

Zur wissenschaftlichen Behandlung der orthogonalen Axonometrie.

Von **Carl Pelz**,

Professor an der k. k. technischen Hochschule in Graz.

Einleitung.

Von vielen Autoren wird darüber geklagt, dass der klinographischen Parallelperspective, in ungerechter Weise, bisher nicht jene Würdigung in der Behandlung und Anwendung zu Theil wurde, wie der ihr analogen orthogonalen Axonometrie, der sie doch in jeder Hinsicht als vollkommen ebenbürtig bezeichnet werden könne. Es wäre in der That ein Verkennen der Sachlage, wenn man derartigen Klagen eine gewisse Berechtigung nicht einräumen wollte, da man gleich bei einem selbst flüchtigen Vergleiche der Literaturen dieser beiden Projectionsarten zu der Erkenntniss gelangen muss, dass sich die orthogonale Axonometrie bisher einer grösseren Beachtung zu erfreuen hatte, als die klinographische. Einen argen Fehlschluss würde man indess begehen, wenn man aus dem Umstande, dass die orthogonale Axonometrie bisher eine erheblichere Pflege als die klinogonale gefunden hatte, folgern wollte, dass diese Projectionsart in allen ihren Partien — sowohl in der Theorie als Anwendung — jener selbstständigen wissenschaftlichen Behandlung und Begründung theilhaftig wurde, und dass der wissenschaftliche Werth der orthogonalen Axonometrie bereits in dem Masse erkannt worden wäre, wie sie es als selbstständige Projectionsmethode und als ein wichtiger Zweig der reinen Geometrie in Anspruch zu nehmen berechtigt ist.

Da die orthogonale Axonometrie einem praktischen Bedürfnisse ihre Entstehung verdankt, glaubte man von mancher Seite berechtigt zu sein, sie ihres wissenschaftlichen Charakters in vielfacher Hinsicht entkleiden zu dürfen, und in Folge dessen ist diese Projectionsart der ihr bisher zugekommenen Behandlungsweise halber, vom wissenschaftlichen Standpunkte, im Allgemeinen nichts weniger als zu beneiden. Wie stark der Einfluss der Praxis seine ablenkende Wirkung auf das Fortschreiten auf dem streng wissenschaftlichen Wege bei der Behandlung dieser Disciplin ausgeübt hatte, ersieht man z. B. deutlich aus dem zwar sehr wohlfeilen, dagegen aber recht unwissenschaftlichen, zuerst durch Möllinger eingeführten „Kunstgriff" der sogenannten „hypothetischen Vergrösserung", der, obwohl wiederholt verurtheilt, leider immer wieder Nachahmung gefunden hatte.

Unter den Autoren, welche über die orthogonale Axonometrie solche Originalarbeiten geliefert haben, in denen auch die axonometrische Projectionslehre Berücksichtigung gefunden hatte, sind Möllinger, Weisbach, und insbesondere M. H. und C. Th. Meyer namhaft zu machen. Auch Skuhersky hat in seiner Abhandlung: „Die Methode der orthogonalen Projection auf zwei Ebenen, die keinen rechten Winkel mit einander einschliessen" (Abhandlungen der königl. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften 1858) die wichtigsten Aufgaben, die sich auf die gegenseitige Lage der Raumgrössen beziehen, durchgeführt. Wir können uns jedoch nicht dazu entschliessen, diese von ihm „orthographische Parallel-Perspective" benannte Projectionsart, mit der orthogonalen „Axonometrie" für identisch zu halten; da Skuhersky seine Constructionen nicht auf Grundlage eines angenommenen oder nach gewissen Gesetzen construirten „Axenkreuzes", sondern mit Hilfe des „Drehungswinkels" γ durchführt. Dieser Drehungswinkel, um den die Grundebene von der horizontalen Lage abweicht, kann allerdings aus dem Axenkreuze sehr leicht construirt werden; aber durch die Elimination des Axenkreuzes und seine Ersetzung durch den Drehungswinkel erwächst für die orthogonale Axonometrie weder vom praktischen noch vom wissenschaftlichen Standpunkte irgend ein Gewinn.

Wie man aus den Arbeiten Skuhersky's und Anderer, die seinem Vorgange gefolgt sind, ersieht, wird hier jede, selbst die einfachste der Geometrie des Masses angehörige Aufgabe nicht direct, sondern mit Hilfe des Kreuz- und Grundrisses nach den Lehren der beschreibenden Geometrie gelöst. Die Lösungen sind daher weder einfach, noch kann dieses stete Zurückführen auf die gewöhnliche orthogonale Projection, der orthogonalen Axonometrie das Gepräge einer selbstständigen Projectionsmethode verleihen. Diesen Vorgang hat man bei der Behandlung der centralen Projection längst als einen unwissenschaftlichen erkannt und beseitigt.

Die Behandlung der axonometrischen Projectionslehre in Weisbach's: „Anleitung zum axonometrischen Zeichnen" leidet an ähnlichen Unzukömmlichkeiten. Die Constructionen varianter Eigenschaften geometrischer Gebilde, werden hier zwar unter Zugrundelegung des Axenkreuzes, aber stets durch Übertragung auf die gewöhnliche orthogonale Projection durchgeführt.

Herr L. Burmester führt in seiner „Theorie und Darstellung der Beleuchtung gesetzmässig gestalteter Flächen" auf pag. 118 auch die Darstellung der Intensitätslinien eines Rotationskegels, dessen Basis in einer beliebigen Ebene liegt, in rein axonometrischer Methode — nach Weisbach's „Anleitung" — durch. Abgesehen davon, dass wir es hier mit der bereits berührten „hypothetischen Vergrösserung" zu thun haben, fühlt sich der Autor zum Schlusse zu der Bemerkung veranlasst, dass dieses nach rein axonometrischer Methode ausgeführte Beispiel vorzugsweise nur theoretisches Interesse hat, und dass es bei der axonometrischen Darstellung vortheilhafter ist, wenn man von der rein axonometrischen Methode abweicht und eine seitliche Projection benützt.

Hier wird also ebenfalls jene Ansicht getheilt, die das Axenkreuz gewissermassen als einen Ballast bezeichnet, dessen Beseitigung und Ersetzung durch den Drehungswinkel Vortheile für die axonometrischen Constructionen mit sich bringt. Wir werden vielfach Gelegenheit haben, im Nachfolgenden zu zeigen, dass Vereinfachungen bei axonometrischen Constructionen eben nur durch das Axenkreuz erzielt werden können, und dass diese von Burmester und Anderen getheilte Ansicht — deren Bestätigung den Werth der orthogonalen Axonometrie sehr problematisch machen müsste — als nicht zutreffend bezeichnet werden kann, und blos angesichts der bisher üblichen Behandlungsweise dieser Projectionsart eine gewisse Berechtigung hat.

Die grösste Selbstständigkeit in der Behandlung der axonometrischen Projectionslehre finden wir in dem „Lehrbuch der Axonometrie" von M. H. und C. Th. Meyer. Während andere Autoren das Axenkreuz blos dazu benützen zu können glauben, um Punkte von darzustellenden Objecten im Bilde zu bestimmen, haben die Gebrüder Meyer die Bedeutung des Axenkreuzes auch für die Lösung von theoretischen Fragen in axonometrischer Projection erkannt. Das in dem etwas breitspurigen Buche unverkennbar hervortretende Streben, die orthogonale Axonometrie möglichst selbstständig zu entwickeln, verdient vom wissenschaftlichen Standpunkte jede Anerkennung. Indess können jedoch die Lösungen der hier erörterten, der Geometrie des Masses angehörigen Aufgaben, nicht als directe angesehen werden, da die grundlegenden unter denselben — die Constructionen winkelrechter Linien etc. — zwei axonometrisch normale und gleiche, durch einen Punkt gehende Gerade, als gegeben voraussetzen.

Die bedeutendsten unter den, hier bisher nicht angeführten Männern, welche der orthogonalen Axonometrie seit deren Bekanntschaft in Deutschland, ihre Aufmerksamkeit geschenkt haben, beschäftigten sich meist blos mit einem Theile dieser Projectionsart, nämlich mit der Construction des Axenkreuzes. Es ist jedoch ein grosser Irrthum, wenn angenommen wird, dass durch die Lösung des sogenannten axonometrischen Fundamental-Problems, nämlich durch die Construction des Axenkreuzes aus den drei Reductions-Coëfficienten, die orthogonal axonometrische Projectionsmethode als vollständig erledigt zu betrachten ist. Denn wenn wir auch zugeben wollten, dass die unmittelbare Feststellung dieser Reductions-Coëfficienten das günstige Aussehen des axonometrischen Bildes des Gegenstandes bedingt, so ist hiedurch doch zunächst blos einem Bedürfnisse der Praxis entsprochen; für den wissenschaftlichen Theil der Disciplin ist hiermit noch nichts gethan. Die orthogonale Axonometrie als selbstständige Projectionsmethode ist dadurch ebenso wenig als vollendet anzusehen, wie die Polarperspective durch die Angabe der Dispositionen, die hinsichtlich des Projectionscentrums etc.

getroffen werden müssen, damit das centrale Bild des Gegenstandes zu einem perspectivischen werde. Und ebenso, wie der streng wissenschaftliche Aufbau der Polarperspective zunächst die Entwicklung der Gesetze der Centralprojection ganz allgemein ohne Rücksicht auf die praktischen Anforderungen perspectivischer Bilder verlangt, so erfordert auch die wissenschaftliche Behandlung der orthogonalen Axonometrie zuvörderst, dass man die axonometrische Projectionslehre ohne Bezugnahme auf die praktischen Bedürfnisse und möglichst unabhängig von der gewöhnlichen orthogonalen Projection, entwickelt, und erst darnach jene Modificationen erörtert, deren Berücksichtigung erforderlich ist, damit die orthogonale Axonometrie den an sie gestellten praktischen Anforderungen — die Vorzüge der centralen und orthogonalen Projection möglichst zu vereinigen — gerecht werde. Betrachtungen über die Art und Weise, wie dieses letzte Ziel zu erreichen wäre, sollen daher der wissenschaftlichen Begründung dieser Projectionsart nachfolgen.

