Über eine Erweiterung der Giltigkeitsgrenzen einiger allgemeiner Sätze der Mechanik.

Von Dr. **Oskar Simony,**

a. ö. Professor an der Hochschule für Bodencultur, Privatdocent a. d. Wiener Universität.

(Vorgelegt in der Sitzung am 4. März 1880.)

Die vorliegenden Untersuchungen betreffen zunächst die Bewegung eines aus n Punkten von den Massen $m_1, m_2, \ldots m_n$ gebildeten materiellen Complexes, deren auf ein fixes, rechtwinkliges Coordinatensystem bezogene Coordinaten und Geschwindigkeitscomponenten aus gewissen, als bekannt anzusehenden Anfangswerthen:

$$p_1, q_1, r_1, p_1', q_1', r_1'; p_2, q_2, r_2, p_2', q_2' r_2'; \\ p_n, q_n, r_n, p_n', q_n', r_n'$$

nach Verlauf von t Zeiteinheiten allgemein in:

$$x_1, y_1, z_1, x_1', y_1', z_1'; x_2, y_2, z_2, x_2', y_2', z_2'; \ldots \\ x_n, y_n, z_n, x_n', y_n', z_n'$$

übergegangen sein mögen. Hinsichtlich der Art dieses Überganges machen wir jedoch die Voraussetzung, dass sämmtliche Coordinaten und Geschwindigkeitscomponenten für die in Betracht kommenden Werthe von t als nach t differentiirbare Functionen dargestellt werden können, wobei wir die Frage, ob diese Annahme wirklich für alle in der Natur vorkommenden Bewegungen zulässig sei, vorläufig allerdings als eine offene zu betrachten haben. [1]

---

[1] Diese Frage kann desshalb nicht a priori bejahend beantwortet werden, weil bekanntlich — ich erinnere hier nur an die von Weierstrass aufgestellte Reihe:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} b^n \cos(a^n \pi x)$$

Sind dann $X_1, Y_1, Z_1; X_2, Y_2, Z_2; \ldots X_n, Y_n, Z_n$ die als einwerthige Functionen von:

$$t; x_1, y_1, z_1, x'_1, y'_1, z'_1; \ldots x_n, y_n, z_n, x'_n, y'_n, z'_n$$

zu definirenden Componenten der im ersten, zweiten, ...n-ten Systempunkte angreifenden Kräfte, und — unter $F_1, F_2, \ldots F_k$ gegebene Functionen der Coordinaten und der Zeit, unter $C_1, C_2, \ldots C_k$ endliche Constanten gedacht —

$$F_1 = C_1,\ F_2 = C_2,\ \ldots F_k = C_k$$

die Bedingungen, welche die Punkte des Systems während ihrer Bewegungen erfüllen müssen, so gelten bekanntlich $3n$ Differentialgleichungen von der Gestalt:

$$\left.\begin{aligned}
m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= X_1 + \Lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \Lambda_2 \frac{\partial F_2}{\partial x_1} + \ldots + \Lambda_k \frac{\partial F_k}{\partial x_1}, \\
m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} &= Y_1 + \Lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial y_1} + \Lambda_2 \frac{\partial F_2}{\partial y_1} + \ldots + \Lambda_k \frac{\partial F_k}{\partial y_1}, \\
m_1 \frac{d^2 z_1}{dt^2} &= Z_1 + \Lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial z_1} + \Lambda_2 \frac{\partial F_2}{\partial z_1} + \ldots + \Lambda_k \frac{\partial F_k}{\partial z_1}; \\
m_n \frac{d^2 x_n}{dt^2} &= X_n + \Lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_n} + \Lambda_2 \frac{\partial F_2}{\partial x_n} + \ldots + \Lambda_k \frac{\partial F_k}{\partial x_n}, \\
m_n \frac{d^2 y_n}{dt^2} &= Y_n + \Lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial y_n} + \Lambda_2 \frac{\partial F_2}{\partial y_n} + \ldots + \Lambda_k \frac{\partial F_k}{\partial y_n}, \\
m_n \frac{d^2 z_n}{dt^2} &= Z_n + \Lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial z_n} + \Lambda_2 \frac{\partial F_2}{\partial z_n} + \ldots + \Lambda_k \frac{\partial F_k}{\partial z_n},
\end{aligned}\right\} (A)$$

welche im Verein mit den k Relationen: $F_1 = C_1$ etc. und den $6n$ Anfangsbedingungen die Bewegungen sämmtlicher Systempunkte vollständig beschreiben. Es besteht daher für jeden derartigen Bewegungsvorgang auch die Relation:

(s. den im 79. Bande von Borchardt's Journal veröffentlichten Aufsatz von Paul du Bois-Reymond: „Versuch einer Classification der willkürlichen Functionen reeller Argumente nach ihren Änderungen in den kleinsten Intervallen“, pag. 29—31) — unendlich viele einwerthige und stetige Functionen einer Veränderlichen denkbar sind, welche an keiner Stelle einen bestimmten Differentialquotienten besitzen.

