Über Projectiv-Constructionen der Curven II. Ordnung.

Von **Wilhelm Binder,**

Professor an der n.- Landes-Oberreal- und Maschinenschule zu Wr. Neustadt.

(Mit 1 Tafel.)

(**Vorgelegt in der Sitzung am 18. März 1880.**)

Werden in einer Ebene Σ eine beliebige Gerade a und eine beliebige Curve k_1 II. Ordnung angenommen; werden in dieser Geraden drei Punkte C_1, C_2, Δ_2 und durch den Punkt Δ_2 gehend eine Sehne $\overline{11'}$ der Curve k_1 willkürlich gewählt; werden sodann die Strecken $\overline{C_1 C_2}$, $11'$ als

Gegenseiten eines vollständigen Vierecks gepaart, dass also Δ_2 einen Diagonalpunkt desselben vorstellt, dann schneidet die Verbindungslinie der beiden anderen Diagonalpunkte I, I', die Gerade a in einem vierten Punkte Δ_1, so dass die Punktenpaare $C_1 C_2$, $\Delta_1 \Delta_2$ harmonisch getrennt erscheinen.

Verändert man nun die Lage des vollständigen Viereckes so, dass in jedem Falle die der constanten Seite $\overline{C_1 C_2}$ gepaarte Gegenseite eine Sehne der Curve k_1 bleibt, welche auf einem Strahlenbüschel I. Ordnung liegt, dessen Mittelpunkt Δ_2 ist, dann liegen die übrigen Diagonalpunkte dieser veränderlichen Vierecke paarweise ebenfalls auf einem Strahlenbüschel I. Ordnung, dessen Mit-

Diagonalen eines vollständigen Vierseits gepaart, dass also Δ_2 einen Schnittpunkt derselben vorstellt, dann schneidet die dritte Diagonale $\overline{II'}$ die Grade a in einem vierten Punkte Δ_1, so dass die Punkte des Gegeneckenpaares $C_1 C_2$ durch das Punktenpaar $\Delta_1 \Delta_2$ harmonisch getrennt erscheinen.

Verändert man nun die Lage des vollständigen Vierseits so, dass in jedem Falle die der constanten Diagonale $\overline{C_1 C_2}$ gepaarte Diagonale eine Sehne der Curve k_1 bleibt, welche auf einem Strahlenbüschel I. Ordnung liegt, dessen Mittelpunkt Δ_2 ist, dann liegen die übrigen Gegenecken dieser veränderlichen Vierseite paarweise ebenfalls auf einem Strahlenbüschel I. Ordnung, dessen Mittelpunkt

telpunkt Δ_1 ist, und es bilden die gesammten veränderlichen Diagonalpunktenpaare in ihrer stetigen Aufeinanderfolge eine Curve k II. Ordnung.

Δ_1 ist, und es bilden die gesammten veränderlichen Gegeneckenpaare in ihrer stetigen Aufeinanderfolge eine Curve k II. Ordnung.

1. Für den Beweis des vorstehenden Doppelsatzes wird es genügen, wenn wir diesen zunächst auf den Satz linker Hand beschränken, da sich die Richtigkeit desselben für den gegenüberstehenden Satz aus der Dualität zwischen vollständigem ebenen Viereck und Vierseit von selbst ergibt.

2. Die Curven k, k_1 können unter allen Umständen zu einander in projectivischer Beziehung gedacht werden.

3. Man nehme an, die beiden Curven k, k_1 gehören je einem ebenen Systeme Σ, Σ_1 an, welchen Systemen eine Gerade ε entsprechend gemein ist.

Gleichzeitig lassen sich zwei Kegelflächen K_1, K_2 denken, auf welchen die Curven k, k_1 so gelegen sind, dass sie als die Schnitte dieser Flächen mit den Ebenen Σ, Σ_1 erscheinen.

4. Werden die Kegelflächen K_1, K_2 II. Ordnung als Strahlenbündel betrachtet, deren Mittelpunkte C_1, C_2 mit denen der Kegel identisch sind, so dass diese Strahlenbündel die Scheine der Curven k, k_1 bilden, so ist jede dieser Curven die Collinear-Projection der anderen Curve für jeden der beiden Collineations-Mittelpunkte C_1, C_2 und die Gerade ε bildet die gemeinsame Collineationsachse.

