# Über Sturm'sche Reihen.

Von **Leopold Gegenbauer.**

(Vorgelegt in der Sitzung am 18. März 1880.)

Es seien zwei Systeme von ganzen Functionen der Veränderlichen $x: \psi_k(x)$ und $\varphi_k(x)$ gegeben, wo die Functionen $\psi_k(x)$ von den Graden $n_k$, die Functionen $\varphi_k(x)$ von den Graden $n_k - n_1$, $\psi_0(x)$ und $\varphi_1(x)$ zwei von Null verschiedene Constanten sind, welche den folgenden Relationen genügen:

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n_k} \frac{\psi_\mu(x_\lambda)\,\psi_r(x_\lambda)\,\varphi_k(x_\lambda)}{\psi_k'(x_\lambda)}\, x_\lambda^\sigma = \delta_{\mu,r} \cdot \delta_{\sigma,\, n_{r+1}-n_r-1} \cdot \alpha_r \cdot \beta_r$$

$$[\delta_{\mu,\nu} = 0,\ \delta_{\mu,\mu} = 1;\ \mu, r < k;$$

$$\sigma = 0, 1, \ldots n_{r+1} - n_r - 1;\ \beta_r = [\psi_r(x)]_{\substack{n_r \\ x}};$$

$$\alpha_r \gtrless o\ \psi_k(x_\lambda) = o,\ \lambda = 1, \ldots n_k].$$

Wir werden nun über diese beiden Functionen-Systeme folgende Sätze beweisen:

1. Die Functionen $\psi_k(x)$ und $\varphi_k(x)$ bilden zwei Systeme von Sturm'schen Functionen.
2. Zwischen je drei auf einander folgenden Functionen $\varphi_k(x)$ besteht dieselbe Relation, wie zwischen den entsprechenden Functionen $\psi_k(x)$.
3. Die Determinanten $\varphi_k(x)\,\psi_{k-1}(x) - \psi_k(x)\,\varphi_{k-1}(x)$ sind constant.

Die aufgestellten Relationen sind, wie man sofort sieht, mit dem folgenden Systeme von Gleichungen identisch:

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n_k} x_\lambda^\sigma\, \psi_r(x_\lambda) \frac{\varphi_k(x_\lambda)}{\psi_k'(x^\lambda)} = \delta_{\sigma,\, n_{r+1}-1}\, \alpha_r\, [r < k, \sigma = 0, 1, 2, \ldots n_{r+1} - 1].$$

Ist $F(x)$ eine ganze Function von $x$, deren Grad nicht grösser als $n_k - 1$ ist, so hat man:

$$F(x) = \sum_{\mu=0}^{\mu=k-1} A_\mu(x)\,\psi_\mu(x)$$

wo der Grad von $A_\mu(x)$ nicht grösser als $n_{\mu+1}-n_\mu-1$ sein kann.

Zur Bestimmung der Coëfficienten der Function $A_\mu(x)$ erhält man folgendes System von linearen Gleichungen:

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n_k} \frac{x_\lambda^\sigma F(x_\lambda)\,\psi_\mu(x_\lambda)\,\varphi_k(x_\lambda)}{\psi_k'(x_\lambda)} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n_k} \frac{x_\lambda^\sigma A_\mu(x_\lambda)\,\psi_\mu^2(x_\lambda)\,\varphi_k(x_\lambda)}{\psi_k'(x_\lambda)}$$
$$[\sigma = 0, 1, 2 \ldots, n_{\mu+1}-n_\mu-1].$$

Da die Determinante dieses Systems:

$$\left| \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n_k} \frac{\psi_\mu^2(x_\lambda)\,\varphi_k(x_\lambda)}{\psi_k'(x_\lambda)}\, x_\lambda^{\tau+\sigma} \right|_{(\tau,\sigma=0,1,2,\ldots,n_{\mu+1}-n_\mu-1)} = \alpha_\mu^{n_{\mu+1}-n_\mu}$$

also von Null verschieden ist, so genügt dasselbe zur Bestimmung der erwähnten Coëfficienten, und man erhält:

$$A_\mu(x) = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n_k} \frac{F(x_\lambda)\,\psi_\mu(x_\lambda)\,\varphi_k(x_\lambda)}{\psi_k'(x_\lambda)}\, \chi_\mu^{(x,x_\lambda)}$$

wo $\chi_\mu(x, x_\lambda)$ eine ganze Function von $x$ vom Grade $n_{\mu+1}-n_\mu-1$ ist, deren Coëfficienten ganze Functionen von $x_\lambda$ sind, und in welcher der Coëfficient der höchsten Potenz von $x$ gleich $\alpha_\mu$ ist.

Wir nehmen nun für $F(x)$ die Function $G_r(x) \cdot \psi_{r-1}(x)$, wo $G_r(x)$ eine ganze Function von $x$ vom Grade $n_r-n_{r-1}$ ist, in welcher der Coëfficient der höchsten Potenz von $x$ den Werth $\frac{\beta_r}{\beta_{r-1}}$ hat.

Man hat in diesem Falle:

$$A_\mu(x) = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n_k} \frac{G_r(x_\lambda)\,\psi_{r-1}(x_\lambda)\,\psi_\mu(x_\lambda)\,\varphi_k(x_\lambda)}{\psi_k'(x_\lambda)}\, \chi_\mu^{(x,x_\lambda)}$$

und sieht, dass:

$$A_\mu(x) = 0 \quad [\mu = 0, 1, 2, .\quad, r-3, r+1, \ldots, k-1]$$

ist.

