Beitrag zur Theorie der Regelflächen vierten Grades mit einem Doppelkegelschnitt.

Von **Adolf Ameseder.**

Art. 1. Eine Ebene E schneidet eine Tangentenebeneninvolution J_2 zweiter Classe, mit einem Trägerkegel zweiten Grades K^2, in einer Tangenteninvolution i_2, welche auch von der zweiten Classe ist und den Schnitt $(K_2 E)$ ihrer Ebene mit dem Kegel K^2 zum Träger hat. Da nun nach der Abhandlung: „Über Curven vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten"[1] das Erzeugniss einer Tangenteninvolution i_2 und eines eindeutigen Strahlbüschels δ eine ebene, rationale Curve vierter Ordnung C_6^4 ist; so erkennen wir das von J_2 und einem eindeutigen Ebenenbüschel Δ erzeugte Gebilde als Regelfläche vierten Grades F^4, vorausgesetzt, dass die Axe von Δ eine allgemeine Stellung gegen K^2 hat. Die Gerade Δ ist die Doppelgerade der Fläche, weil ihr Schnitt δ mit der Ebene E, als Scheitel des gleichnamigen Strahlbüschels ein Doppelpunkt von C_6^4 ist.

Die Curve C_6^4 hat zwei weitere Doppelpunkte, deren geometrischer Ort demnach ein Kegelschnitt ist, welcher, da je zwei in einer Ebene des Büschels Δ liegende Erzeugende von F^4 sich in einem Punkte der Involutionsebene schneiden, als Ort dieses Punktes, selbst in der bezeichneten Ebene liegt.

Jene zwei Erzeugenden e', e'' der F^4, welche sich in einer Ebene von Δ befinden, erhalten wir, in Folge der Definition der Fläche, als die Schnitte dieser Ebene mit dem ihr entsprechenden, conjugirten Ebenenpaar von J_2. In jener Ebene ε_0, welche die Spitze des Kegels K^2 enthält, liegen auch zwei Erzeugende; diese schneiden sich, nach dem Gesagten, in O; dieser Punkt gehört also auch dem Doppelkegelschnitt D an.

---

[1] Sitzb. d. k. Akad. d. Wissenschaften zu Wien, Jännerheft 1879.

Die Doppelgerade Δ hat mit D einen Punkt B gemein, weil jede Ebene ε von Δ als Trägerin von nur zwei Erzeugenden $\mathfrak{e}'$, $\mathfrak{e}''$ auch nur einen nicht auf Δ gelegenen Punkt von D, nämlich den Schnittpunkt $(\mathfrak{e}', \mathfrak{e}'')$ besitzt.

„Das Erzeugniss eines eindeutigen Ebenenbüschels Δ und einer Tangentenebeneninvolution zweiter Classe J_2, auf einem Kegel zweiten Grades K^2, ist eine Regelfläche vierten Grades, welche die Axe Δ des gleichnamigen Ebenenbüschels und einen in der Involutionsebene ε_i liegenden Kegelschnitt D, der die Spitze O des Kegels K^2 enthält und Δ einmal schneidet, zu Doppelcurven hat.“

Die in der Ebene ε befindlichen Erzeugenden begegnen Δ in zwei Punkten α' und α'', welche die Berührungspunkte der Ebene mit F^4 sind; die bezeichnete Ebene ist daher eine Doppeltangentenebene der Fläche. Da man umgekehrt aus einem Punkt α' von Δ zwei (nicht ein conjugirtes Paar von J_2 bildende) Tangentialebenen ε_1', ε_2'' an K^2 legen kann, und diesen zwei verschiedene Ebenen ε', ε'' im Büschel Δ entsprechen, schneiden sich in α' zwei Erzeugende $\mathfrak{e}_1' = (\varepsilon', \varepsilon_1')$ und $\mathfrak{e}_1'' = (\varepsilon'', \varepsilon_2'')$ der Fläche, welche mit Δ die zwei an F^4 in α' zu legenden Tangentialebenen ε' und ε'' fixiren. Jede dieser Ebenen tangirt F^4 noch in einem Punkte α_1', respective α_1'', welche Punkte, bei Drehung von ε, eine mit α' zwei zweideutige, coaxiale Reihe constituiren. In derselben Beziehung stehen auch die Ebenenbüschel $\Delta(\varepsilon')$ und $\Delta(\varepsilon'')$. Um die zwei in einem Punkt β von D sich begegnenden Erzeugenden $\mathfrak{e}'$, $\mathfrak{e}''$ zu erhalten, legen wir durch ihn und Δ die Ebene ε und an K^2 die zwei möglichen Tangentialebenen ε', ε''. Diese schneiden ε in den gesuchten Geraden. Wenden wir dieses Verfahren an dem Δ und D gemeinschaftlichen Punkt B an, so finden wir, dass jene zwei Erzeugenden e_B', e_B'', welche durch B laufen in derselben, D in B berührenden Ebene ε_B des Büschels Δ liegen.[1] Diese ist daher die einzige F^4 in B tangirende Ebene, sie berührt auch die Regelfläche an keiner andern Stelle. Der Punkt B ist ein Berührungsknoten der Fläche und ein dreifacher Punkt der

[1] β liegt in diesem Falle unendlich nahe zu B. Auch bilden die zwei aus B an K^2 gelegten Tangentenebenen ein conjugirtes Paar, so dass schon desshalb e_B', e_B'' mit Δ in einer Ebene sich befinden müssen.

Reihen (α') und (α''), sowie ε_B eine *dreifache Ebene* der conjectivischen Büschel (ε') und (ε'') ist.

Aus der angegebenen Construction erhellt auch, dass wenn β bei seiner Bewegung auf D mit einem der zwei (von O verschiedenen) Schnittpunkte c_1, c_2 dieses Kegelschnittes mit K^2 coincidirt, die Erzeugenden e', e'' unendlich nahe rückend, eine *singuläre* Erzeugende e_1 oder e_2 von F^4 bilden. Sie sind die Schnittlinien der Ebenen $(\Delta c_1) = v_1$ und $(\Delta c_2) = v_2$ mit den K^2 längs $\overline{oc_1}$ beziehungsweise $\overline{oc_2}$ tangirenden Doppelebenen δ_1, δ_2 der Involution J_2. Sie haben die Eigenschaft, dass die Fläche in allen ihren Punkten von denselben Ebenen — den *Cuspidalebenen* v_1, respective v_2 berührt wird, und fixiren auf Δ die zwei Doppelpunkte d_1, d_2 der zweideutigen Reihen (α', α'').[1]

Gleichzeitig mit den Erzeugenden e', e'' fallen auch die durch sie und die Tangente t von D in β bestimmten Tangentialebenen τ', τ'' in β zusammen, so dass sich F^4 in den Punkten c_1 und c_2 selbst berührt, während sie sich in einem andern Punkt von D durchschneidet. Diese Eigenschaft lässt uns, in Verbindung mit der Thatsache, dass jede Gerade g des Bündels c (c_1 oder c_2) die Fläche in diesem Punkte berührt, in c_1 und c_2 *Cuspidalpunkte* der Fläche erkennen. Jede durch e_1 gelegte Ebene hat auch c_1 zum Berührungspunkt, da die zwei benachbarten Erzeugenden, aus welchen e_1 besteht, sich in dem genannten Punkt durchschneiden. Unter allen diesen Ebenen nimmt ausser v_1 jene Ebene τ_1 eine ausgezeichnete Stellung ein, welche die Tangente T_1 von D in c_1 enthält, und längs welcher (um c_1 herum) sich die Fläche berührt. Jeder Strahl des durch sie und c_1 festgestellten Büschels hat mit F^4 drei unendlich nahe in c_1 befindliche Punkte gemein.

Diesem reciprok sind die Eigenschaften der Cuspidalebene v_1 (dasselbe gilt von v_2); sie berührt F^4 längs der ganzen Ausdehnung von c_1 und bestimmt mit dem c_1 entsprechenden Doppelpunkt d_1 von Δ (α', α'') ein Strahlbüschel, dessen jeder Strahl die Fläche F^4 in vier in d_1 vereinigten Punkten trifft. Wir nennen d_1 und ebenso d_2, aus diesem Grunde, *Inflexionspunkte* der

---

[1] Im Allgemeinen haben zwei zweideutige, coaxiale Reihen vier Doppelpunkte. Im vorliegenden Fall coincidiren zwei mit B einen dreifachen Punkt bildend.

Fläche; sie sind es für jede durch sie gehende, F^4 eingeschriebene, ebene Curve.

Durch dieselben Schlüsse gelangen wir zu dem Ergebniss, dass auch die Schnittpunkte c_{I}, c_{II} der Doppelgeraden Δ mit dem Trägerkegel K^2 Cuspidalpunkte sind. Die durch sie gehenden singulären Erzeugenden e_{I}, e_{II} berühren — sowie e_1, e_2 — in ihnen den Kegel K^2 und schneiden D in d_{I}, beziehungsweise d_{II}, den Doppelpunkten der durch die Erzeugenden $\mathfrak{e}'$, $\mathfrak{e}''$, auf diesem Kegelschnitt bestimmten, zweideutigen Punktsystemen (β') und (β_1'). Die singuläre Erzeugende e_{I} fixirt mit der Tangente T_{I} von D in c_{I} die Cuspidalebene v_{I} und mit Δ eine Doppelebene ε_{I} dieses Büschels; und zwar jene, an welche sich F^4 im Punkte c_{I} anschmiegt. Die Ebene v_{I} schneidet — wie jede andere, durch zwei in einem Punkt von Δ sich treffende Erzeugende $\mathfrak{e}'$, $\mathfrak{e}_1'$ gegebene Ebene — die Regelfläche F^4 in einem eigentlichen Kegelschnitt C_{I}^2, der T_{I} in d_{I} berührt und dessen zweiter Schnitt j_{I} mit e_{I} auch ein Inflexionspunkt der Fläche ist.

„Die Regelfläche F^4 hat vier Cuspidalpunkte und einen Berührungsknoten. Dieser ist der beiden Doppellinien gemeinschaftliche Punkt; jene sind die Schnittpunkte der Doppellinien mit dem Trägerkegel.“

Art. 2. Durch irgend einen Punkt α von Δ kann man nur eine Ebene E_c legen, welche F^4 nach einem eigentlichen Kegelschnitt C^2 schneidet. Es ist dies die, durch die sich in α schneidenden Erzeugenden $\mathfrak{e}'$, $\mathfrak{e}_1'$ bestimmte Ebene.[1]

Wir gehen nun daran, die von diesen Ebenen umhüllte Fläche zu untersuchen.

