Theorie der Bewegung auf developpablen Flächen.

Von Dip. Ing. **Ferd. Wittenbauer,**

Privatdocent an der k. k. technischen Hochschule zu Graz.

(Mit 17 Holzschnitten.)

1.

Die Bewegung auf einer vorgeschriebenen Fläche gehört bekanntlich zu jenen Capiteln der theoretischen Mechanik, welche noch eine eingehende Durchforschung als wünschenswerth erscheinen lassen. Von allen Problemen dieser Art ist es fast einzig das des sphärischen Pendels, welchem eine erschöpfende Behandlung zu Theil geworden.

Indessen ist es leicht, für eine Gattung von Flächen Gesetze aufzustellen, welche die Behandlung von Bewegungsproblemen oberwähnter Art, im Principe wenigstens, aller Schwierigkeit entkleiden. Es sind dies die developpablen Flächen, und die Aufstellung und beispielsweise Verwerthung jener Gesetze soll den Gegenstand vorliegender Abhandlung bilden.

Zunächst sei uns gestattet, auf einige grundsätzliche Betrachtungen über die Bewegung auf vorgeschriebenen Flächen allgemeiner Art zurückzugreifen.

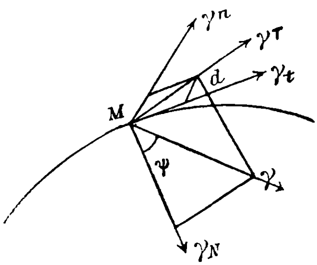
Bei der Bewegung auf einer vorgeschriebenen Fläche tritt zu der gegebenen Beschleunigung des bewegten Punktes ein Zwang hinzu, welcher den Punkt verhindert, die vorgeschriebene Fläche zu verlassen.

Dieser Zwang kann, da er einen verändernden Einfluss auf die Geschwindigkeit ausübt, jederzeit durch eine Beschleunigung ersetzt werden. Die Richtung dieses Zwanges wird im Allgemeinen nicht normal zur Fläche sein; bei Ausserachtlassung der Reibung auf der Fläche, wie im Folgenden auch angenommen wurde, ist dies der Fall.

Unter diesen Voraussetzungen zerlegen wir die Beschleunigung des bewegten Punktes in jedem Momente in drei Componenten:

1. Nach der Richtung der Normalen der Fläche;
2. Nach der Richtung der Tangente an die Bahn;
3. Nach der auf diesen beiden senkrecht stehenden Richtung.

Fig. 1.



Ist γ die gegebene Beschleunigung; sind γ_N, γ_t und γ_n die oben erwähnten Componenten derselben; γ_T die Projection der Beschleunigung auf die Tangentenebene der Fläche, Ψ der Winkel zwischen γ und γ_N, und α der Winkel zwischen γ_T und γ_t, so sind die Componenten der Beschleunigung durch folgende Ausdrücke bestimmt:

$$\gamma_N = \gamma . \cos \Psi$$
$$\gamma_t = \gamma . \sin \Psi . \cos \alpha$$
$$\gamma_n = \gamma . \sin \Psi . \sin \alpha.$$

Die Componente γ_N dient zur Bestimmung des Normalwiderstandes N der Fläche; ist nämlich v die Geschwindigkeit des bewegten Punktes, und r der Krümmungsradius des Normalschnittes der Fläche, welcher die Bahn des Punktes in M berührt, so ist bekanntlich

$$N = \frac{v^2}{r} - \gamma_N.$$

Die Componente γ_t gibt die Veränderung der Geschwindigkeit; es ist somit

$$\frac{dv}{dt} = \gamma_t$$

die Tangentialbeschleunigung.

Die Componente γ_n endlich ist die Normalbeschleunigung der Bewegung bezüglich der Tangentenebene der Fläche. Sie kann bekanntlich ausgedrückt werden durch die Relation

$$\frac{v^2}{R} = \gamma_n,$$

wenn R den Radius der geodätischen Krümmung bezeichnet.

Die beiden Ausdrücke

$$\gamma_t = \gamma_T . \cos\alpha = \frac{dv}{dt}$$

$$\gamma_n = \gamma_T . \sin\alpha = \frac{v^2}{R}$$

lassen den Zusammenhang der Bewegung auf der krummen Fläche und jener in der Ebene unmittelbar erkennen. Durch successive Umlegung sämmtlicher Tangentenebenen der Bahn in eine Ebene wird nämlich R zum Krümmungsradius der developpirten Bahn; der Bewegungszustand jedes Punktes im Developpement ist dann identisch mit dem Bewegungszustande des entsprechenden Punktes auf der Fläche, vorausgesetzt, dass die Grössen γ_T und α bei der Aufrollung nicht geändert werden.

Aus dieser Betrachtung folgt unmittelbar, dass die für die Bewegungsgrössen der ebenen Bewegung aufgestellten Relationen auch für die Bewegung auf vorgeschriebenen Flächen Giltigkeit besitzen, nur müssen dem Obigen gemäss die Beschleunigung γ durch deren Projection γ_T auf die Tangentenebene, der Krümmungsradius ρ durch den geodätischen Krümmungsradius R, und der Contingenzwinkel durch den geodätischen Contingenzwinkel E ersetzt werden.

Da nun ferner für die ebene Bewegung die Relationen gelten

$$v = C . e^{\int\frac{d\varepsilon}{\operatorname{tg}\alpha}} \quad \text{und} \quad \gamma = \frac{C_1}{\rho \sin\alpha} \quad e^{2\int\frac{d\varepsilon}{\operatorname{tg}\alpha}},$$

so kann nach Obigem für die Bewegung auf einer vorgeschriebenen Fläche geschrieben werden:

$$v = C . e^{\int\frac{dE}{\operatorname{tg}\alpha}} \quad \text{und} \quad \gamma_T = \frac{C_1}{R \quad \sin\alpha} . e^{2\int\frac{dE}{\operatorname{tg}\alpha}}.$$

Diese Betrachtungen haben besonderen Werth für die Bewegung auf developpabler Fläche. Bei dieser ist nämlich das Developpement unabhängig von der Bahn des Punktes, indem eben die Fläche selbst ein- für allemal in eine Ebene aufgerollt werden kann. Alle Bewegungen auf der Fläche lassen sich somit auf solche in der Ebene zurückführen.

Diese Behauptung ist allgemein giltig, und nicht nur für den speciellen Fall, dass die Projection der Beschleunigung auf die

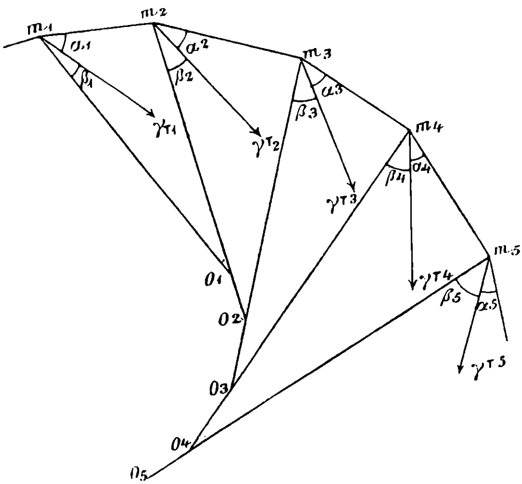
Tangentenebene der Fläche in die Erzeugende derselben fällt — wie bisher angenommen wurde.

Es lässt sich also der Satz aufstellen: „Wenn ein Punkt genöthigt ist, sich unter dem Einflusse irgend einer Beschleunigung auf einer developpablen Fläche zu bewegen, und letztere zu irgend einer Zeit in eine Ebene ausgebreitet wird, so beschreibt der Punkt die Deformationscurve seiner Bahn mit derselben Geschwindigkeit, mit welcher er seine Bahn auf der Fläche durchläuft, vorausgesetzt, dass die Beschleunigung ungeändert bleibt, sowohl ihrer Grösse nach, als ihrer Richtung gegen die Tangentenebene der Fläche“.

2.

Es seien $m_1 o_1$, $m_2 o_2$, $m_3 o_3, \ldots$ die unmittelbar aufeinanderfolgenden Erzeugenden einer beliebigen developpablen Fläche;

Fig. 2.



$o_1 o_2$, $o_2 o_3$, $o_3 o_4 \ldots$ die entsprechenden Elemente ihrer Wendecurve; ferner $m_1 m_2 m_3 \ldots$ die Bahn des betrachteten Punktes, γ_{T_1}, γ_{T_2}, $\gamma_{T_3}, \ldots$ die Projectionen seiner Beschleunigung auf die Tangentenebenen der Fläche, endlich $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ und $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots$ die Winkel, welche jene Projectionen mit den Tangenten der Bahn, respective den Erzeugenden der Fläche, einschliessen.

Rollen wir die betrachtete Fläche sammt den in ihr enthaltenen Stücken in eine Ebene auf, so bleiben die Winkel α und β ungeändert; die Erzeugenden der Fläche umhüllen nach der Aufrollung eine ebene Curve, welche die Developpirte der ursprünglichen Wendecurve ist.