5. Wird durch beide Collineations-Centra C_1, C_2 eine Gerade a als die Achse eines Ebenenbüschels I. Ordnung gelegt, so projicirt dieser letztere die beiden Strahlenbündel C_1, C_2 in die Ebenen Σ, Σ_1 als involutorische Strahlenbüschel I. Ordnung von den Involutions-Mittelpunkten Δ_1, Δ_2 der diesen involutorisch liegenden Curven k, k_1, für welche ε die gemeinsame Involutionsachse vorstellt, und in Bezug welch' letzterer beide Strahlenbüschel Δ_1, Δ_2 perspectivisch liegen.

6. Indem die Elemente der Kegelflächen involutorisch gepaart werden können, sind diese Kegel involutorische Flächen II. Ordnung.

Einem der Kegelfläche K_1 sich anschmiegenden Ebenenbüschel II. Ordnung ist gleichzeitig ein solcher der Kegelfläche K_2 homolog. Beide Kegel als Strahlenbündel C_1, C_2 projiciren diese Ebenenbüschel gemeinsam zu je einem Strahlenbüschel II. Ordnung ihrer den ebenen Systemen Σ, Σ_1 entsprechenden Curven k, k_1. Diese sich den Curven k, k_1 anschmiegenden Strahlenbüschel II. Ordnung sind in Bezug dieser ihnen entsprechenden Curven involutorisch; je einer der Punkte $\Delta_1 \Delta_2$ ist das Involutions-Centrum und die Gerade bildet die diesen beiden ihr perspectivischen Strahlenbüscheln II. Ordnung gemeinsame Involutionsachse.

7. Wird eines der ebenen Systeme Σ_1 um die Projectionsachse ε und werden im gleichen Sinne die Projections-Centra C_1, C_2 in das andere ebene System Σ gedreht, so entsteht ein ebenes, im Allgemeinen collineares Projections-System, welchem graphisch alle polaren und harmonischen Eigenschaften des betrachteten räumlichen Systemes übertragen sind. Dadurch verwandeln sich die beiden Strahlenbündel II. Ordnung, in welchen die Curven k, k_1 gedacht wurden, in zwei einander projectivische schiefe Strahlenbüschel C_1, C_2 I. Ordnung, welche die beiden Curven k, k_1 eine aus der anderen projiciren.

8. In den Fig. 1 und 2 sind auf einer Geraden a die Punkte C_1, C_2, Δ_2 und ferner irgend eine Curve k_1 II. Ordnung beliebig in derselben Ebene angenommen.

Wir ziehen durch den Punkt Δ_2 willkürlich eine Sehne 11' der Curve k_1, paaren dieselbe mit der constanten Strecke $\overline{C_1 C_2}$ als Gegenseiten eines vollständigen Viereckes und bestimmen die Diagonalpunkte I, I'. Die Verbindungslinie $\overline{II'}$ schneidet die Gerade a in einem Punkte Δ_1, so dass bekanntlich für die auf dem Träger a befindliche Punktreihe die Relation besteht:

$$\frac{\overline{C_1 \Delta_1}}{\overline{C_2 \Delta_1}} = -\frac{\overline{C_1 \Delta_2}}{\overline{C_2 \Delta_2}} \ldots \qquad 1)$$

Werden die Punkte $C_1 C_2$ als Collineations-Centra (4) betrachtet, so sind die Diagonalpunkte I, I' Schnitte von entsprechenden Strahlen der Büschel C_1, C_2 (7), und gehören also einer der Curve k_1 collinearen Curve k II. Ordnung an.

Die Gerade $\overline{II'}$ bildet eine Sehne der fraglichen Curve k, welche der Sehne $\overline{11'}$ perspectivisch ist; es ist somit der Schnitt R dieser beiden Sehnen ein Punkt der Collineationsachse

Die den Punkten I, I' angehörigen Tangenten t, t' der Curve k sind collinear den Tangenten t_1, t'_1, welche den Punkten $1, 1'$ der Curve k_1 angehören; beide Tangentenpaare müssen als Elemente der perspectivischen Strahlenbüschel Δ_1, Δ_2 II. Ordnung (6) einen Punkt T der Collineationsachse ε entsprechend gemein haben.

Insoferne die Gerade ε die Involutionsachse der Mittelpunkte Δ_1, Δ_2 (5) bildet, sind deren Schnittpunkte P, Q als Ordnungspunkte den beiden collinearen Curven k, k_1 entsprechend gemein, und sind die durch diese Punkte und die Centra Δ_1, Δ_2 gezogenen Geraden die Ordnungsstrahlen ihrer entsprechenden involutorischen Curven. In Fig. 1 sind die Ordnungspunkte sowie die Ordnungsstrahlen reell, in Fig. 2 gleichzeitig für beide Curven imaginär.