Die von einem Punkt β_1' von D ausgehenden Erzeugenden $\mathfrak{e}_1'$, $\mathfrak{e}_2$ liefern, mit Δ zum Schnitt gebracht, ein Punktepaar α_1', α_2' der Reihe Δ (α). Durch jeden der letztgenannten Punkte läuft, ausser $\mathfrak{e}_1'$, $\mathfrak{e}_2'$, noch je eine Erzeugende $\mathfrak{e}_1''$, beziehungsweise $\mathfrak{e}_2''$. Diese beiden sind jedoch windschief und schneiden also D in zwei verschiedenen Punkten β_1'' und β_2''. Wären diese Punkte, für jede Lage des Punktes β_1', identisch, so müssten die durch $\mathfrak{e}_1'$, $\mathfrak{e}_2'$ bestimmten zwei Ebenen der Involution J_2, jene Ebene ε_0 von Δ, welche

[1] Siehe Art. 11, l. c.

den Punkt O enthält in zwei derartig liegenden Geraden g_1', g_2' treffen, dass die durch diese an K^2 gelegten zweiten Tangentialebenen sich in einer in der Involutionsebene ε_i befindlichen Geraden schneiden. Dies ist jedoch nur dann der Fall, wenn die Ebenen ε_0 und ε_i bezüglich K^2 conjugirt sind.[1]

Durchläuft β_1' den Doppelkegelschnitt D, so beschreiben die Punkte β_1'', β_2'' ein mit (β_1') zweideutig verwandtes Punktsystem (β''); während die Verbindungsgeraden $m_1''=\overline{\beta_1'\beta_1''}$ und $m_1''=\overline{\beta_1'\beta_2''}$ eine Curve C_0, das Erzeugniss von (β') und (β'') umhüllen. Diese Enveloppe, welche die Schnittcurve der zu discutirenden Fläche und der Involutionsebene ε_i ist, berührt den Kegelschnitt D in B, nachdem dieser Punkt, als dreifacher Punkt der erzeugenden Reihen, der Schnittpunkt zweier benachbarter, sich in B schneidender und mit der Tangente T von D in B coincidirender Lagen der Umhüllenden m'' ist. Die durch den Cuspidalpunkt c_1 gehende singuläre Erzeugende e_1 schneidet Δ in d_1, einem Doppelpunkt der Reihe $\Delta(\alpha)$, durch welchen noch eine Erzeugende $\mathfrak{e}_1$, die D in δ_1 trifft, läuft. Der letztere Punkt ist in der Reihe (β'') allein dem Punkte c_1 zugeordnet; er ist ein Doppelpunkt derselben, wogegen c_1 der ihm entsprechende Verzweigungspunkt der andern ist, und mit ihm verbunden die Tangente $\overline{c_1\delta_1}$ von c_0 in c_1 gibt. Die Schnittlinien der Cuspidalebenen v_{I}, v_{II} und der Ebene ε_i sind die D und C_0 gemeinschaftlichen Tangenten, weil diese D in d_{I} respective d_{II} tangiren und da v_{I} und v_{II} auch F^4 nach Kegelschnitten schneiden, zugleich Erzeugende von C_0 sind.

Die Curve C_0 hat also mit D vier Punkte (c_1, c_2, B) und vier Tangenten $(T, (v_{\mathrm{I}}\varepsilon_i), (v_{\mathrm{II}}\varepsilon_i))$ gemein und aus jedem Punkte von D sind nur zwei Tangenten an sie möglich — sie ist ein Kegelschnitt C_0^2.

Eine Ebene E_c schneidet Δ in einem Punkte d' und berührt C_0^2 in einem Punkt a'. Diese Punkte beschreiben, wenn E_c nach einander alle möglichen Lagen einnimmt, zwei projectivische Systeme $\Delta(\alpha')$ und $C_0^2(a')$, welche den Punkt B entsprechend gemein haben, und daher ein einschaliges Hyperboloid H^2 erzeugen.[2]

---

[1] Die durch diese specielle Annahme bedingte Fläche besprechen wir in einem folgenden Aufsatz.

[2] Zwei projectivische Punktsysteme auf einer Geraden und einem Kegelschnitt erzeugen im Allgemeinen eine Cayley'sche Regelfläche dritten

Das Hyperboloid H^2 hat mit F^4 ausser Δ die singulären Erzeugenden e_1, e_2 gemein da den Cuspidalpunkten c_1, c_2, man möge sie als Elemente von $D(\beta')$ oder $C_0^2(a')$ ansehen, in $\Delta(\alpha')$ immer dieselben Punkte d_1 beziehungsweise $_2$ beigeordnet sind. Es berührt die Regelfläche im Berührungsknoten B und wird von der Gesammtheit der Ebenen E_c — da jede eine Tangente des Kegelschnittes C_0^2 und die durch ihren Berührungspunkt a' laufende Erzeugende $\overline{a'\alpha'}$ enthält — längs des Kegelschnittes C_0^2 berührt. Die von den E_c umhüllte Fläche ist daher der H^2 aus dem Schnittpunkt der Ebene ε_B, v_{I} und v_{II} umschriebene Kegel $\mathfrak{K}^2$, dessen Spitze $\mathfrak{P}$ der auf H^2 bezogene Pol von ε_i ist.

„Alle Ebenen, welche die Regelfläche F^4 nach eigentlichen Kegelschnitten schneiden, umhüllen einen Kegel zweiten Grades $\mathfrak{K}^2$, welcher den Schnitt der Cuspidalebenen v_{I}, v_{II} mit der Tangentialebene ε_B, von F^4 im Berührungsknoten, zur Spitze hat, diese Ebenen berührt und die Cuspitalpunkte c_1, c_2, sowie den Berührungsknoten enthält."

Wie erwähnt, liegen in einer Tangentialebene E_c des Kegels $\mathfrak{K}^2$ zwei Erzeugende $\mathfrak{e}'$, $\mathfrak{e}_1'$ von F^4, welche die Berührungskante g_1, von E_c mit $\mathfrak{K}^2$, in zwei Punkten n_1, n_2 treffen. Die E_c benachbarte Tangentenebene E_c' enthält auch die $\mathfrak{e}'$, $\mathfrak{e}_1'$ benachbarten Erzeugenden $\mathfrak{e}''$, $\mathfrak{e}_1''$ der Regelfläche; ihre Schnittlinie g_1 mit der ersten bestimmt demnach auf $\mathfrak{e}'$, $\mathfrak{e}_1'$, die Berührungspunkte der Doppeltangentenebene E_c von F^4 mit dieser Fläche. Diese Punkte sind daher mit n_1, n_2 und zugleich mit den zweiten Schnittpunkten, des in der Ebene E_c liegenden Kegelschnittes C^2 und den Erzeugenden $\mathfrak{e}'$, $\mathfrak{e}_1'$, identisch; während die ersten Schnittpunkte β', β_1' sich auf dem Doppelkegelschnitt D befinden.

„Die Verbindungslinien der Berührungspunkte, der dem Büschel Δ nicht angehörigen Doppeltangentenebenen der Regelfläche F^4, erfüllen den von diesen Ebenen umhüllten Kegel $\mathfrak{K}^2$."

Grades [siehe pag. 109 in Em. Weyr's: „Geometrie der räum. Erzeugnisse ein- bis zweideutiger Gebilde", Leipzig, Teubner 1870]; wenn hingegen der den Träger gem. Punkt sich selbst entspricht, wie leicht einzusehen, ein Hyperboloid.

Der geometrische Ort der Punkte n_1, n_2 ist die Berührungscurve $\mathfrak{B}^4$ des Kegels $\mathfrak{K}^2$ mit der Regelfläche; er ist von der vierten Ordnung, da auf jeder Erzeugenden von $\mathfrak{K}^2$ zwei seiner Punkte liegen und die Spitze $\mathfrak{P}$ kein Punkt von F^4 ist. Dies erhellt übrigens schon aus der Bemerkung, dass, weil im Gesammtschnitt zweier Flächen (F^4 und $\mathfrak{K}^2$) jeder Berührungspunkt doppelt zu zählen ist, die Ordnungszahl desselben im vorliegenden Fall, da sich beide Flächen in allen Punkten berühren, auf die Hälfte (d. h. von 8 auf 4) reducirt wird. Der Kegel $\mathfrak{K}^2$ kann auch als der F^4 aus $\mathfrak{P}$ umschriebene Kegel angesehen werden; er ist der einzige Kegel zweiten Grades genannter Art, dessen Spitze sich nicht auf D befindet, sowie D der einzige F^4 eingeschriebene Kegelschnitt ist, dessen Ebene $\mathfrak{K}^2$ nicht berührt. Beide Gebilde sind in ihren Beziehungen zu F^4 reciprok, so dass $\mathfrak{K}^2$ auch mit dem Namen Doppeltangentenebenen-Kegel belegt werden kann.

Nimmt E_c, bei seiner Bewegung um $\mathfrak{K}^2$, die Lage der Ebene v_{I} ein, so werden auch die Erzeugenden e', e'_1 unendlich nahe rückend mit der singulären Erzeugenden e_{I} zusammenfallen, und daher eine, in der Richtung der Berührungskante g_{I}, von v_{I} mit $\mathfrak{K}^2$, erfolgende Coincidenz der Punkte n_1, n_2 mit $(e_{\mathrm{I}} g_{\mathrm{I}}) = j_{\mathrm{I}}$ bedingen. Die Geraden g_{I}, g_{II} sind die aus $\mathfrak{P}$ an $\mathfrak{B}^4$ zu legenden Tangenten; $\mathfrak{B}^4$ selbst ist daher vom sechsten Rang; da durch jede Gerade G des Bündels $\mathfrak{P}$ zwei Tangentialebenen ε'_c, ε''_c an $\mathfrak{K}^2$ möglich sind und jede zwei Tangenten τ'_1, τ'_2 respective τ''_1, τ''_2 von $\mathfrak{B}^4$ enthält; G demnach im Ganzen von sechs Tangenten der Curve getroffen wird.[1] Die Curve $\mathfrak{B}^4$ hat ferner B zum Doppelpunkt, nachdem die auch dem Systeme E_c angehörige Ebene $\varepsilon_B = (e'_B e''_B)$ die Fläche nur in B tangirt, die zwei Punkte n_1, n_2 daher in B, den Schnittpunkt der zwei getrennten Erzeugenden e'_B und e''_B, zu liegen kommen. Sie ist vom Geschlechte Null und der vollständige Durchschnitt des ihr aus B umschriebenen Kegels (k^2) mit $\mathfrak{K}^2$.

---

[1] Die vier Schnittpunkte p'_1, p'_2, p''_1, p''_2 der Geraden G mit den vier Tangenten beschreiben, wenn G irgend eine Ebene $\mathfrak{E}$ des Bündels $\mathfrak{P}$ erfüllt, eine Curve C^6, sechster Ordnung, die $\mathfrak{P}$ zum Doppelpunkt (wegen g_{I}, g_{II}) hat, und der Schnitt von $\mathfrak{E}$ mit den von den Tangenten der Curve $\mathfrak{B}^4$ gebildeten developpablen Fläche f^6, sechster Ordnung, ist.