Da die Winkel β bekannt sind, wenn die Beschleunigung γ gegeben ist, so lässt sich das resultirende ebene Bewegungsproblem in folgende Worte kleiden:

„Es ist die Bewegung eines Punktes in der Ebene zu untersuchen, wenn die der Grösse nach bekannte Beschleunigung desselben jederzeit einen bestimmten Winkel einschliessen soll mit der Tangente, die vom bewegten Punkte an eine gegebene fixe Curve gezogen werden kann“.

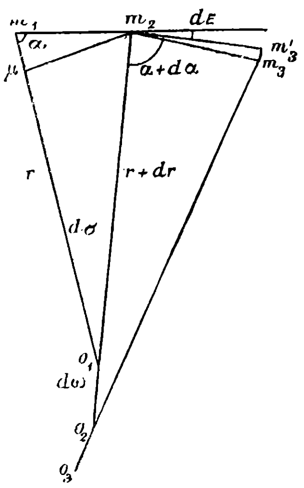
Auf die nähere Beleuchtung dieses Problems möge hier nicht eingegangen werden. Es ist aus ihm nur ersichtlich, dass es von Vortheil ist, bei allen Bewegungen auf einer developpablen Fläche an deren Wendecurve anzubinden, weil dieselbe für alle Bewegungen die nämliche Rolle spielt.

Für den speciellen Fall, dass die Projection γ_T der Beschleunigung stets in die Erzeugende der Fläche fällt, lässt sich dem Ausdrucke für die Geschwindigkeit

$$v = C . e^{\int \frac{dE}{\operatorname{tg} \alpha}}$$

eine bemerkenswerthe Form geben.

Fig. 3.



In diesem Falle sind nämlich sämmtliche Winkel β gleich Null, und es berühren sämmtliche Beschleunigungsrichtungen γ_T die Wendecurve.

Behält man die früheren Bezeichnungen bei, benennt ferner das Element der Wendecurve $o_1 o_2$ mit $d\omega$; r und $r + dr$ die Fahrstrahlen des bewegten Punktes bezüglich o_1 und o_2, endlich $d\sigma$ den Contingenzwinkel der Wendecurve, und bemerkt, dass m'_3 die Umlegung des Punktes m_3 um die Erzeugende $m_2 o_2$

in die Ebene $m_1 o_1 m_2$ ist, wodurch in dE der geodätische Contingenzwinkel erscheint, so wird

$$(\alpha+d\alpha)+dE = \alpha+d\sigma$$

also

$$dE = d\sigma - d\alpha$$

und

$$\frac{dE}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{d\sigma}{\operatorname{tg}\alpha} - \frac{d\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

Fällt man $m_2\mu$ senkrecht auf $m_1 o_1$, so wird, da $o_1\mu = o_1 m_2$ angesehen werden kann,

$$(r+dr)-d\omega = r-m_1\mu$$
$$m_1\mu = d\omega-dr.$$

Ferner ist auch

$$m_1\mu = r d\sigma . \operatorname{cotg}\alpha,$$

mithin

$$\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{d\omega-dr}{r . d\sigma}$$

oder

$$\frac{dE}{\operatorname{tg}\alpha} = -\frac{d\alpha}{\operatorname{tg}\alpha} - \frac{dr}{r} + \frac{d\omega}{r}$$

somit

$$\int\frac{dE}{\operatorname{tg}\alpha} = -l(r\sin\alpha) + \int\frac{d\omega}{r},$$

und

$$v = \frac{C}{r\sin\alpha}e^{\int\frac{d\omega}{r}}$$

Ist die developpable Fläche eine Cylinderfläche, so kann stets $d\omega = dr$ gesetzt werden, es wird sodann

$$v = \frac{C}{\sin\alpha}.$$

Für die Kegelfläche hingegen wird $d\omega = 0$, mithin

$$v = \frac{C}{r\sin\alpha}.$$

Im ersteren Falle ist die developpirte Bewegung eine ebene Bewegung mit constanter Beschleunigungsrichtung, im letzteren Falle hat man es mit der Centralbewegung zu thun.

3.

Aus dem Vorhergehenden ist ersichtlich, dass es in jedem einzelnen Falle nothwendig sein wird, die Wendecurve einer Developpirung zu unterziehen, und es soll hier der Weg angegeben werden, auf welchem dies erreicht werden kann.

Bei der successiven Aufrollnng der Wendecurve um ihre Tangenten in eine Ebene bleibt jedes ihrer Bogenelemente und jeder ihrer Contingenzwinkel ungeändert, mithin auch der Krümmungsradius in jedem ihrer Punkte.

Nennt man ξ, η, ζ und ρ die Coordinaten und den Krümmungsradius der Wendecurve, x, y und r die Coordinaten und den Krümmungsradius ihrer Developpirten, ferner $d\sigma$ und ds die entsprechenden Bogenelemente beider, so muss $d\sigma = ds$ und $\rho = r$ sein. Nun ist

$$\rho = \frac{\left\{1 + \left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{d\xi}\right)^2\right\}^{3/2}}{\sqrt{\left(\frac{d^2\eta}{d\xi^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2\zeta}{d\xi^2}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{d\xi}\cdot\frac{d^2\zeta}{d\xi^2} - \frac{d\zeta}{d\xi}\cdot\frac{d^2\eta}{d\xi^2}\right)^2}}$$

und

$$r = \frac{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

Sind ferner $f_1(\xi, \eta, \zeta) = 0$ und $f_2(\xi, \eta, \zeta) = 0$ die Gleichungen der Wendecurve, so kann $\rho = F(\xi)$ bestimmt werden, wodurch man erhält:

$$\frac{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = F(\xi). \qquad \alpha)$$

Da weiters

$$d\sigma = d\xi \left\{1 + \left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{d\xi}\right)^2\right\}^{1/2} = F_1(\xi) \,.\, d\xi$$

und

$$ds = dx \left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{1/2}$$

so wird

$$dx \left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{1/2} = F_1(\xi) \,.\, d\xi. \qquad \beta)$$

Dividirt man β) durch α), so erhält man

$$\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{F_1(\xi)}{F(\xi)} \quad d\xi,$$

woraus

$$\text{arc tang}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \int \frac{F_1(\xi)}{F(\xi)} \quad d\xi = f(\xi)$$

und

$$\frac{dy}{dx} = \text{tang} f(\xi). \tag{γ}$$

Es ist dann aus β)

$$dx = \frac{F_1(\xi)}{\sec f(\xi)} \cdot d\xi,$$

woraus

$$x = \int \frac{F_1(\xi)}{\sec f(\xi)} \cdot d\xi = \varphi(\xi). \tag{δ}$$

Ferner ist aus γ)

$$dy = F_1(\xi) \cdot \sin f(\xi) \cdot d\xi,$$

woraus

$$y = \int F_1(\xi) \cdot \sin f(\xi) \cdot d\xi = \Psi(\xi). \tag{ε}$$

Aus δ) und ε) ergibt sich schliesslich durch Elimination von ξ die Gleichung der developpirten Wendecurve

$$\underline{y = f(x).}$$

Ein anderer Weg, der in gewissen Fällen rascher zum Ziele führt, ist folgender:

Wählt man die Bogenlänge s als unabhängig Veränderliche, so wird

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d^2\xi}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2\eta}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2\zeta}{ds^2}\right)^2}}$$

$$r = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2}}$$

und

$$\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2 = \overline{d\xi}^2 + \overline{d\eta}^2 + \overline{d\zeta}^2 = \overline{ds}^2$$

Da $\rho = r$ ist, wird

$$\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 = \left(\frac{d^2\xi}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2\eta}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2\zeta}{ds^2}\right)^2$$

woraus man mit Hilfe der Gleichungen für die Wendecurve auch finden kann

$$\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 = F(s). \qquad \alpha)$$

Hiemit combiniren wir die Gleichung

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1. \qquad \beta)$$

Durch Differentiation von β.) erhalten wir

$$\frac{dx}{ds} \cdot \frac{d^2x}{ds^2} + \frac{dy}{ds} \cdot \frac{d^2y}{ds^2} = 0,$$

woraus

$$\frac{d^2y}{ds^2} = -\frac{d^2x}{ds^2} \; \frac{\frac{dx}{ds}}{\frac{dy}{ds}}$$

und durch Substitution in α)

$$\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 \left\{1 + \frac{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2}{\left(\frac{dy}{ds}\right)^2}\right\} = F(s),$$

woraus

$$\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 = F(s) . \left(\frac{dy}{ds}\right)^2$$

und

$$\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + F(s) . \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 - F(s) = 0$$

sowie analog

$$\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + F(s) . \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 - F(s) = 0 \qquad \gamma)$$

Setzt man $\frac{dx}{ds} = p$, so wird

$$\left(\frac{dp}{ds}\right)^2 = F(s) . (1 - p^2)$$

und

$$\pm \frac{dp}{\sqrt{1-p^2}} = \sqrt{F(s)} \, . ds.$$

Bezieht man das eine Zeichen auf x, das andere auf y, so wird

$$\arcsin \left(\frac{dx}{ds}\right) = C_1 + \int \sqrt{F(s)} \, . ds$$

und
$$\frac{dx}{ds} = \sin\left[C_1 + \int \sqrt{F(s)} \, . \, ds\right],$$
woraus
$$x = C_2 + \int \sin\left[C_1 + \int \sqrt{F(s)} \, . \, ds\right] . \, ds$$
und
$$y = C_3 + \int \cos\left[C_1^1 + \int \sqrt{F(s)} \, . \, ds\right] . \, ds.$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich durch Elimination von s
$$y = f(x)$$
als Gleichung der Developpirten.