Im Nachfolgenden erlauben wir uns zu einem selbstständigen Aufbau der orthogonalen Axonometrie einen kleinen Beitrag zu liefern. Dass eine selbstständige Behandlungsweise der in Rede stehenden Projectionsart vom wissenschaftlichen Standpunkte von bedeutender Tragweite ist, kann schon angesichts der analytischen Geometrie des Raumes als erwiesen betrachtet werden, und bedarf keiner schlussfolgernden Erörterungen. Dass hiedurch auch die praktische Seite des Gegenstandes nur gewinnt, und dass auch hier Fiedler's bekannte Worte: „Die reinste Theorie ist stets die beste Vorschule der Praxis“ zur Geltung gelangen, werden wir im Nachstehenden zu bemerken Gelegenheit finden.

Wir haben schon angedeutet, dass der für uns massgebende Gesichtspunkt jener ist, alle in der orthogonnl axonometrischen Projection zu lösenden Probleme mit Hilfe des Axenkreuzes möglichst selbstständig und von den übrigen Projectionsarten unabhängig zu behandeln. Da für die Behandlung von theoretischen Fragen die Wahl dieses Axenkreuzes ziemlich gleichgiltig ist, so werden wir dasselbe in der Folge stets beliebig annehmen und hiebei — da eine rechtwinkelige dreiseitige Ecke von einer Ebene nur nach einem spitzwinkeligen Dreieck geschnitten werden kann — blos berücksichtigen, dass die Projectionen der Axen als Höhen eines solchen Dreiecks auftreten müssen. Die Bildebene werden wir im Allgemeinen stets durch den Coordinatenanfangspunkt gehend annehmen, verschieben jedoch dieselbe parallel zu sich selbst dann, wenn es einen Vortheil für die Construction mit sich bringt. Die im Nachfolgenden erörterten Constructionen gelten theils direct, theils mit unwesentlichen Modificationen auch für die klinographische Axonometrie, und wir werden anderweitig Gelegenheit haben, zu zeigen, in welcher Weise die gewonnenen Resultate auch für die centrale Projection verwerthet werden können.

Noch sei erwähnt, dass wir uns vorsätzlich blos auf Probleme beschränken, die der Geometrie des Masses angehören; da eben die gekennzeichneten in der orthogonalen Axonometrie eine wichtige Rolle spielen, und die Lösungen von invarianten Problemen in dieser Projectionsart aus dem Grunde keine Schwierigkeiten bieten, weil dieselben bekanntlich in allen Projectionsarten gleichmässig und direct durchgeführt werden können. Hat ja der gediegene Guido Schreiber schon vor vierzig Jahren den Satz ausgesprochen, dass überall da, wo bei einer Aufgabe der darstellenden Geometrie, nur von der Lage die Rede ist, der Gang der Lösung in der centralen Projection Schritt für Schritt der nämliche sei, wie bei der orthogonalen Projection.[1]

Dass dies also auch bei den orthogonal axonometrischen Constructionen der Fall sein wird, ist mehr als selbstverständlich.

---

1. Unter den Aufgaben der Geometrie des Masses nehmen die Constructionen der Normalen von Punkten auf Gerade und Ebenen, in allen Projectionsarten die wichtigste Stelle ein. Auch in der orthogonalen Axonometrie bildeten directe Lösungen dieser Probleme bereits wiederholt den Gegenstand eingehender Betrachtungen. So hat beispielsweise Möllinger im Anhange zu seiner deutschen Übersetzung der darstellenden Geometrie von Adhemar, eine directe Construction für die isometrische Projection senkrechter, in einer Coordinatenebene liegender

[1] Der Satz gilt viel allgemeiner.

Geraden, geliefert. Auch in dem citirten Werke der Gebrüder Meyer wird dieses Problem ausführlich behandelt, und für verschiedene specielle Fälle gelöst. Die Lösung der Aufgabe für den allgemeinen Fall setzt jedoch, wie schon bemerkt wurde, zwei axonometrisch gleiche und rechtwinkelige Gerade voraus. Unsere Ansicht geht dahin, dass, falls eine directe Lösung des Problems in der axonometrischen Projection sowohl einen wissenschaftlichen als praktischen Werth haben soll, diese einerseits allgemein geltend und andererseits ebenso einfach sein müsste, wie die bekannten planimetrischen Constructionen des Perpendikels von einem Punkte auf eine Gerade überhaupt sind. Wir geben verschiedene Lösungen des Problems an.

Es sei (siehe Fig. 1) Ax, Ay, Az die Projection des Axenkreuzes und xyz das Spurendreieck seiner Coordinatenebenen auf einer zur Bildebene parallelen Ebene. Vom Coordinatenanfangspunkte A soll auf die in der Coordinatenebene XY liegende Gerade G die Normale G_1 axonometrisch gezeichnet werden.

α. Wir fällen von z die Normale auf G bis xy in p geschnitten wird und verbinden p mit A; dann ist Ap axonometrisch normal auf G. Betrachten wir nämlich xyz als Bildebene, so ist pz Bildflächtrace einer durch den Coordinatenanfangspunkt gehenden auf G im Raume senkrecht stehenden Ebene Σ und folglich ihre horizontale Spur G_1 im Raume senkrecht auf G.

β. Wir ziehen An parallel zu G und verbinden n mit z; dann steht G_1 normal auf zn. Denn es ist zn die Bildflächtrace einer durch A gehenden, zu G parallelen, horizontal projicirenden — daher auf der gesuchten Geraden G_1 normal stehenden — Ebene, und somit muss, in Folge eines bekannten Satzes, die Projection von G_1 normal gerichtet sein auf zn.

γ. Wir legen durch G die horizontal projicirende Ebene, und fällen von A die Normale G_1 auf ihre Bildflächtrace $c_1 d$.

Soll daher auf eine in der Grundebene (oder irgend einer von den drei Coordinatenebenen überhaupt) liegende Gerade G, in dieser Ebene eine Normale G_1 beispielsweise im Punkte p axonometrisch construirt werden, so denken wir uns in p (siehe Fig. 2) die normale Ebene auf G gelegt und ihre Bildflächtrace gezeichnet. Die Trace wird — die Bildebene durch p gehend gedacht — im Punkte p auf G senkrecht stehen und die Coordinatenebene YZ im Punkte d schneiden. Dieser Punkt d liegt auf der Bildflächtrace der Coordinatenebene YZ und wird daher erhalten, wenn man py senkrecht auf z und yd normal auf X verzeichnet. Die Verbindungsgerade des Punktes p mit der horizontalen Projection d' von d liefert die gesuchte Gerade G_1.

Oder man legt (siehe Fig. 3) durch G eine horizontal projicirende Ebene und construirt ihre Bildflächtrace pd, wobei, wie zuvor, die Bildebene durch p gehend angenommen wird. Um d zu erhalten, hat man px senkrecht auf z, xd normal auf Y zu zeichnen und die letztere Gerade mit der horizontal projicirenden Geraden des Punktes d' zum Schnitte zu bringen. Die gesuchte Gerade G_1 steht im Punkte p auf pd senkrecht.

Ist G (Fig. 4) die gegebene Gerade, auf welche vom Punkte p die Normale G_1 axonometrisch senkrecht verzeichnet werden soll, so kann man, wie in Fig. 1 gezeigt wurde, auch nachfolgend zum Ziele gelangen. Durch den auf Y beliebig gewählten Punkt y legt man eine Ebene parallel zur Bildebene und construirt ihre Spuren auf der Grund- und Seitenrissebene. Wird von z die Normale auf G gefällt bis sie die Bildflächtrace der Grundebene in q schneidet, so ist Aq parallel zu G_1.

2. Aus dem Vorangehenden ergeben sich einige für die constructive Theorie der Kegelschnitte nicht uninteressante Constructionen, die hier eingeschaltet werden sollen. Denken wir uns nämlich (siehe Fig. 1) in der Coordinatenebene XY um A als Mittelpunkt einen Kreis K mit einem beliebigen Radius beschrieben, so werden die Axen X, Y conjugirte Diameter des elliptischen Bildes des Kreises sein, während Z die Lage der kleinen Axe dieser Ellipse liefert. Zur vollständigen Bestimmung der Ellipse wird daher die Angabe eines ihrer Punkte genügen.

Wäre beispielsweise p ein Punkt der Ellipse, so würde die Tangente desselben auf Ap axonometrisch senkrecht stehen, und folglich auf der Bildflächtrace pz der horizontal projicirenden Ebene von pA normal gerichtet sein. Es ist daher pz die Normale der Ellipse für den gegebenen Punkt p.

Suchen wir insbesondere die Spur der horizontal projicirenden Ebene auf der Bildebene in dem Falle, wenn letztere durch A

geht, so gelangen wir zu einer einfachen Lösung der Aufgabe, die Tangente T des Punktes p einer Ellipse zu construiren, welche durch den Punkt, die Axen A, A_1 und ein Paar conjugirter Diameter D, D_1 gegeben ist. Wir ziehen (siehe Fig. 5) pd parallel zu D_1 und dq normal auf D. Wird die letztere Gerade von der Ordinate des Punktes p in q geschnitten, so steht T senkrecht auf oq.

Legen wir im Punkte p (Fig. 1) eine normale Ebene auf G_1, so wird ihre Bildflächtrace — falls p in der Bildebene liegend angenommen wird — in diesem Punkte auf G_1 senkrecht stehen, ihre horizontale Spur jedoch, in der Projection, axonometrisch normal sein auf G_1.