Wie aus dem vorhergehenden Artikel hervorgeht, berührt jede durch eine singuläre Erzeugende, so e_1, gelegte Ebene, also auch $E_c^! = (e_1 \mathfrak{e}_1)$, die Regelfläche in dem entsprechenden Cuspidalpunkt c_1. Dieser gehört daher auch der Curve $\mathfrak{B}^4$ an, und zwar hat diese in ihm die Ebenen $(e_1 \mathfrak{P})$ und (Δe_1) zu Tangentenebenen, also e_1 selbst zur Tangente. Dass auch (Δe_1) die Curve $\mathfrak{B}^4$ berührt, wird klar, wenn man berücksichtigt, dass sie ausser den zwei in B liegenden Punkten, mit dieser zwei Punkte gemein hat, welche, weil in (Δe_1) nur die eine doppelt zu zählende Erzeugende e_1 liegt, nur in c_1 vereinigt sein können.

„Der Doppeltangentenebenen-Kegel $\mathfrak{K}^2$ berührt die Regelfläche in einer Raumcurve vierter Ordnung, sechsten Ranges $\mathfrak{B}^4$, welche im Berührungsknoten einen Doppelpunkt hat und die singulären Erzeugenden e_1, e_2 in den Cuspidalpunkten (c_1, c_2) berührt. Die zwei durch die Spitze laufenden Tangenten berühren sie in den Inflexionspunkten $j_{\mathrm{I}}, j_{\mathrm{II}}$ von F^4“

Für $\mathfrak{B}^4$ gelten noch die leicht nachzuweisenden Eigenschaften:

„Jede Ebene, welche F^4 in einem Punkte n_1 der Curve $\mathfrak{B}^4$ berührt, berührt sie noch in einem zweiten Punkt n_2 derselben Curve. Die Punkte n_1, n_2 bilden eine centrale, quadratische Involution, mit dem Centrum $\mathfrak{P}$, dem Träger $\mathfrak{K}^2$ und den Doppelpunkten $B, j_{\mathrm{I}}, j_{\mathrm{II}}$.“

Die Cuspidalebenen v_{I}, v_{II} haben, als Tangentialebenen des Kegels $\mathfrak{K}^2$, eine durch $\mathfrak{P}$ gehende Schnittlinie $\mathfrak{G}$, die sowohl c_{I}^2, c_{II}^2, als auch e_{I}, e_{II} schneidet. Wiederholen wir, dass v_{I}, v_{II} die Regelfläche in allen Punkten von e_{I} respective e_{II} berühren, so erkennen wir in $\mathfrak{G}$ eine Doppeltangente derselben. Ihre Berührungspunkte $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$ sind, wie leicht einzusehen ist, identisch mit den Berührungspunkten der Kegelschnitte c_{I}^2, c_{II}^2 und $\mathfrak{G}$; also die Schnitte von e_{I} mit c_{II}^2 beziehungsweise e_{II} mit c_{I}^2.

Art. 3. Die Erzeugenden $\mathfrak{e}'$, $\mathfrak{e}_1'$, welche sich in einer Ebene E_c, einem Element des Tangentenebenen-Systems $\mathfrak{K}^2(Ec)$ befinden, können als die Schnitte dieser mit den Ebenen ε_1' ε_1' des Büschels Δ angesehen werden. Beide Gebilde stehen in zwei-zweideutiger Verwandtschaft, haben die Ebene ε_B sich doppelt entsprechend gemein und erzeugen die Regelfläche F^4.

Reciprok (s. Beginn des Art. 2) ist F^4 das Erzeugniss der zwei-zweideutigen Punktsysteme $\Delta(\alpha)$ und $D(\beta)$, deren gegenseitige Beziehung, abgesehen von dem Umstand, dass sich der beiden Trägern gemeinschaftliche Punkt B doppelt selbst entspricht, sonst ganz allgemeiner Natur ist. Die Cuspidalpunkte $c_1, c_2, c_{\text{I}}, c_{\text{II}}$ sind die vier Verzweigungspunkte der erzeugenden Reihen. Je nachdem diese sämmtlich reell, imaginär, oder, in angegebener Reihenfolge ($c_1, c_2 — c_{\text{I}}, c_{\text{II}}$), paarweise reell und imaginär, und umgekehrt imaginär und reell sind, haben wir vier gleich allgemeine Arten der behandelten Fläche F^4_{rr}, F^4_{ii}, F^4_{ri} und F^4_{ir} zu unterscheiden. Die erste Flächengattung hat unter Anderem die Eigenschaft, dass jede ihrer beiden Doppellinien durch die auf ihr liegenden Cuspidalpunkte in zwei Theile zerlegt wird; von welchen der eine aus eigentlichen Doppelpunkten besteht — in welchen sich reelle Erzeugende schneiden — während der andere Theil ideell ist und, wie aus Art. 1 ersichtlich ist, ganz innerhalb des Trägerkegels K^2 liegt.

Diesem entgegen sind die Doppellinien der Fläche F^4_{ii} ihrer ganzen Ausdehnung nach eigentlich, alle ihre Punkte liegen ausserhalb K^2; während von F^4_{ri} der Doppelkegelschnitt D und von F^4_{ir} die Doppelgerade Δ mit K^2 reelle Schnittpunkte (c_1, c_2, beziehungsweise c_{I}, c_{II}) hat, also die erste eine ihrer ganzen Länge nach eigentliche Doppelgerade, die letztere einen eben solchen Doppelkegelschnitt besitzt. Es ist noch zu bemerken, dass die Cuspidalebenen v_1, v_2, für die Flächen F^4_{rr} und F^4_{ri}, den vollen Winkel um Δ in zwei Räume theilen, von der Eigenschaft, dass jede Ebene des einen F^4 in zwei reellen, jede des andern in zwei imaginären Punkten von Δ berührt.

Coincidiren die Cuspidal-, respective Verzweigungspunkte c_{I}, c_{II} der erzeugenden Reihe $\Delta(\alpha)$, so berührt ihr Träger Δ den Trägerkegel K^2 in dem durch das Zusammenfallen von c_{I}, c_{II} constituirten Punkte c. Während man auch jetzt aus irgend einem Punkt von D zwei Tangentialebenen an K^2 legen kann, welche in jedem Falle verschieden sind; ist dies für irgend einen Punkt von Δ nicht mehr möglich. Je eine dieser Ebenen fällt mit der Ebene (ΔO) zusammen. Durch jeden Punkt von Δ läuft also nur eine Erzeugende dieser speciellen Fläche vierten Grades F^4_{I}, welche das Erzeugniss des desshalb eindeutigen Punktsystems D (β) und der zweideutigen Reihe Δ (α) ist. Aus der erklärten und öfters benützten Construction entsprechender Punkte dieser Reihen folgt, dass der Punkt B sich nun einmal selbst entspricht und, als Element von D (β), auch dem Cuspidalpunkt c zugeordnet ist. So dass die Tangentialebene ε_B in B nun Cuspidalebene v der (in diesem Fall) mit Δ coincidirenden und c beigeordneten singulären Erzeugenden e ist, und mit F_1^4 ausser Δ, e nur eine durch B gehende, von Δ verschiedene Gerade $\mathfrak{e}$ gemein hat. Diese Regelfläche hat nur drei Cuspidalpunkte (c, c_1, c_2), drei dem Büschel Δ angehörige Cuspidalebenen (v, v_1, v_2) und jede Ebene dieses Büschels zur dreifachen Tangentialebene. Der eine Berührungspunkt ist c und fix, die zwei andern bilden eine Involution. Durch jeden Punkt von Δ läuft nur eine Erzeugende und F_1^4 kann desshalb nach keinem eigentlichen Kegelschnitt geschnitten werden.

Ist c identisch mit B, also dieser ein Verzweigungspunkt beider Reihen und Berührungspunkt von Δ mit K^2; so coincidirt auch $\mathfrak{e}$ mit Δ, nachdem die D in B tangirende Ebene ε_B von Δ und die durch B an K^2 gelegte Tangentialebene sich in Δ durchschneiden. ε_B hat nun mit F_2^4 vier unendlich nahe in Δ vereinigte Gerade $(\Delta, e, \mathfrak{e})$ gemein. Sie ist eine Wendetangentenebene derselben und Δ ihre Inflexionserzeugende. Die Fläche F_2^4 daher unter Anderem auch die bemerkenswerthe Eigenschaft, dass jede ihr eingeschriebene, ebene Curve einen auf Δ befindlichen Inflexionspunkt, mit einer in ε_B liegenden Tangente besitzt.

Fallen die Cuspidalpunkte c_1, c_2 zusammen, so wird F zur Fläche dritten Grades etc.

Art. 4. Nachdem der Schnitt eine Ebene E, von allgemeiner Lage, mit F^4 eine allgemeine ebene Curve vierter Ordnung, sechster Classe C_6^4 ist, und man durch jede Gerade vier Tangentialebenen an F^4 legen kann; ist der aus einem Punkt P des Raumes der Fläche umschriebene Kegel K_4^6 von der vierten Classe und sechsten Ordnung. Er hat drei Doppeltangentenebenen, von welchen zwei den Kegel R^2 berühren, während die dritte durch Δ geht. Er besitzt vier Doppelkanten, sechs Rückkehrkanten (welche auf einem Kegel zweiten Grades liegen) und berührt (s. Art. 1) die vier singulären Erzeugenden in den Cuspidalpunkten. Seine Berührungscurve B_{10}^{6} ist von der sechsten Ordnung, dem zehnten Rang[1] (Beweisführung wie in Art. 2 für $\mathfrak{B}^4$) und mit zehn scheinbaren Doppelpunkten versehen, welche einzeln auf den vielfachen Kanten von K_4^6 liegen. Sie ist daher nach Eduard Weyr[2] als die einer eigentlichen Fläche vierter Ordnung eingeschriebene Curve, von der Classe (3), d. h. man kann durch sie keine Fläche zweiten Grades und nur eine Fläche dritten Grades legen. (Die Polarfläche des Punktes P.)

Die Berührungscurve B_{10}^{6} begegnet der Doppelgeraden Δ in den Berührungspunkten α', α'' der Ebene $(P\Delta)$ und enthält auch die vier Cuspidalpunkte; hat daher in Δ eine vierpunktige Sekante. Jede Ebene ε von Δ trifft sie noch zweimal, und zwar in Punkten p', p'', welche einzeln den Schnittgeraden e', e'', von ε und F^4 angehören und eine solche Lage haben, dass die in ihnen an F^4 gelegten Tangentialebenen durch P gehen. Diese Bemerkung gibt uns ein einfaches Mittel an die Hand, die Schnittpunkte p', p'' für irgend eine Lage von ε zu finden; sie lehrt uns unter Anderem, dass die Cuspidalebenen v_1, v_2 die Curve B_{10}^{6} in c_1, beziehungsweise c_2 tangiren, und dass daher diese (B_{10}^{6}) die singulären Erzeugenden e_1, e_2 in den Cuspidalpunkten berührt, nachdem nämlich auch die Tangentialebenen (Pe_1) und $(e_1 T_1)$ von K_4^6, respective F^4 in c_1 (z. B.) die Curve B_{10}^{6} berühren müssen, und alle drei Ebenen sich in e_1 durchschneiden. Ebenso finden wir, weil nur der Punkt c_1 von e_1 die Eigenschaft hat, dass eine seiner Tangentialebenen durch P geht, dass die Ebene (Δe_1) mit B_{10}^{6} zwei in c_1 vereinigte Punkte gemein hat, also dass die Berührungscurve in allen vier Cuspidalpunkten die singulären Erzeugenden zu Tangenten besitzt.