Es ist also:

$$G_r(x)\,\psi_{r-1}(x) = A_r(x)\,\psi_r(x) + A_{r-1}(x)\,\psi_{r-1}(x) + A_{r-2}(x)\,\psi_{r-2}(x).$$

Da $G_r(x)\,\psi_{r-1}(x)$ und $\psi_r(x)$ von demselben Grade sind und da überdies die Coëfficienten der höchsten Potenzen von $x$ in beiden übereinstimmen, da ferner die beiden anderen Producte von niedrigerem Grade sind, als die eben genannten, so ist:

$$A_r(x) = 1.$$

Setzt man:

$$G_r(x) - A_{r-1}(x) = g_r(x),$$

so hat man:

$$\psi_r(x) = g_r(x)\,\psi_{r-1}(x) - A_{r-2}(x)\,\psi_{r-2}(x)$$

wo $A_{r-2}(x)$ von nicht höherem, als dem Grade $n_{r-1} - n_{r-2} - 1$ ist.

Aus dieser Gleichung folgt:

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n_k} x_\lambda^\sigma\,\psi_r(x_\lambda)\,\frac{\varphi_k(x_\lambda)}{\psi_k'(x_\lambda)} - \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n_k} g_r(x_\lambda)\,x_\lambda^\sigma\,\psi_{r-1}(x_\lambda)\,\frac{\varphi_k(x_\lambda)}{\psi_k'(x_\lambda)} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n_k} x_\lambda^\sigma\,A_{r-2}(x_\lambda)\,\psi_{r-2}(x_\lambda)\,\frac{\varphi_k(x_\lambda)}{\psi_k'(x_\lambda)} = 0.$$

Da die ersten zwei Summen für $\sigma = 0, 1, 2, \ldots, n_{r-1} - 2$ gleich Null sind, so ist:

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n_k} x_\lambda^\sigma\,A_{r-2}(x_\lambda)\,\psi_{r-2}(x_\lambda)\,\frac{\varphi_k(x_\lambda)}{\varphi_k'(x_\lambda)} = 0 \quad [\sigma = 0, 1, 2, \quad n_{r-1} - 2],$$

Wir haben daher schliesslich die Relation:

$$\psi_r(x) = g_r(x)\,\psi_{r-1}(x) - \frac{\beta_r\,\alpha_{r-1}}{\beta_{r-1}\,\alpha_{r-2}}\,\psi_{r-2}(x).$$

Die Functionen $\psi_k(x)$ sind also Sturm'sche Functionen; das System dieser Functionen ist vollständig, wenn $n_k = k$ ist. Zwei auf einander folgende Functionen $\psi_k(x)$ haben keinen gemeinsamen Theiler, da ein solcher Theiler aller Functionen $\psi_k(x)$, also auch von $\psi_0(x)$ sein müsste, dieses aber, als eine von Null verschiedene Constante durch keine ganze Function von $x$ theilbar sein kann.

Aus dieser Relation folgt:

$$\frac{1}{\beta_r\,\alpha_{r-1}}\left\{\psi_r(x)\,\psi_{r-1}(y) - \psi_r(y)\,\psi_{r-1}(x)\right\} = \sum_{\mu=0}^{\mu=r-1} \frac{1}{\beta_{\mu+1}\,\alpha_\mu}\left[g_{\mu+1}(x) - g_{\mu+1}(y)\right]\psi_\mu(x)\,\psi_\mu(y).$$

Man hat daher auch:

$$\frac{\psi_\mu(y)}{\beta_{\mu+1}\,\alpha_\mu}\;\frac{g_{\mu+1}(x) - g_{\mu+1}(y)}{x-y} = \frac{1}{\beta_k\,\alpha_{k-1}} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n_k} \frac{\psi_k(y)\;\psi_\mu(x_\lambda)\;\psi_{k-1}(x_\lambda)\;\varphi_k(x_\lambda)}{(y-x_\lambda)\;\psi_k'(x_\lambda)}\,\chi_\mu(x, x_\lambda).$$

Da $\psi_k(x_\lambda) = 0$ ist, so kann man die ursprünglichen Relationen für $r = k - 1$ auch in folgender Form schreiben:

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n_k} \frac{x_\lambda^\sigma \psi_\mu(x_\lambda)}{\psi_k'(x_\lambda)} [\psi_{k-1}(x_\lambda)\,\varphi_k(x_\lambda) - \varphi_{k-1}(x_\lambda)\,\psi_k(x_\lambda)] = \delta_{\mu,\,k-1} \cdot \delta_{\sigma,\,n_k - n_{k-1} - 1}\,\alpha_{k-1}\,\beta_{k-1}$$

$$[\sigma = 0, 1, 2, \ldots, n_k - n_{k-1} - 1].$$

Wählt man aus diesem Systeme folgende $n_k$-Gleichungen aus: $\mu = 0, 1, \ldots, k - 1$; $\sigma = 0, 1, 2, \ldots n_{\mu+1} - n_\mu - 1$, so kann man mit Hilfe derselben die $n_k$-Grössen: $\psi_{k-1}(x_\lambda)\,\varphi_k(x_\lambda) - \varphi_{k-1}(x_\lambda)\,\psi_k(x_\lambda)$ bestimmen, da die Determinante dieses Systems gleich