Soll daher im Punkte p (Fig. 5 a) die Tangente an jene Ellipse construirt werden, welche durch diesen Punkt, die Lage der Axen A, A_1 und eines Paares conjugirter Diameter D, D_1 bestimmt ist, so errichten wir in p die Normale N auf op, fällen von d die Senkrechte auf D_1 — die N in c_1 schneidet —* und bringen D mit der Ordinate des Punktes c_1 in c zum Schnitt. Die Gerade cp ist die verlangte Tangente. Oder wir fällen von d_1 die Normale auf D, bis N in e_1 getroffen wird und schneiden D_1 mit der Ordinate des Punktes e_1 in e. Dann ist ep die Tangente des Punktes p.

Von einer Ellipse (Fig. 6) sind die Axen A, A_1 und ein Paar conjugirter Diameter D, D_1 nebst einer Tangente T gegeben; man soll den Berührungspunkt p der Tangente construiren.

Wird in o die Senkrechte auf D_1 errichtet und diese mit der Ordinate des Punktes d in d_1 zum Schnitt gebracht, so ist op normal auf der Verbindungsgeraden des Punktes d mit dem Schnittpunkte t von A und T. Denn stellen uns D, D_1, A_1 die Axen XYZ eines Axenkreuzes vor, so wird die gegebene Ellipse als Projection eines in der Grundebene liegenden Kreises aufzufassen sein, und die Gerade $d_1\ t$ ist die Bildflächtrace der horizontal projicirenden Ebene der — in der Grundebene liegenden — Geraden T. Auf dieser Ebene steht op im Raume senkrecht, daher ist in der Projection die von o auf $d_1\ t$ gefällte Gerade op axonometrisch normal auf T.

Oder wir legen — unter denselben Voraussetzungen — durch o eine Ebene Σ senkrecht auf die Gerade T; dann wird ihre horizontale Spur op axonometrisch normal stehen auf T. Die Gerade on ist die Bildflächtrace der Ebene Σ, und da Σ horizontal projicirend ist (weil T in der Grundebene liegt), so ist die horizontale Projection on_1 von on zugleich die gesuchte horizontale Spur von Σ. Hiebei ist nh normal auf D und hn_1 parallel zu D_1.

Es wurde bereits erwähnt, dass die im Punkte p (Fig. 1) auf pz errichtete Senkrechte axonometrisch normal auf Ap steht, und dass demzufolge pz die Normale des Punktes p in jener Ellipse ist, die als axonometrische Projection des mit der wahren Länge von Ap, in der Grundebene, um A beschriebenen Kreises auftritt. Durch z werden daher die Ellipsen-Normalen aller jener Punkte hindurchgehen, in denen die elliptischen Bilder sämmtlicher in der Grundebene liegenden Kreise, mit dem Mittelpunkt A, die Grade xy schneiden. Da eine von diesen Ellipsen E von der Geraden xy im Scheitel der kleinen Axe berührt wird, so ist z insbesondere der Krümmungsmittelpunkt dieses Scheitels. Die Ellipsen sind alle concentrisch, ähnlich, und ähnlich gelegen.

Wir erhalten daher zu einem Diameter G_1 den conjugirten für alle diese Ellipsen, indem wir p mit z verbinden, von z die Normale zn auf G_1 fällen und n mit A verbinden. Hieraus folgt, nebenbei bemerkt, der bekannte Satz: Schneidet eine Scheiteltangente der kleinen Axe der Ellipse einen beliebigen Diameter D derselben in d, so ist die Gerade, welche d mit dem Krümmungsmittelpunkte m des der Scheiteltangente zugehörigen Scheitels verbindet, normal auf dem zu D conjugirten Diameter D_1. Wir werden auf diesen Satz zurückkommen.

3. So einfach auch die im Artikel 1 erörterten directen Constructionen axonometrischer in einer Coordinatenebene liegenden Normalen an sich sein mögen, so lässt das vorliegende Problem doch noch eine viel einfachere Lösung zu, die auf nachfolgender Betrachtung beruht. Es sei (siehe Fig. 7) XYZ ein willkürliches Axenkreuz und G eine in der Grundebene liegende Gerade, auf welche vom Coordinatenanfangspunkte A die Gerade G_1 axonometrisch senkrecht direct verzeichnet werden soll. Denken wir uns, es werde ein rechter Winkel, dessen Scheitel mit A zusammenfällt, um diesen Scheitel in der Grundebene gedreht, so erzeugen bekanntlich seine Schenkel Strahlenpaare einer Involution, welche die Involution rechter Winkel genannt wird. Die

axonometrische Projection dieser Involution rechter Winkel ist ein involutorischer Strahlenbüschel mit den conjugirten Strahlen XY, dessen rechtwinkeliges Strahlenpaar ebenfalls direct gegeben ist, da es in (der Projection) der Z-Axe und der Bildflächtrace der Grundebene erhalten wird. Weil die gesuchte Gerade G_1 mit der durch A zu G gezogenen Parallelen ebenfalls ein conjugirtes Strahlenpaar der Involution bildet, so schliessen wir hieraus, dass die Gerade G von der gesuchten Normale G_1 im Centralpunkte jener Punktinvolution getroffen wird, in welcher die besagte Strahleninvolution G schneidet. Unsere Aufgabe ist daher als gelöst zu betrachten, sobald wir den Centralpunkt der auf G durch die Punktepaare xy, qq_1 bestimmten Involution construiren. Wir wählen die einfachste Lösung dieses Problems, indem wir durch x die Normale auf Aq und durch q eine Parallele zu Y ziehen. Beide Gerade treffen sich in p und es ist Ap die gesuchte Normale G_1. Denn schneidet G_1 die Gerade G in g, so folgt aus den ähnlichen Dreiecken Ayg, pqg und Aq_1g, pxg

$$gy \cdot gx = gq \cdot gq_1;$$

der Punkt g ist daher in der That der Centralpunkt der obenerwähnten Involution.

Von der Geraden G_1 können wir in ähnlicher Weise noch drei weitere Punkte construiren. Ist qp_1 parallel zu X und yp_1 normal auf Aq, so ist p_1 ebenfalls ein Punkt der Geraden G_1. Oder wir ziehen q_1p_2 parallel zu Y und xp_2 parallel zu Aq, dann liegt p_2 auf G_1. Werden schliesslich durch die Punkte q_1, y die Parallelen zu X und Aq respective gezogen, so treffen sich diese beiden in dem auf G_1 liegenden Punkte p_3.

Dass die construirte Gerade G_1 axonometrisch senkrecht auf G steht, kann auch ohne Zuhilfenahme der Involution elementar bewiesen werden. Denn es ist zum Beispiele in dem Dreiecke Aqx die Gerade qp axonometrisch senkrecht auf Ax und xp normal auf Aq, folglich p die axonometrische Projection des Höhenschnittes des Dreieckes, woraus unmittelbar erhellet, dass Ap axonometrisch senkrecht steht auf qx.

In derselben Weise können die Beweise geliefert werden, dass die Punkte p_1, p_2, p_3 auf G_1 liegen müssen. Diese einfache Construction axonometrischer in einer Coordinatenebene liegenden Normalen, ist für die orthogonale Axonometrie von grosser

Bedeutung. Wir werden zeigen, dass sich die meisten der Geometrie des Masses angehörigen Aufgaben mit Hilfe dieser Construction in axonometrischer Projection direct und bedeutend einfacher lösen lassen, als dies bisher in allen uns bekannten Werken geschah. Sie enthält zugleich die einfachste Lösung der nachfolgenden Kegelschnittaufgabe. Von einem Kegelschnitte sind die Axen nebst einem Paare conjugirter Durchmesser und eine Tangente G (oder ein Punkt g) gegeben, man bestimme den Berührungspunkt g auf G (oder die Tangente G von g).

4. Bevor wir zur Erörterung der vielen wichtigen Anwendungen, die von der im vorangehenden Artikel besprochenen Constructionen axonometrischer Normalen gemacht werden können, übergehen, wollen wir eine andere Fundamentalaufgabe der orthogonalen Axonometrie eingehend behandeln, da uns die bisher für dieselben gelieferten Lösungen nicht einfach genug und nicht im Geiste dieser Projectionsmethode gehalten zu sein scheinen. Wir meinen die Bestimmung der wahren Länge einer in axonometrischer Projection gegebenen Strecke, die hier näher besprochen werden soll.

Da später bewiesen wird, dass alle Operationen, die sich für eine Coordinatenebene in der axonometrischen Projection einfach ausführen lassen, ebenso einfach für jede andere Ebene im Raume durchgeführt werden können, so ist es hinreichend, die Lösung der erwähnten Aufgabe blos für eine in einer Coordinatenebene liegende Strecke vorzunehmen.

Es sei p (siehe Fig. 7) ein beliebiger in einer Coordinatenebene, z. B. in der Grundebene liegender Punkt, dessen Entfernung vom Coordinatenanfangspunkte A in der wahren Länge ermittelt werden soll. Denken wir uns diesen Punkt um die Z-Axe im Raume gedreht, so kommt in Anbetracht des Umstandes, dass die orthogonale Projection des Kreises eine Ellipse ist, deren grosse Axe mit dem Durchmesser des Kreises dieselbe Länge hat, die Lösung der Aufgabe darauf hinaus, die Länge der grossen Halbaxe einer Ellipse zu construiren, von welcher die beiden Axen und ein Paar conjugirter Diameter, der Lage nach, nebst einem Punkte gegeben sind. Mit der Lösung dieser Aufgabe wollen wir uns daher vor Allem beschäftigen, und aus dem Grunde die nachfolgende Betrachtung hier einschalten.

Wir nehmen an, es sei von einer Ellipse E (siehe Fig. 8) eine Axe aa_1 nebst der Normale N gegeben, und stellen uns die Aufgabe, sowohl den Fusspunkt p der Normale, als auch die Länge bb_1 der zweiten Axe von E zu ermitteln.