Die Curve B_{10}^{6} ist durch drei Punkte, von allgemeiner Lage fixirt, nachdem die Tangentialebenen der F^4 in ihnen das Centrum

---

[1] Die aus dem Projectionscentrum an eine Curve R gelegten Tangenten sind Rückkehrkanten des Projectionskegels, und umgekehrt, wenn R keinen wirklichen Rückkehrpunkt besitzt.

[2] Siehe Seite 25 in Ed. Weyr's Inauguraldissertation: „Über algeb. Raumcurven", Abhandlg. d. k. böhm, Gesellschaft d. Wissensch. zu Prag. 1873.

P bestimmen. Irgend eine zweite Curve (B^6_{10}), mit dem Centrum (P), berührt B^6_{10} in den Cuspidalpunkten und schneidet sie in den vier Berührungspunkten der durch die Gerade $\overline{P(P)}$ an F^4 geleg-ten Tangentialebenen.

Aus der Definition der Berührungscurve B^6 erhellt, dass falls sie mit einem wirklichen Doppelpunkt versehen wäre, dieser nur ein Punkt der Doppellinie (D oder Δ) sein könnte, und daher das Centrum P dieser Curve nothwendig entweder in der Involutionsebene ε_i, oder in ε_B sich befinden muss. Im letztern Fall ist B der Doppelpunkt, im ersteren sind es die Berührungspunkte m_1, m_2, der aus P an D gezogenen Tangenten. Sie sind eigentlich oder isolirt, je nachdem sie ausser- oder innerhalb K^2 liegen; sie sind Rückkehrpunkte von B^6, wenn sie mit einem der Cuspidalpunkte c_1, c_2 coincidiren. Doch ist das Letztere, wie leicht nachzuweisen, auch dann der Fall, wenn P in einer Doppelebene ε_{I}, $\varepsilon_{\mathrm{II}}$ von Δ, oder einer der Ebenen τ_1, τ_2 (s. Art. 1) liegt. Die Curve B^6 hat den, mit P in derselben der vier Ebenen befindlichen, Cuspidalpunkt zum wirklichen Rückkehrpunkt und wird durch diesen im Rang um Eins vermindert.[1] So ist die Berührungscurve B^6_7, des aus $P = (\tau_1, \tau_2, \varepsilon_{\mathrm{I}})$ der F^4 umschriebenen Kegels K^6_4 vom siebenten Rang; sie berührt e_{II} in c_{II} und hat in c_1, c_2 und c_{I} Rückkehrpunkte.

Eine Cuspidalebene v berührt F^4 längs einer singulären Erzeugenden e. Der aus einem ihrer Punkte P der Fläche umschriebene Kegel K^6 zerfällt daher in diese Ebene und einen Kegel fünfter Ordnung K^5_4, welcher v zur Inflexionsebene und $\overline{Pc}$ zur Inflexionskante hat; F^4 in einer Curve B^5_8, fünfter Ordnung, achten Ranges berührt, die c nicht enthält und v in dem, in dieser Ebene befindlichen Inflexionspunkt der Regelfläche zur Osculationsebene hat. Ist P der Schnittpunkt dreier Cuspidalebenen v_{I}, v_{II} und v_1, deren eine dem Büschel Δ angehört; so zerfällt K^6 in diese und einen Kegel dritter Ordnung, vierter Classe K^3_4, der v_{I}, v_{II}, v_1 zu Inflexionsebenen, $\overline{Pc_{\mathrm{I}}}$, $\overline{Pc_{\mathrm{II}}}$ und $\overline{Pc_1}$ zu Inflexionskanten besitzt und F^4 in einer Curve dritter Ordnung,

---

[1] Von den sechs Rückkehrkanten des Kegels K^6_4 sind nun nur fünf Tangenten der Curve B^6, da eine durch den Rückkehrpunkt derselben bedingt ist.

vierten Ranges B_4^3 berührt, die in den Punkten j_1, j_2 und d_1, beziehungsweise v_I, v_{II} und v_1 zu Osculationsebene hat und e_2 in c_2 tangirt. Aus der bekannten Thatsache, dass die drei Inflexionskanten eines Kegels K_4^3 in einer Ebene liegen, folgt, dass die drei Inflexionspunkte j_1, j_2, d_1 (dasselbe gilt für j_1, j_2, d_2) der Regelfläche F^4 mit dem Schnittpunkt P, der in ihnen F^4 berührenden Cuspidalebenen, einer Ebene angehören.

Für einen Punkt P der Regelfläche, als Projectionscentrum, zerfällt K_4^6, als Enveloppe betrachtet, in das durch die durch P laufende Erzeugende $\mathfrak{e}$ bestimmte Büschel und einen Kegel K_3, dritter Classe; als geomet. Ort angesehen, in die doppelt zu zählende Tangentialebene τ im Punkte P und einen Kegel vierter Ordnung — dessen Symbol demnach K_3^4 ist. Dieser Kegel hat die nicht durch $\mathfrak{e}$ gehende Tangentialebene von $\mathfrak{K}^2$ zur Doppeltangentialebene, berührt die singulären Erzeugenden in den Cuspidalpunkten und die Regelfläche in einer Raumcurve fünfter Ordnung, achten Ranges B_8^5, welche im Centrum P die eigentliche Haupttangente der Fläche zur Tangente hat und durch zwei Punkte zweideutig (im Allgemeinen) gegeben ist. Liegt P auf einer singulären Erzeugenden, so ist die Berührungscurve von der vierten Ordnung, sie enthält P nicht mehr und berührt die bezeichnete singuläre Erzeugende nicht. Ist P ein Punkt eines der Kegelschnitte c_I^2, c_{II}^2, so ist der umschriebene Kegel von der dritten Ordnung und Classe; seine Berührungscurve ist von der dritten Ordnung, wenn seine Spitze einer der Inflexionspunkte j_I, j_{II} ist.

Aus einem Punkt des Doppelkegelschnittes D wird F^4 durch einen Kegel zweiten Grades K^2 projicirt, welcher die vier singulären Erzeugenden in den Cuspidalpunkten berührt. Seine Berührungscurve ist von der vierten Ordnung und dem Geschlecht Null, mit einem Doppelpunkt im Centrum. Sie hat in diesem die zwei eigentlichen Haupttangenten des Punktes, und in den Cuspidalpunkten die vier singulären Erzeugenden zu Tangenten.

Jede Erzeugende $\mathfrak{e}'$ der Regelfläche F^4 berührt jeden dieser Fläche umschriebenen Kegel (also auch K^2) einmal, und fixirt daher eine Tangentialebene τ' desselben; sie bestimmt ferner mit Δ eine Ebene ε dieses Büschels, welche F^4 noch in einer Erzeugenden e'_1 schneidet, die wieder mit K nur eine Tangentialebene τ'_1 dieses Kegels feststellt. Die Ebenen τ', τ'_1 bilden eine quadratische Tangentenebeneninvolution J, mit dem Träger K und einem Involutionskegel k^2_i, zweiten Grades, der D zur Basis und die Spitze P von K zur Spitze hat. Diese Involution ist mit dem Büschel $\Delta(\varepsilon)$ projectivisch, hat mit demselben die Ebene $(P\Delta)$, sich zweimal entsprechend, gemein und erzeugt mit ihm die behandelte Regelfläche.

Aus dieser Auseinandersetzung ergibt sich ohne Weiteres der Satz:

„Jeder der Regelfläche F^4 umschriebene Kegel zweiten Grades kann als Trägerkegel einer Tangentenebeneninvolution zweiter Classe betrachtet werden, welche mit demselben Ebenenbüschel Δ projectivisch ist und mit ihm die genannte Fläche erzeugt.“

Es ist nun auch klar, dass innerhalb irgend eines Kegels K^2 nur imaginäre einfache und isolirte Doppelpunkte der Regelfläche liegen können, und umgekehrt, jeder ausserhalb gelegene Flächenpunkt reell und eigentlich sein muss.

Die Berührungscurve B^4 eines der Kegel K^2 kann auch als die Durchdringung desselben mit einem Hyperboloid P^2 angesehen werden, welches das Erzeugniss des Ebenenbüschels Δ und des Scheines P, der von Tangentenebeneninvolution J^2 au K^2 gebildeten Strahleninvolution i ist, und das mit F^4, ausser Δ und B^4, die singulären Erzeugenden e_1, e_2 gemein hat.

Umschreiben wir aus irgend einem Punkt P des Raumes sowohl der Regelfläche als auch den Doppelkegelschnitt D Kegel: K^6_4 beziehungsweise k^2, so schneiden sich beide in zwölf Kanten. Zwei zielen nach den Cuspidalpunkten c_1, c_2, je zwei — also im Ganzen acht — nach den D und der Berührungscurve B^6 von K^6 gemeinschaftlichen, von c_1, c_2 verschiedenen, vier Punkten, so dass nur zwei Schnittkanten t_1, t_2, die Eigenschaft haben, F^4 in Punkten b_1 respective b_2 zu berühren, die von ihren Schnittpunkten β_1, β_2 mit D verschieden sind. Diese zwei Kanten bestimmen ebenso viele durch P gehende Trägerkegel K^2, zweiten Grades; nachdem der aus β_1 der Fläche umschriebene Kegel die Gerade $\overline{\beta_1 b_1 P} = t_1$, und der aus β_2 umschriebene Kegel die Gerade $\overline{\beta_2 b_2 P} = t_2$ zur Erzeugenden besitzt.

„In jedem Punkt des Raumes schneiden sich zwei der Regelfläche umschriebene Kegel zweiten Grades."