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i\left(\frac{d^2x_i}{dt^2}dx_i+\frac{d^2y_i}{dt^2}dy_i+\frac{d^2z_i}{dt^2}dz_i\right)=\sum_{i=1}^{i=n}(X_i dx_i+Y_i dy_i+Z_i dz_i)+$$

$$+\sum_{i=1}^{i=k}\Lambda_i\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial F_i}{\partial y_1}dy_1+\frac{\partial F_i}{\partial z_1}dz_1+\ldots+\frac{\partial F_i}{\partial x_n}dx_n+\frac{\partial F_i}{\partial y_n}dy_n+\frac{\partial F_i}{\partial z_n}dz_n\right),$$

welche in Hinblick auf die den Bedingungen: $F_1 = C_1$ etc. entspringenden Identitäten:

$$dF_1=0,\ dF_2=0,\ \ldots dF_k=0$$

offenbar die Darstellungsweise:

$$(1)\ldots\ \sum_{i=1}^{i=n}\frac{1}{2}m_i d\left\{\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy_i}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz_i}{dt}\right)^2\right\}=$$

$$=\sum_{i=1}^{i=n}(X_i dx_i+Y_i dy_i+Z_i dz_i)-\sum_{i=1}^{i=k}\Lambda_i\frac{\partial F_i}{\partial t}dt$$

gestattet. Da ferner ein materieller Punkt nie gleichzeitig zwei verschiedene räumliche Positionen einnehmen kann, und ein Übergang desselben aus einer bestimmten räumlichen Position A in eine zweite, B, nur auf einer continuirlichen Bahnlinie möglich ist, sind wir berechtigt, die in (1) neben t auftretenden veränderlichen Coordinaten insgesammt als einwerthige und stetige Functionen der Zeit aufzufassen und demgemäss die Gleichung (1) zwischen den Grenzen 0 und t so zu integriren, als hätten wir rechter Hand das Product des Zeitdifferentiales in eine einzige Function von t vor uns. Auf diese Art ergibt sich, wenn die Functionen F_1, F_2, F_k noch die weitere Bedingung:

$$(2).\qquad \Lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial t}+\Lambda_2\frac{\partial F_2}{\partial t}+\ldots+\Lambda_k\frac{\partial F_k}{\partial t}=0$$

erfüllen, und die Quadrate der Bahngeschwindigkeiten des ersten, zweiten, n-ten Systempunktes bei von 0 bis t wachsender Zeit aus ihren Anfangswerthen:

$$p_1'^2+q_1'^2+r_1'^2=c_1^2,\ p_2'^2+q_2'^2+r_2'^2=c_2^2,\qquad p_n'^2+q_n'^2+r_n'^2=c_n^2$$

in:

$$x_1'^2+y_1'^2+z_1'^2=v_1^2,\ x_2'^2+y_2'^2+z_2'^2=v_2^2,\qquad x_n'^2+y_n'^2+z_n'^2=v_n^2$$

stetig übergegangen sind, die Beziehung:

$$(3)\ldots \sum_{i=1}^{i=n}\frac{1}{2}m_i v_i^2-\sum_{i=1}^{i=n}\frac{1}{2}m_i c_i^2=\int_0^t\sum_{i=1}^{i=n}(X_i\,dx_i+Y_i\,dy_i+Z_i\,dz_i),$$

welche den Satz von der lebendigen Kraft in seiner allgemeinsten Form ausspricht.[1] Die Formel (3) gilt also

[1] Hiebei können die Functionen: X_1, Y_1, Z_1 etc. in dem Zeitintervalle t ein- oder mehrmals ihre Bildungsgesetze ändern, ohne dass desshalb der Satz von der lebendigen Kraft seine Giltigkeit verliert; jedoch versteht es sich von selbst, dass dessen analytische Formulirung dann eine Zerlegung des Ausdruckes:

$$\int_0^t\sum_{i=1}^{i=n}(X_i\,dx_i+Y_i\,dy_i+Z_i\,dz_i)$$

in solche bestimmte Integrale erfordert, innerhalb deren Grenzen die betreffenden Functionen ihre Formen beibehalten. — Wäre also beispielsweise das Gleichungssystem:

$$s_{t=0}=0,\ \ v_{t=0}=c;$$

$$o<t\leqq\frac{1}{\varkappa\sqrt{g}}\operatorname{arctg}\frac{\varkappa c}{\sqrt{g}}=\tau:m\frac{d^2s}{dt^2}=-m(g+\varkappa^2v^2);$$

$$t>\tau:m\frac{d^2s}{dt^2}=-m(g-\varkappa^2v^2)$$

gegeben, welches bekanntlich die geradlinige Bewegung einer Masse m von dem Gewichte mg in einem widerstehenden Mittel charakterisirt, so müsste man den Satz von der lebendigen Kraft für $t>\tau$, wie folgt, schreiben:

$$\frac{mv^2}{2}-\frac{mc^2}{2}=\int_0^\tau-m(g+\varkappa^2v^2)ds+\int_\tau^t-m(g-\varkappa^2v^2)ds,$$

welche Relation sich mittelst der Formeln:

$$\int(g+\varkappa^2v^2)ds=-\frac{g}{2\varkappa^2\cos^2\{\varkappa(\tau-t)\sqrt{g}\}}+\text{Const.},$$

$$\int(g-\varkappa^2v^2)ds=\frac{2g}{\varkappa^2\{e^{\varkappa(t-\tau)\sqrt{g}}+e^{-\varkappa(t-\tau)\sqrt{g}}\}^2}+\text{Const.},$$

$$(t>\tau):v=-\frac{\sqrt{g}}{\varkappa}\left\{\frac{e^{\varkappa(t-\tau)\sqrt{g}}-e^{-\varkappa(t-\tau)\sqrt{g}}}{e^{\varkappa(t-\tau)\sqrt{g}}+e^{-\varkappa(t-\tau)\sqrt{g}}}\right\}$$

auch leicht verificiren lässt.

beispielsweise regelmässig, wenn die Coëfficienten von $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots \Lambda_k$ für sich verschwinden, respective die Bedingungen: $F_1 = C_1$ etc. die Zeit nicht enthalten, unter welcher specielleren Annahme der Satz von der lebendigen Kraft gemeiniglich abgeleitet wird.[1]