Die Tangente T des gesuchten Fusspunktes p der gegebenen Normale N wird von der Axe aa_1 in p_1 und von den Scheiteltangenten a, a_1 in den Punkten t, t_1 derart getroffen, dass p, p_1, t, t_1 vier harmonische Punkte sind. Der Kegelschnitt Σ, welcher durch die erwähnten Scheiteltangenten, die Axe aa_1, die Normale N und die gesuchte Tangente T, als fünf Tangenten bestimmt ist, muss also die Eigenschaft besitzen, dass jede Tangente desselben von den vier zuerst genannten Tangenten in vier harmonischen Punkten geschnitten wird. Sind daher n, n_1 die Schnittpunkte der Normale mit den Scheiteltangenten, so wird der Berührungspunkt β der Scheiteltangente a mit Σ die Strecke an, und β_1 der Scheiteltangente a_1 die Strecke $a_1 n_1$ halbiren. Die Gerade $\beta\beta_1$ ist somit ein Durchmesser, und ihr Schnittpunkt c_1 mit der zweiten Axe der Ellipse E, der Mittelpunkt des Kegelschnittes Σ. Da nun die von den Punkten a, a_1, p an Σ gehenden Tangenten rechtwinklig sind, so liegen diese drei Punkte auf einem mit Σ concentrischen Kreise K_1, dessen jeder Punkt die Eigenschaft besitzt, dass das ihm in Bezug auf Σ zugehörige Strahlensystem gleichseitig hyperbolisch ist.[1] Wir erhalten daher den Fusspunkt p der gegebenen Normale N, wenn wir mit $c_1 a$ den Kreis K_1 beschreiben und mit N zum Schnitte bringen. Da N von K_1 in zwei Punkten p, π geschnitten wird, so entnehmen wir hieraus, dass durch die Axe aa_1 und die Normale N zwei Kegelschnitte E, E_1 bestimmt erscheinen. Sind m, m_1 die Schnittpunkte der Normale N mit den Axen der Ellipse E, so zeigt die Construction, dass die Gerade $\beta\beta_1$ durch m geht, und in c_1 die Strecke om_1 halbirt. In Folge dessen ist die Construction des Mittelpunktes c_1 des Kreises K_1 eine sehr einfache.

Durch analoge Deductionen gelangen wir zu dem Resultate, dass der Fusspunkt p der Normale N mit den Scheiteln b, b_1 der kleinen Axe der Ellipse E auf einem Kreise K, dessen Mittelpunkt c die Strecke om halbirt, liegen muss. Die Gerade cc_1 ist parallel

---

[1] Siehe Steiner's: „Vorlesungen über synthetische Geometrie", II. Theil, 2. Auflage, pag. 179.

zu N, daher normal auf T, folglich werden sich die beiden Kreise K, K_1 auf T in q derart schneiden, dass oq ebenfalls normal gerichtet ist auf T.

Aus Fig. 8 können die Lösungen einiger für das Nachfolgende wichtigen Kegelschnittaufgaben direct entnommen werden. Es sollen zum Beispiele die Axenlängen eines Kegelschnittes ermittelt werden, welcher durch die Lage der Axen, einen Punkt und dessen Normale bestimmt ist. Oder man bestimme die Normale im Punkte p eines Kegelschnittes, welcher durch diesen Punkt und eine Axe gegeben ist.

Für unsere Untersuchungen ist, wie schon bemerkt wurde, insbesondere eine einfache Lösung der nachfolgenden Aufgabe von Interesse. Von einer Ellipse E sind (siehe Fig. 9) der Lage nach, die Axen, ein Paar conjugirter Diameter DD_1 und ein Punkt p gegeben; man bestimme die Axenlängen der Ellipse.

In Anbetracht der in Fig. 8 gewonnenen Resultate wäre die Aufgabe als gelöst zu betrachten, wenn wir die Normale N des Punktes p kennen würden. Denken wir uns den Schnittpunkt der gesuchten Normale und einer von den gegebenen Axen mit m_1 bezeichnet, so wird der mit $m_1 p$ um diesen Punkt beschriebene Kreis die Ellipse doppelt berühren und die gemeinsame Berührungssehne auf der Axe om_1 senkrecht stehen. Der Ellipse und dem Kreise kommt daher die bekannte Eigenschaft zu, dass sich die Polaren eines beliebigen Punktes in Bezug auf beide Curven, in einem Punkte der gemeinsamen Berührungssehne schneiden werden. Da die Polare des unendlich fernen Punktes des Durchmessers D in Bezug auf E der Durchmesser D_1 ist, die Polare desselben Punktes in Bezug auf den Kreis jedoch durch m_1 gehen und auf D normal gerichtet sein wird, so folgt hieraus, dass das vom Schnittpunkte d_1 des Durchmessers D_1 mit der Berührungssehne auf D gefällte Perpendikel durch m_1 geht.

Analog wird die von p auf die zweite Axe gefällte Normale von D_1 in d derart getroffen, dass das von d auf D verzeichnete Perpendikel, diese Axe im Punkte m schneidet, welcher der Ellipsennormale des Punktes p angehört.

Halbirt c_1 die Strecke om_1, so geht der um c_1 mit c_1p beschriebene Kreis K_1 — wie in Fig. 8 bewiesen wurde — durch die Scheitel a, a_1 der grossen Axe der gegebenen Ellipse. Um die Scheitel b, b_1 der kleinen Axe zu erhalten, haben wir blos om in c zu halbiren, und mit cp den Kreis K um c zu beschreiben.

Da D, D_1 ein willkürliches conjugirtes Diameterpaar der Ellipse ist, so enthält die Figur ebenfalls eine Lösung der Aufgabe, zu einem gegebenen Diameter E den conjugirten E_1 der Lage nach zu bestimmen. Schneidet E die Gerade pd_1 in e, so ist E_1 normal auf em_1. Tritt an die Stelle des Punktes p ein Scheitel der Ellipse, d. h. sind von einer Ellipse eine Axe (siehe Fig. 10 und 11) der Lage und Länge nach und ein Paar conjugirter Diameter DD_1 gegeben, so wird m zum Krümmungsmittelpunkte dieses Scheitels und der um den Halbirungspunkt c der Strecke om beschriebene, durch den betreffenden Scheitel gehende Kreis, enthält die Scheitel der zweiten Axe. Schneidet ein beliebiger Durchmesser E der Ellipse die Tangente des in Rede stehenden Scheitels in e, so steht me auf dem ihm conjugirten Diameter E_1 senkrecht.

Hieraus resultirt noch eine andere Lösung der in Fig. 1 erörterten Aufgabe.

Wir ziehen (siehe Fig. 1) durch A die Parallele zu xy bis xz in m geschnitten wird; dann wird die in x auf xy errichtete Senkrechte von der durch m auf G gefällten Normale in q so geschnitten, dass Aq axonometrisch normal auf G steht.

Ähnliches gilt auch vom Schnittpunkte o von Am mit yz. Ist yr normal auf yx und or senkrecht auf G, so liegt r auf G_1.

Hiebei ist nebenbei bemerkt xq die Scheiteltangente und m der Krümmungsmittelpunkt des ihr zugehörigen Scheitels a des elliptischen Bildes jenes Kreises, der mit dem Radius Aa um A als Mittelpunkt in der Grundebene beschrieben werden kann.

In Anbetracht der bekannten Steiner'schen Definition des Brennpunktes als doppelt berührenden Kreises vom Radius Null, ist es uns auch gestattet, die vorliegende Construction derart zu interpretiren, dass xq die Directrix und m der Brennpunkt einer Ellipse ist, die als axonometrische Projection eines in der Grundebene liegenden Kreises, dessen Radius gleich

$$\sqrt{Am.\, Aa}$$

ist, auftritt.

Wir haben gefunden, dass, wenn im Punkte p (siehe Fig. 12) die axonometrische Normale auf G verzeichnet werden soll, diese normal auf pz zu ziehen ist, wobei px senkrecht auf Z und xz

normal auf Y steht. Dem Vorausgehenden zufolge wird die Gerade pz auch erhalten, wenn wir px_1 parallel zu Z, und durch x_1 die Normale auf Y bis zu ihrem Schnittpunkte m mit der Bildflächtrace der Grundebene ziehen. Der Punkt m ist ein Punkt der Geraden pz.

5. Eine Ebene Σ (Fig. 13) ist durch ihre Spuren Σ_h, Σ_v, Σ_s gegeben; man soll vom Coordinatenanfangspunkte A die Normale auf Σ fällen.

Wir construiren Ap' axonometrisch senkrecht auf Σ_h und As axonometrisch normal auf Σ_v. Hiedurch ist die horizontale und verticale Projection der zu zeichnenden Geraden axonometrisch dargestellt, und folglich auch die axonometrische Projection Ap der Geraden selbst bestimmt.

Ist die horizontale Projection Ap' der Geraden bereits gezeichnet, so kann die axonometrische Projection Ap der Normale auch direct construirt werden. Es steht Ap axonometrisch senkrecht auf der Projection hz der Schnittlinie der horizontal projicirenden Ebene der Normale und der Ebene Σ. Um nun Ap axonometrisch senkrecht auf hz zu zeichnen, brauchen wir blos die Geraden Z, Ap' und die durch A parallel zu Σ_h gezogene Gerade Υ als Coordinatenaxen eines neuen Axenkreuzes zu betrachten, und mit diesem genau so zu operiren, wie mit dem ursprünglich gegebenen. Ist beispielsweise d der Schnittpunkt von Υ mit hz, so haben wir blos dn parallel zu Z und hn normal auf Σ_h zu ziehen, um in n einen Punkt von Ap zu erhalten. Oder wir ziehen dm parallel zu Ah und zm senkrecht auf Σ_h, dann ist m ein auf Ap liegender Punkt.

Überdies steht Ap senkrecht auf der Bildflächtrace Σ_b der Ebene Σ und kann daher auch in dieser Weise direct ermittelt werden.