4.

Hinsichtlich der Bestimmung des Normaldruckes auf die developpable Fläche ist die folgende Bemerkung von Wichtigkeit.

Der Normaldruck ist nach früher bestimmt durch die Gleichung
$$N = \frac{v^2}{r} - \gamma_N,$$
worin r den Krümmungshalbmesser des die Bahn berührenden Normalschnittes bezeichnet.

Nun liegen aber je zwei unendlich nahen Tangentenebenen der developpablen Fläche parallel zu den entsprechenden des Richtungskegels der Fläche, indem die Erzeugenden des letzteren parallel sind zu denen der Fläche; es genügt daher, r für den Richtungskegel zu bestimmen, wobei selbstverständlich die Spitze des Kegels in den betreffenden Punkt der Wendecurve verlegt gedacht werden muss.

Nun gilt aber für den Kegel die bekannte Relation
$$r = \frac{r_1}{\sin^2\alpha},$$
worin r_1 den Krümmungshalbmesser des zur Erzeugenden senkrechten Normalschnittes, und α den Winkel der Bahn mit der Erzeugenden bedeutet. Obige Relation für den Normaldruck N nimmt daher die Form an
$$N = \frac{(v \, . \sin\alpha)^2}{r_1} - \gamma_N$$

5.

Bewegung eines schweren Punktes auf der entwickelbaren Schraubenfläche.

Die entwickelbare Schraubenfläche ist der geometrische Ort aller Tangenten der Schraubenlinie. Letztere ist mithin gleichzeitig die Wendecurve der Fläche.

Unter der Voraussetzung, dass die Axe des zugehörigen Kreiscylinders vom Basishalbmesser a vertikal stehe, und der Steigungswinkel der Wendecurve s hiesse, lauten die Gleichungen der letzteren

$$x = a \,.\cos \frac{z}{a\,.\,tg s} \text{ und } y = a\,.\sin \frac{z}{a\,.\,tg s}.$$

Der Krümmungshalbmesser der Wendecurve ergibt sich mit

$$r = \frac{a}{\cos^2 s},$$

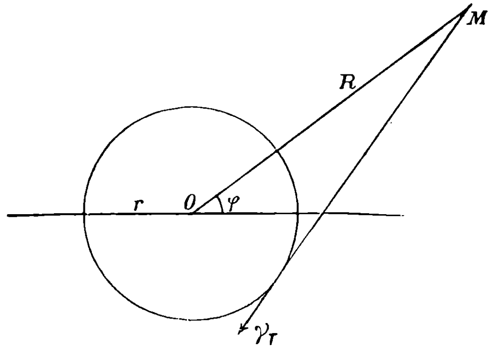
also constant; die Developpirte derselben ist somit ein Kreis vom Radius r.

Bei der oben angenommenen Lage der Schraubenfläche ist die Beschleunigung der Schwere parallel zu der Axe des Cylinders; die Projection der Beschleunigung auf die Tangentenebene der Fläche fällt somit in die Richtung der Erzeugenden.

Die Grösse dieser Projection ist $\gamma_T = \gamma\,.\sin s = g\,.\sin s$.

Nach der Aufrollung der Fläche berührt die Richtung von γ_T stets den Kreis vom Halbmesser r.

Fig. 4.



Wählt man im Developpement den Mittelpunkt dieses Kreises zum Ursprunge eines Polarcoordinatensystems, so lauten die Bewegungsgleichungen

$$\frac{d^2R}{dt^2} - R.\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \gamma_T.\frac{\sqrt{R^2-r^2}}{R} \tag{1}$$

$$2\frac{dR}{dt}.\frac{d\varphi}{dt} + R.\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \gamma_T.\frac{r}{R}. \tag{2}$$

Schreibt man die Gleichung 2) in der Form

$$\frac{1}{R}.\frac{d}{dt}\left(R^2\frac{d\varphi}{dt}\right) = \gamma_T.\frac{r}{R},$$

so wird

$$d\left(\mathrm{R}^2\frac{d\varphi}{dt}\right) = \gamma_T r\, dt$$

und

$$R^2.\frac{d\varphi}{dt} = \gamma_T rt + C,$$

woraus

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\gamma_T rt + C}{R^2}. \tag{3}$$

Durch Substitution dieses Ausdruckes in 1) wird

$$R^3\frac{d^2R}{dt^2} - \gamma_T R^2\sqrt{R^2-r^2} = (\gamma_T rt + C)^2 \tag{4}$$

eine Differentialgleichung zwischen R und t, welche nur hinsichtlich der ersten Integration Schwierigkeiten macht, während die zweite Integration bekanntlich jederzeit möglich ist. Die Gleichungen 3) und 4) zusammengenommen geben durch Elimination von t die Gleichung der Bahn.

Für die Geschwindigkeit v lässt sich jedoch leicht ein Ausdruck angeben. Multiplicirt man nämlich die Gleichung 1) mit $\frac{dR}{dt}$, die Gleichung 2) mit $R.\frac{d\varphi}{dt}$, so wird nach Addition der beiden so umgeformten Gleichungen:

$$\frac{dR}{dt}.\frac{d^2R}{dt^2} + R.\frac{dR}{dt}.\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + R^2.\frac{d\varphi}{dt}.\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \gamma_T\left[\frac{\sqrt{R^2-r^2}}{R}.\frac{dR}{dt} + r\frac{d\varphi}{dt}\right]$$

oder $\frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dt} \left\{ \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 + R^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right\} = \gamma_T \left[\frac{\sqrt{R^2-r^2}}{R} \cdot \frac{dR}{dt} + r \cdot \frac{d\varphi}{dt} \right].$

Nun ist bekanntlich

$$v^2 = \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 + R^2 \cdot \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2,$$

daher

$$\frac{1}{2} d(v^2) = \gamma_T \left[\frac{\sqrt{R^2-r^2}}{R} \cdot dR + r d\varphi \right]$$

und durch Integration

$$\frac{1}{2} v^2 - \frac{1}{2} v_0^2 = \gamma_T \left[\int \frac{\sqrt{R^2-r^2}}{R} \cdot dR + r \int d\varphi \right] + C.$$

Setzt man

$$\sqrt{R^2-r^2} = T,$$

so wird $\int \frac{\sqrt{R^2-r^2} . dR}{R} = \int \frac{T^2 . dT}{T^2 + r^2} = T - r \operatorname{arc tang} \frac{T}{r}$

und $\frac{1}{2} v^2 - \frac{1}{2} v_0^2 = \gamma_T \left[T - r \operatorname{arc tang} \frac{T}{r} + r\varphi + C_1 \right]$

oder

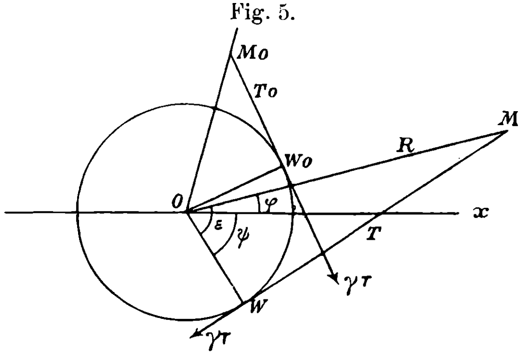
$$v^2 = v_0^2 + 2\gamma_T \left[\sqrt{R^2 - r^2} + r \left(\varphi - \operatorname{arc tang} \frac{\sqrt{R^2-r^2}}{r} \right) + C_1 \right] \quad 5)$$

Die Componenten v_φ und v_R der Geschwindigkeit sind durch die Ausdrücke gegeben:

$$v_\varphi = R . \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\gamma_T r t + C}{R}$$

$$v_R = \frac{dR}{dt} = \sqrt{v^2 - v_\varphi{}^2}.$$

Fig. 5.