9. Die Punkte C_1, C_2 der in derselben Ebene gelegenen Curven k, k_1 sind conjugirte Contingenzpunkte und ihr Träger a ist also eine gemeinschaftliche Polare dieser Curven; somit sind die aus den Contingenzpunkten an die eine k_1 dieser Curven gezogenen Berührungslinien $\tau, \tau'; \tau'', \tau'''$ gemeinschaftliche Tangentenpaare für beide Curven.

Besitzen die Curven k, k_1 zwei Paare reelle gemeinschaftliche Tangenten, so gibt es drei Paare conjugirte reelle Contingenzpunkte; sind beide gemeinschaftliche Tangentenpaare imaginär (Fig. 1), so ist nur ein Paar conjugirter Contingenzpunkte reell vorhanden; besitzen die Curven k, k_1 drei reelle gemeinschaftliche Tangenten, so dass also das eine Paar identisch coincidirt, so sind ebenfalls drei Paare conjugirter Contingenzpunkte reell, insoferne der eine Contingenzpunkt doppelt zu zählen ist; ist das eine Paar gemeinschaftlicher Tangenten imaginär (Fig. 2), dann ist auch nur ein Paar conjugirter Contingenzpunkte reell. Die Richtigkeit dessen folgert sich, indem die Contingenzpunkte als die Gegeneckenpaare des aus den gemeinschaftlichen Tangenten der Curven k, k_1 gebildeten vollständigen ebenen Vierseits angesehen werden.

Hieraus ist zu schliessen, dass in jedem Falle für die in Projectivität angenommenen Curven k, k_1 ein reelles Paar von Contingenzpunkten C_1 C_2 vorhanden ist.

10. Für die harmonische Punktreihe $(C_1 \Delta_1 C_2 \Delta_2)$ lassen sich folgende Fälle unterscheiden:

a) Es werde einer der Contingenzpunkte C_1, C_2 gleich ∞; dann erhalten wir aus Gleichung 1) (8):

$$\overline{\Delta_1 C_2} = \overline{C_2 \Delta_2}, \text{ oder } \overline{\Delta_1 C_1} = \overline{C_1 \Delta_2},$$

d. h. es geht für jeden Fall je einer der Central-Strahlenbüschel C_1, C_2 in einen Parallel-Strahlenbüschel I. Ordnung über.

b) Es werde eines der Involutions-Centra Δ_1, Δ_2 gleich ∞; hiefür ergibt sich aus Gleichung 1):

$$\alpha.\ \frac{\overline{C_1 \Delta_2}}{\overline{C_2 \Delta_2}} = -1, \text{ oder } \overline{C_1 \Delta_2} = \overline{\Delta_2 C_2};$$

$$\frac{\overline{C_1 \Delta_1}}{\overline{C_2 \Delta_1}} = -1, \text{ oder } \overline{C_1 \Delta_1} = \overline{\Delta_1 C_2}.$$

Für den Fall α. projicirt sich der Central-Sehnenbüschel Δ_2 der Curve k_1 als Parallel-Sehnenbüschel Δ_1^∞ der Curve k, dessen Richtung der gemeinschaftlichen Polaren a parallel ist.

Die Collinear-Projection $\overline{FG}$ des der Richtung der Projectionsachse conjugirten Durchmessers $\overline{F_1 G_1}$ der Curve k_1 wird im Schnitte R durch die Projectionsachse gehälftet, und nachdem $\overline{FG}$ einen Diameter der Curve k bildet, indem dessen Tangenten in seinen Endpunkten parallel der Achse ε gerichtet sind, so ist die den beiden Curven k, k_1 gemeinsame Sehne $\overline{PQ}$ in der Collineationsachse ε der zu $\overline{FG}$ conjugirte Diameter.

Für den Fall β. projicirt sich der zu $\overline{C_1 C_2}$ gleich gerichtete Sehnenbüschel Δ_2^∞ der Curve k_1 als Central-Sehnenbüschel Δ_1 der Curve k. Der Punkt R fällt mit dem Mittelpunkte O der Curve k_1 zusammen, durch welchen nunmehr die Collinear-Projection $\overline{FG}$ des der Richtung conjugirten Diameters $\overline{F_1 G_1}$ der Curve k_1 geht, zu welcher die den beiden projectivischen Curven k, k_1 entsprechend gemeinsame Strecke $\overline{PQ}$, als in der Collineationsachse liegend, eine conjugirte Sehne der Curve k bildet, während sie gleichzeitig für die Curve k_1 der dem Durchmesser $\overline{F_1 G_1}$ conjugirte Durchmesser ist.