6. In Beziehung auf das Axensystem X, Y, Z (siehe Fig. 14) ist eine Gerade durch G, G' gegeben; mit Hilfe des gegebenen soll ein neues Axenkreuz x,y,z construirt werden, für welches die Gerade G eine Coordinatenaxe und der auf ihr beliebig gewählte Punkt a der Aufangspunkt ist.

Betrachten wir G zum Beispiel als die neue Axe z, so wird die Coordinatenebene x, y auf dieser im Punkte a senkrecht stehen und die Aufgabe also insofern unbestimmt sein, als wir in der besagten Coordinatenebene im Punkte a zwei aufeinander senkrechte Gerade zu zeichnen haben, die uns die neuen Axen x und y liefern werden. Wir können daher die neue y-Axe parallel zur Coordinatenebene XY des gegebenen Axenkreuzes annehmen. Da sich nun in Folge dessen y und die horizontale Projection G' von G im Raume rechtwinkelig kreuzen werden, so ist y parallel zu der vom Punkte A auf G' gefällten Normale. In der Projection ist also y parallel zu Ap. Schliesslich steht die x-Axe senkrecht auf der Bildflächtrace der Coordinatenebene yz. Um diese Bildflächtrace zu finden, denken wir uns die Bildebene durch den Anfangspunkt a des neuen Coordinatensystems gelegt, ziehen at normal auf X und $a't$ parallel zu Y. Die Gerade at liegt in der Bildebene, folglich gehört t der Bildflächtrace der Coordinatenebene XY an, während die horizontale Trace der Ebene yz durch den horizontalen Durchstosspunkt d der Geraden G geht, und durch diesen Punkt parallel zu Ap zu ziehen ist. Beide Spuren schneiden sich in q und es ist daher aq die Bildflächtrace der Coordinatenebene yz.

7. Ein Axenkreuz X, Y, Z (siehe Fig. 15) und eine Ebene Σ sind gegeben; man soll auf ein neues Axensystem übergehen, für welches die gegebene Ebene zu einer Coordinatenebene wird.

Da wir ausser dem neuen Anfangspunkte noch eine Axe in der Coordinatenebene Σ willkürlich wählen können, so sei beispielsweise der Fusspunkt a der von A auf Σ_h im Raume gefällten Normale Ap der neue Coordinatenanfangspunkt und Σ_h selbst, die neue Axe y.

Ist e_1 der Schnittpunkt der Bildflächtrace E_1 der Coordinatenebene XY mit Σ_h und schneidet Σ_h die Y-Axe in q, so haben wir blos durch e_1 die Parallele zu X und durch q die Normale auf E_1 zu ziehen, um den Punkt p zu erhalten. Da die Gerade az im Raume auf Σ_h senkrecht steht, so sind die beiden in Σ liegenden Coordinatenaxen y, bereits verzeichnet. Die Projection der dritten Axe x ist normal gerichtet auf die Bildflächtrace Σ_b der Ebene Σ und folglich leicht zu construiren. Es ist e_1 ein Punkt dieser Bildflächtrace und einen zweiten e_3 erhalten wir in dem Schnittpunkte der Seitenrissspur Σ_s mit der Bildflächtrace E_3 der Seitenrissebene YZ.

Bemerkung. Aus diesem und dem vorangehenden Artikel geht als Resultat hervor, dass alle eine Coordinatenaxe oder

Coordinatenebene betreffenden der Geometrie des Masses angehörigen Probleme, die sich in der orthogonalen Axonometrie direct durchführen lassen, auch für beliebige Gerade und Ebenen im Raume unmittelbar gelöst werden können. Es wird sich daher, beiläufig bemerkt, die Aufgabe von einem Punkte auf eine Gerade die Normale zu fällen, wenn beide beliebig im Raume gelegen sind, in der orthogonalen Axonometrie direct — ohne jede Umlegung — lösen lassen.

Oder, können die Axen der axonometrischen Projection eines Kreises direct construirt werden, wenn derselbe in einer Coordinatenebene liegt, so muss es auch möglich sein, die Axen des elliptischen Bildes des Kreises in dem Falle unmittelbar anzugeben, wenn seine Ebene eine beliebige Lage im Raume hat, etc.

8. Eine Ebene (Fig. 17) ist durch ihre Spuren Σ_h, Σ_v, Σ_s gegeben; vom Punkte a soll eine Normale auf die Ebene gefällt werden.

Die Lösung dieser Aufgabe ist eigentlich schon in Fig. 13 enthalten. Denn ist a' die horizontale und a'' die verticale Projection des gegebenen Punktes, so haben wir durch diese Punkte die Parallelen zu den Normalen, die von A auf Σ_h, Σ_v gefällt werden können, respective zu ziehen, um die horizontale und verticale Projection der Geraden zu erhalten. In der axonometrischen Projection ist die horizontale Projection der Normale somit parallel zu Ap und die verticale parallel zu Aq. Die Projection der Normale selbst wird am einfachsten dadurch erhalten, indem man den horizontalen Durchstosspunkt h der Geraden construirt. Da die verticale Projection h'' desselben gegeben ist, so hat man blos $h''h$ parallel zur Axe Y zu ziehen.

Wurde die horizontale Projection der Geraden — parallel zu Ap — bereits gezeichnet, so kann man deren axonometrische Projection ah selbst dadurch finden, dass man die horizontal projicirende Ebene der Geraden mit Σ zum Schnitt bringt, und ah axonometrisch senkrecht auf die Schnittlinie — wie in Fig. 13 gezeigt wurde — verzeichnet.

Überdies kann ah auch dadurch direct construirt werden, dass man diese Gerade normal auf die Bildflächtrace Σ_b der Ebene Σ zieht. Die Construction von Σ_b wurde in dem vorangehenden Artikel besprochen.

9. Eine Gerade G, G' ist gegeben; im Punkte a dieser Geraden soll eine Ebene Σ senkrecht auf dieselbe gelegt werden.

Nach einem bekannten Satze werden die Spuren Σ_h, Σ_v auf den gleichnamigen Projectionen der Geraden senkrecht stehen müssen. Hieraus folgt, dass die Richtungen dieser Spuren in der axonometrischen Projection sofort bestimmt sein werden, wenn man von A (siehe Fig. 18) die Normalen Ap, Aq auf G' und G'' axonometrisch verzeichnet. Hiebei ist rp parallel zu Y und $v'p$ normal auf Ar, ferner tq parallel zu Z und $h''q$ normal auf At gezogen worden. Zieht man nun durch a eine Parallele zu Aq, so erhält man eine verticale Spurparallele der gesuchten Ebene Σ. Die horizontale Projection der Spurparallele ist also parallel zur Axe X, wodurch der horizontale Durchstosspunkt d dieser Geraden gegeben ist. Durch d geht Σ_h parallel zu Ap, während die verticale Spur Σ_v parallel ist zu Aq und Σ_h in einem Punkte der X-Axe schneidet. Da sich die Spuren Σ_h und Σ_s in einem Punkte auf Y begegnen müssen, so ist hiedurch auch Σ_s bestimmt.

10. Von einem Punkte a (Fig. 19) ist auf die, in der Coordinatenebene XY liegende Gerade qx, eine Senkrechte zu fällen.

Da die orthogonale Projection eines rechten Winkels bekanntlich immer dann wieder ein rechter Winkel ist, wenn ein Schenkel desselben zu der Projectionsebene parallel ist, so folgt, dass die horizontale Projection der gesuchten Normale von a' axonometrisch senkrecht auf qx zu ziehen ist. Diese horizontale Projection ist also parallel zu der von A auf qx axonometrisch verzeichneten Senkrechten Ap. Sie schneidet qx in dem horizontalen Durchstosspunkte d des gesuchten Perpendikels ad.

Die Aufgabe, durch a eine normale Ebene auf die Gerade qx zu legen, ist hiemit ebenfalls gelöst. Es ist $a'd$ die horizontale Spur dieser Ebene, während ihre zweite und dritte Spur zur Axe Z parallel ist.

11. Man bestimme die axonometrische Projection der Normale, die vom Punkte a (Fig. 21) auf die Gerade G gefällt werden kann.

Wir gelangen einfach zu dem Fusspunkte dieser Normale. durch die Construction des Schnittpunktes der gegebenen Geraden mit einer Ebene Σ, die durch a geht, und auf G senkrecht steht, Die Richtungen der Spuren Σ_h, Σ_s dieser Ebene können in der axonometrischen Projection leicht bestimmt werden, da sie zu den von A auf G' und G''' axonometrisch gezeichneten Normalen Ap, Aq beziehungsweise parallel sind. Wird durch a die Gerade P parallel zu Ap gezogen, so erhalten wir eine horizontale Spurparallele der Ebene Σ. Durch den Durchstosspunkt t der Geraden P mit der Seitenrissebene ist die Seitenrissspur Σ_s von Σ parallel zu Aq zu ziehen. Um den Punkt q zu erhalten, haben wir durch x eine Parallele zu Y, und durch den Schnittpunkt n von G''' mit Z die Normale auf Ax gezeichnet. Da sich die Spuren Σ_h, Σ_s in einem Punkte der Y-Axe begegnen müssen, und Σ_h, wie bemerkt wurde, parallel ist zu Ap, so ist hiedurch auch Σ_h bestimmt, während Σ_v den Punkt $\Sigma_s Z$ mit dem verticalen Durchstosspunkte r von P verbindet. Den Schnittpunkt d der Geraden G mit der Ebene Σ erhalten wir durch die Bestimmung der Schnittlinie co der horizontal projicirenden Ebene von G mit Σ. Die Gerade ad ist die gesuchte Normale.