Die Niveaulinien der Bewegung sind nach Obigem leicht bestimmbar. Ihre Gleichung ist nämlich

$$T + r\left(\varphi - \operatorname{arc\,tang}\frac{T}{r}\right) + C_1 = 0.$$

Nun ist nach obenstehender Figur

$$\operatorname{arc\,tang}\frac{T}{r} = \varepsilon,$$

daher

$$\varphi - \operatorname{arc\,tang}\frac{T}{r} = \varphi - \varepsilon = \Psi$$

und

$$T + r\Psi + C_1 = 0.$$

Für den Beginn der Bewegung ist

$$T_0 + r\Psi_0 + C_1 = 0,$$

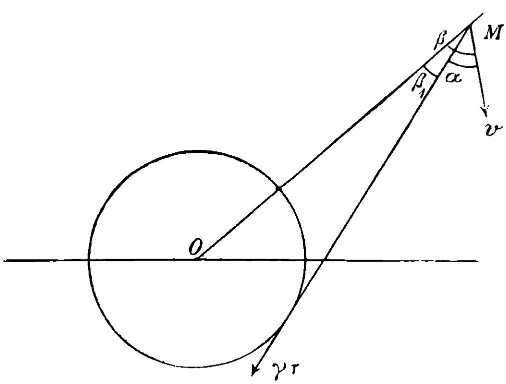
somit nach Subtraction

$$\underline{T - T_0 = r\,(\Psi_0 - \Psi)} \qquad 6)$$

die Gleichung der Niveaulinien. Es sind somit die Evolventen des Kreises, dessen Radius r ist, oder mit anderen Worten: die Evolventen der developpirten Wendecurve.

Um den Normaldruck auf die Schraubenfläche zu bestimmen, benützen wir die in Nr. 4 gemachte Bemerkung. Der Richtungskegel der Schraubenfläche ist ein senkrechter Kreiskegel mit dem Winkel $180 - 2s$ an der Spitze.

Fig. 6.



Da ferner

$$\alpha = \beta - \beta_1$$

und

$$\operatorname{tang} \beta = \frac{v_\varphi}{v_R}$$

$$\operatorname{tang} \beta_1 = \frac{r}{\sqrt{R^2 - r^2}},$$

so ergibt sich

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{v_\varphi \sqrt{R^2 - r^2} - v_R \cdot r}{v_\varphi \cdot r + v_R \cdot \sqrt{R^2 - r^2}}$$

und

$$\sin^2 \alpha = \frac{[v_\varphi \cdot \sqrt{R^2 - r^2} - v_R \cdot r]^2}{R^2\, v^2}.$$

Ferner ist für einen senkrechten Kreiskegel der Normalschnitt senkrecht zur Erzeugenden eine Kegelschnittslinie, deren Scheitel in jener Erzeugenden liegt. Der Krümmungshalbmesser r_1 dieses Normalschnittes ist mithin der Krümmungshalbmesser im Scheitel des Kegelschnittes. Dies ist aber der halbe Parameter p des Kegelschnittes, somit

$$r_1 = \frac{p}{2}.$$

Wie man sich leicht überzeugen kann, wird

$$p = 2T \operatorname{cotg} s,$$

wenn T die Entfernung des Scheitels von der Kegelspitze, und s den Basiswinkel des Kegels bezeichnet; somit wird

$$r_1 = T \operatorname{cotg} s = \sqrt{R^2 - r^2} \cdot \operatorname{cotg} s.$$

Endlich wird in dem Ausdrucke für den Normaldruck N

$$\gamma_N = g \cdot \cos s;$$

es kann also nach entsprechender Substitution geschrieben werden:

$$N = \frac{[v_\varphi \cdot \sqrt{R^2 - r^2} - v_R \cdot r]^2}{R^2 \sqrt{R^2 - r^2} \cdot \operatorname{cotg} s} - g \cdot \cos s, \qquad 7)$$

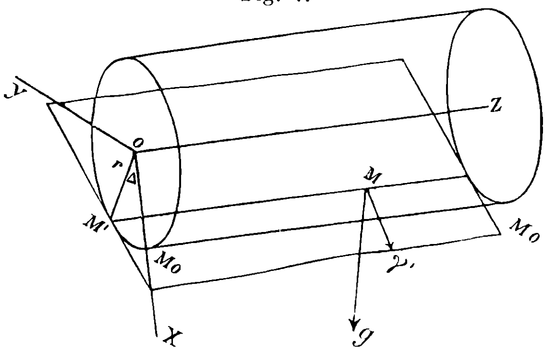
ein Ausdruck, welcher nur noch durch Substitution von v_φ und v_R ergänzt zu werden braucht, um ihn als Function von R, φ und t zu erkennen.

6.

Bewegung eines schweren Punktes auf einem schiefliegenden Kreiscylinder.

Wir wählen die Axe des Cylinders als Z-Axe, und senkrecht hierauf in irgend einem Punkte O die X- und Y-Axe als Axen

Fig. 7.



eines rechtwinkligen Coordinatensystems. Die Ebene der XZ sei parallel gewählt zur Beschleunigung der Schwere; sei der Winkel, welchen letztere mit den Erzeugenden des Cylinders einschliesst.

Mit γ_T bezeichnen wir wieder die Projection der Beschleunigung g auf die Tangentenebene des Punktes M, und mit γ_1 und γ_2 die Projectionen von γ_T auf die Cylindererzeugende und senkrecht darauf.

Es ist offenbar

$$\gamma_1 = g \, . \sin \varepsilon \, . \sin \Delta,$$

wenn Δ den Winkel der Normalen im Punkte M mit der XZ-Ebene bezeichnet, und

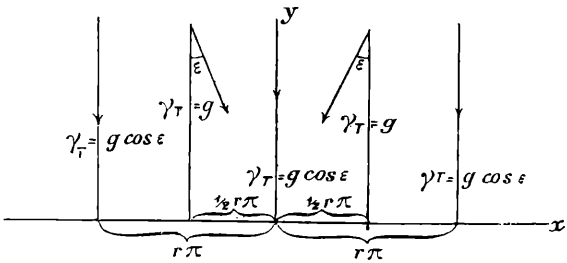
$$\gamma_2 = g \cdot \cos \varepsilon.$$

Developpiren wir nun die Cylinderfläche, und nehmen im Developpement die Erzeugende M_0 als Y-Axe, senkrecht darauf die X-Axe an für ein rechtwinkliges Coordinatensystem in der Ebene; bezeichnen ferner den Radius der Cylindergrundfläche mit r, und bemerken, dass $x = r\Delta$, also $\Delta = \frac{x}{r}$ wird, so erhalten wir für die Beschleunigungscomponenten der developpirten Bewegung

$$\left.\begin{aligned} X &= -g.\sin\varepsilon.\sin\frac{x}{r} \\ Y &= -g.\cos\varepsilon \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Untenstehende Figur veranschaulicht das Oscilliren der Beschleunigungsrichtung im Developpement.

Fig. 8.



Die Gleichungen 1) lassen sich leicht integriren, wie folgt:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g.\sin\varepsilon.\sin\frac{x}{r}$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right).d\left(\frac{dx}{dt}\right) = -g.\sin\varepsilon.\sin\frac{x}{r}.dx$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = gr\sin\varepsilon\cos\frac{x}{r} + C.$$

Für den Beginn:

$$\frac{1}{2}v_{ox}^2 = gr\sin\varepsilon\cos\frac{x_o}{r} + C$$

woraus $$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - v_{ox}^2\right] = gr\sin\varepsilon\left(\cos\frac{x}{r} - \cos\frac{x_o}{r}\right) \tag{2}$$

oder auch $$\frac{dx}{dt} = \sqrt{v_{ox}^2 + 2gr\sin\varepsilon\left(\cos\frac{x}{r} - \cos\frac{x_o}{r}\right)}. \tag{3}$$

Ebenso findet man:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g.\cos\varepsilon$$

$$\frac{dy}{dt}.d\left(\frac{dy}{dt}\right) = -g.\cos\varepsilon\,dy$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = -g \cdot \cos\varepsilon \cdot y + C_1.$$

Für den Beginn

$$\frac{1}{2} v_{0y}^2 = -g \cdot \cos\varepsilon \cdot y_0 + C_1$$

woraus

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 - v_{0y}^2\right] = g \cos\varepsilon\,(y_0 - y) \tag{4}$$

oder auch

$$\frac{dy}{dt} = \sqrt{v_{0y}^2 + 2g\cos\varepsilon\,(y_0 - y)}. \tag{5}$$

Addirt man 2) und 4), und bemerkt, dass

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = v^2 \text{ und } v_{0x}^2 + v_{0y}^2 = v_0^2$$

so wird

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2 = gr\sin\varepsilon\left(\cos\frac{x}{r} - \cos\frac{x_0}{r}\right) + g\cos\varepsilon\,(y_0 - y). \tag{6}$$