$$\frac{\beta_o^{n_1}\,\beta_1^{n_2 - n_1} \cdots \beta_{k-1}^{n_k - n_{k-1}}}{\beta_k^{n_k}\,\left|x_\lambda^{\mu-1}\right|}\ (\lambda, \mu = 1; 2, \ldots, n_k),$$

also von Null verschieden ist. Man erhält durch Auflösung des Systems:

$$\psi_{k-1}(x_\lambda)\,\varphi_k(x_\lambda) - \psi_k(x_\lambda)\,\varphi_{k-1}(x_\lambda) = \alpha_{k-1} \cdot \beta_k$$

und sieht also, dass:

$$\psi_{k-1}(x)\,\varphi_k(x) - \psi_k(x)\,\psi_{k-1}(x) = \alpha_{k-1}\,\beta_k + \psi_k(x)\,K_k(x)$$

ist, wo $K_k(x)$ eine ganze Function von $x$ ist, deren Grad höchstens $n_{k-1} - n_1$ ist.

Die eben gefundene Relation zeigt auch, dass:

$$\chi_\mu(x, y) = \frac{1}{\beta_{\mu+1}\,\alpha_\mu}\,\frac{g_{\mu+1}(x) - g_{\mu+1}(y)}{x - y}$$

ist. Wir haben also für die Entwicklung einer ganzen Function $F(x)$ in eine nach den Sturm'schen Functionen $\psi_\mu(x)$ fortschreitende Reihe folgende Formel erhalten:

$$F(x)=\sum_{\mu=0}^{\mu=k-1}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n_k}\frac{F(x_\lambda)\,\psi_\mu(x_\lambda)\,\varphi_k(x_\lambda)}{\psi_k'(x_\lambda)}\,\frac{g_{\mu+1}(x)-g_{\mu+1}(x_\lambda)}{\alpha_\mu\beta_{\mu+1}(x-x_\lambda)}\,\psi_\mu(x).$$

Mit Hilfe dieser Formel beweist man leicht folgenden Satz:

Eine ganze Function $F(x)$ von nicht höherem als dem Grade $n_{r+1}-1$, welche den Relationen:

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n_k} x_\lambda^\lambda\, F(x_\lambda)\,\frac{\varphi_k(x_\lambda)}{\psi_k'(x_\lambda)}=\delta_{\sigma,\,n_{r+1}-1}\cdot C \qquad [\sigma=0,1,2,\ldots,n_{r+1}-1]$$

genügt, unterscheidet sich von der Function $\psi_r(x)$ nur durch einen der Grösse $C$ proportionalen constanten Factor.

Da zwei auf einander folgende Functionen $\psi_k(x)$ keinen gemeinsamen Theiler haben, so kann man zwei ganze Functionen $\Phi_k(x)$ und $\Psi_k(x)$ von den Graden $n_{k-1}-1$ und $n_k-1$ so bestimmen, dass:

$$\psi_{k-1}(x)\,\Psi_k(x)-\psi_k(x)\,\Phi_k(x)=\alpha_{k-1}\beta_k$$

ist. Man hat alsdann:

$$\psi_{k-1}(x)\,[\Psi_k(x)-\varphi_k(x)]-\psi_k(x)\,[\Phi_k(x)-\varphi_{k-1}(x)]=\psi_k(x)\,K_k(x).$$

Aus dieser Gleichung folgt, dass $\Psi_k(x)-\varphi_k(x)$ durch $\psi_k(x)$ theilbar ist; da aber die angegebene Differenz höchstens vom Grade $n_k-1$ ist, so muss sie gleich Null sein.

Man hat daher:

$$\varphi_k(x)=\Psi_k(x)$$
$$\varphi_{k-1}(x)-\Phi\ (x)=K_k(x).$$

Die Function $\Psi_k(x)$ ist also vom Grade $n_k - n_1$, die Function $\Phi_k(x)$ vom Grade $n_{k-1} - n_1$. Bestimmt man ferner die zwei Functionen $\Psi_{k-1}(x)$, $\Phi_{k-1}(x)$ von den Graden $n_{k-1} - n_1$, $n_{k-2} - n_1$ so, dass:

$$\psi_{k-2}(x)\,\Psi_{k-1}(x) - \psi_{k-1}(x)\,\Phi_{k-1}(x) = \alpha_{k-2}\beta_{k-1}$$

ist, so hat man:

$$\varphi_{k-1}(x) = \Psi_{k-1}(x).$$

Nun findet man aber leicht die Relationen:

$$\alpha_{k-1}\beta_k\,\Phi_{k-1}(x) = \alpha_{k-2}\beta_{k-1}\,\{g_k(x)\,\Phi_k(x) - \Psi_k(x)\}$$
$$\Psi_{k-1}(x) = \Phi_k(x)$$

und hat daher:

$$\varphi_{k-1}(x) = \Phi_k(x)$$
$$K_k(x) = o$$
$$\varphi_k(x) = g_k(x)\,\varphi_{k-1}(x) - \frac{\beta_k\,\alpha_{k-1}}{\beta_{k-2}\,\alpha_{k-1}}\,\varphi_{k-2}(x),$$
$$\psi_{k-1}(x)\,\varphi_k(x) - \varphi_{k-1}(x)\,\psi_k(x) = \alpha_{k-1}\beta_k.$$

Man sieht also, dass auch die Functionen $\varphi_k(x)$ ein System von Sturm'schen Functionen bilden und dass zwischen drei auf einander folgenden Functionen $\varphi_k(x)$ dieselbe Relation besteht, wie zwischen den entsprechenden Functionen $\psi_k(x)$. Da $\varphi_1(x)$ eine von Null verschiedene Constante ist, so haben auch zwei auf einander folgende Functionen $\varphi_k(x)$ keinen gemeinsamen Theiler.