11. Wird der Einfachheit wegen die Curve k_1 als Kreis angenommen (Fig. 3), so lässt sich mit Bezug auf die zuletzt angestellten Untersuchungen die rechte Seite des Eingangs aufgestellten Satzes folgend aussprechen:

„Sind von einer Curve k II. Ordnung ein Diameter $\overline{FG}$ und „eine ihm conjugirte Sehne $\overline{PQ}$ gegeben; legt man durch $\overline{PQ}$ als „Durchmesser einen Kreis k_1; nimmt man weiters den Durchmesser „$\overline{F_1G_1} \perp \overline{PQ}$ dieses Kreises gepaart mit dem Diameter $\overline{FG}$ als „Diagonalen eines vollständigen Vierseits an, so ergibt sich in der „dritten Diagonale a eine harmonische Punktreihe $(C_1\Delta_1 C_2\Delta_2^\infty)$, für „welche $\overline{C_1\Delta_1} = \overline{\Delta_1 C_2}$ ist.

„Verändert man nun die Lage des vollständigen Vierseits „(Trapez) in solcher Weise, dass jedenfalls die der constanten „Diagonale $\overline{C_1C_2}$ gepaarte Diagonale eine Sehne $(\overline{11'})$ des Kreises „k_1 bleibt, welche auf dem Parallel-Strahlenbüschel Δ_2^∞ liegt, dann „befinden sich die übrigen veränderlichen Gegenecken (I, I') paar„weise ebenfalls auf einem Strahlenbüschel, dessen Mittelpunkt „der durch die Contingenzpunkte C_1C_2 von dem Punkte Δ_2 har„monisch getrennte Punkt Δ_1 ist, und es bilden die gesammten „veränderlichen Gegeneckenpaare $(F, G; I, I'$; etc.) in ihrer stetigen „Aufeinanderfolge jene Curve k II. Ordnung, für welche die con„jugirten Bestimmungsstücke $\overline{FG}, \overline{PQ}$ gegeben waren."

12. Für jene Fälle, in welchen eines der veränderlichen Vierecke (Vierseite) in ein Parallelogramm übergeht, wird einer der veränderlichen Diagonalpunkte (Gegenecken) gleich ∞. Dieser Fall tritt entweder nicht, einmal oder zweimal ein, woferne dann die Curve k keinen (Ellipse), einen (Parabel, Fig. 3) oder zwei Punkte (Hyperbel) mit der ∞ fernen Geraden ihrer Ebene Σ gemein hat.

13. Die vorliegenden Ableitungen lassen sich für die Construction der Curven II. Ordnung vom projectivischen Gesichtspunkte aus in folgender Weise reassumiren:

„Sind von einer Curve k II. Ordnung (Fig. 3) ein „Diameter $\overline{FG}$ und eine ihm conjugirte Sehne $\overline{PQ}$ ge„geben, und soll die Curve aus diesen Bestimmungs„stücken construirt werden, so wird zweckmässig ein „Kreis k_1 so in projectivische Beziehung mit der frag„lichen Curve k gebracht, dass die Sehne PQ als Kreis-

„durchmesser den beiden Curven entsprechend ge-
„mein und der zu PQ normale Kreisdurchmesser $\overline{F_1 G_1}$
„dem Diameter $\overline{FG}$ perspectivisch ist.“

Unter diesen Voraussetzungen erscheint die Curve k im Allgemeinen als die Collinear-Projection von stetig aufeinander folgenden Punkten (8) des Kreises k_1 und gleichzeitig als die umhüllte Curve der Collinear-Projection eines Systemes von stetig aufeinander folgenden Tangenten (6) dieses Kreises k_1, indem sie einerseits den Schnitt zweier schiefen, projectivischen Strahlenbüschel $C_1 C_2$ I. Ordnung und gleichzeitig die umhüllte Projection eines involutorischen Strahlenbüschels Δ_1 II. Ordnung ist; andererseits aber ist sie der Schnitt zweier perspectivischen Strahlenbüschel Δ_1, Δ_2 I. Ordnung mit einem der diesen projectivischen Strahlenbüschel C_1, C_2 I. Ordnung.

Fig. 1.