Um den höchsten Punkt zu ermitteln, welchen der bewegte Punkt erreichen kann, setzen wir

$$\frac{dy}{dt} = 0$$

wodurch aus Gleichung 5) folgt:

$$v_{0y}^2 + 2g\cos\varepsilon\,(y_0 - y_1) = 0$$

und daraus

$$y_1 = y_0 + \frac{v_{0y}^2}{2g\cos\varepsilon}. \tag{7}$$

Aus Gleichung 5) folgt ferner

$$dt = \frac{dy}{\sqrt{v_{0y}^2 + 2g\cos\varepsilon\,(y_0 - y)}}$$

$$t = \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{\sqrt{v_{0y}^2 + 2g\cos\varepsilon\,(y_0 - y)}} =$$

$$= \left\{ -\frac{1}{g\cos\varepsilon}\sqrt{v_{0y}^2 + 2g\cos\varepsilon\,(y_0 - y)} \right\}_{y_0}^{y}$$

woraus $$t = \frac{1}{g \cdot \cos\varepsilon} \left\{ v_{0y} - \sqrt{v_{0y}^2 + 2g \cdot \cos\varepsilon \cdot (y_0 - y)} \right\} \tag{8}$$

Die Zeit, welche bis zur Erreichung des höchsten Punktes verfliesst, ergibt sich durch Benützung der Gleichung 7) mit

$$t_1 = \frac{v_{0y}}{g \cos\varepsilon}. \tag{9}$$

Gleichung 8) kann auch in der Form geschrieben werden:

$$y_0 - y = \frac{1}{2} g \cos\varepsilon \frac{t^2}{2} - v_{0y} \cdot t.$$

Diese Gleichung ist von r ganz unabhängig; ihre rechte Seite ist der Ausdruck für den Weg eines Punktes, der sich längs einer beliebigen Erzeugenden unter Einfluss der Anfangsgeschwindigkeit v_{0y} und der Beschleunigung der Schwere bewegt.

Diese Gleichung hat übrigens für alle Cylinderflächen Giltigkeit; sie drückt aus, dass sämmtliche Wege, welche zwischen zwei auf den Erzeugenden senkrechten Ebenen liegen, in gleichen Zeiten zurückgelegt werden, vorausgesetzt, dass die Componente v_{0y} der Anfangsgeschwindigkeit dieselbe bleibe.

Die Integration der Gleichung 3) lässt sich auf folgende Weise vornehmen. Es ist nämlich

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{v_{ox}^2 + 2gr \sin\varepsilon \left(\cos\frac{x}{r} - \cos\frac{x_o}{r}\right)}}.$$

Setzt man

$$\frac{v_{ox}^2 - 2gr \sin\varepsilon \cdot \cos\frac{x_o}{r}}{2gr \sin\varepsilon} = a,$$

so wird

$$dt = \frac{r \cdot d\left(\frac{x}{r}\right)}{\sqrt{2gr \sin\varepsilon \left(a + \cos\frac{x}{r}\right)}}$$

$$dt = \sqrt{\frac{r}{2ag \sin\varepsilon}} \cdot \frac{d\left(\frac{x}{r}\right)}{\sqrt{1 + \frac{\cos\frac{x}{r}}{a}}},$$

woraus

woraus

$$t = \sqrt{\frac{r}{2ag\sin\varepsilon}} \cdot \int \left\{1 + \frac{\cos\frac{x}{r}}{a}\right\}^{-1/2} d\left(\frac{x}{r}\right).$$

Nun ist nach dem binomischen Lehrsatze:

$$\left\{1 + \frac{\cos\frac{x}{r}}{a}\right\}^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\cos\frac{x}{r}}{a}\right) + \frac{1.3}{2.4}\left(\frac{\cos\frac{x}{r}}{a}\right)^2 - \frac{1.3.5}{2.4.6}\left(\frac{\cos\frac{x}{r}}{a}\right)^3 + \dots$$

Die Integration dieser einzelnen Glieder ist nach der Formel durchzuführen:

$$\int\left(\cos\frac{x}{r}\right)^n d\left(\frac{x}{r}\right) = \frac{\cos^{n-1}\frac{x}{r}\,.\sin\frac{x}{r}}{n} + \frac{n-1}{n}\int\left(\cos\frac{x}{r}\right)^{n-2} d\,\frac{x}{r}.$$

Führt man diese Integration durch, so erhält man

$$\underline{t = \sqrt{\frac{r}{2ag\sin\varepsilon}}\left\{A_0\frac{x}{r} - \sin\frac{x}{r}\left[A_1 - A_2\cos\frac{x}{r} + A_3\cos^2\frac{x}{r} - \dots\right]\right\}} \qquad 10)$$

worin die Coëfficienten A die Werthe besitzen:

$$A_0 = 1 + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a^2} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\quad\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{a^4} + \cdot$$

$$A_1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{a^3} + \frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10}\cdot\frac{2.4}{3.5}\cdot\frac{1}{a^5} + \dots$$

$$A_2 = \frac{1.3}{2\ 4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a^2} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\cdot\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{a^4} + \frac{1.3.5.7.9.11}{2.4.6.8.10.12}\cdot\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{a^6} + \dots$$

$$A_3 = \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{a^3} + \frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10}\cdot\frac{1.4}{3.5}\cdot\frac{1}{a^5} + \frac{1.3.5.7.9.11.13}{2.4.6.8.10.12.14}\cdot\frac{1.4.6}{3,5.7}\cdot\frac{1}{a^7} + \cdot$$

oder in recurrenter Form ausgedrückt:

$$A_0 = A_0$$

$$A_1 = A_1$$

$$A_2 = (A_0 - 1)$$

$$A_3 = \left(A_1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{a}\right)\cdot\frac{1}{2}$$

$$A_4 = (A_2 - \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a^2}) \cdot \frac{2}{3}$$

$$A_5 = (A_3 - \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{a^3}) \cdot \frac{3}{4} \quad \text{u. s. f.}$$

Die Coëfficienten A werden stets kleiner, wie man sich aus den letzten Ausdrücken überzeugen kann; ebenso nehmen die Potenzen des cosinus stets ab, so dass man die Reihe in der Gleichung 10) an einer bestimmten, der verlangten Genauigkeit entsprechenden Grenze wird abbrechen können, um einen Werth für die Zeit t zu erhalten.

Setzt man die Ausdrücke 8) und 10) einander gleich, so erhält man die Gleichung der Bahn.

Der bewegte Punkt kann bei seiner Bewegung in der Cylinderfläche dreierlei Arten von Bahnen zurücklegen: er beschreibt entweder volle Umläufe; er oscillirt im Cylinder, ohne die höchste Erzeugende desselben je zu erreichen; oder endlich er nähert sich der letzteren assymptotisch.

Ob der eine oder andere dieser Fälle eintritt, lehrt eine Discussion der Gleichung 3). Ersetzen wir hierin $\frac{x}{r}$ wieder durch Δ, so wird

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{v_{ox}^2 + 2gr \sin \varepsilon (\cos \Delta - \cos \Delta_0)}.$$

Führt man für Δ und Δ_0 die halben Winkel ein, so ist

$$\cos \Delta = 1 - 2 \sin^2 \frac{\Delta}{2}$$

$$\cos \Delta_0 = 1 - 2 \sin^2 \frac{\Delta_0}{2},$$

$$\text{mithin } \cos \Delta - \cos \Delta_0 = 2(\sin^2 \frac{\Delta_0}{2} - \sin^2 \frac{\Delta}{2})$$

und

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{v_{ox}^2 + 4gr \sin \varepsilon (\sin^2 \frac{\Delta_0}{2} - \sin^2 \frac{\Delta}{2})}.$$

Die Bahn des Punktes wird tangentiell zu den Erzeugenden, wenn $\frac{dx}{dt} = 0$ wird, d. h.

$$v_{ox}^2+4gr\sin\varepsilon(\sin^2\frac{\Delta_0}{2}-\sin^2\frac{\Delta}{2})=0$$

oder

$$\sin^2\frac{\Delta}{2}=\frac{v_{ox}^2+4gr\sin\varepsilon\sin^2\frac{\Delta_0}{2}}{4gr\sin\varepsilon}=b^2.$$

Da nun $\sin^2\frac{\Delta}{2}\gtreqless 0$ sein muss, so kann für $b>1$ der Quozient $\frac{dx}{dt}$ nie Null werden, und die Bahn keine Erzeugende berühren; für $b<1$ ergeben sich zwei Werthe von $\sin\frac{\Delta}{2}$, also auch von Δ, welche nur durch das Vorzeichen von einander verschieden sind; die Bahn berührt in diesem Falle zwei zu der untersten symmetrisch gelegene Erzeugende. Für $b=1$ endlich fallen diese Erzeugenden in eine einzige, die oberste des Cylinders, zusammen.

Es finden demnach volle Umläufe, Oscillationen oder eine assymptotische Annäherung an die höchste Erzeugende statt, je nachdem b grösser, kleiner oder gleich der Einheit ist.

Die Behandlung dieser drei Fälle ist übrigens ganz die gleiche wie bei der Pendelbewegung.