Bei der Bestimmung der Ebene Σ kann auch in der Weise vorgegangen werden, dass man (Fig. 22) statt des Seitenriss-Durchstosspunktes t der horizontalen Spurparallele P den Durchstosspunkt b dieser Geraden mit der Bildebene ermittelt, und durch b die Bildflächtrace Σ_b der Ebene normal auf G zeichnet. Um den Punkt b zu finden, construiren wir die Bildflächtrace S_b der horizontal projicirenden Ebene S der Geraden P. Der Punkt ε, in dem P' die Bildflächtrace E_1 der ersten Coordinatenebene schneidet, ist ein Punkt von S_b, während der Schnittpunkt π der verticalen Spur von S mit der Bildflächtrace E_2 der Ebene XZ einen zweiten Punkt von S_b liefert. S_b schneidet P in dem gesuchten Punkte b. Die Spur Σ_b bringt mit den Tracen E_1, E_2 die Schnittpunkte e_1, e_2 hervor, die der horizontalen und verticalen Spur von Σ respective angehören.

Wird daher durch e_1 eine Parallele zu Ap gezogen, so erhalten wir die horizontale Spur Σ_h der gesuchten Ebene, während Σ_v den Punkt e_2 mit dem Punkte x, in dem Σ_h die Axe X schneidet, verbindet. Die Verbindungsgerade der Punkte $\Sigma_h Y$ und $\Sigma_v Z$ liefert die Seitenrissspur Σ_s. Der Durchstosspunkt d von G mit Σ ergibt sich wieder als Schnittpunkt dieser Geraden mit der Schnittlinie co der Ebene Σ und der horizontal projicirenden Ebene von G.

12. In einer durch ihre Spuren Σ_h, Σ_v, Σ_s (siehe Fig. 23) bestimmten Ebene ist eine Gerade G und ein Punkt a gegeben; von a soll auf G eine Senkrechte G_1 gefällt werden.

Aus dem Vorangehenden ist zur Genüge bekannt, dass wenn a und G in einer Coordinatenebene liegen würden, die Lösung der Aufgabe direct sehr einfach durchgeführt werden könnte. Der hier gegebene allgemeine Fall kann jedoch auf diesen speciellen leicht zurückgeführt werden. Wir werden das gegebene Axensystem durch ein neues ersetzen, für das die Ebene Σ eine Coordinatenebene ist. Die Aufgabe wurde bereits in Fig. 15 gelöst, aus welchem Grunde wir uns hier möglichst kurz fassen können. Den Fusspunkt o der von A auf Σ_v axonometrisch gezeichneten Normale Ap betrachten wir als den neuen Coordinatenanfangspunkt, Σ_v und oy als neue Coordinatenaxen. Um die dritte Axe zu erhalten, construiren wir die Bildflächtrace Σ_b von Σ, wobei wir uns die Bildebene durch o gehend denken. Dann sind oc (normal auf Y) und cd (senkrecht auf Z) die Bildflächtracen der Coordinatenebenen XZ, XY respective und folglich do die gesuchte Bildflächtrace Σ_b. Die Projection der dritten Axe steht in o senkrecht auf Σ_b, ihre Verzeichnung ist jedoch nicht erforderlich. Denn ist nq normal auf od und rq parallel zu Σ_v, so ist dem Vorangehenden zufolge, oq axonometrisch senkrecht auf G und somit G_1 zu oq parallel.

13. Das im vorangehenden Artikel behandelte Problem kann auch in der Weise gelöst werden, dass man durch a eine Ebene S senkrecht auf G legt und diese mit Σ zum Schnitt bringt. Die Schnittlinie ist die gesuchte Normale G_1. Die Lösung haben wir in Fig. 24 durchgeführt, wo die Gerade an axonometrisch senkrecht auf G in der Ebene Σ gezeichnet wurde. Die horizontale Spur der durch a normal auf G gelegten Ebene S ist senkrecht auf die horizontale Projection G' der Geraden und daher parallel zu Ap. Denken wir uns die Bildebene durch a gelegt, so wird die Bildflächtrace von S im Punkte a auf G senkrecht stehen und ihr horizontaler Durchstosspunkt h liefert einen Punkt der horizontalen Spur S_h von S. Der Punkt h liegt auf der Bildflächtrace E_1 der Coordinatenebene XY, und wir erhalten also h durch die Construction von E_1. Ziehen wir durch a eine Parallele zu der — der Richtung nach bestimmten — Bildflächtrace der Coordinatenebene

YZ, so ist ihr horizontaler Durchstosspunkt d ein Punkt von E_1. Hiedurch ist sowohl E_1 als auch h bestimmt. Durch h ist parallel zu Ap die horizontale Spur S_h der Ebene S zu ziehen. Sie schneidet Σ_h in n und folglich ist an die axonometrische Projection der gesuchten Normale.

14. Ist die durch G und a bestimmte Ebene Σ eine projicirende, so tritt bei der Lösung der im vorangehenden Artikel erörterten Aufgabe eine wesentliche Vereinfachung ein. Denn ist Σ (siehe Fig. 25) eine horizontal projicirende Ebene, in welcher G und a liegen, so können die Spuren Σ_h und Σ_s (oder Σ_v) sofort als Axen eines neuen Coordinatensystems betrachtet werden, für welches Σ zu einer Coordinatenebene wird. Die Projection yn der dritten Axe steht in y axonometrisch senkrecht auf Σ_h und ist folglich parallel zu Ap. Ist nun nq parallel zu Σ_h und sq normal auf yn, so ist yq axonometrisch senkrecht auf G und somit parallel zu G_1.

15. Zwei kreuzende Gerade GG', G_1G_1' (Fig. 26) sind in axonometrischer Projection gegeben; man soll eine Gerade ab construiren, die auf den beiden gegebenen gleichzeitig senkrecht steht.

Durch die Gerade G legen wir eine Ebene Σ parallel zu G_1, indem wir etwa durch den Durchstosspunkt s der Geraden G mit der Seitenrissebene die Parallele L zu G_1 ziehen und die Spuren Σ_h, Σ_v, Σ_s der durch G, L bestimmten Ebene ermitteln. Von einem beliebigen Punkte h_1 der Geraden G_1 fällen wir das Perpendikel N auf Σ; die horizontale Projection N' desselben ist parallel zu Ap, während seine axonometrische Projection N selbst, auf der Bildflächtrace e_1e_3 der Ebene Σ senkrecht steht. Durch den Schnittpunkt n von N mit Σ (ermittelt mit Hilfe der horizontal projicirenden Ebene von N, die Σ in der Geraden co schneidet) legen wir eine Gerade parallel zu G_1, die G in dem Fusspunkte a der gesuchten Normale schneidet. Durch a ist ab parallel zu N zu ziehen. Schliesslich muss sich selbstverständlich $a'b'$ parallel zu N' ergeben.

16. Hier und in den nachfolgenden Artikeln wollen wir uns mit der Lösung jener Aufgaben der descriptiven Geometrie in orthogonal axonometrischer Projection befassen, bei denen Constructionen der wahren Längen von Strecken auftreten. Hiebei

soll Bekanntes nicht reproducirt, sondern im Sinne der eingangs festgestellten Principien vorgegangen werden.

Wenn es uns gelingt die wahre Länge einer in der Coordinatenebene oder insbesondere auf einer Coordinatenaxe befindlichen Strecke einfach zu ermitteln, so kann in Anbetracht Fig. 14 und 15 die Aufgabe für den allgemeinen Fall, wenn die Gerade beliebig im Raume angenommen wird, ebenfalls als gelöst betrachtet werden. Der Gesichtspunkt an dem hier festgehalten wird, ist also geradezu dem diametral, den jene Autoren einnehmen, welche durch die Beseitigung des Axenkreuzes wesentliche Vereinfachungen bei den orthogonal axonometrischen Constructionen zu erlangen hoffen. Wir führen unsere Construction nicht nur stets auf Grundlage eines Axenkreuzes durch, fühgui vielmehr ab und zu noch ein neues ein, um Vere nfachungeəduu den Constructionen zu erzielen, insbesondere jedoch um die Selbstständigkeit der Projectionsmethode zu wahren.

Es soll (siehe Fig. 27) die wahre Länge $A(x)$ der auf der X-Axe befindlichen Strecke Ax construirt werden.

Denken wir uns mit der gesuchten wahren Länge in der Coordinatenebene XY um A einen Kreis beschrieben, so wird die halbe grosse Axe des elliptischen axonometrischen Bildes dieses Kreises der Strecke $A(x)$ gleich sein. Da wir die Lage der Axen und eines Paares conjugirter Diameter X, Y der Ellipse kennen, diese ausserdem durch x geht, so ist die Aufgabe identisch mit jener, die grosse Halbaxe einer Ellipse zu construiren, von welcher (siehe Fig. 28) die Axen der Lage nach, ein Punkt p und seine Normale gegeben sind. Diese Aufgabe wurde bereits in Fig. 8 gelöst und wir wissen, dass, wenn die Normale die kleine Axe in m schneidet, und c die Strecke om halbirt, der mit cp um c beschriebene Kreis K durch die Scheitel a, a_1 der grossen Axe der Ellipse geht. Ist also $x\,y\,z$ (Fig. 27) das Spurendreieck des Coordinaten-Axensystems, auf der durch x gehenden Bildebene, und o der Halbirungspunkt von Az, so wird die in A auf Z errichtete Normale, von dem aus o mit ox beschriebenen Kreise, in (x) derart geschnitten, dass $A(x)$ die gesuchte wahre Länge von Ax ist.

Wie leicht ersichtlich ist, haben wir hier die Gerade Ax um die Axe Z im Raume so lange gedreht, bis sie parallel zur Bildebene wurde und auf dieser sich daher in der wahren Länge darstellt.

Um die wahre Länge von Ay zu ermitteln, beschreiben wir mit oy um o einen Kreisbogen bis E_1 in (y) getroffen wird; $A(y)$ ist die gesuchte Länge. Ebenso wird man die wahre Länge von Az erhalten, wenn man aus dem Halbirungspunkte der Strecke Ax einen, durch z gehenden Kreis beschreibt, und mit E_3 zum Schnitt bringt. Einfacher können wir jedoch diese Länge erhalten, wenn wir berücksichtigen, dass von dem im Raume bei A rechtwinkeligen Dreieck Axz die eine Kathete in der wahren Länge bereits ermittelt wurde, die Hypotenuse jedoch zur Bildebene parallel ist. Durchschneidet man also Z aus (x) mit dem Radius xz im Punkte (z), so erhalten wir $A(z)$ als wahre Länge von Az.