Wir wenden uns nunmehr zur Betrachtung eines freien materiellen Systems, dessen n Punkte zur Zeit $t=0$ gewisse Gleichgewichtslagen mit den endlichen Anfangsgeschwindigkeiten $c_1, c_2, \quad c_n$ verlassen haben mögen und in ihren weiteren Bewegungen lediglich dem Einflusse innerer Kräfte unterworfen sind. Bezüglich der letzteren machen wir folgende beschränkende Voraussetzungen:

1. Dieselben sind Anziehungskräfte, welche dem dritten Newton'schen Bewegungsgesetze genügen.

2. Ihre Richtungen fallen in jene der jeweiligen Verbindungslinien der einzelnen Systempunkte.

3. Ihre Intensitäten variiren derart, dass sich — unter m_a, m_b die Massen zweier beliebiger Systempunkte, unter $r_{a,b}$ deren Abstand im Zeitmomente t verstanden — die wechselseitige Attractionswirkung beider Massen durch einen Ausdruck von der Gestalt:

$$(4)\ldots \qquad W_{a,b} = k m_a m_b f(r_{a,b}) \{\varphi(t, v_1^2, v_2^2, \ldots v_n^2)\}^2$$

wiedergeben lässt.[2]

4. Die Functionen f und φ sind einwerthige, stetige und endliche Functionen ihrer variablen Argumente, deren Form für alle in Betracht kommenden Werthe von $t, v_1, v_2, \ldots v_n, r_{1,2}, r_{1,3}, \ldots r_{n-1,n}$ dieselbe bleibt.

---

[1] S. h. in erster Linie die mustergiltige Darstellung Kirchhoff's, in dessen Vorlesungen über mathematische Physik, pag. 34, 35.

[2] Der Verfasser wurde zur Einführung derartiger Kräfte zuerst durch seine analytischen Untersuchungen über den Zusammenhang geometrisch bestimmbarer Stammformen mit ihren Formzahlen (publicirt im 5., 6., 7., 8., 9., 10. und 11. Hefte des 3. Jahrganges der Zeitschrift: „Centralblatt für das gesammte Forstwesen") veranlasst, als er die denselben zu Grunde gelegte partielle Eliminationsgleichung:

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{p-1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{q-1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2$$

für mit der Zeit variirende p, q in möglichst einfacher Weise abzuleiten suchte.

Unter diesen Annahmen tritt an die Stelle von (A) das einfachere Gleichungssystem:

$$\left.\begin{array}{l} m_1 \dfrac{d^2 x_1}{dt^2} = -\Phi \dfrac{\partial U}{\partial x_1},\ m_1 \dfrac{d^2 y_1}{dt^2} = -\Phi \dfrac{\partial U}{\partial y_1},\ m_1 \dfrac{d^2 z_1}{dt^2} = -\Phi \dfrac{\partial U}{d z_1}, \\ \\ m_n \dfrac{d^2 x_n}{dt^2} = -\Phi \dfrac{\partial U}{\partial x_n},\ m_n \dfrac{d^2 y_n}{dt^2} = -\Phi \dfrac{\partial U}{\partial y_n},\ m_n \dfrac{d^2 z_n}{dt^2} = -\Phi \dfrac{\partial U}{\partial z_n}, \end{array}\right\} (B)$$

indem die Coëfficienten sämmtlicher Λ entfallen, und die Kraftcomponenten $X_1,\ Y_1,\ Z_1,\qquad X_n,\ Y_n,\ Z_n$ der Reihe nach durch Multiplication des wesentlich negativen Factors:

$$-k\{\varphi(t,\ v_1^2,\ v_2^2,\ldots v_n^2)\}^2 = -\Phi$$

mit den nach $x_1, y_1, z_1, \qquad x_n, y_n, z_n$ genommenen partiellen Differentialquotienten der Function:

$$\begin{aligned} U = {} & m_1 m_2 \int f(r_{1,2})\, dr_{1,2} + m_1 m_3 \int f(r_{1,3})\, dr_{1,3} + \\ & + \ldots + m_1 m_n \int f(r_{1,n}) dr_{1,n} + m_2 m_3 \int f(r_{2,3}) dr_{2,3} + m_2 m_4 \int f(r_{2,4}) dr_{2,4} + \\ & + \ldots + m_2 m_n \int f(r_{2,n}) dr_{2,n} + \ldots + m_{n-1} m_n \int f(r_{n-1,n}) dr_{n-1,n} \end{aligned}$$

erhalten werden. Addiren wir mithin alle auf dieselbe Coordinatenachse bezüglichen Bewegungsgleichungen und beachten, dass die drei Summen:

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} + \frac{\partial U}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial U}{\partial x_n},\qquad \frac{\partial U}{\partial y_1} + \frac{\partial U}{\partial y_2} + \ldots + \frac{\partial U}{\partial y_n},$$

$$\frac{\partial U}{\partial z_1} + \frac{\partial U}{\partial z_2} + \ldots + \frac{\partial U}{\partial z_n}$$

gemäss der Definition von U identisch verschwinden, so ergeben sich direct die Relationen:

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = 0,\ \sum_{i=1}^{i=n} m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = 0,\ \sum_{i=1}^{i=n} m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = 0,$$

d. h. die Bewegung des Schwerpunktes des Systems erfolgt geradlinig mit gleichförmiger Geschwindigkeit.