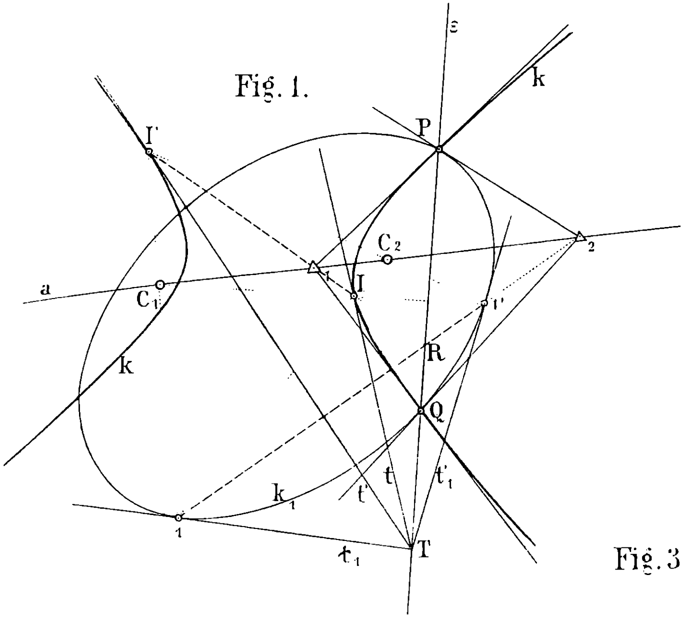


Fig. 2.

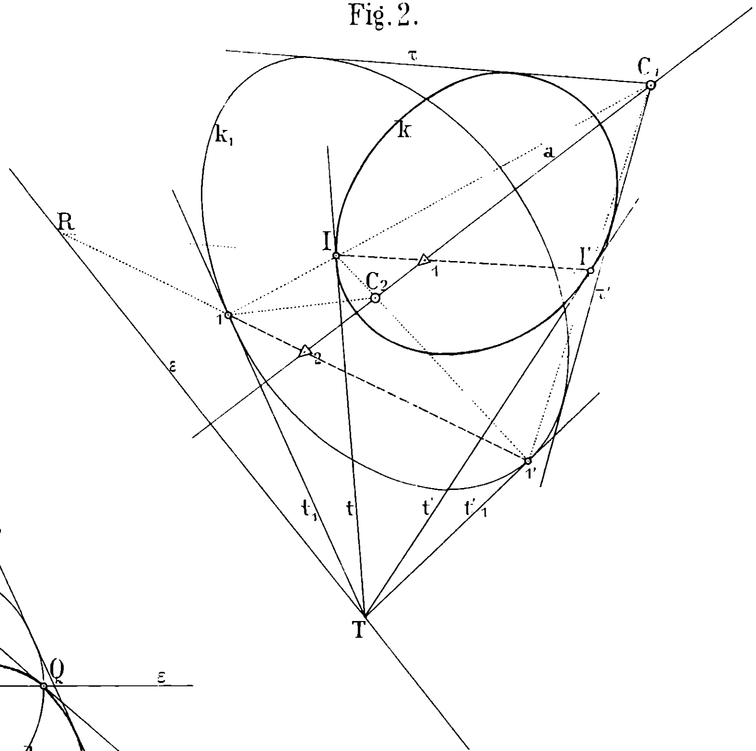
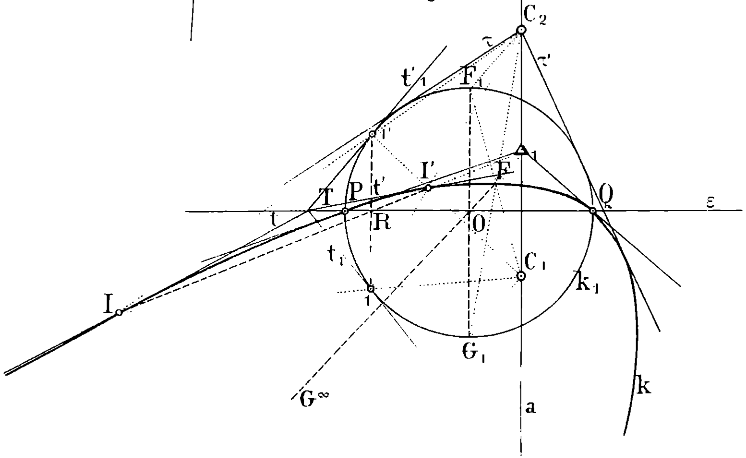


Fig. 3.



Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1880

Band/Volume: 81_2

Autor(en)/Author(s): Binder Wilhelm

Artikel/Article: Über Projectiv-Constructionen der Curven II. Ordnung. 648-654