Aus der letzten Relation folgt, dass auch $\varphi_k(x)$ und $\psi_k(x)$ keinen gemeinsamen Theiler haben. Mit Hilfe derselben Relation findet man auch, dass

$$\begin{vmatrix} \varphi_k(x), & \psi_k(x) \\ \varphi_\mu(x), & \psi_\mu(x) \end{vmatrix} = H_{k,\mu}(x)$$

eine ganze Function von $x$ vom Grade $n_k - n_{\mu+1}$ ist. Setzt man in dieser Gleichung $x = x_\lambda$, so erhält man:

$$\varphi_k(x_\lambda)\,\psi_\mu(x_\lambda) = H_{k,\mu}(x_\lambda) \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n_k).$$

Man sieht also, dass die rationale Function $\frac{H_{k,\mu}(x)}{\psi_\mu(x)}$ für $x = x_\lambda$ die $n_k$ Werthe $\varphi_k(x_\lambda)$ darstellt. Ist $n_k = k$, so lassen sich also die Functionen $H_{n,\mu}(x)$ und $\psi_\mu(x)$ bis auf constante Factoren aus den Werthen $\psi_k(x_\lambda)$ mit Hilfe der Cauchy'schen Interpolationsformel bestimmen.

Wir werden nun die erhaltenen Resultate benützen, um die Werthe der Determinanten:

$$D_\mu(x) = \begin{vmatrix} s_0, s_1, \ldots\ldots, s_\mu \\ s_1, s_2, \cdot \quad\quad, s_{\mu+1} \\ \\ s_{\mu-1}, s_\mu, \ldots . s_{2\mu-1} \\ 1, x, \ldots \quad . x^\mu \end{vmatrix}$$

zu bestimmen, wo:

$$s_h = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n_k} x_\lambda^h \frac{\varphi_k(x_\lambda)}{\psi'_k(x_\lambda)}$$

ist. Aus der Form dieser Determinante folgt sofort, dass:

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n_k} D_\mu(x_\lambda)\, x_\lambda^\rho \frac{\varphi_k(x_\lambda)}{\psi'_k(x_\lambda)} = \delta_{\rho,\mu}\, \sigma_\mu \quad [\rho = 0, 1, 2, \quad \mu-1]$$

$$= |s_{p+q}| \ (p, q = 0, 1, 2, \quad \mu)$$

ist. Es sei nun zunächst $\mu = n_{k-1}$, alsdann erhält man, wenn man die Function $D_{n_{k-1}}(x)$ mit Hilfe der oben aufgestellten Formel in eine nach den Functionen $\psi_\mu(x)$ fortschreitende Reihe entwickelt, unter Berücksichtigung der letzten Gleichung:

$$D_{n_{k-1}}(x) = \psi_{k-1}(x) \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n_k} \frac{D_{n_{k-1}}(x_\lambda)\, \psi_{k-1}(x_\lambda)\, \varphi_k(x_\lambda)}{\psi'_k(x_\lambda)} \frac{g_k(x) - g_k(x_\lambda)}{x - x_\lambda}$$

Da $D_{n_{k-1}}(x)$ und $\psi_{k-1}(x)$ von demselben Grade sind, so muss der Coëfficient von $\psi_{k-1}(x)$ auf der rechten Seite dieser Gleichung constant sein und man hat daher:

$$\sum_{\lambda=1}^{=n_k} D_{n_{k-1}}(x_\lambda)\, x_\lambda^\rho \frac{\varphi_k(x_\lambda)}{\psi'_k(x_\lambda)} = \delta_{\rho, n_{k-1}}\, C . \alpha_{k-1} \quad [\rho = o, 1, 2, \ldots . n_k - 1]$$

$$D_{n_h}(x) = C \psi_{k-1}(x)$$

$$C . \beta_{k-1} = \sigma_{n_{k-1}-1}.$$

Wäre die Constante $C$ gleich Null, so könnte man, da nicht sämmtliche Unterdeterminanten, welche man aus den Elementen der Determinante $D_{n_{k-1}}(x)$ bilden kann, gleich Null sind, eine Function herstellen, welche von niedrigerem Grade wäre als $\psi_{k-1}(x)$, den charakteristischen Relationen dieser Function genügte und von Null verschieden wäre. Eine solche Function existirt aber nach einem früheren Satze nicht; es ist also $C$ und daher auch $\sigma_{n_{k-1}-1}$ von Null verschieden.

Aus dieser Bemerkung folgt nun sofort, dass:

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n_k} D_\mu(x_\lambda) \frac{\varphi_k(x_\lambda)}{\psi_k'(x_\lambda)} x_\lambda^\rho = \delta_{\rho, n_k-1} \quad C_\mu \qquad [\rho=0, 1, 2, \ldots, n_k-1, \; \mu=n_{k-1}+1, n_{k-1}+2, \quad n_k-1]$$

d. h. dass:

$$D_\mu(x) = C'_\mu \psi_{k-1}(x) \qquad [n_{k-1} < \mu < n_k]$$

ist. Dasselbe Resultat erhält man auch, wenn man beachtet, dass:

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n_k}{}' x_\lambda^\rho \psi_{k-1}(x_\lambda) \frac{\varphi_k(x_\lambda)}{\psi_k'(x_\lambda)} = b_o s_\rho + b_1 s_{\rho+1} + \ldots\ldots + b_{n_{k-1}} s_{\rho+n_{k-1}-1} + \beta_{k-1} s_{\rho+n_{k-1}} = 0$$
$$(\rho = 0, 1, 2, . \quad n_k-2)$$

ist, wo $\beta_{k-1} \gtrless o$ ist. Man hat:

$$C'_\mu \beta_{k-1} = |s_{p+q}|_{(p, q=0, 1, 2, \quad n_{k-1}-1, n_{k-1}+1, \quad \mu)}.$$

Nun findet man mit Hilfe der letzten Relation:

$$|s_{p+q}|_{(p, q=0, 1. 2, \quad n_{k-1}-1, n_{k-1}+1 \quad \mu)} = \left(-\frac{b_{n_{k-1}-1}}{\beta_{k-1}}\right)^{\mu-n_{k-1}} |s_{p+q}|_{(p, q=0, 1, 2, \quad \mu-1)}$$
$$(C\mu = n_{k-1} + 1, \ldots n_k-2).$$

Es ist aber, wie früher gezeigt wurde, $\sigma_{n_k} = 0$, und daher:

$$\left| s_{p+q} \right|_{(p,\, q=0,1,2,\dots n_{k-1},\, n_{k-1}+1,\dots \mu)} = 0 \qquad (\mu = n_{k-1}+1,\dots n_k-2).$$

Für $\mu = n_k - 1$ ist diese Determinante aber von Null verschieden, weil sonst $D_{n_k-1}(x)$ und daher auch $\sigma = {}_{n_k-1}$ gleich Null wäre, was, wie schon bewiesen wurde, unmöglich ist. Wir haben also:

$$D_\mu(x) = 0 \qquad [n_{k-1} < \mu < n_k - 1]$$
$$D_{n_k-1}(x) = C'_{n_k-1}\, \psi_{k-1}(x).$$

Ist $n_1$ von 1 verschieden, so sind natürlich alle Functionen $D_\mu(x)$ $[\mu = 0, 1, 2, \dots n_1 - 2]$ gleich Null.

Sind $f_1(x)$ und $f(x)$ zwei ganze Functionen von $x$ von den Graden $n-1$ und $n$ und bedeuten die Functionen $\psi_k(x)$ die Näherungsnenner der Kettenbruchentwicklung von $\frac{f_1(x)}{f(x)}$, so erhält man, wenn man in den obigen Entwicklungen $f_1(x)$ für $\varphi_k(x)\, f(x)$ für $\psi_k(x)$ setzt, einen von Herrn Kronecker herrührenden Satz über unvollständige Sturm'sche Systeme.

Durch diese Entwicklungen ist, wie man sieht, eine zuerst von Hattendorff aufgeworfene, aber nicht vollständig erledigte Frage über unvollständige Sturm'sche und vollständige Sylvester'sche Systeme vollkommen gelöst.

Da gerade der Umstand, dass $\sigma_{n_{k-1}}$ von Null verschieden ist, von grosser Wichtigkeit ist, so soll dies noch auf eine andere Weise bewiesen werden.

Mit Hilfe der oben erwähnten Relation:

$$b_0\, s_t + b_1\, s_{t+1} + \dots + b_{n_{k-1}-1}\, s_{t+n_{k-1}-1} + \beta_{k-1}\, s_{t+n_{k-1}} = o \qquad [t = o, 1, 2, \dots n_k - 2]$$

zeigt man leicht, dass:

$$\beta_{k-1}^{n_k-n_{k-1}}\sigma_{n_k-1} = \begin{vmatrix} s_0, s_1, \ldots\ldots, s_{n_{k-1}-1}, 0, 0, \ldots 0, 0 \\ s_1, s_2, \ldots\ldots, s_{n_{k-1}}, 0, 0, \ldots 0, 0 \\ \\ s_{n_{k-1}-1}, s_{n_{k-1}}, \ldots s_{2n_{k-1}-2}, 0, 0, \ldots 0, 0 \\ s_{n_{k-1}}, s_{n_{k-1}+1}, \ldots s_{2n_{k-1}-1}, 0, 0, \ldots 0, \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n_{k-1}-1} b_\lambda s_{\lambda+n_k-2} + \beta_{k-1} s_{n_k+n_{k-1}-1} \\ \\ s_{n_k-1}, s_{n_k}, \ldots s_{2n_k-2}, \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n_{k-1}-1} b_\lambda s_{\lambda+n_k-2} + \beta_{k-1} s_{n_k+n_{k-1}-1}, \ldots \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n_{k-1}-1} b_\lambda s_{\lambda+2n_k-n_{k-1}-2} + \beta_{k-1} s_{2n_k-2} \end{vmatrix}$$

ist. Daraus folgt sofort:

$$\beta_{k-1}^{n_k-n_{k-1}}\sigma_{n_k-1} = \left(\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n_{k-1}-1} b_\lambda s_{\lambda+n_k-2} + \beta_{k-1} s_{n_k-n_{k-1}-1}\right)^{n_k-n_{k-1}} \sigma_{n_{k-1}-1}$$

Ist nun $\sigma_{n_k-1}=0$, so muss, da der erste Factor auf der rechten Seite von Null verschieden ist, auch $\sigma_{n_{k-1}-1}=0$ sein. Wäre also in der Reihe der Grössen $\sigma_{n_k-1}$ eine gleich Null, so müssten alle vorhergehenden gleich Null sein. Nun sieht man aber sofort, dass jedenfalls $\sigma_{n_1-1}$ von Null verschieden ist, also kann auch $\sigma_{n_k-1}$ $(k \leqq 1)$ nicht gleich Null sein.

