©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Der orthogonal-axonometrische Verkürzungskreis.

Von **Josef Tesař**,

Professor an der k. k. Staatsgewerbeschule zu Brünn.

(Mit 1 Tafel.)

I.

Es ist Zweck und Ziel des folgenden Aufsatzes, eine graphische, mittelst des Kreises und der Geraden durchgeführte Lösung des „orthogonal-axonometrischen Fundamentalproblems" zu behandeln, bewerkstelligt durch die Einführung eines geometrischen Gebildes, welches der „Verkürzungskreis" genannt werden soll. Schon Möllinger bemerkt in der Vorrede zu seinem 1853 erschienenen Lehrbuche der Parallel-Perspective, „dass es dringend geboten sei, eine so wichtige Zeichnungsmethode (die Axonometrie) aus dem fremdartigen Gebiete der trigonometrischen Analysis wieder auf den heimatlichen Boden der darstellenden Geometrie zu verpflanzen".

Staudigl reproducirt diese Bemerkung in dem Vorwort zu seinem 1875 erschienenen Lehrbuche der axonometrischen und schiefen Projection. Er betont daselbst, wie unzukömmlich es sei, dass in den meisten Lehrbüchern und Abhandlungen über Axonometrie analytische Entwickelungen die Grundlage der weiteren Untersuchungen bilden, ohne jedoch auf das axonometrische Fundamentalproblem selbst einzugehen. Bekanntlich befasst sich letzteres mit der Ermittelung des geometrischen Zusammenhanges, in dem die „Verkürzungen" der orthogonalen Projectionen dreier zu einander normal liegenden Coordinatenaxen im Raume mit jenen drei Winkeln stehen, die von den Projectionen der Axen eingeschlossen werden. Die „Verkürzung" einer Axe (oder einer hiezu parallelen Geraden) ist die Verhältnisszahl zwischen der Länge der Projection einer in der Axe liegenden

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

(oder hiezu parallelen) Strecke und der Länge der projicirten Strecke selbst, gleich dem Cosinus des Neigungswinkels, den die betreffende Axe mit der Projectionsebene einschliesst.

Das axonometrische Fundamentalproblem gibt somit Aufschluss über den geometrischen Zusammenhang von sechs Winkeln. Drei hievon sind Neigungswinkel dreier zu einander normal liegenden Geraden (Axen) mit einer Ebene (Projectionsebene), und drei sind die von den Projectionen dieser Geraden eingeschlossenen Winkel.

Von diesen sechs Winkeln lässt sich jeder als Function zweier anderen nicht nur durch Rechnung, sondern, wie gezeigt werden soll, durch eine sehr einfache Zeichnung bestimmen. Die Analogie zwischen den sechs Winkeln des axonometrischen Fundamentalproblems und den sechs Bestimmungsstücken eines ebenen Dreieckes tritt unverkennbar zu Tage. Es wird in der Folge klar werden, wie jeder Relation zwischen den sechs Stücken eines ebenen Dreieckes eine Relation zwischen den sechs Winkeln des axonometrischen Fundamentalproblems entspricht. Daraus folgt nebenbei eine einfache Methode, trigonometrische Formeln auf das axonometrische Fundamentalproblem zu übertragen.

An die Stelle einer Verkürzung tritt oft das Verhältniss der Verkürzungen zweier der Axen als selbstständiges Bestimmungsstück auf.

Hiemit ist der zu behandelnde Stoff und der Entwickelungsgang dieses Aufsatzes gegeben.

Es wird vor Allem nothwendig sein, das Wesen und die räumliche Bedeutung des Verkürzungskreises zu erläutern. Die Radien der Verkürzungskreise dreier normal zu einander liegenden Coordinatenaxen geben die Seiten des Verkürzungsdreieckes, aus dessen analytischer oder synthetischer Behandlung sich die Lösung sämmtlicher Specialfälle des axonometrischen Problems ergibt.

Schon Pohlke benützt ein solches Verkürzungsdreieck zur Zeichnung der Projectionen der Coordinatenaxen in dem besonderen Falle, wenn die Verhältnisse der Verkürzungen der Axen gegeben sind. Daselbst ist das Verkürzungsdreieck nur ein graphischer Behelf, hervorgegangen aus der Zeichnung eines

trigonometrischen Ausdruckes, nicht aber ein selbstständiges geometrisches Gebilde.

Von dem geometrischen Wesen des Verkürzungsdreieckes, von seinem Zusammenhange mit den Grössen des Fundamentalproblems, sowie von der grundlegenden Bedeutung desselben für die Lösung des axonometrischen Fundamentalproblems soll im Folgenden die Rede sein.

II.

Bezeichnet man mit $\overline{O'X'}$, $\overline{O'Y'}$, $\overline{O'Z'}$ die orthogonalen Projectionen dreier zu einander normal liegenden Coordinatenaxen, des Axenkreuzes $\overline{OX}$, $\overline{OY}$, $\overline{OZ}$ im Raume, mit $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ die Spuren der Coordinatenebenen XOY, YOZ, ZOX, so fallen (Fig. 1) die Projectionen der Axen mit den drei Höhen, die Projection des Ursprungs O des Coordinatensystems mit dem Höhenschnittpunkt des Spurendreiecks ABC zusammen. Die Seitenlängen des letzteren haben die Werthe: $\overline{AB} = 2c$, $\overline{BC} = 2a$, $\overline{CA} = 2b$.

Zwischen den drei Winkeln $X'O'Y' = z$, $Y'O'Z' = x$, $Z'O'H' = y$ besteht die Relation $x + y + z = 2\pi$.

Sind α, β, γ die Winkel, welche die Axen OX, OY, OZ mit der Projectionsebene einschliessen, v_x, v_y, v_z die Verkürzungen der Axen, so bestehen die Identitäten:

$$v_x = \cos\alpha$$
$$v_y = \cos\beta$$
$$v_z = \cos\gamma$$

Wenn man um eine der Seiten des Spurendreiecks ABC, beispielsweise um $\overline{AB} = 2c$ als Durchmesser einen Halbkreis beschreibt (Fig. 2), denselben um $\overline{AB}$ dreht und nach der Drehung in einer beliebigen Lage gegen die Projectionsebene festhält, so werden die durch einen der Endpunkte des Durchmessers, z. B. durch A gehenden Sehnen des Halbkreises in Folge ihrer verschiedenen Neigung gegen die Projectionsebene verschiedene Verkürzungen v erfahren.

Dieses gilt für alle Lagen des Halbkreises. Eine und dieselbe Sehne erfährt bei zwei verschiedenen Lagen des Halbkreises im Allgemeinen verschiedene Verkürzungen. Zwei verschiedene durch

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

A gehenden Sehnen können aber in zwei verschiedenen Lagen des Halbkreises dieselbe Verkürzung erfahren. Sie haben dann, jede in der entsprechenden Lage, dieselbe Neigung gegenüber der Projectionsebene. — Innerhalb gewisser Grenzen, deren Feststellung später erfolgt, kann man für jede Lage der Halbkreisebene eine durch A gehende Halbkreissehne ausfindig machen, der bei der orthogonalen Projection auf die fest gedachte Projectionsebene dieselbe Verkürzung $v = \frac{m}{n} < 1$ entspricht. — Es lässt sich nun der Satz beweisen:

„Wird jede durch A gehende Sehne in jener Lage der Halbkreisebene, in welcher der Sehne bei der orthogonalen Projection auf die Projectionsebene eine bestimmte Verkürzung zukommt, projicirt, so liegen die Projectionen der Endpunkte sämmtlicher Sehnen auf der Peripherie eines Kreises, der durch A hindurchgeht und dessen Mittelpunkt auf $\overline{AB}$ liegt."

Dieser Kreis heisst der der Verkürzung $v = \frac{m}{n} < 1$ entsprechende, auf die Spurendreiecksseite $\overline{AB} = 2c$ bezogene Verkürzungskreis.

Der Beweis der vorgetragenen Behauptung lässt sich folgendermassen elementar führen:

Verzeichne man (Fig. 2) aus A als Mittelpunkt zwei concentrische Kreise mit den Radien $\overline{AD'} = m$ und $\overline{AE} = n$, m kleiner als n vorausgesetzt. Jeder Halbmesser $\overline{AG'}$ des ersten Kreises kann als Projection einer durch A einerseits begrenzten Strecke AG angesehen werden, welche beim Projiciren auf die fixe Projectionsebene die Verkürzung $v = \frac{m}{n}$ erfährt, welche somit mit dem Radius n gleiche Länge hat. Beim Umklappen dieser Strecke um AB in die Projectionsebene gelangt G in die Peripherie des mit dem Radius n beschriebenen Kreises, so das $\overline{GG'}$ senkrecht zu $\overline{AB}$ steht.

Die Strecke AG oder ihre Verlängerung schneidet den mitumgeklappten Halbkreis in einem Punkte I. Um nun die Projection I' von I für jene Lage der Halbkreisebene zu erhalten, für welche die Projection der Halbkreissehne $\overline{AI}$ die Verkürzung $v = \frac{m}{n}$ erfährt, suche man den Schnitt des durch I zu $\overline{AB}$ gezogenen Perpendikels mit $\overline{AG'}$ oder dessen Verlängerung.

Beschreibt $\overline{G'}$ die Peripherie des mit dem Radius m beschriebenen Kreises, so beschreibt I' die Peripherie eines zweiten, durch A gehenden Kreises, dessen Mittelpunkt auf AB liegt.