Ein weiterer wichtiger Schluss lässt sich aus der Beziehung (3) ableiten, welche für diesen Fall die Schreibweise:

$$(5)\ldots \qquad \sum_{i=1}^{i=n}\frac{1}{2}m_i v_i^2 - \sum_{i=1}^{i=n}\frac{1}{2}m_i c_i^2 + \int_0^t \Phi dU = 0$$

erlaubt. Da nämlich die in ΦdU auftretenden Functionen zufolge der vierten Annahme ihre Formen nicht ändern, während die Zeit von 0 auf t wächst, bedingt die Gleichung (5) unmittelbar die folgende:

$$(6)\ldots \quad \sum_{i=1}^{i=n}\frac{1}{2}m_i v_i^2 + \int^{t=t}\Phi dU = \sum_{i=1}^{i=n}\frac{1}{2}m_i c_i^2 + \int^{t=0}\Phi dU = \text{Const.},$$

wonach für das in Betracht gezogene System die Summe seiner wirklichen und potentiellen Energie constant bleibt.

Die Sätze von der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunktes und von der Erhaltung der Kraft gelten also **bedingungsweise** auch für Kräfte, welche nicht allein mit den Entfernungen der bewegten Massen, sondern auch mit deren jeweiligen Geschwindigkeiten und der Zeit variiren.[1]

Endlich liefert das Gleichungssystem (B) noch die Identitäten:

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i\left(y_i\frac{d^2z_i}{dt^2} - z_i\frac{d^2y_i}{dt^2}\right) = -\Phi\sum_{i=1}^{i=n}\left(y_i\frac{\partial U}{\partial z_i} - z_i\frac{\partial U}{\partial y_i}\right) = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i\left(z_i\frac{d^2x_i}{dt^2} - x_i\frac{d^2z_i}{dt^2}\right) = -\Phi\sum_{i=1}^{i=n}\left(z_i\frac{\partial U}{\partial x_i} - x_i\frac{\partial U}{\partial z_i}\right) = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i\left(x_i\frac{d^2y_i}{dt^2} - y_i\frac{d^2x_i}{dt^2}\right) = -\Phi\sum_{i=1}^{i=n}\left(x_i\frac{\partial U}{\partial y_i} - y_i\frac{\partial U}{\partial x_i}\right) = 0,$$

welche die Unveränderlichkeit der Summen:

---

[1] Vergl. hiemit die Folgerungen A. Mayer's in dessen Abhandlung (Mathematische Annalen, herausgegeben von Prof. F. Klein und Prof. A. Mayer, XIII. Bd., pag. 20—34): „Über den allgemeinsten Ausdruck der inneren Potentialkräfte eines Systemes bewegter materieller Punkte, welcher sich aus dem Principe der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung ergibt", pag. 31 — 34, ferner die hierauf bezüglichen Schlüsse von Prof. F. Zöllner im I. Bande seiner „wissenschaftlichen Abhandlungen", pag. 129.

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i\left(y_i\frac{dz_i}{dt}-z_i\frac{dy_i}{dt}\right),\ \sum_{i=1}^{i=n} m_i\left(z_i\frac{dx_i}{dt}-x_i\frac{dz_i}{dt}\right),\ \sum_{i=1}^{i=n} m_i\left(x_i\frac{dy_i}{dt}-y_i\frac{dx_i}{dt}\right)$$

zur Folge haben, d. h. es besteht unter den hier gewählten Voraussetzungen auch der Satz von der Erhaltung der Flächenräume.

Unsere letzten Folgerungen beziehen sich auf den Satz von der Erhaltung der lebendigen Kraft, dessen bisheriger Fassung bekanntlich die nachstehenden Annahmen zu Grunde liegen:

1. Die wirksamen Kräfte besitzen ein Potential, welches nur von den Coordinaten ihrer Angriffspunkte, nicht aber von den Geschwindigkeiten der bewegten Massen und der Zeit abhängt.

2. Dieses Potential ist für alle in Betracht kommenden Coordinatenwerthe eine endliche und eindeutige[1] Function dieser Variablen.

---

[1] Um die Nothwendigkeit dieser Beschränkung, welche beispielsweise auch in der Abhandlung von Helmholtz über die Erhaltung der Kraft unerwähnt geblieben ist, durch Vorführung eines möglichst einfachen Specialfalles klar hervortreten zu lassen, nehmen wir an, ein materieller Punkt von der Masse μ habe zur Zeit $t=0$ aus einer ursprünglichen Gleichgewichtslage eine Verschiebung σ erlitten und sei hiedurch in derartige Oscillationen gerathen, dass sein jeweiliger Abstand s von der anfänglichen Ruhelage aus der Gleichung:

$$s=\sigma\cos(\alpha t^2),\ \alpha>0$$

zu berechnen ist. Seine Geschwindigkeit v und Beschleunigung p im Zeitmomente t sind dann durch die Ausdrücke:

$$v=-2\alpha\sigma t\sin(\alpha t^2),\ p=-2\alpha\{\sigma\sin(\alpha t^2)+2\alpha\sigma t^2\cos(\alpha t^2)\}=$$
$$=-2\alpha\left\{\sqrt{\sigma^2-s^2}+2s\arccos\left(\left(\frac{s}{\sigma}\right)\right)\right\}$$

bestimmt, wonach die den Punkt beschleunigende Kraft: $K=\mu p$ in diesem Falle das unendlich vieldeutige Potential:

$$V=2\alpha\mu(\sigma^2-s^2)\arccos\left(\left(\frac{s}{\sigma}\right)\right)$$

besitzt, indem der Factor: $\arccos\left(\left(\frac{s}{\sigma}\right)\right)$ hier die Gesammtheit jener Specialisirungen von αt^2 vorzustellen hat, für welche die Function $\cos(\alpha t^2)$ den Werth $\frac{s}{\sigma}$ annimmt. Andererseits lehrt eine Discussion der für s angenommenen Gleichung, dass die zur ersten, zweiten, dritten, ..k-ten Schwingung des Punktes erforderlichen Zeiten:

Es sei uns im Folgenden gestattet, an vier speciellen mechanischen Problemen darzuthun, dass die Giltigkeitsgrenzen des erwähnten Satzes ebenfalls einer bedeutenden Erweiterung fähig sind.