Wir gehen nun zu einer zweiten Anwendung der anfänglich entwickelten Sätze über.

Die Gleichung:

$$\frac{1}{y-x} = \sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} \gamma_{\mu+1} f_{\mu+1}(y) \chi_{\mu}(x)$$

in welcher die Functionen $\chi_\mu(x)$ ganze Functionen von $x$ vom Grade $\mu$, die Functionen $f_\mu(y)$ nach ganzen negativen Potenzen von $y$ fortschreitende Functionen sind, deren Entwicklung mit $y^{-\mu}$ beginnt, bestehe für irgend welche Werthsysteme $(x, y)$, die Reihe convergire, als Function von $x$ betrachtet in gleichem Grade. Die Functionen $f_\mu(y)$ seien so beschaffen, dass jede Function, für welche eine Entwicklung nach derselben existirt, sich nur auf eine einzige Weise in eine nach diesen Functionen fortschreitende Reihe entwickeln lässt, endlich seien die Functionen $\chi_\mu(x)$ so beschaffen, dass $\chi_\mu(x)$ und $\chi'_\mu(x)$ keinen gemeinsamen Theiler haben.

Es soll gezeigt werden, dass die Functionen $\psi_\mu(x)$ die Glieder einer Sturm'schen Reihe sind, und dass die Functionen $f_\mu(y)$, welche man passend Sturm'sche Functionen zweiter Gattung nennen kann, analogen Relationen genügen, wie die Functionen $\chi_\mu(x)$.

Multiplicirt man die letzte Gleichung mit $f_{r+1}(x)$ und bestimmt den Coëfficienten von $x^{-1}$, so erhält man:

$$f_{r+1}(y) = \sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} \gamma_{\mu+1} f_{\mu+1}(y) \quad [f_{r+1}(x)\chi_\mu(x)]_{x^{-1}}.$$

Nach den gemachten Voraussetzungen ist

$$[f_{r+1}(x)\chi_r(x)]_{x^{-1}} \gtrless 0$$

und zwar ist in der Reihe der Producte

$$f_{r+1}(x)\, \chi_\mu(x)$$

das genannte Product das erste, in welchem der erwähnte Coëfficient von Null verschieden ist. Man sieht aber auch sofort, dass dieses Product das einzige ist, in dessen Entwicklung ein Glied mit $x^{-1}$ vorkommt. Würden nämlich noch andere Producte ein solches Glied enthalten, so würde aus der letzten Gleichung folgen:

$$A_{r+1}f_{r+1}(y)+B_\sigma f_\sigma(y)+C_\tau f_\tau(y)+\cdots \qquad =0\;[r+1<\sigma<\tau<\ldots].$$

Da die Coëfficienten der einzelnen Potenzen von $y$ gleich Null sein müssen, so hat man:

$$A_{r+1}=0;\quad B_\sigma=0;\quad C_\tau=0;.$$

Wir erhalten daher die Relation:

$$[f_{r+1}(x)\,\chi_\mu(x)]_{x^{-1}}=\frac{\delta_{\mu,\,r}}{\gamma_{r+1}}.$$

Diese Bemerkung liefert uns sofort ein Mittel, die Coëfficienten von Entwicklungen zu bestimmen, welche nach den Functionen $\chi_\mu(x)$ fortschreiten. Hat man nämlich:

$$F(x)=\sum_\mu B_\mu\,\chi_\mu(x),$$

so findet man durch Multiplication mit $f_{r+1}(x)$:

$$B_r=\gamma_{r+1}\,[F(x)\,f_{r+1}(x)]_{x^{-1}}.$$

Setzt man:

$$F(x)=x^\lambda\,\chi_r(x)$$
$$[\chi_\mu(x)]_{x^\tau}=\eta^{(\mu)}_\tau$$

und berücksichtigt, dass in der Entwicklung von $x^\lambda\chi_r(x)$ kein $\chi_\mu(x)$ mit einem höheren Index als $\lambda+r$ vorkommen kann, sowie dass der Coëfficient von $\chi_{\lambda+r}(x)$: $\dfrac{\eta^{(r)}_r}{\eta^{(r+\lambda)}_{r+\lambda}}$ ist, so erhält man:

$$[\chi_r(x)f_{\mu+1}(x)]_{x^{-(\lambda=1)}}=0\qquad[\mu>\lambda+r]$$

$$[\chi_r(x)f_{r+\lambda+1}(x)]_{x^{-(\lambda+1)}}=\frac{\eta^{(r)}_r}{\eta^{(r+\lambda)}_{r+\lambda}\,\gamma_{r+\lambda+1}}.$$

Es sei nun $F(x)$ eine ganze Function von $x$, deren Grad nicht grösser als $n-1$ ist; in diesem Falle existirt sicher eine Entwicklung nach den Functionen $\chi_\mu(x)$. Da nach der Lagrange'schen Interpolationsformel:

$$F(x) = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{F(x_\lambda)\,\chi_n(x)}{(x-x_\lambda)\,\chi'_n(x_\lambda)} \quad [\chi_n(x_\lambda)=0 \quad \lambda=1,2,\ldots n]$$

ist, so hat man:

$$[F(x)\,f_{\mu+1}(x)]_{x^{-1}} = \sum_{\lambda=1}^{=n} \frac{F(x_\lambda)}{\chi'_n(x_\lambda)} \left[\frac{\chi_n(x)\,f_{\mu+1}(x)}{x-x_\lambda}\right]_{x^{-1}}$$