Denn:

$$\left.\begin{aligned} \overline{AI}^2 &= \overline{AF}.\overline{AB} = \overline{AF}.2c \\ \frac{AI}{AI'} &= \frac{AG}{AG'} = \frac{n}{m} = \frac{1}{v} \end{aligned}\right\} \overline{AI'}^2 = \overline{AF}.v^2.2c \ldots . \qquad 1)$$

Die Gleichung 1) sagt aus, dass I' auf der Peripherie eines Kreises liegt, der durch A hindurchgeht, dessen Mittelpunkt auf $\overline{AB}$ liegt, dessen Durchmesser $v^2.2c$, dessen Radius $r = v^2c \ldots . 2)$ ist. Dieser Kreis ist der Verkürzungskreis für die durch A gehenden Halbkreissehnen, entsprechend einer Verkürzung v, bezogen auf die Seite $\overline{AB} = 2c$ des Spurendreiecks ABC. Der Durchmesser eines Verkürzungskreises ist somit gleich dem Producte aus dem Quadrate der Verkürzung in die Länge der Spurendreiecksseite, auf welche er bezogen erscheint, und auf welcher sein Mittelpunkt liegt.

Die Verzeichnung des Verkürzungskreises ist nun folgende: In dem Punkte D' (Fig. 2), in dem der mit dem Radius m aus A als Mittelpunkt beschriebene Hilfskreis $\overline{AB}$ schneidet, errichte man ein Perpendikel zu AB bis zum Schnitte D desselben mit der Peripherie des mit dem Radius n beschriebenen Hilfskreises. Wird der Punkt L, in dem der über $\overline{AB}$ als Durchmesser beschriebene Halbkreis von AD geschnitten wird, auf $\overline{AB}$ nach L' projicirt, so ist $AL' = v^2.2c$ der Durchmesser des Verkürzungskreises. Es ist nämlich:

$$\left.\begin{aligned} \overline{AL}^2 &= \overline{AL'}.\overline{AB} = \overline{AL'}.2c \\ \frac{\overline{AL}}{\overline{AL'}} &= \frac{\overline{AD}}{\overline{AD'}} = \frac{n}{m} = \frac{1}{v} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} \overline{AL'}^2 &= \overline{AL'}.v^2.2c \\ AL' &= v^2.2c \ldots \end{aligned} \qquad 3)$$

$AL' = 2r$, v. z. b. w.

Ist die Verkürzung $v = \frac{m}{n} = \cos\alpha$, so ist der Winkel $LAL' = \alpha$, $AL' = 2r$ somit die Projection der gegen AB unter dem Winkel α geneigten Sehne AL des Halbkreises auf AB.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

III.

Die räumliche Bedeutung des Verkürzungskreises kann auch folgendermassen erklärt werden. Sämmtliche durch A gehende Sehnen bilden in der Lage, in welcher jeder von ihnen die Verkürzung v entspricht, die Mantelfläche eines Rotationskegels, dessen durch A gehende Axe zur Projectionsebene normal steht und dessen Erzeugende mit der Projectionsebene den Winkel $\varphi = Arc \cos v$ einschliessen. Der Halbkreis beschreibt bei seiner Drehung um AB eine Kugelfläche.

Der Verkürzungskreis ist die orthogonale Projection jener Curve vierten Grades, in der sich die angezogene Kegel- und Kugelfläche schneiden.

IV.

Es ist nun ein Leichtes, die Projectionen zweier zu einander normal liegenden Coordinatenaxen $\overline{OX}$ und $\overline{OY}$ zu verzeichnen, wenn v_x und v_y, ihre Verkürzungen, gegeben sind. Die Axen $\overline{OX}$ und $\overline{OY}$ durchstossen in A und B die Projectionsebene.

Es ist dann $\overline{AB} = 2c$ die Spur der durch $\overline{OX}$ und $\overline{OY}$ gelegten und begrenzten Ebene. Beschreibe man über $\overline{AB}$ (Fig. 3) einen Halbkreis, und (wie in II erörtert wurde) zwei Verkürzungskreise, beide bezogen auf $\overline{AB}$ als Spurendreiecksseite.

Der eine, durch A hindurchgehende, entspricht der Verkürzung v_x für die durch A gezogenen Halbkreissehnen. Sein Mittelpunkt ist G, sein Radius $\overline{GA} = v_x^2 c = r'''_x$. — Der andere, durch B hindurchgehende, entspricht der Verkürzung v_y für die durch B gezogenen Halbkreissehnen. Sein Mittelpunkt ist H, sein Radius $\overline{HB} = v_y^2 c = r'''_y$. — Jeder der beiden Schnittpunkte der zwei Verkürzungskreise entspricht dem Punkte O' als gesuchte Projection des Punktes O, in dem sich $\overline{OX}$ und $\overline{OY}$ unter den gegebenen Prämissen schneiden. $\overline{O'A}$ fällt mit $\overline{O'X'}$, $\overline{O'B}$ mit $\overline{O'Y'}$ zusammen, — $\overline{O'Z'}$ steht zu $\overline{AB}$ senkrecht. —

Die beiden Schnittpunkte der Verkürzungskreise liegen symmetrisch zu $\overline{AB}$, die beiden Lagen der Ebene XOY sind symmetrisch zu der durch $\overline{AB}$ gelegten projicirenden Ebene.

Man kann beide symmetrische Lösungen als identisch annehmen und es soll in der Folge von je zwei solchen sym-

metrischen Lösungen, so wie von einer einzigen gesprochen werden.

Man bemerkt, dass die reelle Lösung der Aufgabe an die Bedingung geknüpft ist:

$$2r'''_x + 2r'''_y > 2c,\ r'''_x + r'''_y > c \ldots \quad 4)$$

Aus 2) folgt, da v_x und v_y als Cosinuse kleiner als die Einheit sind,

$$\begin{matrix} r''' < c \\ r'''_y < c \end{matrix} \quad 5)$$

V.

Der geometrische Zusammenhang zwischen den Verkürzungen v_x, v_y, v_z, den drei zu einander normal liegende Coordinatenaxen bei der orthogonalen Projection erfahren, soll auf Grundlage einer elementaren Betrachtung ermittelt werden.

Es sei (Fig. 3) *ABC* das Spurendreieck und es gelten die eingangs II angeführten Bezeichnungen. Zugleich sei in Erinnerung gebracht, dass laut 2) der Radius eines jeden Verkürzungskreises nicht nur von der Grösse der Verkürzung, sondern auch von der Länge der Seite des Spurendreiecks abhängt, auf welcher sein Mittelpunkt liegt, auf welche der Verkürzungskreis bezogen wird. Für dieselbe Verkürzung kann man somit über den Seiten des Spurendreiecks auf die in II gezeigte Art Verkürzungskreise verzeichnen, deren Radien zu einander im Verhältnisse der Spurendreiecksseiten stehen.

Werden (Fig. 3) jene Strecken, die von den Eckpunkten des Spurendreiecks einerseits, vom Höhenschnittpunkt *O'* desselben andererseits begrenzt werden, in *D, E, F* halbirt, in den Halbirungspunkten zu den Strecken, auf welchen die Halbirungspunkte liegen, Perpendikel $\overline{PT}$, *TN*, *NP* errichtet, so wird der Umfang des Dreieckes *ABC* von dem Umfange des Dreieckes *NPT*, das die Perpendikel einschliessen, in den Punkten *G, H, I, K, L, M* geschnitten.

Aus IV folgt, dass *G* der Mittelpunkt des der Verkürzung v_x entsprechenden, auf $\overline{AB} = 2c$ bezogenen Verkürzungskreises, $\overline{GA} = r'''_x = v_x^2 c$, sein Radius ist. Ebenso ist *H* der Mittelpunkt, $\overline{HB} = r''_y = v_y^2 c$ der Radius des der Verkürzung v_y entsprechenden,

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

auf $\overline{AB} = 2c$ bezogenen Verkürzungskreises. Analog schliessen wir, dass I, K, L, M die Mittelpunkte,

$$\begin{aligned}\overline{IB} &= r_y' = v_y^2 a,\\ \overline{KC} &= r_z' = v_z^2 a,\\ \overline{LC} &= r_z'' = v_z^2 b,\\ \overline{MA} &= r_x'' = v_x^2 b\end{aligned}$$

die Radien von Verkürzungskreisen sind, die den Verkürzungen v_y, v_z, v_z, v_x entsprechen, von denen die beiden letzteren auf die Spurendreiecksseite $\overline{CA} = 2b$, die beiden ersten auf die Spurendreiecksseite $\overline{BC} = 2a$ bezogen sind.

Die sechs Verkürzungskreise mit den Mittelpunkten G, H, I, K, L, M und den Radien r_x''', r_y''', r_y', r_z', r_z'', r_x'' schneiden sich in O'.

Der eingeführten Bezeichnung gemäss, wären $r_z''' = v_z^2 c$, $r_x' = v_x^2 a$, $r_y'' = v_y^2 b$ Radien dreier Verkürzungskreise, die den Verkürzungen v_z, v_x, v_y entsprechen würden, und der Reihe nach auf $\overline{AB} = 2c$, $\overline{BC} = 2a$, $\overline{CA} = 2b$ bezogen erschienen.

Es soll nun gezeigt werden, dass in der von uns construirten Figur (Fig. 3) die Radien r_z''', r_x', r_y'' durch die Strecken $\overline{GH}$, $\overline{IK}$, $\overline{LM}$ bereits bestimmt sind.