Specieller Fall. Für $r=\infty$ übergeht der Cylinder in eine Ebene. — Verwenden wir den Ausdruck 3):

$$\frac{dx}{dt}=\sqrt{v_{ox}^2+2gr\sin\varepsilon\,(\cos\Delta-\cos\Delta_0)}$$

und bedenken, dass jetzt $r\cos\Delta=r\cos\Delta_0$ ist, so wird

$$\frac{dx}{dt}=v_{ox},$$

woraus

$$t=\frac{x}{v_{ox}}+C.$$

Ferner ist nach 8)

$$t=\frac{1}{g\cos\varepsilon}\left\{v_{oy}-\sqrt{v_{oy}^2+2g\cos\varepsilon\,(y_0-y)}\right\}.$$

Die Gleichsetzung dieser beiden letzten Ausdrücke gibt die Gleichung der Bahn

$$\left(\frac{x}{v_{ox}}+C\right).\left[\left(\frac{x}{v_{ox}}+C\right)g\cos\varepsilon-2v_{oy}\right]=2(y_0-y).$$

Es ist dies mithin eine Parabel.

Der Normalwiderstand der Fläche ergibt sich aus der Formel

$$N=\frac{(v\sin\alpha)^2}{r}-\gamma_N;$$

α bedeutet hierin den Winkel der Geschwindigkeit mit der Erzeugenden des Cylinders. Nun ist aber

$$(v\sin\alpha)^2=\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=v_{ox}^2+2gr\sin\varepsilon\,(\cos\Delta-\cos\Delta_0).$$

Ferner ist

$$\begin{aligned}\gamma_N^2 &= g^2-\gamma_1^2-\gamma_2^2\\ &= g^2-g^2\sin^2\varepsilon\sin^2\Delta-g^2\cos^2\varepsilon\\ &= g^2\sin^2\varepsilon\cos^2\Delta,\end{aligned}$$

somit

$$\gamma_N=-g\sin\varepsilon\cos\Delta,$$

und zwar nimmt man das negative Zeichen deshalb, weil für $\Delta=0$ die Componente γ_N dem Normaldruck der Fläche entgegengesetzt ist. Es wird somit

$$\begin{aligned}N &= \frac{v_{ox}^2}{r}+2g\sin\varepsilon\,(\cos\Delta-\cos\Delta_0)+g\sin\varepsilon\,.\cos\Delta\\ &= \left[\frac{v_{ox}^2}{r}-2g\sin\varepsilon\cos\Delta_0\right]+3g\sin\varepsilon\,.\cos\Delta,\end{aligned}$$

oder, wenn wir für den ersten, constanten Theil dieses Ausdruckes C setzen

$$\underline{N=C+3g\sin\varepsilon\,.\cos\Delta} \qquad 11)$$

Den grössten Werth erreicht dieser Ausdruck für $\Delta=0$, d. i. für die unterste Erzeugende, nämlich

$$N_u=C+3g\sin\varepsilon.$$

Bei vollen Umläufen wird der kleinste Werth des Normaldruckes in der höchsten Erzeugenden erreicht, d. i.

$$N_h=C-3g\sin\varepsilon.$$

Für $\Delta=\pm\pi$ besitzt der Normaldruck den Mittelwerth zwischen N_u und N_h, nämlich

$$N_m=C.$$

Bei Oscillationen wird der kleinste Werth des Normaldruckes in jener Erzeugenden erreicht, welche die Bahn des Punktes berührt. Es wird nämlich für $\frac{dx}{dt}=0$

$$N=-\gamma_N=g\sin\varepsilon\,.\cos\Delta.$$

7.

Bewegung eines Punktes auf der Kegelfläche.

Die Wendecurve der Kegelfläche ist ein Punkt, nämlich die Spitze des Kegels. Die Projection γ_T der Beschleunigung γ auf die Tangentenebene zerlegen wir in ihre Componenten γ_r und γ_φ nach der Erzeugenden des Kegels und senkrecht darauf. Nach Aufrollung des Kegels in eine Ebene haben wir es mit einem ebenen Bewegungsproblem zu thun, das fixirt ist durch die Ausdrücke für die Componenten der Beschleunigung in Polarcoordinanten:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 &= \gamma_r \\ 2\frac{dr}{dt}\cdot\frac{d\varphi}{dt} + r\cdot\frac{d^2\varphi}{dt^2} &= \gamma_\varphi \end{aligned}\right\} \qquad 1)$$

wobei die Spitze des Kegels als Pol figurirt.

Von einiger Wichtigkeit ist die Behandlung jenes Falles, in welchem γ_r als Function von φ, und γ_φ als deren erste Derivirte gegeben ist. Unter dieser Voraussetzung ist demnach

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2r}{dt^2} - r\cdot\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 &= f(\varphi) \\ 2\frac{dr}{dt}\cdot\frac{d\varphi}{dt} + r\cdot\frac{d^2\varphi}{dt^2} &= f^1(\varphi) \end{aligned}\right\}. \qquad 1^1)$$

Um zu einem Ausdrucke für die Geschwindigkeit zu gelangen, multipliciren wir die erste dieser Gleichungen mit $\frac{dr}{dt}$, die zweite mit $r\cdot\frac{d\varphi}{dt}$, und addiren beide, so erhalten wir:

$$\frac{dr}{dt}\cdot\frac{d^2r}{dt^2} + r\cdot\frac{dr}{dt}\cdot\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + r^2\frac{d\varphi}{dt}\cdot\frac{d^2\varphi}{dt^2} = f\frac{dr}{dt} + f^1\, r\frac{d\varphi}{dt},$$

was zusammengefasst werden kann in

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{d}{dt}\left(r\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{d}{dt}(rf)$$

oder

$$\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right] = \frac{d}{dt}(rf)$$

und mit Benützung des bekannten Ausdruckes für die Geschwindigkeit

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r \cdot \frac{d\varphi}{dt}\right)^2$$

wird

$$v^2 - v_0^2 = 2\,[rf - r_0 f_0]$$

oder auch

$$v^2 = 2\,rf + C. \tag{2}$$

Wählen wir die Polaraxe derart, dass

$$v_0^2 = 2\,r_0 f_0 \tag{3}$$

wird, so ist $C = 0$, und wir können dann schreiben:

$$v^2 = 2\,r\,f. \qquad 2)^1$$

Die Gleichung der Niveaulinien ist demnach

$$rf = \text{constant}. \tag{4}$$

Um zur Gleichung der Bahn zu gelangen, eliminiren wir vorerst aus den Gleichungen 1^1) die Veränderliche t.

Betrachten wir r als eine Function von φ, so kann gesetzt werden:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt}$$

und

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d^2r}{d\varphi^2} \cdot \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \frac{dr}{d\varphi} \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

Substituirt man diese Ausdrücke in die Gleichungen 1^1), so übergehen dieselben in folgende:

$$\left(\frac{d^2r}{d\varphi^2} - r\right) \cdot \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \frac{dr}{d\varphi} \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} = f$$

$$2 \cdot \frac{dr}{d\varphi} \cdot \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + r \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} = f^1$$

woraus man findet:

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{rf - \frac{dr}{d\varphi} \cdot f^1}{r \cdot \frac{d^2r}{d\varphi^2} - 2\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 - r^2}. \tag{α}$$

Nun ist

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = v^2$$

oder nach oben

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\left[\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2+r^2\right]=v^2, \qquad \beta)$$

somit nach Elimination von $\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$ aus α) und β)

$$\left[\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2+r^2\right]\frac{rf-\frac{dr}{d\varphi}.f^1}{r\frac{d^2r}{d\varphi^2}-2\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2-r^2}=v^2$$

und da

$$v^2=2rf$$

ist, ergibt sich

$$\left[\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2+r^2\right]\left(fr-f^1\frac{dr}{d\varphi}\right)-2rf\left[r.\frac{d^2r}{d\varphi^2}-2\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2-r^2\right]=0 \qquad 5)$$

als Differentialgleichung der Bahn.

Die Integration derselben lässt sich auf folgende Weise vornehmen: Schreibt man die Gleichung in der Form

$$\frac{r^2+\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}{r\frac{d^2r}{d\varphi^2}-2\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2-r^2}=\frac{2rf}{fr-f^1\frac{dr}{d\varphi}}$$

und bedenkt, dass der Krümmungsradius ρ der Bahn durch die Formel gegeben ist

$$\rho=\frac{\left[r^2+\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2\right]^{3/2}}{r\frac{d^2r}{d\varphi^2}-2\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2-r^2},$$

so lässt sich der Gleichung 5) die Form geben:

$$\frac{\rho}{\left[r^2+\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2\right]^{1/2}}=\frac{2rf}{fr-f^1\frac{dr}{d\varphi}}$$

Nun ist

$$\left[r^2+\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2\right]^{1/2}=\frac{ds}{d\varphi} \text{ und } ds=\rho.d\varepsilon,$$

wenn ds das Bogenelement und $d\varepsilon$ den Contingenzwinkel bezeichnet, somit

$$\frac{d\varphi}{d\varepsilon}=\frac{2rf}{fr-f^1.\frac{dr}{d\varphi}}$$

und weiters

$$d\varepsilon = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{f^1}{f} \cdot \frac{\frac{dr}{d\varphi}}{r}\right] . d\varphi \cdot$$

Hierin ist bekanntlich

$$\frac{\frac{dr}{d\varphi}}{r} = \text{cotang}\,(\varepsilon - \varphi) \qquad \gamma)$$

und es übergeht die Gleichung 5) in folgende

$$2\, d\varepsilon = \left[1 - \frac{f^1}{f} . \text{cotang}(\varepsilon - \varphi)\right] . d\varphi.$$

Setzen wir hierin

$$\varepsilon - \varphi = \Psi, \quad \varepsilon = \varphi + \Psi, \quad d\varepsilon = d\varphi + d\Psi,$$

so bekommt die Gleichung die Form

$$2\, d\Psi + \left(1 + \frac{f^1}{f} . \text{cotang}\,\Psi\right) d\varphi = 0 \qquad 6)$$

eine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen φ und Ψ.