Es ist:

$$\chi_n(x) f_{\mu+1}(x) = G_{n,\mu}(x) + \mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)$$

wo $G_{n,\mu}(x)$ eine ganze Function von $x$ vom Grade $n-\mu-1$ ist. Wir erhalten daher:

$$F(x) = \sum_{\mu=0}^{\mu=n-1} \gamma_{\mu+1} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{F(x_\lambda)\,G_{n,\mu}(x_\lambda)}{\chi'_n(x_\lambda)}\,\chi_\mu(x).$$

Setzt man $F(x) = \chi_r(x)$, so erhält man:

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{\chi_r(x_\lambda)\,G_{n,\mu}(x_\lambda)}{\chi'_n(x_\lambda)} = \frac{\delta_{\mu,r}}{\gamma_{r+1}} \quad [\mu, r<n].$$

Hat man eine Function $\Psi(x)$ von nicht höherem, als dem Grade $r$, welche den Relationen:

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{\Psi(x_\lambda)\,G_{n,\mu}(x_\lambda)}{\chi'_n(x_\lambda)} = \frac{\delta_{\mu,r}}{\alpha'_{r+1}} \quad [\mu=0,1,\ldots,n-1,\ r<n]$$

genügt, so unterscheidet sich dieselbe, wie man leicht zeigen kann, von der Function $\chi_r(x)$ nur durch einen constanten Factor; ist also gleich Null, wenn sie von niedrigerem Grade, als $\chi_r(x)$ ist.

Wir denken uns nun zwei Functionen-Systeme $\vartheta_\mu(x)$ und $\xi_\mu(x)$, wo die Functionen $\vartheta_\mu(x)$ vom Grade $\mu-1$, die Functionen $\xi_\mu(x)$ vom Grade $\mu$ sind, so bestimmt, dass:

$$\vartheta_n(x_\lambda)\,\xi_\mu(x_\lambda) = G_{n,\mu}(x_\lambda) \quad [\lambda=1,2,\ldots n]$$

ist.

Es lässt sich sofort zeigen, dass die Functionen $\xi_\mu(x)$ sich von den Functionen $\chi_\mu(x)$ nur durch constante Factoren unterscheiden können.

Es ist:

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{\chi_r(x_\lambda)\,\xi_\mu(x_\lambda)\,\vartheta_n(x_\lambda)}{\chi_n'(x_\lambda)} = \frac{\delta_{\mu,r}}{\gamma_{r+1}} \qquad [\mu, r = 0, 1, \ldots, n-1].$$

Ein zweites System von Relationen ergibt sich in folgender Weise. Setzt man:

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \gamma_{\lambda+1}\,\chi_\lambda(x_\sigma)\,\xi_\lambda(x_\tau) = \gamma_{\sigma,\tau}$$

so erhält man:

$$\sum_{\sigma=1}^{\sigma=n} \frac{\xi_\mu(x_\sigma)\,\vartheta_n(x_\lambda)}{\chi_n'(x_\lambda)}\,\gamma_{\sigma,\tau} = \xi_\mu(x_\tau) \qquad [\mu = 0, 1, 2, \ldots n-1].$$

Zur Bestimmung der Grössen $\gamma_{1,\tau}, \gamma_{2,\tau}, \ldots, \gamma_{n,\tau}$ haben wir demnach $n$ lineare Gleichungen. Dass die Determinante dieses Systems:

$$\left| \frac{\xi_\mu(x_{\sigma+1})\,\vartheta_n(x_{\sigma+1})}{\psi_n'(x_{\sigma+1})} \right|_{(\mu,\,\sigma=0,1,2,\ldots,n-1)}$$

von Null verschieden, das System also ein bestimmtes ist, ergibt sich sofort aus der Bemerkung, dass das Product:

$$\left| \frac{\xi_\mu(x_{\sigma+1})\,\vartheta_n(x_{\sigma+1})}{\psi_n'(x_{\sigma+1})} \right| \cdot \left| \chi_\mu(x_{\sigma+1}) \right|_{(\mu,\,\sigma=0,1,2,\ldots,n-1)} = \frac{1}{\gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \quad \gamma_n}$$

ist.

Nun sehen wir, dass die Werthe:

$$\gamma_{\sigma,\tau} = \delta_{\sigma,\tau}\,\frac{\chi_n'(x_\sigma)}{\vartheta_n(x_\sigma)}$$

den obigen Relationen genügen, da das Gleichungssystem ein vollkommen bestimmtes ist, so sind dies die Werthe der Grössen $\gamma_{\sigma,\tau}$.