Das Dreieck DEF ist ähnlich dem Dreiecke ABC und dem Dreiecke NPT. Je eine Seite des ersteren Dreieckes ist gleich der Hälfte der analogen Seiten der beiden letzten Dreiecke. Somit sind die Dreiecke ABC und NPT congruent, die analogen Seiten sind gleich und parallel:

$$\begin{aligned}\overline{AB} &\parallel \overline{NP}\\ \overline{BC} &\parallel \overline{PT}\\ \overline{CA} &\parallel \overline{TN}.\end{aligned}$$

Da somit

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= \overline{NP},\\ \overline{GB} &= \overline{KP}\end{aligned}$$

(als Gegenseiten des Parallelogrammes $GBKP$) ist, so folgt

$$\overline{AB} - \overline{GB} = \overline{NP} - \overline{KP},$$

d. h.

$$\begin{aligned}\overline{AG} &= \overline{NK}\\ \overline{AH} &= \overline{NL}\end{aligned}$$

(als Gegenseiten des Parallelogrammes $AHNL$).

Wir schliessen weiter:

$$\overline{AH} - \overline{AG} = \overline{NL} - \overline{NK},$$

d. h.

$$\left.\begin{aligned} \overline{GH} &= \overline{KL} \\ \overline{IK} &= \overline{MG} \\ \overline{LM} &= \overline{HI} \end{aligned}\right\} \quad 6)$$

Ebenso beweist man

Weiter folgt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke LKC und ABC die Proportion

$$\begin{aligned} \overline{KL} : \overline{CK} &= \overline{AB} : \overline{CB} \\ &= 2c : 2a \\ &= c : a. \end{aligned}$$

$\overline{KL} = \frac{c}{a} . \overline{CK}$; führt man für $\overline{CK}$ die angenommene Bezeichnung ein, so folgt

$$\overline{KL} = \frac{c}{a} r'_z = \frac{c}{a} v_z^2 a = v_z^2 c = r'''$$

Somit ist auch laut 6)

$$\left.\begin{aligned} \overline{GH} &= r'''_z \\ \overline{IK} &= r'_x \\ \overline{LM} &= r''_y \end{aligned}\right\} \cdots \quad 7)$$

Analog beweist man

Der Umfang des Dreieckes NPT theilt jede Seite des Spurendreiecks in drei Theile, deren jeder den Radius eines (v_x, v_y oder v_z als Verkürzung entsprechenden) Verkürzungskreises repräsentirt, bezogen auf jene Seite des Spurendreiecks, auf welcher er liegt.

Verbindet man O' mit den Punkten G, H, I, K, L, M, so entstehen die Dreiecke GHO', IKO', LMO'. Jedes dieser Dreiecke hat die drei Radien der den Verkürzungen v_x, v_y, v_z entsprechenden, auf dieselbe Seite des Spurendreiecks bezogenen Verkürzungskreise zu Seiten. Es ist

im Dreiecke GHO':	im Dreiecke IKO':
$\overline{GO'} = \overline{GA} = r''' = v_x^2 c$	$\overline{IO'} = \overline{IB} = r'_y = v_y^2 a$
$\overline{HO'} = \overline{HB} = r''' = v_y^2 c$	$\overline{KO'} = \overline{KC} = r'_z = v_z^2 a$
$\overline{GH} = r'''_z = v_z^2 c$	$\overline{IK} = r'_x = v_x^2 a$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

im Dreiecke LMO':

$$\overline{LO'} = \overline{LC} = r''_z = v_z^2 b$$
$$\overline{MO'} = \overline{MA} = r''_x = v_x^2 b$$
$$\overline{LM} = r''_y = v_y^2 b.$$

Wir schliessen hieraus:

1. Die Dreiecke GHO', IKO', LMO' sind ähnlich.

2. Die drei Seiten eines jeden einzelnen Dreieckes verhalten sich wie die Quadrate der Verkürzungen der Coordinatenaxen.

3. Die homologen Seiten und die Umfänge dieser Dreiecke stehen zu einander in demselben Verhältnisse, wie die Seiten des Spurendreiecks.

4. Der Umfang eines jeden dieser Dreiecke ist gleich einer Seite des Spurendreiecks.

VI.

Ein Dreieck, dessen Seiten zu einander in dem Verhältnisse der Quadrate der Verkürzungen dreier Coordinatenaxen stehen, heisst ein orthogonal-axonometrisches Verkürzungsdreieck.

Die Dreiecke GHO', IKO', LMO' sind Verkürzungsdreiecke, der Umfang eines jeden derselben ist gleich der Länge einer Seite des Spurendreieckes (Fig. 3).

Durch das Spurendreieck ABC ist jedes der drei genannten Verkürzungsdreiecke bestimmt; ebenso lässt sich zu einem gegebenen Verkürzungsdreiecke, z. B. GHO' das Spurendreieck zeichnen. Verlängert man die Seite $\overline{GH}$ über G und H hinaus, macht die Verlängerungen $\overline{GA}$ und $\overline{HB}$ gleich den anliegenden Seiten $\overline{GO'}$ und $\overline{HO'}$, verbindet A und B mit O', so gibt $\overline{O'A}$ die Projection $\overline{O'X'}$ der X-Axe, $\overline{O'B}$ die Projection $\overline{O'Y'}$ der Y-Axe und das durch O' zu $\overline{AB}$ gefällte Perpendikel $\overline{O'Z'}$ die Projection der Z-Axe an. AB kann immer als eine Seite des Spurendreiecks angesehen werden. Fällt man schliesslich von A ein Perpendikel $\overline{AC}$ zu $\overline{O'B}$ und von B ein Perpendikel $\overline{BC}$ zu $\overline{O'A}$, so ist das Spurendreieck ABC verzeichnet.

In dem ersten Theile der vorgetragenen Construction ist bereits die erste graphische Lösung der Aufgabe enthalten, aus v_x, v_y, v_z die Winkel x, y, z zu bestimmen.

Zwei andere Lösungen sollen noch später abgeleitet werden. Vorher erscheint es nothwendig, den Zusammenhang zwischen den drei Verkürzungen v_x, v_y, v_z festzustellen und die Grenzen zu fixiren, innerhalb derer man sich bei der Annahme zweier der Verkürzungvn v_x, v_y, v_z und zweier der Winkel x, y, z behufs einer reellen Lösung bewegen darf.

Die Betrachtung des Verkürzungsdreiecks GHO' und des Spurendreiecks ABC (Fig. 3) gibt uns über das Nothwendige vollkommenen Aufschluss.

Es ist daselbst

$$\overline{O'G} + \overline{O'H} + \overline{GH} = \overline{AB},$$

oder

$$r'''_x + r'''_y + r'''_z = 2c,$$

für die Radien die Werthe eingesetzt,

$$v_x^2 c + v_y^2 c + v_z^2 c = 2c,$$

oder

$$\left.\begin{aligned} v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 &= 2 \\ \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma &= 2 \end{aligned}\right\} \ldots . \qquad 8)$$

Die Gleichung 8) spricht eine bekannte Relation der Raum-Geometrie aus. Sie sagt aus, dass durch die Angabe der Verkürzungen zweier der Coordinatenaxen die Verkürzung der dritten bestimmt ist.

Es folgen weiter die Ungleichungen

$$\left.\begin{aligned} v_x^2 + v_y^2 \\ v_x^2 + v_z^2 \\ v_y^2 + v_z^2 \end{aligned}\right\} < 2 \ldots \qquad 9)$$

Da in dem Verkürzungsdreiecke GHO' die Summe zweier der drei Seiten grösser sein muss, als die dritte Seite, so folgt:

$$\overline{O'G} + \overline{O'H} > \overline{GH},$$

oder

$$v_x^2 c + v_y^2 c > v^2 c$$
$$v_x^2 + v_y^2 > v^2.$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Da jede der Grössen v_x^2, v_y^2, v_z^2 (als Quadrat eines Cosinus) kleiner als die Einheit ist, so folgt aus 8)

$$\left.\begin{aligned} v_x^2 + v_y^2 \\ v_x^2 + v_z^2 \\ v_y^2 + v_z^2 \end{aligned}\right\} > 1 \ldots \qquad 10)$$

Aus 9) und 10) folgt der Satz:

„Die Summe der Quadrate zweier der drei Verkürzungen, welche drei zu einander normal liegende Coordinatenaxen im Raume bei ihrer orthogonalen Projection auf eine Ebene erfahren, schwankt zwischen 1 und 2."

Bezüglich der Annahme der Winkel x, y, z, welche die Projectionen der Coordinatenaxen unter einander einschliessen, gilt ebenfalls eine Einschränkung, die sich aus der Figur 3 ergibt.

Von den vier Winkeln, die zwei der Projectionen der Axen unter einander einschliessen, sind zwei spitz, zwei stumpf. Bezeichnen x und y die spitzen Winkel, welche $O'Z'$ mit $O'Y'$ und $O'X'$ einschliesst, so lässt sich beweisen, dass die Summe der beiden spitzen Winkel grösser sein muss, als π. Denn:

$$\begin{aligned} \sphericalangle x + \sphericalangle y &= \sphericalangle BO'H + \sphericalangle HO'G + \sphericalangle GO'A = \\ &= \frac{1}{2}\sphericalangle GHO' + \sphericalangle HO'G + \frac{1}{2}\sphericalangle HGO' = \\ &= \frac{1}{2}\sphericalangle GHO' + \sphericalangle HO'G + \sphericalangle HGO' + \frac{1}{2}\sphericalangle HO'G = \\ &= \frac{1}{2}2\pi + \frac{1}{2}\sphericalangle HO'G > \pi, \text{ w.z.b.w.} \ldots \end{aligned} \qquad 11)$$

Nachdem die Bedeutung und Construction des Verkürzungskreises und des Verkürzungsdreiecks genügend erörtert erscheint, sollen diese beiden Gebilde die Basis bilden, auf welcher wir zu einer graphischen Lösung sämmtlicher Specialfälle des axonometrischen Fundamentalproblems gelangen werden. Die aus der Construction sich ergebenden trigonometrischen Beziehungen erhalten wir hier nebenbei auf dem elementarsten Wege.