Durch Auflösung dieser Gleichung erhält man

$$\Psi = F(\varphi),$$

daher durch Substitution in Gleichung γ)

$$\frac{dr}{r} = \text{cotang}\ F(\varphi) . d\varphi,$$

woraus

$$l\,r = \int \text{cotang}\ F(\varphi) . d\varphi + \text{Const.}$$

und

$$r = C.e^{\int cotang\ F(\varphi) . d\varphi} \qquad 7)$$

als Gleichung der Bahn resultirt.

Ist beispielsweise die Beschleunigung gegeben durch ihre Componenten

$$\gamma_r = e^{\varphi} \text{ und } \gamma_\varphi = e^{\varphi},$$

so übergeht die Gleichung 6) in

$$2\, d\Psi + (1 + \text{cotang}\,\Psi)\, d\varphi = 0 \qquad \delta)$$

$$d\varphi = -\frac{2\,d\Psi}{1 + \text{cotang}\,\Psi}.$$

Setzt man cotang $\Psi = z$, so wird $d\Psi = -\frac{dz}{1+z^2}$

$$d\varphi = \frac{2dz}{(1+z)(1+z^2)} = \frac{dz}{1+z} + \frac{dz}{1+z^2} - \frac{zdz}{1+z^2},$$

woraus nach Integration

$$\varphi = l\,\frac{1+z}{\sqrt{1+z^2}} + \operatorname{arctang} z + k. \qquad \varepsilon)$$

Die Gleichung δ) lässt sich jedoch auch unmittelbar integriren, wodurch man erhält

$$2\Psi + \varphi + \int \operatorname{cotang}\Psi \,.\, d\varphi = k_1.$$

Nun ist nach γ)

$$\int \operatorname{cotang}\Psi \,.\, d\varphi = \int \operatorname{cotang}(\varepsilon - \varphi)\,.\,d\varphi = \int \frac{\frac{dr}{d\varphi}}{r}\,.\,d\varphi = \int \frac{dr}{r} = l\,r$$

daher wird

$$\Psi = \frac{1}{2}(k_1 - \varphi - lr).$$

Bemerkt man mit Hilfe dieses Ausdruckes, dass

$$\operatorname{arc\,tang} z = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,cotg} z = \frac{\pi}{2} - \Psi = \frac{1}{2}(\pi - k_1 + \varphi + lr)$$

und setzt diesen Werth für arc tang z in ε) ein, so übergeht diese Gleichung in

$$\varphi - lr + \text{Const.} = l\,\frac{(1+z)^2}{1+z^2},$$

oder

$$e^{\varphi}\,.\,\frac{1}{r}\,\text{Const.} = \frac{(1+z)^2}{1+z^2} = \frac{(1+\operatorname{cotang}\Psi)^2}{1+\operatorname{cotang}^2\Psi} = 1 + \sin 2\Psi,$$

somit erhält man in

$$C\,.\,e^{\varphi} = r\,[1 + \sin(k_1 - \varphi - lr)] \qquad 8)$$

die Gleichung der Bahn.

Die Geschwindigkeit der Bewegung ergibt sich nach Gleichung 2[1]) mit

$$v^2 = 2re^{\varphi} \qquad 9)$$

Die Gleichung der Niveaulinien ist

$$r = C_1 \cdot e^{-\varphi}; \tag{10)}$$

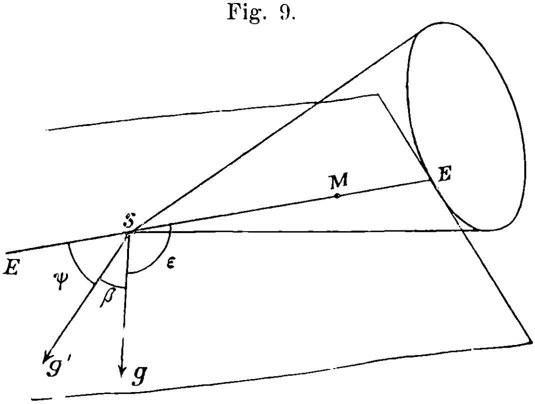
es sind somit logarithmische Spiralen.

8.

Ein weiteres Beispiel für die oben gegebene, allgemeine Ableitung bildet die Bewegung eines schweren Punktes auf der Kreiskegelfläche.

Auch hier ergibt sich, wie im Folgenden gezeigt werden soll, die Beschleunigungscomponente γ_r als Function von φ, und die Componente γ_φ als deren erste Derivirte.

Fig. 9.



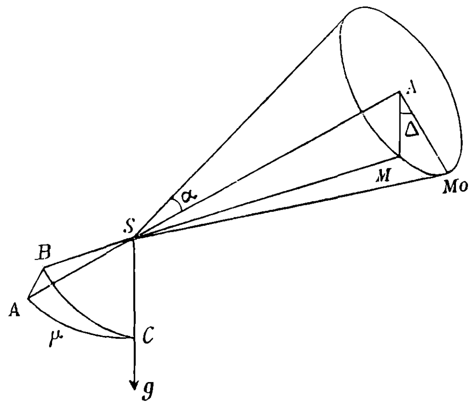
Um zu diesen Componenten zu gelangen, projiciren wir die Richtung Sg der Beschleunigung der Schwere auf die Tangentenebene des Kegels, und erhalten Sg^1. Nennen wir ε den Winkel zwischen Sg und der Erzeugenden, β den Neigungswinkel von Sg mit der Tangentenebene, endlich Ψ den Winkel zwischen der Erzeugenden und der Projection Sg^1, so wird

$$\left.\begin{aligned} \gamma_r &= g \cdot \cos \varepsilon \\ \gamma_\varphi &= g \cdot \cos \beta \cdot \sin \Psi \end{aligned}\right\} \tag{1)}$$

Um den Winkel ε auszudrücken, bezeichnen wir den veränderlichen Winkel MA_1M_0 in der Basis des Kegels mit Δ, und zählen denselben von jener Ebene an, die durch die Axe des Kegels und die Beschleunigungsrichtung Sg geht.

Ist ferner 2α der Winkel an der Spitze des Kegels, und μ der Winkel der Kegelaxe mit der Beschleunigungsrichtung Sg,

Fig. 10.

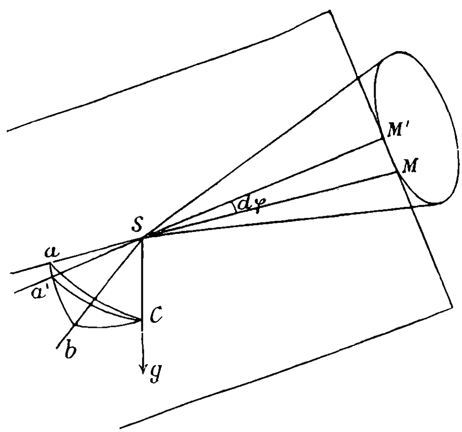


so folgt aus dem sphärischen Dreiecke ABC, da Winkel BAC gleich 180—Δ ist,

$$\cos\varepsilon = -\cos\mu \, . \cos\alpha + \sin\mu \, . \sin\alpha \, . \cos\Delta. \qquad \alpha)$$

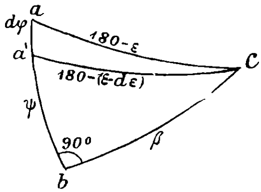
Betrachten wir ferner zwei unendlich nahe Erzeugende SM

Fig. 11.



und SM^1 des Kegels, verlängern dieselben über S hinaus, so erhalten wir durch den Schnitt der aus S mit dem Radius gleich der Einheit beschriebenen Kugel zwei sphärische rechtwinklige Dreiecke *abc* und *a'bc*. Hiebei ist *Sb* die Projection von *Sg* auf die Tangentenebene.

Fig. 12.