Befindet sich der Punkt auf F^4, so ist sowohl K^2 als auch B^4 eindeutig gegeben.[1]

Art. 5. Die reciproken Betrachtungen sind nun leicht zu bilden. Irgend eine Ebene E schneidet F^4 in einer allgemeinen Curve vierter Ordnung, welche die Schnittpunkte Δ_1, Δ_2, Δ_3, ihrer Ebene mit den Doppellinien, zu Doppelpunkten hat. Die Tangenten t_1, t_2 in einem derselben (Δ_n) sind die Schnitte von E mit den Tangentialebenen der F^4 in Δ_n; sie coincidiren und Δ_n ist ein Rückkehrpunkt, wenn er ein Cuspidalpunkt der Fläche ist. Eine Fläche F^4_{rr}, mit vier reellen Cuspidalpunkten, kann daher zweimal nach ebenen Curven C^4_3, mit drei Rückkehrpunkten geschnitten, und nur dieser Fläche können ebene Curven C^4_6, mit drei isolirten Doppelpunkten, eingeschrieben werden. Die Fläche F^4_{ii} enthält nur Curven C^4_6 mit drei eigentlichen Doppelpunkten und keine Curve C^4_3 etc. Eine Ebene des Bündels B und jede, welche eine Tangente von D enthält, schneidet F^4 in einer Curve mit einem Berührungsknoten. Curven C^4_6, deren Ebenen die am Schlusse des zweiten Artikels erwähnte Gerade $\mathfrak{G} \equiv (v_\mathrm{I} v_\mathrm{II})$ besitzen, haben drei sich in $\mathfrak{P}$ schneidende Doppeltangenten. Die eine ist $\mathfrak{G}$, die zwei andern liegen auf $\mathfrak{K}^2$ und sind beide eigentlich, wenn $\mathfrak{G}$ imaginär ist; eine eigentlich, die andere ideell, wenn $\mathfrak{G}$ reell ist etc.

Eine durch eine Erzeugende $\mathfrak{e}$ gelegte Ebene E schneidet F^4 noch in einer Curve dritter Ordnung C^3_4, deren mit E variabler Schnittpunkt b mit $\mathfrak{e}$ der Berührungspunkt ihrer Ebene ist, und mit einem Cuspidalpunkt coincidirt, sobald $\mathfrak{e}$ eine singuläre Erzeugende ist.

Die Doppelpunktstangenten der Curven C^3 des Büschels $\mathfrak{e}$ erfüllen eine Regelfläche fünften Grades, welche $\mathfrak{e}$ zur dreifachen Geraden und D zur Doppellinie hat. Die Ebenen der Curven C^3_4, welche einen Punkt gemein haben, umhüllen den aus ihm der

---

[1] Es ist noch zu erwähnen, dass wenn P ein Cuspidalpunkt ist, B^4 in ihm einen Rückkehrpunkt hat; und dass B^4 in eine Curve dritter Ordnung und eine singuläre Erzeugende zerfällt, wenn P mit d_I, oder d_II identisch wird.

Fläche umschriebenen Kegel K_3^4. Durch zwei Punkte ist C_4^3 zweideutig gegeben; so gehen durch die zwei Inflexionspunkte j_{I}, j_{II} zwei Curven bezeichneter Art. Jede hat in diesen Punkten, also auch in ihrem dritten Schnittpunkt mit $\overline{j_{\text{I}}, j_{\text{II}}}$ einen Inflexionspunkt, woraus weiter folgt, dass sich die Haupttangenten der Fläche in ihren anderen mit $\overline{j_{\text{I}}\, j_{\text{II}}}$ gemeinschaftlichen Punkten, mit den durch diese laufenden Erzeugenden wechselweise schneiden. Nachdem die acht Schnittpunkte, der Fläche mit dem imaginären Kugelkreis, nur vier reelle Verbindungslinien zulassen, enthält F^4 acht cyklische ebene Curven dritter Ordnung. Curven dritter Ordnung und Classe enthält F^4 nur dann, wenn die Cuspidalpunkte c_1 und c_2 reell sind; ihre Ebenen umhüllen die aus diesen Punkten der Fläche umschriebenen Kegel K_1^2 und K_2^2. Sie sind durch einen Punkt zweideutig gegeben.

Ein Kegelschnitt C^2 ist durch einen Punkt vollkommen fixirt; dabei muss bemerkt werden, dass die Doppelgerade Δ von keinem Kegelschnitt getroffen wird, wogegen sich in jedem Punkt des Doppelkegelschnittes D zwei durchschneiden. Jede Ebene wird von zwei F^4 eingeschriebenen Kegelschnitten berührt (s. Schluss des Art. 4); diese Fläche besitzt daher zwei Parabeln; und ebenso viele umschriebene Zilinder zweiten Grades.

Die drei Rückkehrtangenten einer Curve C_3^4 schneiden sich in einem Punkt; dieser ist auch der Schnitt der Ebene dreier Cuspidalpunkte und der Tangentialebenen ε_{I}, τ_1 und τ_2 in denselben.

Art. 6. Wenden wir uns wieder der in Art. 4 begonnenen Untersuchung des Systems der F^4 umschriebenen Kegel zweiten Grades zu. Jeder berührt die singulären Erzeugenden e_1, e_2 in den Cuspidalpunkten c_1 beziehungsweise c_2 und bestimmt mit ihnen zwei Tangentialebenen τ_1 und τ_2, welche ihn beziehungsweise längs $\overline{c_1 P}$ und $\overline{c_2 P}$ tangiren; also sich in einer Geraden $\mathfrak{p}$ schneiden, die die auf $P(K^2)$ bezogene Polare der Involutionsebene ε_i ist. Durchläuft die Spitze P des Kegels K^2 den Doppelkegelschnitt, so bilden die Ebenen τ_1 und τ_2 zwei projectivische Ebenenbüschel $e_1(\tau_1)$ und $e_2(\tau_2)$ und daher ihre Schnittlinie $\mathfrak{p}$ ein einschaliges Hyperboloid π^2, welches auch e_1, e_2 und Δ zu Erzeugenden hat.

„Das durch den Doppelkegelschnitt D, die Doppelgerade Δ und die singulären Erzeugenden e_1 und e_2

bestimmte Hyperboloid π^2 ist der geometrische Ort der Polaren der Ebene des Doppelkegelschnittes, bezogen auf die der Fläche umschriebenen Kegel zweiten Grades.“

Zu weiteren Eigenschaften des Hyperboloides π^2 gelangen wir durch Lösung einer Frage, welche mit dem Gesagten scheinbar in keinem Zusammenhang steht. Diese Frage betrifft die der Fläche eingeschriebenen ebenen Curven C^4, mit einem Doppelinflexionspunkt.[1]

Die Fläche F^4 hat in jedem Punkt P von D, ausser den Erzeugenden, zwei eigentliche Haupttangenten t_1, t_2, welche Inflexions- und Doppelpunktstangenten des Schnittes C^4_6, ihrer Ebene mit F^4, sind.

Durch jeden Punkt von D kann man also nur eine Ebene $\mathfrak{E}$ legen, welche F^4 in einer Curve C^4_6 bezeichneter Art schneidet. Ferner wissen wir aus l. c. und der Abhandlung: „Über vierfach berührende Kegelschnitte der Curven vierter Ordnung mit etc.“ Sitzungsbericht vom 3. Juli 1879, dass eine Curve C^4_6 dann einen Doppelinflexionspunkt P besitzt, wenn dieser der Pol der Gegenseite des Doppelpunktsdreieckes (der Curve) bezüglich eines — also auch aller — vierfach berührenden Kegelschnitte der Curve C^4_6 ist. Es ist also vor Allem nothwendig, dass die Ebene $\mathfrak{E}$ den Doppelkegelschnitt D in zwei einander bezüglich c_1, c_2 harmonisch conjugirten Punkten P und P' schneidet, daher durch das Centrum Ω — welches der Schnitt der Tangenten T_1 und T_2 von D in c_1 beziehungsweise c_2 ist — der Involution $(c_1 c_2 PP') = -1$ geht.

Die Polarebene $(\mathfrak{p})$ des Punktes P, bezogen auf den aus P' der Fläche umschriebenen Kegel $P'(K^2)$, berührt D in P' und trifft Δ in einem Punkt P'' Jede Gerade g der Ebene $(\mathfrak{p})$, also auch $\overline{P'P''}$, hat die Eigenschaft, dass sie die Polare des Punktes P bezüglich des in der Ebene (gP) beziehungsweise $(P'P''P)$ gelegenen Kegelschnittes von $P'(K^2)$ ist. Die Gerade $\overline{P'P''}$ ist aber auch für die Schnittcurve C^4_6, der Ebene $(PP'P'')$ mit F^4, die Verbindungslinie zweier Doppelpunkte P' und P''; also, nach den citirten Abhandlungen, die Polare von P bezogen auf alle vier-

[1] Siehe: „Über rat. Curven vierter Ordnung, deren Doppelpunkstangenten in Inflexionstangenten übergehen.“ Sitzb. d. k. Akademie d. Wissenschaften. Märzheft 1879.

fach berührenden Kegelschnitte von C_6^4, d. h. bezüglich der Schnitte der Ebene $(PP'P'')$ mit allen Kegeln K^2. In ihr schneiden sich die Polarebenen des Punktes P rücksichtlich aller K^2 — sie ist die gemeinschaftliche Polare dieses Punktes. Da aber die Polarebene ($\mathfrak{p}$) von P, bezüglich irgend eines Kegels $P_n(K^2)$, identisch ist mit der Polarebene der Verbindungslinie $\overline{PP_n}$, seiner Spitze mit P; muss diese Ebene, weil $\overline{PP_n}$ in der Involutionsebene ε_i liegt, durch die Polare $\mathfrak{p}$ der letztgenannten Ebene bezüglich desselben Kegels $P_n(K^2)$, gehen. Dies gilt für jeden Kegel K^2 und jede Gerade $\mathfrak{p}$; jede solche befindet sich mit $\overline{P'P''}$ in einer Ebene ($\mathfrak{p}$), deren Gesammtheit das Büschel $\overline{P'P''}$ bildet. Die Gerade schneidet also umgekehrt alle Geraden $\mathfrak{p}$, d. h. jede der Schaar Δ angehörige Erzeugende des Hyperboloides π^2; sie ist eine der Schaar (e_1, e_2) angehörige Erzeugende dieser Fläche.

„Die Polarebenen eines Punktes P des Doppelkegelschnittes D, bezüglich der der Regelfläche F^4 umschriebenen Kegel zweiten Grades K^2, schneiden sich in einer Geraden $\overline{P'P''}$; welche das Hyperboloid π^2 erzeugt, wenn P den Kegelschnitt D durchläuft.“

Dieses Hyperboloid hat also zur einen Erzeugenden-Schaar — welcher Δ angehört — die Polaren von ε_i bezüglich aller K^2; zur andern die Polaren der Punkte von D, ebenfalls bezogen auf alle K^2; so dass eine Erzeugende dieser Schaar — welcher e_1, e_2 angehören — die auf sämmtliche K^2 genommene Polare des ihr auf D bezüglich c_1, c_2 harmonisch conjugirten Punktes P ist.

Das Hyperboloid π^2 ist aber auch der geometrische Ort der, bezüglich je zweier in einem Punkt des Doppelkegelschnittes sich schneidenden Erzeugenden, der Involutionsebene harmonisch conjugirten Geraden; da dieser mit ihm D, Δ und e_1, e_2 gemeinschaftlich hat.