I. Eine fixe, unveränderliche Ebene E äussere auf eine vollkommen elastische Kugel von dem Radius ρ und der Masse m in der Richtung des jeweiligen Abstandes r ihres Centrums C von E eine Attraction, welche, unter k die Beschleunigung für $r=\rho$, unter α eine positive Zahl verstanden, allgemein durch das Product:

$$kme^{-\alpha(r-\rho)}$$

bestimmt sein mag. In welcher Weise bewegt sich die Kugel, falls sie zur Zeit $t=0$ die Ebene mit einer normal nach auswärts gerichteten Anfangsgeschwindigkeit c verlassen hat?

Ist speciell s der von C in t Secunden durchlaufene Weg, so besteht gemäss den hier getroffenen Feststellungen zwischen s und t die Differentialgleichung:

$$(7)\ldots \qquad \frac{d^2s}{dt^2} = -ke^{-\alpha s},$$

deren allgemeines, mit zwei arbiträren Constanten: A, B versehenes Integral:

$$(8)\ldots \qquad s = \frac{2}{\alpha} \operatorname{Log} \left(Ae^{Bt} - \frac{\alpha k}{8AB^2} e^{-Bt}\right)$$

für s und $\frac{ds}{dt} = v$ verschiedene Ausdrücke liefert, je nachdem das Quadrat von c grösser, gleich oder kleiner als der Quotient: $\frac{2k}{\alpha}$ ausfällt. Man erhält nämlich nach Einführung der Abkürzung:

$$\sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}}, \quad \frac{\sqrt{4\pi}-\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\alpha}}, \quad \frac{\sqrt{6\pi}-\sqrt{4\pi}}{\sqrt{\alpha}}, \qquad \frac{\sqrt{2k\pi}-\sqrt{2(k-1)\pi}}{\sqrt{\alpha}}$$

sprungweise abnehmen, hingegen die Amplituden der einzelnen Oscillationen constant bleiben. Es muss daher der Punkt seine Ruhelage mit immer grösserer und grösserer Geschwindigkeit passiren, so dass der Satz von der Erhaltung der lebendigen Kraft auf die in Betracht gezogene Bewegung in der That keine Anwendung findet.

$$(9)\ldots \qquad \frac{1}{2}\sqrt{\alpha(\alpha c^2-2k)}=\mu=\nu i$$

für $c^2 > \dfrac{2k}{\alpha}$ die Formeln:

$$(10)\ldots \qquad s=\frac{2}{\alpha}\operatorname{Log}\left\{\frac{(\alpha c+2\mu)e^{\mu t}-(\alpha c-2\mu)e^{-\mu t}}{4\mu}\right\},$$

$$(11)\ldots \qquad v=\frac{2\mu}{\alpha}\left\{\frac{(\alpha c+2\mu)e^{\mu t}+(\alpha c-2\mu)e^{-\mu t}}{(\alpha c+2\mu)e^{\mu t}-(\alpha c-2\mu)e^{-\mu t}}\right\},$$

ferner für $c^2=\dfrac{2k}{\alpha}$ die Relationen:

$$(12)\ldots s=\frac{2}{\alpha}\operatorname{Log}\left(1+\frac{1}{2}\alpha ct\right),\quad (13)\ldots v=\frac{c}{1+\frac{1}{2}\alpha ct},$$

endlich für $c^2<\dfrac{2k}{\alpha}$ die Gleichungen:

$$(14)\ldots s=\frac{2}{\alpha}\operatorname{Log}\left(\cos\nu t+\frac{\alpha c}{2\nu}\sin\nu t\right),\quad (15)\ldots v=\frac{2\nu}{\alpha}\left(\frac{\alpha c-2\nu\operatorname{tg}\nu t}{2\nu+\alpha c\operatorname{tg}\nu t}\right).$$

Hiernach entfernt sich der Mittelpunkt c der Kugel, falls $c \geqq \sqrt{\dfrac{2k}{\alpha}}$ ist, mit wachsender Zeit immer weiter von der fixen Ebene, während er für $c<\sqrt{\dfrac{2k}{\alpha}}$ nach Verlauf von:

$$\frac{1}{\nu}\operatorname{arctg}\frac{\alpha c}{2\nu}=\tau \text{ Secunden}$$

und Zurücklegung der Strecke:

$$\sigma=\frac{1}{\alpha}\operatorname{Log}\left(1+\frac{\alpha^2c^2}{4\nu^2}\right)$$

momentan zur Ruhe gelangt, um sich dann mit wachsender Geschwindigkeit gegen seine Anfangslage A zurückzubewegen. Hiebei erreicht C, sobald, vom Beginne der Bewegung an gerechnet, $2\tau-t$ Secunden verflossen sind, entsprechend den mit (14) und (15) äquivalenten Formeln:

$$(16)\ldots s=\frac{2}{\alpha}\operatorname{Log}\frac{\cos\{\nu(\tau-t)\}}{\cos\nu\tau},\quad (17)\ldots v=\frac{2\nu}{\alpha}\operatorname{tg}\{\nu(\tau-t)\}$$

mit der Geschwindigkeit $-v$ zum zweiten Male die Entfernung s von A und nach 2τ Secunden mit der Geschwindigkeit $-c$ wieder seine ursprüngliche Position. Gleichzeitig erfolgt der Zusammenstoss der Kugel mit der Ebene, wodurch ihr Mittelpunkt seine Anfangsgeschwindigkeit c zurückerhält, respective eine Wiederholung der eben geschilderten Bewegungserscheinungen in derselben Reihenfolge bedingt wird.