VII.

Erster Fall. Gegeben $v_x = \cos\alpha$ und $v_y = \cos\beta$. (Fig. 4.)

Über einer beliebigen Strecke $AB = 2c$ beschreibe man einen Halbkreis, verzeichne eine durch A gehende unter dem Winkel α gegen AB geneigte Sehne $\overline{AM_+}$ und eine durch B gehende Sehne $\overline{BN_+}$, welche mit $\overline{AB}$ den Winkel β einschliesst.

Fällt man durch M_+ und N_+, die Endpunkte beider Sehnen, die Perpendikel $\overline{N_+N}$ und $\overline{M_+M}$ zu $\overline{AB}$, deren Fusspunkte M und N sind, so ist

$$\overline{AM} = 2\,\overline{AG} = 2r'''_x = v_x^2 2c$$

und

$$\overline{BN} = 2\,\overline{BH} = 2r'''_y = v_y^2 2c.$$

Beschreibt man aus G als Mittelpunkt mit $\overline{AG} = r'''_x$ einen und aus H als Mittelpunkt mit $\overline{BH} = r'''_y$ einen zweiten Verkürzungskreis, so ist O', der Schnittpunkt der Peripherien beider, die orthogonale Projection von O.

$\overline{O'X'}$ geht durch A, $\overline{O'Y'}$ durch B hindurch, $\overline{O'Z'}$ steht zu $\overline{AB}$ senkrecht. Hiedurch sind die Winkel x, y, z bestimmt.

In V wurde bewiesen, dass $\overline{GH} = r'''_z = v_z^2 c$ sei. Macht man $\overline{AP} = 2\overline{GH}$, somit $\overline{AP} = 2r'''_z = v_z^2 2c$, errichtet in P zu $\overline{AB}$ das Perpendikel $\overline{PP_+}$, welches in P_+ den Halbkreis schneidet, so ist der Winkel $BAP_+ = \sphericalangle\gamma$ und $\dfrac{\overline{AP_+}}{\overline{AB}} = \cos\gamma = v_z$. Es geht dies aus der Gleichung $\overline{AP_+}^2 = \overline{AP}.\overline{AB}$ hervor.

Zwei andere Lösungen desselben Falles ergeben sich durch folgende Schlüsse. In Fig. 4 und 4 *a* sind G, H und O' die Eckpunkte eines Verkürzungsdreiecks. Es ist $\overline{GO'} = r'''_x = v_x^2 c$, $\overline{HO'} = r'''_y = v_y^2 c$ und $\overline{GH} = r'''_z = v_z^2 c$. Werden in diesem Verkürzungsdreiecke zwei der inneren Winkel, z. B. die Winkel G und H, halbirt, so sind diese Winkelhalbirenden $GO''HO''$ parallel zu $\overline{O'A}$ und $\overline{O'B}$, sie bilden mit einander die Schenkel des Winkels z.

Errichtet man im Schnittpunkte O'' der Winkelhalbirenden des Verkürzungsdreiecks $GO'H$ (Fig. 4 und Fig. 4 *a*) ein Perpendikel zu jener Dreiecksseite $\overline{GH}$, auf der jene Winkel G und H

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

liegen, die halbirt wurden, so können die beiden Winkelhalbirenden (Fig. 4 *a*) $\overline{O''X''}$, $\overline{O''Y''}$ und das zu $\overline{GH}$ gefällte Perpendikel $\overline{O''Z''}$ als die Projectionen der Coordinatenaxen $\overline{OX}$, $\overline{OY}$, $\overline{OZ}$ betrachtet werden.

Eine dritte, für die Ableitung von Formeln besonders wichtige Lösung ergibt sich aus folgenden Folgerungen. Es ist O'' (Fig. 4 *a*) der Schnittpunkt der drei Winkelhalbirenden des Verkürzungsdreiecks GHO! Die stumpfen Winkel, die zwei hievon bilden, sind

$$\sphericalangle GO''H = \frac{\pi + O'}{2}$$

$$\sphericalangle HO''O' = \frac{\pi + G}{2}$$

$$\sphericalangle O'O''G = \frac{\pi + H}{2}$$

Da ferner der Winkel, den $O''Z''$ mit der Verlängerung von HO'' einschliesst, ebenfalls $= \frac{\pi + H}{2}$ sein muss, sowie der Winkel, den $O''Z''$ mit der Verlängerung von GO'' bildet, gleich $\frac{\pi + G}{2}$, so finden in Fig. 4 *a* die Gleichungen statt:

$$\sphericalangle X'''O''Y''' = \sphericalangle X''O''Y'' = \sphericalangle z$$

$$\sphericalangle Y'''O''Z''' = \sphericalangle O'O''G = \frac{\pi + H}{2} = \sphericalangle Z''O''X''' = \sphericalangle x$$

$$\sphericalangle Z'''O''X''' = \sphericalangle HO''O' = \frac{\pi + G}{2} = \sphericalangle Z''O''Y''' = \sphericalangle y.$$

Die Winkelhalbirenden $O''X'''$, $O''Y'''$, $O''Z'''$ des Verkürzungsdreiecks schliessen somit die Winkel x, y, z ein, können desshalb als die gesuchten orthogonalen Projectionen der Coordinatenaxen angesehen werden.

In Fig. 4 *b* ist ein Verkürzungsdreieck $V_1\ V_2\ V_3$ dargestellt. Sein halber Umfang werde als Einheit angenommen und es sind die Projectionen der Coordinatenaxen durch die inneren Winkelhalbirenden bestimmt.

Die Seiten des Verkürzungsdreiecks haben die Quadrate der Verkürzungen der Coordinatenaxen zu Masszahlen und die

stumpfen, von den Projectionen der Coordinatenaxen eingeschlossenen Winkel sind durch die Winkel des Dreieckes $V_1\ V_2\ V_3$ ausgedrückt.

Es gelten die Gleichungen:

$$\overline{V_2V_3} = c_x^2, \qquad \sphericalangle x = \sphericalangle Y'''O'''Z''' = \frac{\pi + V_1}{2}$$

$$V_3V_1 = v_y^2, \qquad \sphericalangle y = \sphericalangle Z'''O'''X''' = \frac{\pi + V_2}{2}$$

$$V_1V_2 = v_z^2, \qquad \sphericalangle z = \sphericalangle X'''O'''Y''' = \frac{\pi + V_3}{2}$$

Es ist vorerst $v_z^2 = \overline{V_1V_2} = 2 - v_x^2 - v_y^2$.

Ferner folgt aus dem trigonometrischen Zusammenhange, in dem Seiten und Winkel des Dreieckes $V_1\ V_2\ V_3$ stehen:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} x &= -\operatorname{cotg}\frac{V_1}{2} = -\sqrt{\frac{(v_x^2+v_y^2+v_z^2)\,(v_y^2+v_z^2-v_x^2)}{(v_x^2+v_z^2-v_y^2)\,(v_x^2+v_y^2-v_z^2)}} \\ \operatorname{tg} y &= -\operatorname{cotg}\frac{V_2}{2} = -\sqrt{\frac{(v_x^2+v_y^2+v_z^2)\,(v_x^2+v_z^2-v_y^2)}{(v_x^2+v_y^2-v_z^2)\,(v_y^2+v_z^2-v_x^2)}} \\ \operatorname{tg} z &= -\operatorname{cotg}\frac{V_3}{2} = -\sqrt{\frac{(v_x^2+v_y^2+v_z^2)\,(v_y^2+v_x^2-v_z^2)}{(v_y^2+v_z^2-v_x^2)\,(v_x^2+v_z^2-v_y^2)}} \end{aligned}\right\} \ldots 12)$$

„Aus dem Dreiecke $V_1\ V_2\ V_3$ geht hervor, dass jede Formel der ebenen Trigonometrie in eine entsprechende Formel des axonometrischen Fundamentalproblems übergeht, wenn man in ersterer für die Seitenlängen v_x^2, v_y^2, v_z^2 und für die Winkel V_1, V_2, V_3 daselbst die Werthe $2x-\pi$, $2y-\pi$, $2z-\pi$ substituirt."

VIII.

Zweiter Fall. Gegeben $\sphericalangle x = Y'O'Z'$ und $\sphericalangle y = \sphericalangle Z'O'X'$. Hiemit sind die Projectionen der Coordinatenaxen gegeben, und da $\sphericalangle z = X'O'Z' = 2\pi - x - y$ bekannt ist, beschränkt sich unsere Aufgabe auf die Aufsuchung der Verkürzungen v_x, v_y, v_z.