Die Figur zeigt nebst dem die Umlegung der Axen mit ihren orthogonal projicirenden Ebenen in die Bildebene, und die Umlegung der Coordinatenebene XY um E_1.

17. Die wahre Länge $(a)(x)$ einer auf der Coordinatenaxe X (Fig. 29) angenommenen Strecke ax, soll bestimmt werden.

Wie vorher denken wir uns die X-Axe um die Z-Axe im Raume so lange gedreht, bis sie in die Bildebene zu liegen kommt, d. h. mit der Bildflächtrace E_1 der Coordinatenebene XY zusammenfällt. Dabei kommt x nach (x) und a nach (a) derart zu liegen, dass $x(x)$ parallel zu $a(a)$ wird. Um (x) zu erhalten, haben wir Ax in m halbirt, mo normal auf Y gezogen und mit ox um o einen Kreis beschrieben.

Soll die wahre Länge $A(g)$ der in XY liegenden Strecke Ag der Geraden G ermittelt werden, so kommt die Lösung der Aufgabe darauf hinaus, aus der Lage der Axen E_1, Z und eines Paares conjugirter Diameter X, Y die grosse Halbaxe jener Ellipse zu bestimmen, die durch den Punkt g geht. Die Lösung dieses Problems wurde in Fig. 9 bereits gegeben. Man zieht gx normal auf Z und durch den Halbirungspunkt m der Strecke Ax die Normale mo auf Y. Dann geht der um o mit og beschriebene Kreis durch (g).

Ist α ein beliebiger Punkt der Geraden G und $\alpha(a)$ parallel zu $g(g)$, so ist $(a)(g)$ die wahre Länge von αg.

Wenn die Gerade, deren wahre Länge construirt werden soll, zwar in einer Coordinatenebene liegt, jedoch nicht durch A geht, so verschieben wir die Gerade parallel zu sich selbst, bis ein Endpunkt derselben mit A zusammenfällt und bestimmen die wahre Länge in der eben erläuterten Weise.

18. Die Aufgabe, auf eine Coordinatenaxe oder auf eine beliebige in der Coordinatenebene liegende Gerade eine Strecke von gegebener Länge aufzutragen, ist durch den vorangehenden Artikel selbstverständlich ebenfalls gelöst. Um z. B. auf die Y-Axe vom Coordinatenanfangspunkte A (Fig. 29) die Strecke $A(b)$ aufzutragen, wählen wir auf Y einen beliebigen Punkt y und fällen aus dem Halbirungspunkte der Strecke Ay die Normale auf X, die Z in o schneidet. Aus o beschreiben wir mit dem Radius oy den Kreisbogen $y(y)$ und ziehen $b(b)$ parallel zur Sehne $y(y)$.

Ebenso würde man vorgehen, wenn die Strecke $A(b)$ auf die Gerade H vom Punkte A nach $A\beta$ aufzutragen wäre. Schneidet H die Gerade xy in h und ist oh gleich $o(h)$, so hat man $(b)\beta$ parallel zu $h(h)$ zu ziehen.

Es soll z. B. auf die durch A gehende Gerade C des grössten Falles der Coordinatenebene XY, von A die Strecke $A(b)$ aufgetragen werden. Wir machen $o(c) = oc$ und ziehen $(b)\gamma$ parallel zu $c(c)$. Dann ist die wahre Länge von $A\gamma$ der Strecke $A(b)$ gleich.

Bemerkung. Da wir in Fig. 29 die Strecken $A(a)$ und $A(b)$ gleich angenommen haben, so gehören die Punkte a, α, γ, β, b einer Ellipse an, die $(a)(b)$ zur grossen Axe besitzt. Hiervon lässt sich beiläufig die nachstehende Anwendung machen. Ist eine Ellipse (Fig. 16) durch ihre Axen aa_1 bb_1 gegeben, so findet man hiernach leicht zu einem der Lage nach gegebenen Durchmesser, die Lage und Grösse des conjugirten, als auch die Länge des gegebenen selbst. Denn schneidet der gegebene Durchmesser die Scheiteltangente b der kleinen Axe in d und ist c der Mittelpunkt des dem Dreieck aa_1 b umschriebenen Kreises, so hat man blos $cd_1 = cd$ zu machen und durch die Punkte a, a_1 die Parallelen ag, a_1g_1 zu dd_1 zu ziehen um die Endpunkte g, g_1 des gegebenen Diameters zu erhalten. Der zu gg_1 conjugirte Diameter steht senkrecht auf der Verbindungsgeraden des Punktes d mit dem Krümmungsmittelpunkte m des Scheitels b, während seine Länge hh_1 in derselben Weise wie gg_1 erhalten wird. Im Vorangehenden wurde gezeigt, das c die Strecke om halbirt, aus welcher — übrigens bekannten — Relation eine einfache Construction für m resultirt.

In Anbetracht Fig. 9 gilt die ganze Construction auch bezüglich der Scheiteltangente a (siehe Fig. 20) der grossen Axe, und des Mittelpunktes c, des dem Dreieck $a b b_1$ umschriebenen Kreises.

19. Die wahre Länge einer in der Coordinatenebene XY liegenden Geraden ab (Fig. 32) soll ermittelt werden.

Wir wählen den Schnittpunkt c der Geraden mit der X-Axe zum Anfangspunkte eines neuen Axensystems, dessen Axen zu jenen des gegebenen parallel sind. Hiedurch ist die Aufgabe auf die vorangehende zurückgeführt. Schneidet die Spurparallele $a x$ des Punktes a die neue y-Axe in d, so fällen wir dm normal auf X und halbiren cm in o; aus dem Punkte o beschreiben wir mit dem Radius $a o$ einen Kreis bis die Bildflächtrace der Grundebene in $[a]$ geschnitten wird und ziehen $b[b]$ parallel zu $a[a]$. Die Strecke $[a][b]$ ist die gesuchte wahre Länge.

Die Figur zeigt noch die Lösung der Aufgabe nach dem bekannten Verfahren, durch Umlegung der Coordinatenebene XY in die Bildebene.

20. Die wahre Länge einer zu den Coordinatenebenen geneigten Geraden $h v$ (Fig. 30) soll construirt werden.

Wir construiren die Bildflächtrace Σ_b der horizontal projicirenden Ebene Σ der Geraden und legen die Strecke hv um Σ_b in die Bildebene um. Denken wir uns zu dem Zwecke die Bildebene durch den Punkt h gehend, so wird die auf Z normal gerichtete Gerade $h x$ die Bildflächtrace der ersten, und das von x auf die Projection der Y-Axe gefällte Perpendikel $x d$ die Bildflächtrace der zweiten Coordinatenebene sein. Die letztgenannte Spur schneidet $v v'$ in d, und es ist also $h d$ die gesuchte Bildflächtrace Σ_b. Nach der Umlegung kommt v' auf den über hd als Durchmesser beschriebenen Halbkreis K nach (v') und folglich v auf die Gerade $(v')d$ nach (v) zu liegen. Die Strecke $h(v)$ ist die gesuchte wahre Länge.

Da $h(v)(v')$ die wahre Grösse und Form des Dreiecks $h v v'$ ist, so erhalten wir durch die Construction, nebenbei bemerkt, ausser der wahren Länge von hv auch die wahre Grösse des horizontalen Neigungswinkels der Geraden.

Das Verfahren bleibt selbstverständlich auch dann dasselbe, wenn keiner von den Endpunkten der Strecke in einer Coordinatenebene liegt. In diesem Falle dürfte es jedoch vortheilhafter erscheinen, die Bildflächtrace Σ_b der horizontal projicirenden Ebene der Geraden in der nachfolgenden Weise zu ermitteln.

Es sei, siehe Fig. 31 ab, $a'b'$ die gegebene Strecke. Wird die Gerade Ap, nach der im Vorangehenden zur Genüge besprochenen Methode, axonometrisch normal auf $a'b'$ verzeichnet, so steht diese Gerade im Raume senkrecht auf der Ebene Σ, und folglich ist Ap normal gerichtet auf Σ_b.

In dem vorliegenden Falle ist es zweckmässig die Bildebene durch den Punkt b gehend anzunehmen und daher Σ_b durch diesen Punkt senkrecht auf Ap zu ziehen. Schneidet nun die durch a parallel zu $a'b'$ gezogene Gerade ac die Spur Σ_b in d, so erscheint c nach der Umlegung auf dem über bd als Durchmesser beschriebenen Halbkreise K in (c), während (a) auf $(c)d$ zu liegen kommt. In dem Dreieck $(a)b(c)$ erscheint sowohl die Gerade ab als auch ihr horizontaler Neigungswinkel in der wahren Grösse. Wird auch der Punkt b' in der Umlegung — daher b' (b') senkrecht auf Σ_b — gezeichnet, so liefern uns die Strecken $(c)(b')$ und $b(b')$ resp. die wahren Längen der Entfernungen der Punkte a und b von der Grundebene.

21. Das im vorstehenden Artikel behandelte Problem lässt noch eine zweite Lösung zu, mit der wir uns nun befassen wollen.

Die Gerade ad, $a'd$ (siehe Fig. 19), soll in der wahren Länge ermittelt werden.