Nachdem so der Nachweis geliefert ist, dass die Bewegung der Kugel für $c < \sqrt{\frac{2k}{\alpha}}$ in voller Übereinstimmung mit dem Satze von der Erhaltung der lebendigen Kraft erfolgt, stellen wir s mit Hilfe von (17) in Function von v dar und substituiren das erhaltene Resultat in (7), welche Gleichung nunmehr folgende Gestalt erhält:

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -\left(\frac{2\nu^2}{\alpha} + \frac{\alpha}{2}v^2\right).$$

Setzen wir mithin im Einklange mit der Forderung: $c < \sqrt{\frac{2k}{\alpha}}$ — unter g und $\varkappa^2$ zwei wesentlich positive Grössen gedacht —

$$k = g + \varkappa^2 c^2, \quad \alpha = 2\varkappa^2, \quad \text{d. h. } \nu = \varkappa\sqrt{g},$$

so beschreiben die beiden Differentialgleichungen:

$$(18)\ldots \frac{d^2s}{dt^2} = -(g + \varkappa^2 v^2) \text{ und: } (19)\ldots \frac{d^2s}{dt^2} = -(g + \varkappa^2 c^2)e^{-2\varkappa^2 s}$$

unter Voraussetzung der Anfangsbedingungen: $s_{t=0} = 0$, $v_{t=0} = c$ dieselben Bewegungserscheinungen, woraus sich ohne Schwierigkeit folgender allgemeinere Schluss ergibt: Erfährt eine vollkommen elastische Kugel von einer fixen, unveränderlichen Ebene E in der Richtung des jeweiligen Abstandes r ihres Mittelpunktes C von E eine Beschleunigung p, welche sich, wenn die jeweilige Momentangeschwindigkeit von C in der Richtung von r mit u bezeichnet wird, durch einen Ausdruck von der Form:

$$p = -(g + \varkappa^2 u^2)$$

wiedergeben lässt, so gilt für alle mit endlichen Anfangsgeschwindigkeiten beginnende Bewegungen der Kugel der Satz von der Erhaltung der lebendigen Kraft.

II. Dasselbe ist der Fall, wenn die dem Kugelcentrum von der attrahirenden Ebene ertheilte Beschleunigung durch eine Gleichung von der Gestalt:

$$(20)\ldots \qquad \frac{d^2s}{dt^2} = -(g + \varkappa^2 v^6)$$

definirbar ist, und demgemäss für σ und τ unter Beibehaltung der Anfangsbedingungen des ersten Problems die Formeln:

$$\sigma = \frac{1}{6\gamma^2 g}\left\{\frac{1}{2}\operatorname{Log}\left(\frac{[1+\gamma^2c^2]^2}{1-\gamma^2c^2+\gamma^4c^4}\right) - \sqrt{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{1-2\gamma^2c^2}{\sqrt{3}}\right)\right\},$$

$$\tau = \frac{1}{2\gamma g}\left\{\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{Log}\left(\frac{1+\gamma c\sqrt{3}+\gamma^2c^2}{1-\gamma c\sqrt{3}+\gamma^2c^2}\right) + \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{3\gamma c[1-\gamma^2c^2]}{1-4\gamma^2c^2+\gamma^4c^4}\right)\right\},$$

bestehen, in welchen γ der Constanten: $\sqrt[6]{\frac{\varkappa^2}{g}}$ entspricht. Da nämlich die erste der beiden aus (20) hervorgehenden Integralgleichungen:

$$(21). \quad 2\gamma g(\tau - t) = \frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{Log}\left(\frac{1+\gamma v\sqrt{3}+\gamma^2v^2}{1-\gamma v\sqrt{3}+\gamma^2v^2}\right) + \\ + \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{3\gamma v[1-\gamma^2v^2]}{1-4\gamma^2v^2+\gamma^4v^4}\right),$$

$$(22)\ldots 6\gamma^2 g(\sigma - s) = \frac{1}{2}\operatorname{Log}\left(\frac{[1+\gamma^2v^2]^2}{1-\gamma^2v^2+\gamma^4v^4}\right) - \sqrt{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{1-2\gamma^2v^2}{\sqrt{3}}\right)$$

für jede zwischen 0 und 2τ liegende Specialisirung von t nur je einen reellen Werth von v liefert und, falls t_1, v_1 zwei (21) befriedigende positive Substitutionen für t und v vorstellen, offenbar auch für $t = 2\tau - t_1$, $v = -v_1$ richtig bleibt, so besitzt die Kugel in den Zeitmomenten t und $2\tau - t$ dieselbe lebendige Kraft, und ihr Mittelpunkt gemäss der Relation (22) gleichzeitig denselben Abstand von E, womit die Richtigkeit unserer Behauptung dargethan erscheint. Ausserdem lehrt eine nähere Untersuchung der Gleichung (22), dass es hier unmöglich wäre, die von der Ebene auf die Kugel ausgeübte Attractionswirkung in geschlossener Form als Function von r darzustellen, indem sich die zwischen s und v^2 bestehende Beziehung nach v^2 nur durch eine unendliche Reihe auflösen lässt. Es wird also hier die Einführung einer mit der jeweiligen Geschwindigkeit der bewegten Masse variirenden Kraft in erster Linie durch die Forderung bedingt, die in Betracht gezogene Bewegung nicht nur vollständig, sondern auch möglichst einfach zu beschreiben.