Wird (Fig. 5) $O'X'$, $O'Y'$, $O'Z'$ verzeichnet, eine zu einer der Axenprojectionen, z. B. $O'Z'$ normal liegende, von $O'X'$ und $O'Y'$ begrenzte Strecke $\overline{AB}$ gezogen, so kann diese als eine Seite $\overline{AB} = 2c$ des besprochenen Spurendreiecks angesehen werden.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Würde $\overline{AO'}$ und $\overline{BO'}$ halbirt, und würden in diesen Halbirungspunkten Perpendikel zu $\overline{AO'}$ und $\overline{BO'}$ bis zum Schnitt mit $\overline{AB}$ errichtet, so theileten dieselben $\overline{AB}$ in drei Theile, deren jeder dem auf $2c$ bezogenen Radius des Verkürzungskreises einer der drei Axen gleich ist. — Durch Verbindung der auf $\overline{AB}$ gelegenen Theilpunkte mit O' erhielte man das Verkürzungsdreieck.

Für die unmittelbare Ausfindigmachung der gesuchten Verkürzungen, beziehungsweise der Winkel α, β, γ, welche die Coordinatenaxen im Raume mit der Projectionsebene einschliessen, ziehen wir die in Fig. 5 gegebene graphische Lösung vor.

Errichten wir (Fig. 5) in O' das Perpendikel $\overline{O'A_1}$ zu $\overline{O'A}$ und das Perpendikel $\overline{O'B_1}$ zu $\overline{O'B}$. Sind A_1 und B_1 die Schnitte dieser Perpendikel mit $\overline{AB}$, so ist $\overline{AA_1} = v_x^2 2c$, $\overline{BB_1} = v_y^2 2c$. Es muss nun nach 8.) $v_z^2 2c = 2\overline{AB} - \overline{AA_1} - \overline{BB_1} = \overline{AB_1} + \overline{A_1B} = \overline{AB_1} + \overline{B_1C_1} = \overline{AC_1}$ sein, wenn $\overline{B_1C_1}$ gleich $\overline{A_1B}$ verzeichnet wurde. Fällt man durch A_1, B_1, C_1 Perpendikel zu $\overline{AB}$, welche in A_+, B_+, C_+ den über $\overline{AB}$ als Durchmesser beschriebenen Halbkreis schneiden, verbindet A_+, C_+ mit A, B_+ mit B, so ist $\overline{AA_+} = v_x . 2c$, $\overline{BB_+} = v_y 2c$ und $\overline{AC_+} = v_z 2c$.

Es ist somit

$$v_x = \cos\alpha = \frac{v_x . 2c}{2c} = \frac{\overline{AA_+}}{\overline{AB}}, \text{ d. h. } \sphericalangle\alpha = \sphericalangle BAA_+,$$

$$v_y = \cos\beta = \frac{v_y . 2c}{2c} = \frac{\overline{BB_+}}{\overline{AB}}, \text{ d. h. } \sphericalangle\beta = \sphericalangle ABB_+ \text{ und}$$

$$v_z = \cos\gamma = \frac{v_z . 2c}{2c} = \frac{\overline{AC_+}}{\overline{AB}}, \text{ d. h. } \sphericalangle\gamma = \sphericalangle BAC_+$$

Hiemit ist die Aufgabe gelöst.

Bei dieser Gelegenheit sei auf eine aus dem Vorigen fliessende Lösung der oft vorkommenden Aufgabe hingewiesen: „Es sind die Richtungen $O'X'$, $O'Y'$, $O'Z'$ (Fig. 5) der orthogonalen Projection dreier zusammenstossenden Kanten eines Würfels, dessen Kantenlänge k gegeben ist, verzeichnet. Es ist die orthogonale Projection des Würfels darzustellen."

Man fälle durch O' ein Perpendikel $\overline{O'D}$ zu $\overline{O'Z'}$, schneide hierauf die Strecke $\overline{O'D} = k$ ab, errichte über $\overline{O'X'}$ und $\overline{O'D}$ ein Parallelogramm $AO'DB$ so, dass die durch O' gehende Diagonale $\overline{O'B}$ desselben mit $O'Y'$ zusammenfällt, so ist $AB = k$, die in

Fig. 5 eingetragenen Winkel α, β, γ sind dann Neigungswinkel der Würfelkanten mit der Projectionsebene, somit $\overline{AA}_+$, $\overline{BB}_+$, $\overline{AC}_+$ die wahren Längen der Kantenprojectionen. Werden dieselben von O' aus in der Aufeinanderfolge auf $\overline{O'X'}$, $\overline{O'Y'}$, $\overline{O'Z'}$ aufgetragen, so erhält man die Projectionen dreier Eckpunkte des Würfels; — die weitere Zeichnung ist selbstverständlich.

Unter Zugrundelegung der vorgetragenen Construction (Fig. 5) wird es nicht schwer, trigonometrische Ausdrücke zur Berechnung für v_x, v_y, v_z zu ermitteln.

Sei $O'M$, die Entfernung des Punktes O' von AB, gleich der Einheit, so folgt:

$$\overline{O'A} = \sec y$$
$$\overline{O'B} = \sec x$$
$$\overline{AM} = \operatorname{tg} y$$
$$\overline{BM} = \operatorname{tg} x$$
$$\overline{AB} = 2c = \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y$$
$$\overline{AA_1} = \overline{O'A} \operatorname{cosec} y, \text{ oder}$$
$$v_x^2 2c = \sec y \operatorname{cosec} y = 2 \operatorname{cosec} 2y$$

$$\left.\begin{aligned} v_x^2 &= \frac{2 \operatorname{cosec} 2y}{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}, \\ \text{ebenso } v_y^2 &= \frac{2 \operatorname{cosec} 2x}{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}. \\ \text{Analog erhalten wir} & \\ v_y^2 &= \frac{2 \operatorname{cosec} 2y}{\operatorname{tg} y + \operatorname{tgt} z} \\ v_z^2 &= \frac{2 \operatorname{cosec} 2y}{\operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z} \\ v_z^2 &= \frac{2 \operatorname{cosec} 2x}{\operatorname{tgt} z + \operatorname{tgt} x} \\ v_x^2 &+ \frac{2 \operatorname{cosec} 2z}{\operatorname{tgt} z + \operatorname{tg} x} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 13)$$

In einer symmetrischeren Form erhalten wir dieselben Werthe aus der Betrachtung des Dreieckes $V_1 V_2 V_3$ (Fig. 4*b*), wenn wir die am Schlusse von VII. angeführte Bemerkung berücksichtigen. Es gilt die zusammengesetzte Proportion:

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$v_x^2 : v_y^2 : v_z^2 = \sin V_1 \quad \sin V_2 : \sin V_3 = \sin(2x - \pi) : \sin(2y - \pi) : \sin(2z - \pi)$$

$$v_x^2 : v_y^2 : v_z^2 = -\sin 2x : -\sin 2y : -\sin 2z = \sin 2x : \sin 2y : \sin 2z$$

$$\left.\begin{matrix} v_x^2 \\ v_y^2: \\ v_z^2 \end{matrix}\right\} \left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right) = \left.\begin{matrix} \sin 2x \\ = \sin 2y : \\ = \sin 2z \end{matrix}\right\} \left(\sin 2x + \sin 2y + \sin 2z\right)$$

Unter Berücksichtigung der Relation 8) folgt:

$$\left.\begin{aligned} v_x^2 &= \frac{2\sin 2x}{\sin 2x + \sin 2y + \sin 2z} \\ v_y^2 &= \frac{2\sin 2y}{\sin 2x + \sin 2y + \sin 2z} \\ v_z^2 &= \frac{2\sin 2z}{\sin 2x + \sin 2y + \sin 2z} \end{aligned}\right\} \ldots \qquad 14)$$

IX.

Dritter Fall. Gegeben v_x, die Verkürzung einer Axe OX, und ein Winkel y, den die Projection $O'X'$ dieser Axe mit der Projection $O'Z'$ einer zweiten Axe einschliesst. $v_x = \cos\alpha$.

Über einer beliebigen Strecke $\overline{AB} = 2c$ (Fig. 6) als Durchmesser werde ein Halbkreis beschrieben. Zieht man durch A unter dem Winkel α gegen $\overline{AB}$ die Sehne $\overline{AA_+}$, durch deren Endpunkt A_+ das Perpendikel A_+A_1 zu AB, so ist $\overline{AA_1} = 2r_x''' = v_x^2 2c$ der Durchmesser des auf die Spurendreiecksseite $\overline{AB} = 2c$ bezogenen, v_x entsprechenden Verkürzungskreises. Wird dieser Verkürzungskreis mit einer durch A gehenden, gegen $\overline{AB}$ unter dem Winkel $\frac{\pi}{2} - y$ geneigten Geraden in O' geschnitten, so fällt $\overline{O'X'}$ mit $\overline{O'A}$, $\overline{O'Y'}$ mit $\overline{O'B}$ zusammen, $\overline{O'Z'}$ steht zu $\overline{AB}$ senkrecht. — Die graphische Bestimmung von v_y, v_z, β, γ erfolgt wie in Fig. 5.

Wäre statt des Winkels y der Winkel z gegeben, so setze man an die Stelle von $\overline{AB}$ die Spurendreiecksseite $\overline{AC} = 2b$, construire den Verkürzungskreis wie früher, und bringe ihn in O' zum Schnitt mit einer durch A gehenden, (Fig. 6 a) gegen $\overline{AC}$ unter

dem Winkel $\frac{\pi}{2} - z$ geneigten Geraden. Alles andere ist aus Fig. 6 *a* ersichtlich.