Setzt man:

$$\xi_\mu(x) = \sum_{\rho=0}^{\rho=\mu} \varepsilon_\rho^{(\mu)} \chi_\rho(x),$$

so erhält man die Relationen:

$$\sum_{\rho=0}^{\rho=\mu} \varepsilon_\rho^{(\mu)} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{\chi_\rho(x_\lambda)\,\chi_r(x_\lambda)\,\vartheta_n(x_\lambda)}{\chi_n'(x_\lambda)} = \frac{\delta_{\mu,r}}{\gamma_{r+1}} \quad [\mu, r = 0, 1, 2, \ldots, n-1].$$

Aus diesen Gleichungen ergibt sich nun sofort, wenn man berücksichtigt, dass wegen der gemachten Voraussetzungen die Coëfficienten $\varepsilon_0^{(0)}$, $\varepsilon_1^{(1)}$, $\varepsilon_\sigma^{(\sigma)}$,. von Null verschieden sind, folgendes System von Relationen:

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{\chi_\mu(x_\lambda)\,\chi_r(x_\lambda)\,\vartheta_n(x_\lambda)}{\chi_n'(x_\lambda)} = \frac{\delta_{\mu,r}}{\gamma_{r+1}\cdot\varepsilon_r^{(r)}} \quad [\mu, r = 0, 1, 2, \ldots, n-1].$$

Es bilden also, sowohl die Functionen $\chi_\mu(x)$, als auch die Functionen $\vartheta_\mu(x)$ ein System von Sturm'schen Functionen und es besteht zwischen drei auf einander folgenden Functionen $\vartheta_\mu(x)$ dieselbe Relation, wie zwischen den entsprechenden Functionen $\chi_\mu(x)$. Die Functionen $\xi_\mu(x)$ unterscheiden sich nach einem früheren Satze von den Functionen $\chi_\mu(x)$ nur durch die constanten Factoren $\varepsilon_\mu^{(\mu)}$.

Für die Functionen $\chi_\mu(x)$ und $\vartheta_\mu(x)$ bestehen also die Relationen:

$$\frac{\eta_{n-1}^{(n-1)}}{\eta_n^{(n)}} \chi_n(x) - (x - F_{n-1}^{(n-1)})\chi_{n-1}(x) + F_{n-2}^{(n-1)}\chi_{n-2}(x) = 0$$

$$\frac{\eta_{n-1}^{(n-1)}}{\eta_n^{(n)}} \vartheta_n(x) - (x - F_{n-1}^{(n-1)})\vartheta_{n-1}(x) + F_{n-2}^{(n-1)}\vartheta_{n-2}(x) = 0$$

$$F_{n-2}^{(n-1)} = \frac{\eta_{n-2}^{(n-2)}\,\gamma_{n-1}\,\varepsilon_{n-2}^{(n-2)}}{\varepsilon_{n-1}^{(n-1)}\,\gamma_n\,\varepsilon_{n-1}^{(n-1)}}$$

$$\chi_{n-1}(x)\,\vartheta_n(x) - \chi_n(x)\,\vartheta_{n-1}(x) = \frac{\eta_n^{(n)}}{\eta_{n-1}^{(n-1)}\,\gamma_n\,\varepsilon_{n-1}^{(n-1)}}.$$

Mit Hilfe der ersten von diesen Relationen zeigt man leicht, dass die Functionen $f_\mu(y)$ folgenden Gleichungen genügen:

$$\frac{1}{\eta_0^{(0)}} = (y - F_0^{(0)})\,\gamma_1 f_1(y) - F_0^{(1)}\,\gamma_2 f_2(y)$$

$$\frac{\eta_{\mu-1}^{(\mu-1)}}{\eta_\mu^{(\mu)}}\,\frac{\varepsilon_{\mu-1}^{(\mu-1)}}{\varepsilon_\mu^{(\mu)}} f_{\mu+1}(y) - (y - F_{\mu-1}^{(\mu-1)}) f_\mu(y) + \frac{\varepsilon_{\mu-1}^{(\mu-1)}}{\varepsilon_{\mu-2}^{(\mu-2)}} f_{\mu-1}(y) = 0 \quad [\mu > 1].$$

Diese Relation wird dieselbe, wie diejenige, welche zwischen drei auf einander folgenden $\chi_\mu(x)$ besteht, wenn man nur $\frac{f_{\mu+1}(y)}{\varepsilon^{(\mu)}_\mu}$ für $f_{\mu+1}(y)$ wählt.

Wir wollen schliesslich noch einen interessanten speciellen Fall erwähnen.

Setzt man in unseren anfänglichen Formeln:

$$n_k = k, \quad g_k(x) = \beta'_k x + \varepsilon_k, \quad \varphi_k(x) = C_k \psi'_k(x), \quad \alpha_{k-1}\beta_k = 1$$

alsdann bilden wie man sieht die Grössen $\frac{\psi_\rho(x_\lambda)}{\sqrt{C_k}}$ die Coëfficienten einer orthogonalen Substitution. Unsere Gleichungen liefern alsdann die Relationen:

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=k} \frac{\varepsilon_\lambda}{\beta_\lambda'} = k\frac{\beta_1}{\varepsilon'_1}, \qquad C_k = \frac{\beta_1}{k_1}$$

$$2\sum_{\lambda=1}^{\lambda=k-1} \frac{1}{\beta'_\lambda \beta'_{\lambda+1}} = \frac{k}{\beta'_1\beta'_2}.$$

Sollen diese Relationen für alle $k$ bestehen, so findet man

$$\frac{\varepsilon_k}{\beta'_1} = \frac{\varepsilon_1}{\beta'_1}; \qquad \frac{2}{\beta'_{k-1}\beta'_k} = \frac{1}{\beta'_1\beta'_2}$$

und hat daher:

$$g_{2n}(x) = g_2(x), \quad g_{2n+1}(x) = 2g_1(x).$$

Hiermit ist auch die Frage erledigt, ob es ausser der Mehler-Hermite'schen Formel für die mechanische Quadratur noch andere gibt, welche die grösstmögliche Genauigkeit mit möglichster Einfachheit verbinden.