III. Der Schwerpunkt eines ursprünglich in stabilem Gleichgewichte befindlichen Moleküles erhalte zur Zeit $t=0$ eine geradlinige Verschiebung σ und bewege sich demzufolge unter dem Einflusse einer in der Richtung von σ wirksamen Beschleunigung, welche, wenn seit dem Beginne der Bewegung allgemein t Secunden verflossen sind, den Werth:

$$(23). \qquad p=-\frac{9}{5}\alpha^2\sigma\cos\alpha t\cos 2\alpha t,\quad \alpha>0$$

besitzen mag. — Gilt für eine derartige Bewegung des Moleküles der Satz von der Erhaltung der lebendigen Kraft?

Um hierüber Aufschluss zu erhalten, discutiren wir jene Gleichungen:

$$(24)\ldots \qquad s=\frac{1}{5}\sigma\cos\alpha t(3+2\cos^2\alpha t),$$

$$(25)\ldots \qquad v=-\frac{3}{5}\alpha\sigma\sin\alpha t(3-2\sin^2\alpha t),$$

welche aus (23) unter Hinzuziehung der Anfangsbedingungen: $s_{t=0}=\sigma$, $v_{t=0}=0$ für die dem Zeitmomente t entsprechende Verschiebung s des Molekülschwerpunktes und dessen gleichzeitige Geschwindigkeit v resultiren, und erhalten so nach Vertauschung der Irrationalzahlen:

$$\frac{4}{\pi}\arccos\frac{1}{\sqrt{6}},\quad \frac{1}{5}\sqrt{6},\quad \frac{1}{9}\sqrt{6},\quad \frac{2}{5}\sqrt{2},\quad \frac{3}{5}\sqrt{2},\quad \frac{2}{15}\sqrt{30}$$

mit fünfstelligen Näherungswerthen für die wichtigsten einander correspondirenden Variationen von p, v und s folgendes Schema:

t	p		
0	$-1{\cdot}8\alpha^2\sigma$	0	
$\frac{\pi}{4\alpha}$	0	$-0{\cdot}84853\alpha\sigma$	$+0{\cdot}56569\sigma$
$1{\cdot}46456\left(\frac{\pi}{4\alpha}\right)$	$+0{\cdot}48990\alpha^2\sigma$	$-0{\cdot}73030\alpha\sigma$	$+0{\cdot}27217\sigma$
$\frac{\pi}{2\alpha}$	0	$-0{\cdot}6\alpha\sigma$	0
$2{\cdot}53544\left(\frac{\pi}{4\alpha}\right)$	$-0{\cdot}48990\alpha^2\sigma$	$-0{\cdot}73030\alpha\sigma$	$-0{\cdot}27217\sigma$
$\frac{3\pi}{4\alpha}$	0	$-0{\cdot}84853\alpha\sigma$	$-0{\cdot}56569\sigma$
$\frac{\pi}{\alpha}$	$+1{\cdot}8\alpha^2\sigma$	0	$-\sigma$
$\frac{5\pi}{4\alpha}$	0	$+0{\cdot}84853\alpha\sigma$	$-0{\cdot}56569\sigma$
$5{\cdot}46456\left(\frac{\pi}{4\alpha}\right)$	$-0{\cdot}48990\alpha^2\sigma$	$+0{\cdot}73030\alpha\sigma$	$-0{\cdot}27217\sigma$
$\frac{3\pi}{2\alpha}$	0	$+0{\cdot}6\alpha\sigma$	0
$6{\cdot}53544\left(\frac{\pi}{4\alpha}\right)$	$+0{\cdot}48990\alpha^2\sigma$	$+0{\cdot}73030\alpha\sigma$	$+0{\cdot}27217\sigma$
$\frac{7\pi}{4\alpha}$	0	$+0{\cdot}84853\alpha\sigma$	$+0{\cdot}56569\sigma$
$\frac{2\pi}{\alpha}$	$-1{\cdot}8\alpha^2\sigma$	0	

Dasselbe charakterisirt im Verein mit den Relationen (24) und (25) die Bewegung des Moleküles als eine periodische von constanter Amplitude σ und der Schwingungsdauer $\frac{2\pi}{\alpha}$, für welche die oben gestellte Frage bejahend beantwortet werden muss. Da ferner die Darstellung von p in Function von s die complicirte [1] Gleichung:

[1] Wollte man beispielsweise auf Grundlage dieser Formel die im Schema für $s = \pm\sigma$, $\pm\frac{2}{5}\sigma\sqrt{2}$, $\pm\frac{1}{9}\sigma\sqrt{6}$ angegebenen Werthe von p in jener einfachen Gestalt erhalten, wie sie die Relation (23) für die entsprechenden

$$(26)\ldots p=-9\alpha^2\left\{s-\frac{2}{5}\sqrt[3]{2\sigma^2}\left(\sqrt[3]{\sqrt{25s^2+2\sigma^2}+5s}-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\sqrt[3]{\sqrt{25s^2+2\sigma^2}-5s}\right)\right\}$$

liefert, so kann die eben geschilderte Bewegung in der That nur dann einfach beschrieben werden, wenn man, wie dies hier geschehen ist, die jeweilige Beschleunigung der bewegten Masse direct als Function der Zeit definirt.