Zur Betrachtung der Curven C_6^4, mit einem Doppel-Inflexionspunkt, zurückkehrend, bemerken wir, dass die Ebene einer solchen, sowohl Ω als auch eine der Geraden $\overline{P'P''}$ enthalten muss, d. h. eine durch Ω gelegte Tangentialebene von π^2 ist.

Die Ebenen, welche F^4 nach Curven vierter Ordnung, mit einem Doppelinflexionspunkt schneiden, welche also die Haupttangenten von F^4 in Punkten von D enthalten, umhüllen einen Kegel zweiten

Grades f^2; der dem Hyperboloid π^2 aus dem Schnittpunkt Ω, der Tangenten von D in den Cuspidalpunkten c_1, c_2, umschrieben ist; also diese zu Erzeugenden hat und die Ebenen $(\Omega\Delta)$, (Ωc_1), (Ωc_2), (Ωc_I) und (Ωc_{II}) berührt."

Dem Hyperboloid π^2 ist, in seinen Beziehungen zur Regelfläche, ein anderes reciprok, welches man am besten als das Erzeugniss $\mathfrak{P}^2$ der, von dem System der Kegelschnitte C^2 auf den singulären Erzeugenden e_I, e_{II} gebildeten, projectivischen Punktreihen $e_I(p_I)$ und $e_{II}(p_{II})$ erhält; und das auch die Doppelgerade Δ zur Erzeugenden hat. Die Tangenten μ_I, μ_{II} von C^2 in p_I beziehungsweise p_{II} schneiden sich in $\mathfrak{P}$, der Spitze des Kegels $\mathfrak{K}^2$, [die wir auch — da sie ε_i reciprok ist — kurz Involutionscentrum nennen wollen]; weil sie sowohl in der durch $\mathfrak{P}$ gehenden Ebene E_c von C^2, als auch in den Tangentialebenen von F^4 in den bezeichneten Punkten, den ebenfalls $\mathfrak{P}$ enthaltenden Cuspidalebenen v_I, v_{II}, liegen müssen. Die Erzeugende p_Ip_{II} ist daher die Polare von $\mathfrak{P}$ bezüglich C^2; sie befindet sich in der Ebene E_c (von C^2), und schneidet demnach die Berührungskante g, dieser Ebene mit $\mathfrak{K}^2$, in dem dem Punkte $\mathfrak{P}$ bezüglich n_1, n_2 [1] harmonisch conjugirten Punkt m. Der geometrische Ort dieses Punktes ist, als Berührungscurve von $\mathfrak{P}^2$ mit $\mathfrak{K}^2$, ein Kegelschnitt M^2, welcher, dem Gesagten zufolge, den Berührungsknoten B und die Inflexionspunkte j_I, j_{II} enthält.

„Das durch die Doppelgerade Δ, die singulären Erzeugenden e_I, e_{II} und den Doppeltangentenebenen-Kegel $\mathfrak{K}^2$ bestimmte Hyperboloid $\mathfrak{P}^2$ ist der geometrische Ort der Polaren der Spitze $\mathfrak{P}$ des Kegels $\mathfrak{K}^2$, bezüglich der F^4 eingeschriebenen Kegelschnitte C^2. Es berührt den Kegel $\mathfrak{K}^2$ in einem Kegelschnitt M^2, dessen Punkte der Spitze $\mathfrak{P}$, bezüglich der Berührungscurve $\mathfrak{B}^4$ von $\mathfrak{K}^2$ mit F^4, harmonisch conjugirt sind."

Dieses Hyperboloid ist aber auch der Ort der dem Punkte $\mathfrak{P}$, dem Involutionscentrum, bezüglich je zweier in einem Punkt α von Δ sich schneidenden Erzeugenden von F^4 harmonisch conjugirten Geraden $\overline{\alpha m}$; d. h. es ist die auf F^4 bezogene Polarfläche von $\mathfrak{P}$; weil diese mit $\mathfrak{P}^2$ den Kegelschnitt M^2 und Δ, e_I und e_{II} gemeinschaftlich hat.

[1] Bezüglich der Bezeichnung s. Art. 2.

Für dieses Hyperboloid gilt, wie nun leicht einzusehen ist, auch der Satz:

„Die Pole[1] einer Tangentialebene E_c des Kegels $\mathfrak{K}^2$, bezüglich der Kegelschnitte C^2, liegen auf einer Geraden $(E'_c E'')$, der Polare von E_c; welche das Hyperboloid $\mathfrak{P}^2$ erzeugt, wenn E_c den Kegel $\mathfrak{K}^2$ umhüllt."

Die durch die Polare $(E'_c E'')$ fixirte Tangentialebene von $\mathfrak{K}^2$, ist der Ebene E_c, bezüglich der Cuspidalebenen v_{I}, v_{II}, auf $\mathfrak{K}^2$ harmonisch zugeordnet. Die Gerade $(E'_c E'')$ bildet nur die eine Erzeugenden-Schaar von $\mathfrak{P}^2$, und zwar jene, welcher auch e_{I}, e_{II} angehören; wogegen die andere aus den auf C^2 bezogenen Polaren von $\mathfrak{P}$ besteht und Δ enthält.

Art. 7. Durch einen Punkt γ einer der Fläche F^4 eingeschriebenen ebenen Curve C geht nur eine Erzeugende $\mathfrak{e}$, welcher in ihrem Schnittpunkt α mit Δ eine zweite Erzeugende $\mathfrak{e}_1$ begegnet. Diese trifft C in einem Punkt γ_1, der mit γ involutorisch liegt (wegen der Vertauschungsfähigkeit von $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{e}_1$) und daher mit ihm — wenn sich dieser bewegt — eine Punktinvolution i bestimmt, die C zum Träger hat und mit der projectivischen Reihe $\Delta(\alpha)$ die Fläche F^4 erzeugt. Die Involutionscurve von i ist der Schnitt c_i^2 der Ebene E von C mit dem Kegel $\mathfrak{K}^2$, weil die Gerade $\overline{\gamma\gamma_1}$, als in der Tangentialebene $(\mathfrak{e}\,\mathfrak{e}_1) = E_c$ von $\mathfrak{K}^2$ liegend, diesen und daher auch c_i^2 tangirt.

Durch die Bemerkung, dass die erzeugende Punktinvolution central wird, wenn die Ebene E (der Trägercurve) durch die Spitze $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{K}^2$ — das Involutionscentrum — gelegt ist, und auch ein der Fläche eingeschriebener Kegelschnitt C^2 (E berührt $\mathfrak{K}^2$) zur Trägercurve gewählt werden kann; gelangen wir zu einer Entstehungsart von F^4 — durch $\Delta(\alpha)\pi$ mit $C^2(\gamma\gamma_1)$ — welche jener, die wir im Art. 1 als Definition von F^4 aufgestellt haben, reciprok ist.

Die Erzeugenden der Fläche F^4 bestimmen auf irgend zwei ebenen Curven C_1 und C_2 derselben zwei projectivische Punktsysteme, und umgekehrt kann F^4 immer als das Erzeugniss zweier

---

[1] Als Pol einer Ebene, bezüglich eines Kegelschnittes, sehen wir den Pol der Schnittlinie, der Ebene mit der Ebene des Kegelschnittes, an; und reciprok etc.

solcher angesehen werden. Fassen wir den einfachsten und interessantesten Fall, nämlich zwei projectivische Punktsysteme $C_1^2(\alpha)$ und $C_2^2(\beta)$ auf zwei Kegelschnitten, ins Auge; so ist vor Allem klar, dass diese, im Allgemeinen, wohl eine Regelfläche vierten Grades, aber nicht mit einer Doppelgeraden, sondern einer allgemeinen Doppellinie dritter Ordnung erzeugen; dass demnach gewisse Einschränkungen in der Annahme gemacht werden müssen.

Statt also drei Punkten von C_1^2 drei beliebige Punkte auf C_2^2 zuzuordnen; nehmen wir zwei Punkte $\alpha_{\rm I}$ und $\alpha_{\rm II}$ von C_1^2, legen durch die Tangenten des C_1^2 in ihnen je eine Ebene v_1, beziehungsweise v_2, welche auch C_2^2, und zwar in $\beta_{\rm I}$, respective $\beta_{\rm II}$ berühren, betrachten dann $\overline{\alpha_{\rm I}\beta_{\rm I}}$, $\overline{\alpha_{\rm II}\beta_{\rm II}}$ als singuläre Erzeugende und v_1 und v_2 als Cuspidalebenen des Erzeugnisses. Die Ebenen v_1, v_2 schneiden sich in einer Geraden Δ, welche das Erzeugniss $(C_1^2\,C_2^2)$ in ihren Schnitten d_1 und d_2 mit $\overline{\alpha_{\rm I}\beta_{\rm I}}$, beziehungsweise $\alpha_{\rm II}\beta_{\rm II}$ berührt, und daher ganz auf $(C_1^2\,C_2^2)$ liegt, wenn irgend einem Punkte α von C_1^2 ein derart gelegener Punkt β auf C_2^2 zugewiesen wird, dass $\alpha\beta$ sie schneidet. Die Gerade Δ ist, wie leicht einzusehen, die Doppelgerade des Erzeugnisses, und dieses unter den gemachten Prämissen die Fläche F^4. Dasselbe gilt reciprok von zwei projectivischen Tangentenebenen-Systemen auf zwei Kegeln zweiten Grades.

Ebenso können die der Fläche F^4 eingeschriebenen Curven, in geschickter Zusammenstellung, als Leitlinien einer sie beschreibenden, oder erzeugenden Curve (auch Fläche) angenommen werden. So wird die Regelfläche F^4 durch eine Gerade erzeugt, welche an einer Geraden Δ, die einen von zwei, sich zweimal begegnenden Kegelschnitten D und C^2 einmal schneidet, und an diesen gleitet. Reciprok beschreibt eine Gerade die Fläche F^4 wenn sie zwei sich d o p p e l t b e r ü h r e n d e Kegel $\mathfrak{K}^2$ und K^2 constant berührt und eine Tangente Δ des ersteren schneidet. In derselben Weise können Δ, D und K^2, oder Δ, $\mathfrak{K}^2$ und C^2 zu Leitgebilden einer Geraden gewählt werden; nur muss ihre gegenseitige Lage jene sein, welche die gleichbezeichneten Gebilde von F^4 einnehmen. Doch kann F^4 auch durch Bewegung eines Kegelschnittes, oder eines Kegels K^2 erzeugt werden, und diese Entstehungsarten sind, nächst den erwähnten, wohl die interessantesten. So ist d e r g e o m e t r i s c h e O r t e i n e s K e g e l s c h n i t t e s C^2, d e r an fünf einen Kegel $\mathfrak{K}^2$ berührenden Geraden $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{e}_3$, $\mathfrak{e}_4$ und $\mathfrak{e}_5$, die eine Tangente Δ desselben schneiden, gleitet und dessen Ebene constant $\mathfrak{K}^2$ berührt, die Regelfläche F^4. Legen wir ferner durch fünf Gerade $\mathfrak{e}_1$ $\mathfrak{e}_5$, die sowohl einen Kegelschnitt D, als eine in einmal treffende Gerade Δ schneiden, und irgend einen Punkt β von D Ebenen; so fixiren diese einen Kegel K^2, zweiten Grades, dessen Umhüllende, bei Bewegung seiner Spitze auf D, die Fläche F^4 ist, etc. etc.