Wir denken uns im Punkte d die Normale auf die Coordinatenebene XY errichtet, und betrachten diese als die Z-Axe eines neuen Cordinatenaxensystemes, für welches da' die X-Axe vorstellt. Da die neue Y-Axe dann im Punkte d auf da' senkrecht steht, und in der Coordinatenebene XY liegt, so hat man blos von A eine Gerade axonometrisch senkrecht auf $a'd$ zu zeichnen, und zu dieser durch d eine Parallele dx zu ziehen um die Projection der dritten Axe des neuen Systems zu erhalten. Hierdurch ist die Aufgabe auf den in Fig. 29 gelösten speciellen Fall zurückgeführt. Man halbirt ad in n, zieht no senkrecht auf dx, und om normal auf Z. Dann schneidet der aus m mit ma beschriebene Kreis die durch d zu no gezogene Parallele in (a) derart, dass $(a)d$ gleich der wahren Länge von ad ist.

22. Die Gerade Ab (Fig. 33) ist die Seite eines in der Coordinatenebene XY liegenden Quadrates $Abcd$, dessen axonometrische Projection construirt werden soll.

Um die Projection der Quadratseite Ad der Lage nach zu erhalten, haben wir im Punkte A eine Gerade axonometrisch senkrecht zu Ab in der Grundebene zu zeichnen. Wir ziehen by normal auf Z und yz senkrecht auf X; die Gerade Ad wird der Lage nach dann erhalten, indem wir entweder von A die Normale auf bz fällen, oder ze senkrecht auf Ab errichten, und e mit A verbinden. Wird ferner aus dem Halbirungspunkte o der Strecke Az mit ob ein Kreis beschrieben, bis die Bildflächtrace E_1 der Grundebene in (b) geschnitten wird, so liefert $A\,(b)$ die wahre Länge der Seite Ab. Behufs Übertragung der Strecke $A\,(b)$ auf die Gerade Ae vom Punkte A aus, beschreiben wir aus o mit oe einen Kreisbogen bis zum Schnittpunkte (e) desselben mit E_1 und ziehen $(b)d$ parallel zu $e(e)$.

Werden durch die Punkte b und d die Parallelen zu den Seiten Ad, Ab resp. gezogen, so ist die Projection des Quadrates hergestellt.

Das Quadrat haben wir ferner als Basis einer regelmässigen Pyramide von gegebener Höhe H aufgefasst, und es handelt sich daher um die Projection s des Scheitels derselben. Ist s' der Schnittpunkt der Diagonalen von $Abcd$, so haben wir auf die durch s' parallel zur Z-Axe gezogene Gerade, die nach der Z-Axe verkürzte Höhe von s' aus aufzutragen.

Zu diesem Zwecke wird die Z-Axe so lange um die Y-Axe gedreht, bis sie in die Bildebene gelangt, folglich mit der Bildflächtrace E_2 der Coordinatenebene XZ zusammenfält. Dabei kommt der Punkt z nach $\{z\}$ derart zu liegen, dass die Punkte z, $\{z\}$ vom Halbirungspunkte m der Strecke Ay gleich weit abstehen. Wird also $A\{p\}$ gleich der Höhe H der Pyramide gemacht, und $\{p\}p$ parallel zu $\{z\}z$ gezogen, so ist Ap gleich ss'.

Die verkürzte Höhe Ap hätten wir auch folgendermassen ermitteln können.

Mit dem Radius bz wird aus (b) die Z-Axe in $[z]$ geschnitten und um A mit $A[z]$ ein Kreisbogen bis zum Schnittpunkte (z) mit der in z auf Z errichteten Normale beschrieben. Wie schon bei Fig. 27 hervorgehoben wurde, ist dann $A(z)$ die in die Bildebene umgelegte Z-Axe, und wir haben blos $A\,[p]$ gleich H, ferner $[p]\,p$ normal auf Z zu machen, um Ap zu erhalten.

23. Viele axonometrische Constructionen fordern die Lösung der Aufgabe, eine in der wahren Länge gegebene Strecke auf alle drei Coordinatenaxen aufzutragen. In dem Falle dürfte es zweckentsprechend sein, das in Fig. 29 besprochene Verfahren blos auf eine Axe anzuwenden, für die übrigen zwei jedoch kürzere Wege einzuschlagen. In Fig. 34 wurde die Strecke Aa auf die X-Axe nach Ax übertragen. Um dieselbe Strecke auch auf der Z-Axe zu erhalten, construiren wir (nach Fig. 11) die zweite Axe $b\,b_1$ jener Ellipse E, die Aa zur grossen Halbaxe und die Coordinatenaxen XY zu einem Paar conjugirter Diameter besitzt. Wird dann aus b die grosse Axe mit dem Radius Aa in γ geschnitten, so ist $A\gamma = Az$.

Denn Az ist offenbar gleich der halben Excentricität der Ellipse E, was in Folge eines bekannten Satzes [1] statt haben muss Die Strecke Ay schliesslich ergibt sich einfach aus der Relation, dass die Summe der Quadrate zweier conjugirter Durchmesser der Ellipse gleich ist der Summe der Quadrate ihrer Axen.

Wir machen $Ax = A\alpha$ und durchschneiden aus α mit $a\,b$ die Z-Axe in β; dann ist $A\beta = Ay$.

Zweite Lösung. Es sei Aa (siehe Fig. 35) die wahre Länge der auf die Axen abzutragenden Strecke. Wird $a\,d$ parallel zu Z und dm normal auf X gezogen, so ist — wie Fig. 11 bezeugt — m der Krümmungsmittelpunkt des Scheitels a jener Ellipse E, die als axonometrische Projection des um A mit dem Radius Aa in der Grundebene beschriebenen Kreises auftritt. Bekanntlich treffen Tangente und Normale eines beliebigen Ellipsenpunktes die grosse Axe in zwei Punkten, welche durch die Brennpunkte harmonisch getrennt werden. Hieraus folgt als Specialfall, dass die Brennpunkte der Ellipse E die Punkte a, m harmonisch trennen. Es ist daher das Quadrat der halben Excentricität von E dem Producte $Aa \,.\, Am$ gleich.

Wenn man also die Strecke $mn = Aa$ macht, und aus den Punkten a, n Kreisbögen mit dem Radius Aa beschreibt, so ist

[1] Siehe die Abhandlung: „Über einen neuen Beweis des Fundamentalsatzes von Pohlke". Sitzungsberichte der k. Akademie der Wissenschaften. Band LXXVI, Jahrgang 1877.

die Entfernung des Schnittpunktes c der beiden Bögen vom Punkte A der Strecke Az gleich.

Trifft der aus z mit Aa beschriebene Kreis die Axe in o, so ist Ao gleich der kleinen Halbaxe der Ellipse E. Um diese Strecke wird die Halbaxe Aa verlängert, daher $ap = Ao$ gemacht, und über Ap als Durchmesser der Kreis K beschrieben. K schneidet Y in e, die Gerade ae jedoch zum zweitenmale in b derart, dass

$$ab = Ay$$

und

$$ob = Ax$$

ist. Die Richtigkeit der ganzen Construction resultirt aus einer allgemein bekannten Axenbestimmung der Ellipse aus zwei conjugirten Diametern.

Dritte Lösung. Nachdem die Strecke Aa (siehe Fig. 36) auf die X-Axe wie in Fig. 34 bereits übertragen wurde, durchschneiden wir aus x mit dem Radius Aa die verlängerte Z-Axe in b, und ziehen die Gerade bx. Diese Gerade wird von der in A auf Y errichteten Normale in c getroffen, und es ist

$$Ac = Ay.$$

Nebenbei ist bc gleich der kleinen Halbaxe der Ellipse E, welche Ax, Ay zu conjugirten Halbmessern und folglich Aa zur grossen Halbaxe besitzt. Wird daher $Ae = bc$ gemacht und Z aus e mit dem Radius Aa in z geschnitten, so ist die wahre Länge von Az der Strecke Aa gleich.

Auch diese Lösung lässt sich mit Hilfe einer bekannten Axenconstruction der Ellipse aus zwei conjugirten Diametern leicht begründen.

Vierte Lösung. Ist wieder Aa (siehe Fig. 37) die gegebene wahre Länge, so errichten wir ad senkrecht auf Aa und ziehen ab parallel zu Y. Dann ist ab die Polare von d in Bezug auf die Ellipse E, welche als axonometrische Projection des um A mit dem Radius Aa in der Grundebene beschriebenen Kreises sich ergibt. Hieraus folgt weiter, dass das Quadrat der gesuchten Strecke Ax gleich ist dem Producte $Ab \cdot Ad$, und dass wir also blos die mittlere geometrische Proportionale ae aus den beiden Strecken auf die X-Axe aufzutragen haben.

Wird Y von ad in δ und der durch a parallel zu X gezogenen Geraden in β getroffen, so ist in ganz analoger Weise $Ay^2 = A\varepsilon_z = A\beta \cdot A\delta$ etc.

Schlussbemerkung. In einer nachfolgenden Abhandlung gedenke ich weitere Beiträge zur Entwickelung der orthogonalen Axonometrie im Sinne der hier erläuterten Grundsätze zu liefern, und durch directe Lösung einer Reihe von wichtigen Problemen zu zeigen, dass die in Rede stehende Projectionsart einer durchaus selbstständigen wissenschaftlichen Behandlungsweise werth und fähig erscheint.

Ich kann jedoch diesen ersten Theil meiner Studien über den Gegenstand nicht schliessen, ohne eines Umstandes Erwähnung zu thun, den ich als Anlass für das Zustandekommen der vorliegenden Arbeit bezeichnen kann.

Der Verwendung meines hochverehrten Freundes des Herrn Prof. Koutny hatte ich es zu danken, das mir im Wintersemester des Schuljahres 1878/79 die Vorlesungen über darstellende Geometrie an der k. k. technischen Hochschule in Graz anvertraut wurden. Die in jene Zeit fallende Vorführung der orthogonalen Axonometrie gab die erste Anregung zu dieser Arbeit, bei welcher ich von Herrn Prof. Koutny in vielfacher Richtung unterstützt und gefördert wurde.

Ich erfülle nur einen Act schuldiger Pflicht, wenn ich dieser warmen Antheilnahme des genannten Herrn an meinen wissenschaftlichen Bestrebungen dankbarsten Ausdruck verleihe.