IV. Endlich sind auch Bewegungen denkbar, welche in völliger Übereinstimmung mit dem Satze von der Erhaltung der lebendigen Kraft vor sich gehen, obwohl die sie veranlassenden Beschleunigungen in geschlossener Form lediglich als Functionen der Zeit bestimmt werden können. — So gilt dies beispielsweise von allen geradlinigen Verschiebungen eines Moleküles, welche, unter α, k zwei positive Constanten, unter s den jeweiligen Abstand seines Schwerpunktes von einem in seiner Bewegungsrichtung willkürlich gewählten fixen Punkte verstanden, durch die Gleichungen:

$$(27)\ldots\quad p=\frac{d^2s}{dt^2}=-k\sqrt[3]{\cos\alpha t},\ v_{t=0}=0,\ s_{t=0}=\sigma$$

charakterisirbar sind, mithin gemäss den Formeln:

$$(28)\ldots\qquad v=-k\int_0^t\sqrt[3]{\cos\alpha t}\,dt,$$

$$(29)\ldots\qquad s=\sigma-k\left\{t\int_0^t\sqrt[3]{\cos\alpha t}\,dt-\int_0^t t\sqrt[3]{\cos\alpha t}\,dt\right\}$$

stattfinden. Unter diesen Voraussetzungen haben wir es nämlich wieder mit Oscillationen von der constanten Amplitude:

$$k\left\{\frac{\pi}{2\alpha}\int_0^{\frac{\pi}{2\alpha}}\sqrt[3]{\cos\alpha t}\,dt-\int_0^{\frac{\pi}{2\alpha}}t\sqrt[3]{\cos\alpha t}\,dt\right\}$$

Zeitmomente direct liefert, so wäre hiezu die Anwendung der nicht unmittelbar evidenten Hilfsgleichungen:

$$\sqrt[3]{6\sqrt{3}\pm 10}=\sqrt{3}\pm 1,\ \sqrt[3]{2\sqrt{10}\pm 4\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{5}\pm 1}{\sqrt{2}},\ \sqrt[3]{\frac{4}{3}\sqrt{\frac{26}{3}}\pm\frac{10\sqrt{6}}{9}}=\frac{\sqrt{13}\pm 1}{\sqrt{6}}$$

erforderlich.

und der Schwingungsdauer $\frac{2\pi}{\alpha}$ zu thun, bei welchen den Zeitmomenten t und $\frac{2\pi}{\alpha}-t$, $(0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{\alpha})$ in Hinblick auf die keiner Erläuterung bedürftigen Beziehungen:

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\alpha}} \sqrt[3]{\cos \alpha t}\, dt = \int_0^{\frac{2\pi}{\alpha}} t \sqrt[3]{\cos \alpha t}\, dt = 0,$$

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\alpha}-t} \sqrt[3]{\cos \alpha t}\, dt = \int_0^{\frac{2\pi}{\alpha}} \sqrt[3]{\cos \alpha t}\, dt - \int_{\frac{2\pi}{\alpha}-t}^{\frac{2\pi}{\alpha}} \sqrt[3]{\cos \alpha t}\, dt = -\int_0^{t} \sqrt[3]{\cos \alpha t}\, dt,$$

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\alpha}-t} t \sqrt[3]{\cos \alpha t}\, dt = \int_0^{t} t \sqrt[3]{\cos \alpha t}\, dt - \frac{2\pi}{\alpha} \int_0^{t} \sqrt[3]{\cos \alpha t}\, dt$$

gleiche Werthe von s und numerisch gleiche Werthe von v entsprechen. Andererseits lässt sich leicht zeigen, dass es hier unmöglich wäre, die jeweilige Beschleunigung p des Moleküles in Function seiner Entfernung vom Oscillationscentrum anders als durch eine complicirte unendliche Reihe auszudrücken. Transformirt man nämlich das Integrale: $\int \sqrt[3]{\cos \alpha t}\, dt$ mittelst der Substitutionen:

$$t = \frac{1}{\alpha} \arccos \left(1 - \sqrt{3} \operatorname{tg}^2 \frac{u}{2}\right)^{\frac{3}{2}}, \quad \sqrt{1 - \frac{2+\sqrt{3}}{4} \sin^2 u} = \Delta u$$

in:

$$\int \sqrt[3]{\cos \alpha t}\, dt = \frac{3\sqrt[4]{3}}{2\alpha} \left\{ 2 \int \Delta u\, du - \frac{3-\sqrt{3}}{3} \int \frac{du}{\Delta u} - 2 \operatorname{tg} \frac{u}{2} \Delta u \right\},$$

so wird sofort ersichtlich, dass sich zwar die jeweilige Geschwindigkeit v des Moleküles als ein Aggregat elementarer Functionen des Argumentes:

$$u = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1 - \sqrt[3]{\cos^2 \alpha t}}{\sqrt{3}}}$$

darstellen lässt, hingegen das zweite in (29) vorkommende Integrale: $\int t \sqrt[3]{\cos \alpha t}\, dt$ nicht auf elementare Functionen zurückgeführt werden kann, und demgemäss die Gleichung (29) auch keine geschlossene Auflösung nach $\sqrt[3]{\cos \alpha t}$ gestattet.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1880

Band/Volume: 81_2

Autor(en)/Author(s): Simony Oskar

Artikel/Article: Über eine Erweiterung der Giltigkeitsgrenzen einiger allgemeiner Sätze der Mechanik. 399-414