Durch zwei sich in zwei Punkten β_1, β_2 schneidende Kegelschnitte D und C^2 kann man nur zwei Kegel zweiten Grades $\mathfrak{k}_1^2$ und $\mathfrak{k}_2^2$ legen.[1]

Betrachten wir einen Punkt σ_1 der singulären Erzeugenden e_I als Spitze und D als Basis eines Kegels $\mathfrak{k}_1^2$; so berührt dieser offenbar F^4 längs e_I, und hat demnach mit dieser Fläche — da D als Schnitt doppelt zu zählen ist — noch einen eigentlichen Kegelschnitt C^2 gemein. Da Dasselbe auch für Punkte σ_2 von e_{II} gilt, sehen wir, dass der zweite durch D und C^2 bestimmte Kegel $\mathfrak{k}_2^2$ F^4 längs e_{II} berührt, und dass die Beziehung, sowohl zwischen den Punkten σ_1, σ_2, als auch zwischen den Kegeln $\mathfrak{k}_1^2$, $\mathfrak{k}_2^2$, eine projectivische ist.

Doch kann man auch direct nachweisen, dass der durch D und C^2 bestimmte, zweite Kegel $\mathfrak{k}_2^2$ seine Spitze σ_2 auf e_{II} hat. Wir sehen, zu dem Ende, D und C^2 als zwei collineare Curven an.

Die Tangente t, in einem Punkte b von D, trifft die Collineationsaxe $\overline{\beta_1\beta_2}$ in einem Punkt a, aus welchem man zwei Tangenten t_1 und t_2 an C^2 legen kann. Je nachdem man die Tangenten t und t_1, oder t und t_2 zuordnet, erhält man $\overline{bb_1}$ oder $\overline{bb_2}$ zum Collineationsstrahl; ein weiterer, jedoch fester, d. h. von der gemachten Zuordnung unabhängiger, Strahl ist die Verbindungslinie p, des Schnittpunktes der Tangenten von D in β_1, β_2 und jenes der Tangenten von C^2 in denselben Punkten; woraus wir sehen, dass,

---

[1] Die zwei Kegelschnitte bestimmen ein Flächenbüschel zweiten Grades, dessen Elemente die Gerade $\overline{\beta_1\beta_2}$ und die auf eine Fläche desselben bezogene Polare p dieser Geraden, in dieser Eigenschaft, gemeinschaftlich haben. Jede Fläche des Büschels schneidet p in zwei getrennten, eine Involution bildenden Punkten; deren zwei Doppelpunkte die Spitzen der oben erwähnten Kegel sind.

weil $\overline{bb_1}$ und $\overline{bb_2}$ mit p zwei Punkte σ_1, beziehungsweise σ_2 fixiren und jeder als Collineationscentrum angesehen werden kann, D und C^2 zwei Kegel bestimmen, und dass die Spitzen eben σ_1 und σ_2 sind. Dass diese, respective auf e_I und e_{II} liegen — dies ist eigentlich zu zeigen — lässt sich nun dadurch nachweisen, dass man den beliebig angenommenen Punkt b mit d_I oder d_{II} coincidiren lässt. Im ersten Fall erhält man die singuläre Erzeugende e_I zum Collineationsstrahl — da die Tangenten der Kegelschnitte D und C^2 in ihren auf e_I befindlichen Punkten (d_I und δ_I), als in der Cuspidalebene v_I liegend, sich in dem Schnitt dieser mit $\overline{\beta_1\beta_2}$ treffen — sie läuft durch σ_1; im letztern Fall erkennt man e_I als Collineationsstrahl, und zwar des Centrums σ_2, da er mit e_I windschief ist. Aus diesen Erklärungen geht unter Anderem hervor, dass sich die Cuspidalpunkte c_I und c_{II} als Elemente der Reihen $e_I(\tau_1)$, $e_{II}(\sigma_2)$, entsprechen; da die aus ihnen dem Doppelkegelschnitt umschriebenen Kegel sich längs $\overline{c_I c_{II}} = \Delta$ berühren; und dass auch Δ eine Erzeugende des Hyperboloides h^2 ist, das durch die genannten Reihen erzeugt wird. Weiter finden wir, dass dem Punkte d_I (Analoges gilt für d_{II}) die auf e_{II} liegende Spitze es, durch D und C_I^2 bestimmten, Kegels beigeordnet ist, etc.

„Wenn man aus entsprechenden Punkten σ_1, σ_2, zweier projectivischen, windschiefen Punktreihen e_I und e_{II}, einem Kegelschnit D, welcher das durch e_I, e_{II} erzeugte Hyperboloid h^2 in einem Punkt B berührt und e_I, e_{II} schneidet, Kegel umschreibt; so durchschneiden sich diese noch in einem eigentlichen Kegelschnitt C^2, dessen geometrischer Ort eine Regelfläche vierten Grades ist, die die durch B laufende Erzeugende Δ von h^2 (welche auch e_I, e_{II} schneidet) und D zu Doppellinien, und e_I, e_{II} zu singulären Erzeugenden hat."

Ebenso gelten die reciproken Sätze:

„Jeder der zwei Kegelschnitte c_1^2, c_2^2, in welchen der Doppeltangentenebenen-Kegel $\mathfrak{K}^2$ einen der Fläche F^4 umschriebenen Kegel zweiten Grades K^2 schneidet, berührt eine singuläre Erzeugende e_1, beziehungsweise e_2 im Cuspidalpunkt. Ihre Ebenen bilden zwei projectivische Büschel mit den Axen e und e_2."

„Wenn man einem Kegel $\mathfrak{K}^2$, der die Axen e_1, e_2, zweier projectivischen, windschiefen Ebenenbüschel tangirt und ihr Erzeugniss h^2 in einem Punkte B berührt, durch entsprechende Ebenen σ_1 und σ_2 von e_1, beziehungsweise e_2 schneidet; so haben diese Schnitte noch einen Kegel K^2 gemein, dessen Enveloppenfläche eine Fläche F^4 ist, die den Ort der Spitze von K^2 zum Doppelkegelschnitt hat, etc."

Diesen Entstehungsarten der Fläche F^4 wollen wir noch zwei durch projectivische Flächenbüschel, und zwar allgemeinerer Art hinzufügen, welche der folgenden Bemerkung leicht zu entnehmen sind.

Ein durch den Doppelkegelschnitt D und einen Kegelschnitt C^2 gelegtes Hyperboloid h^2 schneidet F^4 noch in einem Kegelschnitt, der den zweiten Schnittpunkt α von h^2 und Δ, zum Doppelpunkt hat, d. h. aus den zwei durch α laufenden Erzeugenden $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{e}_1$ besteht. Umgekehrt kann man durch D und $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{e}_1$ unendlich viele Hyperboloide legen, deren jedes F^4 in einem Kegelschnitt C^2 schneidet.

„Ist D ein Kegelschnitt, welcher jeden von zwei beliebig im Raum angenommenen Kegelschnitten C_1^2 und C_2^2 in zwei Punkten schneidet und mit einer Geraden Δ, die weder C_1^2 noch C_2^2 schneidet, einen Punkt B gemein hat, so schneiden sich zwei (projectivische) Hyperboloide h_1^2, h_2^2, welche durch D, C_1^2, respective D, C_2^2 und einen Punkt α von Δ gelegt sind, in zwei durch diesen laufenden Geraden $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{e}_1$, welche, wenn α die Gerade Δ durchläuft, eine Regelfläche F^4 beschreiben, die D und Δ zu Doppelliniën hat."

„Es seien $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{e}'$, $\mathfrak{e}'_1$ zwei Geradenpaare, deren jedes sich schneidet, und Δ die Verbindungslinie dieser Schnittpunkte $[(\mathfrak{e}, \mathfrak{e}_1), (\mathfrak{e}', \mathfrak{e}'_1)]$, ferner D ein Kegelschnitt, welcher jede der fünf Geraden einmal trifft. Sowohl durch D, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{e}_1$, als auch durch D, $\mathfrak{e}'$, $\mathfrak{e}'_1$ ist ein Flächenbüschel zweiten Grades h_1^2, respective h_2^2 bestimmt; eine Fläche h_1^2 des einen schneidet jede des andern h_2^2 in einem Kegelschnitt C^2, welcher D in zwei Punkten begegnet. Weisen wir die Elemente beider

Büschel einander derart projectivisch zu, dass jene zwei Hyperboloide beider Büschel, welche Δ enthalten, sich entsprechen; so ist der geometrische Ort von C^2 die Fläche F^4 etc."

Art. 8. Eine algebraische Fläche n-ter Ordnung f^n schneidet F^4 in einer Raumcurve vier n-ter Ordnung, welche $3n$ auf Δ und D gelegene Doppelpunkte besitzt. Die Tangenten t_1, t_2 in einem solchen sind die Schnittlinien der Tangentialebene T von f^n mit den zwei Tangentenebenen T_1, T_2 der Fläche F^4 im bezeichneten Punkt α. Sie coincidiren daher gleichzeitig mit T_1, T_2; woraus unter Anderem hervorgeht, dass R^{4n} — falls sie durch einen Cuspidalpunkt c von F^4 läuft — in ihm nur eine Gerade t zur Tangente hat. Ist diese von der durch c gehenden singulären Erzeugenden e verschieden, schneidet sie also alle Trägerkegel K^2 in c; so wird auch die Curve R, ihrer Tangente folgend, die Tendenz haben in das Innere der K^2 einzudringen. Dies ist aber nicht möglich, da innerhalb aller K^2 kein reeller Flächenpunkt liegt; R wird daher, und zwar wieder sich an t schmiegend, im Punkte c zurückkehren; d. h. sie wird c zum Rückkehrpunkt haben. Ist hingegen t mit e identisch, und nur dann; so folgt auch R der eingeschlagenen Richtung — sie hat in c die singuläre Erzeugende zur Tangente.

„Jede (räumliche oder ebene) Curve der Regelfläche F^4, welche durch einen Cuspidalpunkt geht, hat diesen entweder zum Rückkehrpunkt, oder sie berührt in ihm die singuläre Erzeugende."

Dieser Satz behält seine Giltigkeit, wenn R ein theilweiser Durchschnitt ist und findet eine Bestättigung in dem, von den ebenen und den Berührungscurven, Gesagten.

Da eine auf F^4 liegende Curve die in ihren Punkten an die Fläche gelegten Tangentenebenen berührt; gilt auch der Satz:

„Jede (ebene oder räumliche) der Regelfläche F^4 eingeschriebene Curve berührt die Cuspidalebenen in Punkten der singulären Erzeugenden."