Oder (Fig. 6 *b*) construire man auf $\overline{AB}$ den Verkürzungskreis und lege durch die Punkte A und B einen solchen Kreisbogen, dass die über der Sehne $\overline{AB}$ errichteten Peripheriewinkel gleich z sind, so ist O' der Schnittpunkt dieses Kreisbogens mit dem Verkürzungskreise. — Das Weitere ergibt sich aus Fig. 6 *b*.

Sollen aus v_x und $\sphericalangle y$ die übrigen vier Stücke berechnet werden, so kann man aus der ersten Relation unter 13) $\operatorname{tg} x$ berechnen.

$$\text{Aus } v_x^2 = \frac{2\operatorname{cosec} 2y}{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y} \text{ folgt } \operatorname{tg} x = \frac{2\operatorname{cosec} 2y}{v_x^2} - \operatorname{tg} y$$

Wir gelangen zu einer bequemeren und übersichtlicheren Berechnung der fehlenden Stücke, wenn wir in der angezogenen Gleichung für x den Werth $2\pi - (y+z)$ einsetzen. Es wird dann wegen

$$\operatorname{tg} x = -\operatorname{tg}(y+z) = -\frac{\operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z}{1 - \operatorname{tg} y . \operatorname{tg} z}$$

$$v_x^2 = \frac{2\operatorname{cosec} 2y (\operatorname{tg} y . \operatorname{tg} z - 1)}{\operatorname{tg} z} \cos^2 y$$

und nach einer einfachen Substitution

$$v_x^2 = \frac{\operatorname{tg} y . \operatorname{tg} z - 1}{\operatorname{tg} y . \operatorname{tg} z}$$

$$\left.\begin{aligned} v_x^2 &= 1 - \operatorname{cotg} y \operatorname{cotg} z \\ v_y^2 &= 1 - \operatorname{cotg} z \operatorname{cotg} x \\ v_z^2 &= 1 - \operatorname{cotg} x \operatorname{cotg} y \end{aligned}\right\} . \qquad 15)$$

Die Formeln unter 15) lassen sich übrigens direct aus dem Verkürzungsdreiecke V_1, V_2, V_3, Fig. 6 *c* entwickeln.

Von den drei Seiten des letzteren $\overline{V_2 V_3} = v_x^2$, $\overline{V_3 V_1} = v_y^2$, $\overline{V_1 V_2} = v_z^2$, ist uns eine, v_x^2, und die Summe der beiden anderen, $v_y^2 + v_z^2 = 2 - v_x^2$, bekannt. Ausserdem ist der Winkel $V_2 = 2y - \pi$ bekannt. — Wird ein Dreieck $V_3 V_2 C$ aus den zwei Seiten $\overline{V_2 V_3} = v_x^2$, $\overline{V_2 C} = 2 - v_x^2$ und dem von beiden eingeschlossenen Winkel V_2 verzeichnet, so ist der Winkel bei C gleich $\frac{V_1}{2}$ und das

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Verkürzungsdreieck $V_1 V_2 V_3$ erhält man, wenn man über $\overline{V_3 C}$ den Winkel $V_1 V_3 C$ gleich $\frac{V_1}{2}$ errichtet.

Im Dreiecke $V_2 V_3 C$ gilt folgende trigonometrische Gleichung:

$$\frac{(2 - v_x^2) + v_x^2}{(2 - v_x^2) - v_x^2} = \frac{\operatorname{tg}\left[\frac{\left(V_3 + \frac{V_1}{2}\right) + \frac{V_1}{2}}{2}\right]}{\operatorname{tg}\left[\frac{\left(V_3 + \frac{V_1}{2}\right) - \frac{V_1}{2}}{2}\right]},$$

oder

$$\frac{2}{2 - 2v_x^2} = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{V_3 + V_1}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{V_3}{2}\right)} = \frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{V_2}{2}\right)\operatorname{tg}\left(\frac{V_3}{2}\right)},$$

$$\frac{1}{1 - v_x^2} = \frac{1}{\operatorname{cotg} y \operatorname{cotg} z}$$

Somit

$$\left.\begin{aligned} v_x^2 &= 1 - \operatorname{cotg} y \,.\, \operatorname{cotg} z, \\ v_y^2 &= 1 - \operatorname{cotg} z \,.\, \operatorname{cotg} x, \\ v_z^2 &= 1 - \operatorname{cotg} x \,.\, \operatorname{cotg} y \end{aligned}\right\} \cdots \qquad 15)^1$$

Berechnet man aus der ersten der Gleichungen 15) den Winkel z, so folgt hieraus der Winkel $x = 2\pi - y - z$.

Die beiden letzten Gleichungen unter 15) geben die gesuchten Werthe für v_x und v_y. —

X.

Vierter Fall. Gegeben v_x, die Verkürzung einer Axe OX, und der Winkel x, den die Projectionen der beiden anderen Axen einschliessen. — Wird über $\overline{AB} = 2c$ (Fig. 7) ein Halbkreis und auf dieselbe Art, wie in *II*, der Verkürzungskreis mit dem Durchmesser $\overline{AA_1} = v_x^2 2c$ beschrieben und die durch B gehende, gegen $\overline{AB}$ unter dem Winkel $\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ geneigte Projection $\overline{O'Y'}$ der Y-

[1] Durch Addition der Gleichungen 15) erhält man die Relation $1 = \operatorname{cotg} x \,.\, \operatorname{cotg} y + \operatorname{cotg} y \,.\, \operatorname{cotg} z + \operatorname{cotg} z \operatorname{cotg} x$.

Diese gilt bekanntlich für drei Winkel x, y, z, die sich, wie in unserem Falle, zu 2π ergänzen.

Axe verzeichnet, so entsprechen der Aufgabe zwei Lösungen, eine oder keine, je nachdem die Projection der Y-Axe den Verkürzungskreis schneidet, berührt oder nicht schneidet.

Jeder der Schnittpunkte O_1' und O_2' kann als Projection des Ursprungs des Coordinatensystems angesehen werden. Die Projection der X-Axe ist durch $\overline{O_1'A}$ oder durch $\overline{O_2'A}$ bestimmt, als Projection der Z-Axe erscheint ein durch O_1' oder durch O_2' zu $\overline{AB}$ gefälltes Perpendikel.

Es gibt somit entweder zwei reelle, eine reelle oder zwei imaginäre Lösungen.

Für den Grenzfall, der nur eine reelle Lösung bedingt, muss die Projection der Y-Axe den Verkürzungskreis in einem Punkte D tangiren. In diesem Falle ist $\sphericalangle GBD = \sphericalangle\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, und kann folgendermassen ausgedrückt werden. Ist G Mittelpunkt des Verkürzungskreises, so ist

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x = \frac{\overline{DG}}{\overline{GB}} = \frac{v_x^2 c}{2c - v_x^2 c} = \frac{v_x^2}{2 - v_x^2}.$$

Es existiren zwei reelle Lösungen, wenn $\frac{\pi}{2} - x$ kleiner, x grösser, somit $\cos x$ kleiner ist als $\frac{v_x^2}{2 - v^2}$, — zwei imaginäre Lösungen, wenn $\cos x$ grösser als $\frac{v_x^2}{2 - v_x^2}$.

Die graphische Bestimmung von v_{1y}, v_{2y}, v_{1z}, v_{2z}, respective der Winkel β_1, β_2 und γ_1, γ_2 welche den zwei verschiedenen Lösungen entsprechen, erfolgt, wie im zweiten Falle, VIII, Fig. 5. —

Die trigonometrische Lösung gibt uns wieder das Verkürzungsdreieck $V_1 V_2 V_3$ (Fig. 6*c*). — Wir kennen hievon die Seite $\overline{V_2 V_3} = v_x^2$, die Summe der beiden anderen Seiten $\overline{V_2 C} = v_y^2 + v_z^2 = 2 - v_x^2$, und den von beiden eingeschlossenen Winkel $V_1 = 2x - \pi$.

Wird auf einem Schenkel eines Winkels, $V_2 C V_3 = \frac{1}{2}\sphericalangle V_1$, die Strecke $\overline{CV_2} = 2 - v_x^2$ abgeschnitten, der andere Schenkel mit der Peripherie eines aus V_2 als Mittelpunkt mit dem Radius $\overline{V_2 V_3} = v_x^2$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

beschriebenen Kreises in V_3 geschnitten, über $\overline{V_3C}$ der Winkel $V_1V_3C=\frac{1}{2}V_1$ errichtet, so ist das Verkürzungsdreieck verzeichnet.

Aus Dreieck V_3V_2C folgt:

$$\sin\left(V_3+\frac{V_1}{2}\right):\sin\frac{V_1}{2}=\left(2-v_x^2\right):v_x^2, \text{ oder}$$

$$\sin\left(2z-\pi+\frac{2x-\pi}{2}\right):\sin\frac{2x-\pi}{2}=\left(2-v_x\right)^2:v_x^2$$

$$\cos(2z+x):\cos x=(2-v_x^2):v_x^2$$

$$\cos\left(2z+x\right)=\frac{2-v_x^2}{v_x^2}\cos x$$

Auch hieraus ist zu ersehen, dass reelle Lösungen nur dann erfolgen, wenn

$$\cos\left(2z+x\right)=\frac{2-v_x^2}{v_x^2}\cos x<1, \text{ somit } \cos x<\frac{v_x^2}{2-v_x^2}.$$

Dann erhalten wir aber zwei Werthe für $2z+x$, die sich zu 4π ergänzen (wenn unter z_1, z_2, x die stumpfen Winkel verstanden werden):

$$(2z_1+x)+(2z_2+x)=4\pi,$$
$$z_1+z_2+x=2\pi,$$

d. h. die beiden Werthe von z ergänzen sich mit dem gegebenen Werthe von x zu 2π.

