-1}$  nur durch einen leicht zu bestimmenden Zahlenfactor verschieden.

Es ist z. B.

$$\begin{vmatrix} a_1^2 & a_2^2 & a_1 a_2 \\ b_1^2 & b_2^2 & b_1 b_2 \\ c_1^2 & c_2^2 & c_1 c_2 \end{vmatrix} \equiv (bc)(ca)(ab)$$

$$\begin{vmatrix} (ab)_{23}^2, & (ab)_{31}^2, & (ab)_{12}^2, & (ab)_{31}(ab)_{12}, & (ab)_{12}(ab)_{23}, & (ab)_{23}(ab)_{31} \\ (ac)_{23}^2, & & & & & \\ (ad)_{23}^2, & & & & & \\ (bc)_{23}^2, & & & & & \\ (bd)_{23}^2, & & & & & \\ (cd)_{23}^2, & & & & & \dots \end{vmatrix} \equiv -(abc)^2(abd)^2(acd)^2(bcd)^2.$$

# ZOBODAT - [www.zobodat.at](http://www.zobodat.at)

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse](#)

Jahr/Year: 1880

Band/Volume: [81\\_2](#)

Autor(en)/Author(s): Mertens F.

Artikel/Article: [Über die Bedingungen der algebraischen Theilbarkeit eines ganzen Ausdruckes von  \$n^2\$  willkürlichen Elementen durch die Determinante der letzteren. 260-270](#)