Art. 9. Obwohl noch Manches über die Regelfläche F^4 zu sagen wäre, besonders in Betreff der ihr eingeschriebenen Raumcurven und der an ihr vorzunehmenden Constructionen, müssen wir dennoch schliessen, und zwar um so mehr, als die vorliegende

Arbeit nur ein Auszug aus einer umfangreichen, denselben Gegenstand eingehender besprechenden Abhandlung ist, welche bereits im September des vergangenen Jahres druckbereit war, und vielleicht demnächst erscheint.

Bezüglich der erwähnten Constructionen verweisen wir auf die bereits citirte Arbeit: „Über Curven vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten“ und gehen nun daran, die in Art. 3 untersuchten Flächen F^4_1 und F^4_2 noch einer kurzen Besprechung zu unterziehen.

Aus der, an jener Stelle erwähnten, Eigenschaft der Fläche F^4_1, dass jede Ebene des Büschels Δ sie dreifach berührt, geht vor Allem hervor, dass jeder ihr umschriebene Kegel K^6_4 die durch seine Spitze und Δ fixirte Ebene zur dreifachen Tangentenebene hat, und dass jeder Trägerkegel K^2 die Doppelgerade Δ im Cuspidalpunkt c berührt.

Wir finden auch, dass diese Fläche als das Erzeugniss einer Punktreihe auf Δ und eines dieser projectivischen Punktsysteme auf irgend einer ihr eingeschriebenen ebenen Curve betrachtet werden kann. Dass — die Realität ihrer drei Cuspidalpunkte vorausgesetzt — sie nur eine Curve vierter Ordnung C^4_3, mit drei Rückkehrpunkten besitzt, und dass sich die Ebene der drei Cuspidalpunkte mit den drei besonderen Tangentialebenen in den letzteren — den Doppelebenen — in einem Punkt schneidet.

Legen wir durch eine Erzeugende $\mathfrak{e}$ und den auf D befindlichen Cuspidalpunkt c von F^4_2 eine Ebene, so schneidet diese die Fläche in einer Curve dritter Ordnung und Classe C^3_3, welche c zum Rückkehrpunkt und den Schnitt von $\mathfrak{e}$ mit Δ, d. h. $(\mathfrak{e}\Delta)$ zum Inflexionspunkt hat. Jede Gerade s, welche in der Ebene der Curve durch $(\mathfrak{e}\Delta)$ läuft, schneidet diese in zwei Punkten, welche nach Art. 6 der Abhandlung: „Über rationale ebene Curven dritter und vierter Ordnung“, [1] durch $(\mathfrak{e}\Delta)$ und den Schnittpunkt von s mit der Berührungsebene — eigentlich Doppelebene — von F^4_2 in c harmonisch getrennt werden.

„Eine jede Tangentialebene, des aus dem Cuspidalpunkt c der Regelfläche F^4_2 umschriebenen Kegels K^2, hat die Eigenschaft, dass eine jede Gerade derselben, welche die Doppelgerade Δ schneidet, die Fläche

[1] Sitzb. d. k. Akademie d. Wissensch. vom 9. October 1879.

in zwei weiteren Punkten trifft, welche einander, bezüglich des erstern Punktes und des Schnittes der Geraden mit der Berührungsebene in c, harmonisch conjugirt sind."

Aus diesem Satz geht unter Anderem hervor, dass wenn man auf einer Erzeugenden den ihrem Schnittpunkt mit D, bezüglich ihrer auf Δ und der Berührungsebene in c gelegenen Punkte, harmonisch conjugirten Punkt construirt, dieser die Berührungscurve, des aus c der Fläche umschriebenen Kegels K^2, erfüllt, wenn c die F_2^4 durchläuft.

Die Fläche F_2^4 hat jeden Punkt von Δ zum Inflexionspunkt und daher [nach Art. 1] den c entsprechenden Doppelpunkt d, auf Δ, zum Doppelinflexionspunkt. Dieser Punkt ist aber auch die Spitze eines Kegels π^2, welcher für F_2^4 die Rolle des, in Art. 6 besprochenen, Hyperboloides π^2 spielt; wie aus der, an l. c. und zwar im dritten Satz ausgesprochenen, Eigenschaft dieses Hyperboloides und aus der Bemerkung hervorgeht, dass jede Ebene des Büschels Δ die Fläche F_2^4 in zwei Erzeugenden schneidet, deren Schnitte mit Δ durch d und $B \equiv (\Delta_1 D)$ harmonisch getrennt werden. Jede Ebene des Büschels $\overline{d\Omega}$, welches die Verbindungslinie von d mit dem Schnittpunkt der Tangenten von D in den Cuspidalpunkten B und c, zur Axe hat, schneidet daher F_2^4 in einer Curve C_6^4, welche auf D einen Doppelinflexionspunkt hat [s. Satz 4 in Art. 6]; nach Obigem hat C_6^4 aber auch in d einen solchen Punkt und demnach [s. Art. 4 des Aufsatzes: „Über rationale ebene Curven, deren Doppelpunktstangenten in Inflexionstangenten übergehen", Sitzb. d. k. Akad. d. Wissensch. Märzheft 1879] sämmtliche Doppelpunktstangenten zu Inflexionstangenten.

„Die Regelfläche F_2^4, mit einer Inflexions-Doppelgeraden Δ, enthält ein Büschel von ebenen Curven vierter Ordnung, deren sechs Doppelpunktstangenten Inflexionstangenten sind."

Die Inflexions-, beziehungsweise Haupttangenten dieser Fläche in Punkten des Doppelkegelschnittes erfüllen, wie sich leicht zeigen lässt, eine Regelfläche fünften Grades, welche Δ und D zu Doppellinien hat, etc.

Aus obigem Satz und l. c. geht weiter hervor, dass jede Ebene des Büschels $\overline{d\Omega}$ den Doppelkegelschnitt in zwei Punkten trifft, welche mit α ein Dreieck bilden, das sich, bezüglich aller Kegel K^2, selbst conjugirt ist; und in Verbindung mit dem, im Art. 1 der oben genannten Abhandlung, Erwähnten, ist auch klar, dass jede Gerade des Bündels α die Fläche F_2^4 in zwei weiteren Punkten schneidet, welche durch d und die Ebene des Doppelkegelschnittes harmonisch getrennt werden, dass also diese die, auf F_2^4 bezogene Polarebene des Doppel-Inflexionspunktes ist.

Eine weit allgemeinere Fläche dieser Eigenschaften besprechen wir in einem folgenden Aufsatz.

Bemerkungen über ebene Curven vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten.

Schneiden wir die allgemeine Regelfläche F^4 durch eine Ebene E, von möglichst allgemeiner Lage, so erhalten wir eine allgemeine ebene Curve vierter Ordnung C_6^4, mit drei Doppelpunkten δ, δ_1, δ_2 zum Schnitt. Diese hat die in der Involutionsebene ε_i befindliche Gerade $\delta_1 \delta_2$ zur einen Seite des Doppelpunktsdreieckes $\Delta\delta\delta_1\delta_2$, und den Schnitt P, ihrer Ebene mit der auf irgend einen Kegel K^2 bezogenen, Polare $\overline{P'P''} \equiv p$ von ε_i zum Pol dieser Seite, und zwar bezüglich des Schnittes c^2, ihrer Ebene mit K^2, welcher irgend ein sie vierfach berührender Kegelschnitt ist. Nimmt K^2 nach und nach alle möglichen Lagen ein, so wird auch C^2 die unendliche Reihe der C_6^4 viermal berührenden Kegelschnitte durchlaufen, die Gerade p wird [s. Satz 1 im Art. 6] das Hyperboloid π^2 beschreiben, und daher P den Schnitt desselben mit der Ebene E. Dieses ist also ein Kegelschnitt $\mathfrak{p}^2$, welcher durch δ, δ_1, δ_2 und auch die Schnitte b_1, b_2, von E mit e_1 und e_2, geht, welche auch, für C_6^4, als die Berührungspunkte der aus δ an C_6^4 gelegten zwei Tangenten definirt werden können.

„Der geometrische Ort der Pole, einer Seite des Doppelpunktsdreieckes einer ebenen Curve vierter Ordnung, bezüglich der sie vierfach berührenden

Kegelschnitte, ist ein Kegelschnitt $\mathfrak{p}^2$, welcher die Berührungspunkte der zwei aus dem dritten Doppelpunkt an die Curve gezogenen Tangenten enthält, und dem Doppelpunktsdreieck umschrieben ist."

Dieser Satz lässt sich auch direct nachweisen, und zwar mit Hilfe der ersten Artikel [insbesondere des Art. 4] der Abhandlung: „Über Curven C_3^4 mit drei Doppelpunkten." Wir ziehen, zu dem Ende, durch b_1 eine beliebige Gerade $d_1 d_1$ und betrachten sie — ihr den Strahl $\overline{\delta b_1}$ im Büschel δ zuweisend — als ein Doppelelement der erzeugenden Tangenteninvolution i^2 auf dem erst zu bestimmenden Kegelschnitt c^2. Dieser berührt daher d_1 in ihrem Schnitt β_1 mit $\overline{\delta_1\delta_2}$, welcher Punkt, als der dem Schnitt α_1, von $\overline{\delta b_1}$ mit $\overline{\delta_1\delta_2}$, entsprechende in Verbindung mit δ_1 und δ_2 die Projectivität der Constructionsreihen und daher auch c^2 bestimmt. Die Tangente d_2, dieses Kegelschnittes in seinem zweiten Schnitt β_2 mit $\overline{\delta_1\delta_2}$, geht immer durch b_2 — man möge β_1 beliebig annehmen — und schneidet d_1 in dem Punkt P, dem auf C^2 bezogenen Pol von $\overline{\delta_1\delta_2}$; dessen geometrischer Ort, da die Beziehung zwischen d_1 und c^2 und daher auch zwischen d_1 und d_2 — wie gezeigt — eine projectivische ist, als das Erzeugniss der Büschel b_1 (d_1) und b_2 (d_2) ein Kegelschnitt $\mathfrak{p}^2$ ist. Da eine Curve C_6^4 in einem bestimmten Punkte von einem, sie auch an drei andern Stellen berührenden, Kegelschnitt C^2 berührt wird, und dasselbe von einem Kegel K^2 und der Fläche F^4 gilt [s. Schluss des Art. 5 dieser Abhandlung]; sehen wir, dass jedem vierfach berührenden Kegelschnitt von C_6^4 ein Kegel K^2, und umgekehet jedem K^2 ein C^2 zugeordnet ist, so zwar, dass C^2 der Schnitt von K^2, und K^2 der Schein von C^2 ist.

Aus c. l. sehen wir auch, dass sich die vierfach berührenden Kegelschnitte einer Curve C_6^4 zu Paaren gruppiren, welche sich in einem Punkt schneiden; und für einen ebenen Schnitt von F^4 auf den zwei, durch ihren Schnittpunkt bestimmten, Trägerkegeln liegen.