Wir erhalten ferner zwei Werthe von y, nämlich

$$y_1=2\pi-x-z_1$$
$$y_2=2\pi-x-z_2,$$

somit zwei Werthe für V_2 und V_3 und mit Benützung des Sinussatzes im Dreiecke $V_1V_2V_3$ zwei Werthe für jede der Seiten $\overline{V_1V_2}$, $\overline{V_2V_3}$, d. h. für die Verkürzungen v_z und v_y.

XI.

Fünfter Fall. Gegeben das Verhältniss zwischen den Verkürzungen der drei Coordinatenaxen: $v_x:v_y:v_z=a:b:c$.

Man trage auf einer Geraden (Fig. 8) neben einander die Strecken $\overline{AG}=a^2$, $\overline{GH}=c^2$, $\overline{HB}=b^2$ auf, beschreibe aus G als Mittelpunkt mit dem Radius $\overline{GA}$ einen, und aus H als Mittelpunkt

mit dem Radius $\overline{HB}$ einen zweiten Kreis. Beide können als die auf eine Spurendreiecksseite $\overline{AB}$ bezogenen, den Verkürzungen v_x und v_y entsprechenden Verkürzungskreise angesehen werden, deren Schnittpunkt O' die Projection des Ursprungs des Coordinatensystems gibt. — $\overline{O'A}$ fällt mit $\overline{O'X'}$, $\overline{O'B}$ mit $\overline{O'Y'}$ zusammen, $\overline{O'Z'}$ steht senkrecht zu $\overline{AB}$, wodurch die Winkel x, y, z gegeben sind.

Ein aus a^2, b^2, c^2 als Seiten construirtes Dreieck ist ein Verkürzungsdreieck, dessen innere Winkel halbirende (vergleiche VII) die Winkel x, y, z einschliessen.

Die Winkel α, β, γ, respective v_x, v_y, v_z werden wie in VIII, Fig. 5, bestimmt.

Um die letzteren Werthe durch Rechnung zu bestimmen, kann man die gegebenen Bestimmungsstücke in folgender Fassung schreiben:

$$\left.\begin{aligned} v_x &= \mu a \\ v_y &= \mu b \\ v_z &= \mu c \end{aligned}\right\} \ldots.$$

Hierin ist μ ein constanter, zu bestimmender Factor. Wir erhalten denselben aus der zusammengesetzten Proportion

$$v_x^2 : v_y^2 : v_z^2 = a^2 : b^2 : c^2$$

durch die Umformung

$$v_x^2 : (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = a^3 : (a^2 + b^2 + c^2,$$

wegen 8) wird daraus

$$\left.\begin{aligned} v_x^2 &= \frac{2a^2}{a^2 + b^2 + c^2}, \\ v_y^2 &= \frac{2b^2}{a^2 + b^2 + c^2} \\ v_z^2 &= \frac{2c^2}{a^2 + b^2 + c^2} \end{aligned}\right\} \ldots \qquad 16)$$

sowie

somit

$$\mu^2 a^2 = \frac{2a^2}{a^2 + b^2 + c^2},$$

woraus

$$\mu = \frac{2}{a^2 + b^2 + c^2} \qquad 17)$$

folgt.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Werden die Werthe für v_x^2, v_y^2, v_z^2 aus 16) in die Formeln 12) eingesetzt, so erhalten wir für die stumpfen Winkel x, y, z die Werthe

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} x &= -\sqrt{\frac{(a^2+b^2+c^2)\ (b^2+c^2-a^2)}{(a^2+c^2-b^2)\ (a^2+b^2-c^2)}} \\ \operatorname{tg} y &= -\sqrt{\frac{(a^2+b^2+c^2)\ (a^2+c^2-b^2)}{(a^2+b^2-c^2)\ (b^2+c^2-a^2)}} \\ \operatorname{tg} z &= -\sqrt{\frac{(a^2+b^2+c^2)\ (a^2+b^2-c^2)}{(b^2+c^2-a^2)\ (a^2+c^2-b^2)}} \end{aligned}\right\} \ldots \quad 18)^1$$

XII.

Sechster Fall. Gegeben das Verhältniss zwischen den Verkürzungen zweier Coordinatenaxen $v_x : v_z = a : c$ und der Winkel y, den die Projectionen beider einschliessen.

Man verzeichne (Fig. 9) einen Winkel BAO', gleich $\frac{\pi}{2} - y$, für y den spitzen Winkel genommen, schneide auf einem der Schenkel das Stück $\overline{AG} = a^2$ ab und durchschneide aus G als Mittelpunkt mit einem Kreise vom Radius a^2 den zweiten Schenkel in O'. Wird ferner $\overline{GH} = c^2$ auf der Verlängerung von $\overline{AG}$ aufgetragen, so ist das Dreieck GHO' unser Verkürzungsdreieck, welches durch die Seiten $\overline{GO'} = a^2$, $\overline{GH} = c^2$ und der Winkel $HGO' = \pi - 2y$ vollkommen bestimmt ist.

Wird ferner auf der Verlängerung von $\overline{GH}$ das Stück $\overline{HB} = \overline{HO'}$ aufgetragen, so kann $\overline{AB}$ als die Spurendreiecksseite angesehen werden, auf welche a^2, b^2, c^2 als die Radien der den Verkürzungen v_x, v_y, v_z entsprechenden Verkürzungskreise bezogen werden.

Die weitere graphische Behandlung dieses Falles ist aus Fig. 9 ersichtlich, die Bestimmung von α, β, γ erfolgt wie in VIII.

Es ist somit

$$v_x^2 \left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\right) = a^2,$$

---

[1] Vergleiche K. Pohlke, Darstellende Geometrie. Berlin. 1876. pag. 90.

sowie

$$v_y^2\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\right)=b^2,$$

$$v_z^2\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\right)=c^2,$$

somit

$$v_x^2=\frac{2a^2}{a^2+b^2+c^2}$$

u. s. f.

Führt man aus dem Verkürzungsdreiecke HGO' die trigonometrische Relation

$$b^4=a^4+c^4-2a^2c^2\cos(\pi-2y)=a^4+c^4+2a^2c^2\cos 2y$$

ein, so erhalten wir die Werthe

$$\left.\begin{aligned} v_x^2&=\frac{2a^2}{a^2+c^2+\sqrt{a^4+c^4+2a^2c^2\cos 2y}}\\ v_y^2&=\frac{2\sqrt{a^4+c^4+2a^2c^2\cos 2y}}{a^2+c^2+\sqrt{a^4+c^4+2a^2c^2\cos 2y}}\\ v_z^2&=\frac{2c^2}{a^2+c^2+\sqrt{a^4+c^4+2a^2c^2\cos 2y}}\end{aligned}\right\}\ldots \quad 19)$$

Die Winkel x und berechnet man mit Benützung der Formeln 18, nachdem man daselbst für b^2 den Werth

$$\sqrt{a^4+c^4+2a^2c^2\cos 2y}$$

eingeführt hat.

XIII.

Siebenter Fall. Gegeben das Verhältniss zwischen den Verkürzungen zweier Coordinatenaxen $v_x : v_z = a : c$ und der Winkel x, den die Projectionen einer derselben und der dritten Coordinatenaxe einschliessen.

Von dem Verkürzungsdreiecke (Fig. 10) GHO' sind zwei Seiten $\overline{GO'}=a^2$, $\overline{GH}=c^2$ und der der ersten derselben gegenüberliegende Winkel $GHO'=\pi-2x$ gegeben, worin x den spitzen, von $\overline{O'Y'}$ und $\overline{O'Z'}$ eingeschlossenen Winkel bedeutet.

Ist a grösser als c oder a gleich c, so ist das Verkürzungsdreieck eindeutig bestimmt, somit existirt nur eine Lösung der Aufgabe. Ist a kleiner als c, aber a^2 grösser als c^2 sin $2x$, so

existiren zwei reelle Verkürzungsdreiecke, somit zwei reelle Lösungen. Ist $a^2 = c^2 \sin 2x$, so werden die beiden reellen Lösungen identisch, der Winkel $GO'H$ wird ein rechter, der Winkel $XOY = \frac{3\pi}{2}$.

Ist endlich $a^2 < c^2 \sin 2\pi$, so existirt kein reelles Verkürzungsdreieck, die Lösung der Aufgabe wird imaginär. Verzeichne man aus den gegebenen Stücken das Verkürzungsdreieck (eventuell die zwei reellen Verkürzungsdreiecke), verlängere eine der Seiten desselben $\overline{GH}$ beiderseits, schneide auf den beiderseitigen Verlängerungen derselben Stücke $\overline{GA}$ und $\overline{HB}$ ab, gleich der anliegenden Seite des Verkürzungsdreieckes, so sind $\overline{O'A}$, $\overline{O'B}$ und das zu $\overline{AB}$ durch O' gefällte Perpendikel die Projectionen des Axenkreuzes. Alles andere findet man, wie bei der graphischen Lösung der früheren Fälle. (In der Figur 10 sind die zwei verschiedenen Lösungen durch die Indices 1 und 2 unterschieden.)

Die trigonometrisch analytische Lösung dieses Falles ist so einfach, dass sie nur angedeutet werden soll.

Es ist im

$$\Delta GHO' : \sin GO'H = \frac{c^2}{a^2} \sin(\pi - 2x)$$

$$\sin GO'H = \frac{c^2}{a^2} \sin 2x.$$

Hieraus erhalten wir einen, zwei oder keinen reellen Werth für $GO'H$.

Somit ist der dritte Winkel $HGO' = \pi - 2y$ des Verkürzungsdreiecks, sowie die demselben gegenüber liegende Seite

$$\overline{OH} = b^2 = \frac{a^2 \sin 2y}{\sin 2y}$$

eindeutig oder zweideutig bestimmt, wenn die gegebenen Stücke überhaupt zu einer reellen Lösung führen.

Die Werthe für die Verkürzungen folgen dann aus den Gleichungen 16), wobei nur zu bemerken ist, dass in dem Falle, dem zwei reelle Lösungen entsprechen, für b^2 jeder der beiden gefundenen Werthe eingesetzt werden kann, somit den zwei reellen Lösungen auch zwei verschiedene Werthe für v_x, v_y, v_z zukommen.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Fig. 1

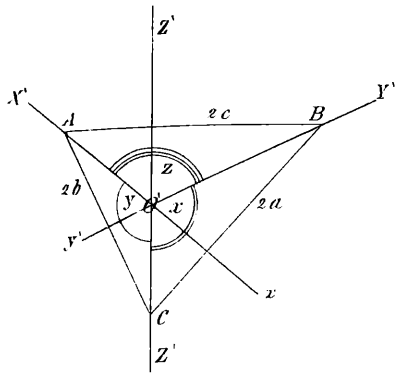


Fig. 2

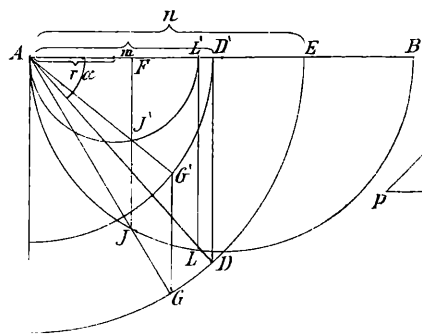


Fig. 3.

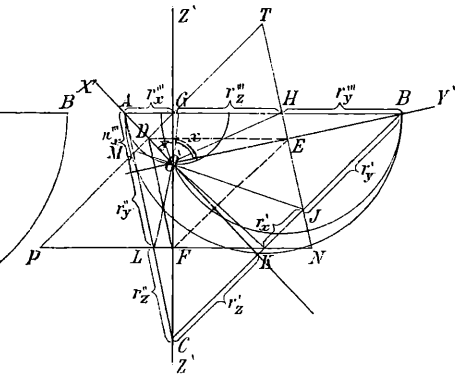


Fig. 4

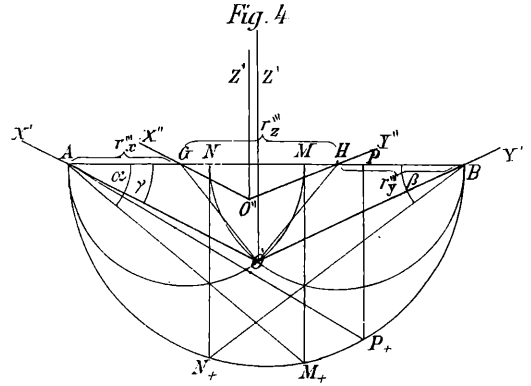


Fig. 4 a

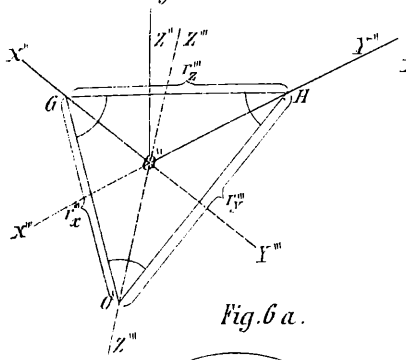


Fig. 4 b

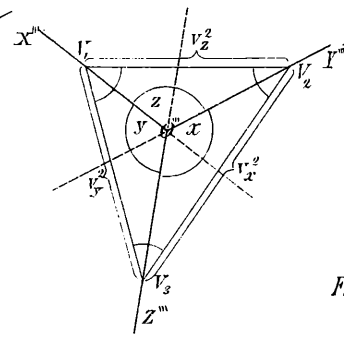


Fig. 5.

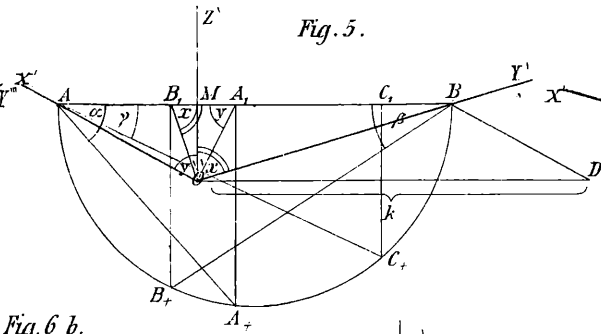


Fig. 6

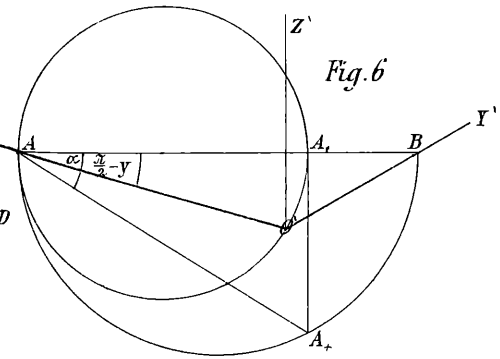


Fig. 6 a.

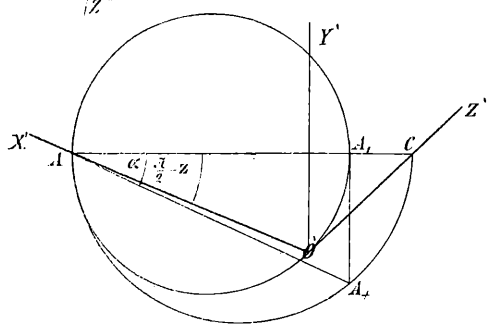


Fig. 6 b.

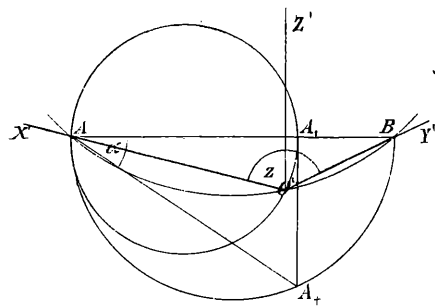


Fig. 7.

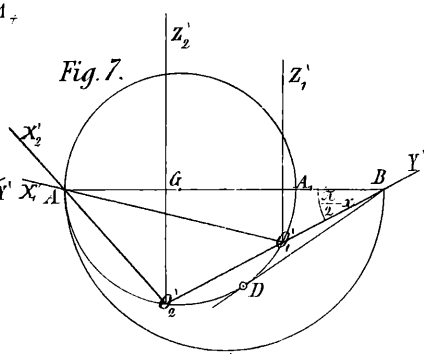


Fig. 6 c.

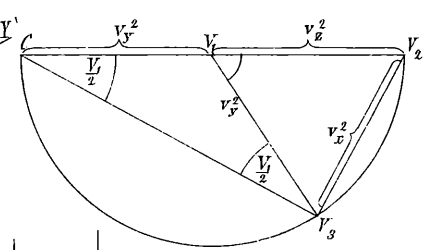


Fig. 8

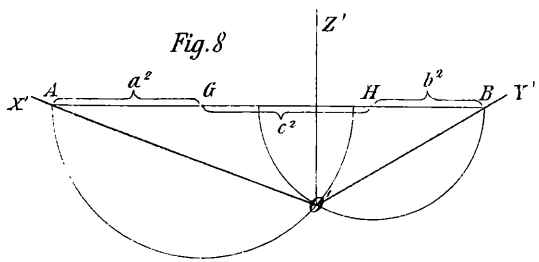


Fig. 9.

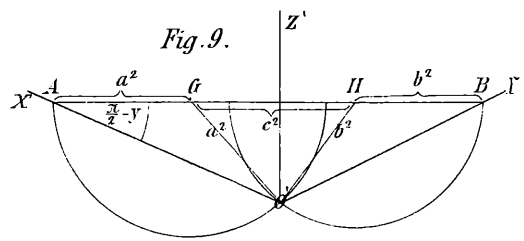
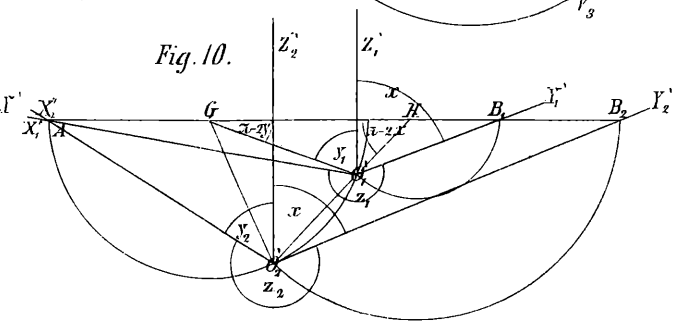


Fig. 10.



ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1880

Band/Volume: 81_2

Autor(en)/Author(s): Tesar Josef

Artikel/Article: Der orthogonal-axonometrische Verkürzungskreis. 453-478