Aus *abc* folgt:

$$\cos\varepsilon = -\cos\beta . \cos\Psi,$$

aus *a'bc* hingegen:

$$\cos(\varepsilon - d\varepsilon) = -\cos\beta . \cos(\Psi - d\varphi)$$

oder

$$\cos\varepsilon + \sin\varepsilon d\varepsilon = -\cos\beta . (\cos\Psi + \sin\Psi . d\varphi),$$

mithin nach Abziehen der vorhergehenden Gleichung

$$\sin\varepsilon . d\varepsilon = -\cos\beta . \sin\Psi . d\varphi,$$

daher

$$\cos\beta . \sin\Psi = -\sin\varepsilon . \frac{d\varepsilon}{d\varphi}.$$

Differencirt man Gleichung α) nach φ, so wird

$$-\sin\varepsilon . \frac{d\varepsilon}{d\varphi} = -\sin\mu . \sin\alpha . \sin\Delta . \frac{d\Delta}{d\varphi},$$

daher durch Vergleich der beiden letzten Gleichungen

$$\cos\beta . \sin\Psi = -\sin\mu . \sin\alpha . \sin\Delta . \frac{d\Delta}{d\varphi}$$

Nun ist aber

$$\frac{d\Delta}{d\varphi} = \frac{1}{\sin\alpha}$$

und

$$\Delta = \frac{\varphi}{\sin\alpha}.$$

wenn angenommmen wird, dass die Winkel Δ und φ von derselben Erzeugenden aus gezählt werden.

Es wird somit

$$\cos\beta . \sin\Psi = -\sin\mu . \sin\Delta.$$

Substituirt man die so erhaltenen Relationen in die Gleichungen 1), so erhält man

$$\left.\begin{aligned}\gamma_r &= g\left[-\cos\mu\,.\cos\alpha+\sin\mu\,.\sin\alpha\,.\cos\left(\frac{\varphi}{\sin\alpha}\right)\right]\\ \gamma_\varphi &= -g\,.\sin\mu\,.\sin\left(\frac{\varphi}{\sin\alpha}\right).\end{aligned}\right\} \quad 2)$$

Es ist also auch hier

$$\gamma_r = f(\varphi), \quad \gamma_\varphi = f^1(\varphi),$$

wobei

$$f(\varphi) = g\left[-\cos\mu.\,\cos\alpha+\sin\mu.\,\sin\alpha.\,\cos\frac{\varphi}{\sin\alpha}\right].$$

Man findet also wie in Nr. 7

$$v^2 = 2rg\left[-\cos\mu.\,\cos\alpha+\sin\mu.\,\sin\alpha.\,\cos\frac{\varphi}{\sin\alpha}\right]. \quad 3)$$

Die Gleichung der Bahn ergibt sich nach Nr. 7, Gleichung 6) aus der Differentialgleichung:

$$2d\psi+(1+\frac{C_3\sin\frac{\varphi}{\sin\alpha}}{C_1+C_2\cos\frac{\varphi}{\sin\alpha}}\operatorname{cotang}\Psi)\,d\varphi = 0. \quad 4)$$

Steht die Axe des Kreiskegels vertical, so fällt die Projection der Beschleunigung g der Schwere auf die Tangentenebene des Kegels stets in dessen Erzeugende; da deren Neigung gegen die Kegelaxe constant bleibt, so bestehen hier die Relationen

$$\gamma_r = \text{const.}, \quad \gamma_\varphi = 0.$$

Die in Nr. 7 gegebene Ableitung kann hier nicht vollkommen verwendet werden, da γ_r keine Function von φ ist, daher in dem Ausdrucke 2) für die Geschwindigkeit die Constante nicht gleich Null gesetzt werden darf.

Wir wollen deshalb diesen Fall separat behandeln.

Nennen wir wieder $2\,\alpha$ den Winkel an der Spitze des Kegels, so können die Bewegungsgleichungen folgendermassen geschrieben werden:

$$\frac{d^2r}{dt^2} - r.\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = -g\,.\cos\alpha \quad 5)$$

$$2\,\frac{dr}{dt}\cdot\frac{d\varphi}{dt}+r\cdot\frac{d^2\varphi}{dt^2}=0 \tag{6}$$

Schreibt man 6) in der Form

$$\frac{1}{r}\,\frac{d}{dt}\left(r^2\,\frac{d\varphi}{dt}\right)=0,$$

so wird

$$r^2\,\frac{d\varphi}{dt}=C$$

und für den Anfang der Bewegung

$$r_o\;v_{o\varphi}=C,$$

somit

$$\frac{d\varphi}{dt}=\frac{C}{r^2}. \tag{7}$$

Durch Substitution dieses Ausdruckes in 5) wird

$$\frac{d^2r}{dt^2}=\frac{C^2}{r^3}-g\,.\cos\alpha.$$

Setzt man

$$\frac{dr}{dt}=p,\quad \frac{d^2r}{dt^2}=\frac{dp}{dr}\cdot p,$$

so wird

$$p\,.\,dp=\left(\frac{2}{r^3}-g\,\cos\alpha\right).\,dr$$

und durch Integration

$$p^2=-\frac{C^2}{r^2}-2g\,\cos\alpha\,r+C_1,$$

woraus für den Anfang der Bewegung

$$C_1=v_o^2+2g\,\cos\alpha\,r_o$$

sich ergibt. Es ist demzufolge

$$\frac{dr}{dt}=\frac{1}{r}\sqrt{C_1\,r^2-2g\,\cos\alpha\,r^3-C^2} \tag{8}$$

und nach Integration

$$t-t_0=\int_{r_0}^{r}\frac{r\,dr}{\sqrt{C_1r^2-2g\cos\alpha r^3-C^2}}. \tag{9}$$

Die Geschwindigkeit v lässt sich leicht finden aus 7) und 8), nämlich

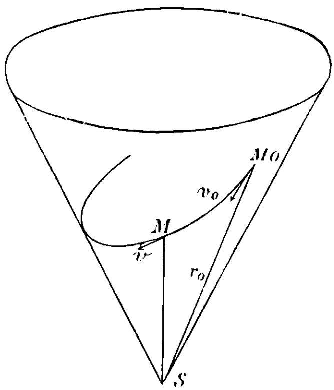
$$v^2 = \left(r\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = v_0^2 + 2g\cos\alpha r_0 - 2g\cos\alpha r$$

oder

$$v^2 - v_0^2 = 2g\cos\alpha(r_0 - r). \qquad 10)$$

Die Niveaulinien sind somit Kreise.

Fig. 13.



Die Form der Bahn lässt sich leicht aus folgender Discussion entnehmen. Der bewegliche Punkt wird die Kegelspitze S nie erreichen, er müsste sich denn in einer Erzeugenden bewegen; es ist dies aus 8) zu entnehmen, wenn man daselbst $r = 0$ setzt, in welchem Falle $\frac{dr}{dt} = \sqrt{-\infty}$ wird. Der höchste und tiefste Punkt des Kegels, welchen der bewegliche Punkt überhaupt erreichen kann, ergibt sich aus $\frac{dr}{dt} = 0$, nämlich:

$$C_1\, r^2 - 2g\cos\alpha\, r^3 - C^2 = 0$$

oder

$$r^3 - r^2\left(\frac{v_0{}^2}{2g\cos\alpha} + r_0\right) + \frac{r_0{}^2\, v_{0\varphi}^2}{2g\cos\alpha} = 0 \qquad 11)$$

Von den drei Wurzeln, welche diese Gleichung für r gibt, ist eine negativ, wie das Zeichen des letzten Gliedes lehrt; es brauchen daher nur die beiden anderen Wurzeln näher beachtet zu werden. Dieselben können aber entweder beide imaginär, oder beide nur reell und gleichbezeichnet sein; wie jedoch das Vorzeichen minus von r^2 lehrt, können, wenn reelle Wurzeln auftreten, beide nur positiv sein.

Die Frage reducirt sich also darauf, ob die beiden übrigen Wurzeln der Gleichung reell oder imaginär sind.

Bildet man das charakteristische Binom der cubischen Gleichung, so findet man

$$27\, r_o^2 g^2 \cos^2\alpha\, v_{o\varphi}^2 - (v_o^2 + 2r_o g \cos\alpha)^3 \begin{matrix} < 0 \ldots \text{reelle Wurzeln,} \\ > 0 \ldots \text{imaginäre Wurzeln.} \end{matrix}$$

Man kann sich nun leicht überzeugen, dass letzterer Fall nie eintreten kann. Denn für $v_o = v_{o\varphi}$ übergeht die gegebene cubische Gleichung in

$$r^3 - r^2\left(\frac{v_o^2}{2g\cos\alpha} + r_o\right) + \frac{r_o^2 v_o^2}{2g\cos\alpha} = 0$$

oder

$$(r - r_o)\left(r^2 - \frac{v_o^2}{2g\cos\alpha}\, r - \frac{v_o^2}{2g\cos\alpha}\, r_o\right) = 0,$$

woraus sich als Wurzeln der Gleichung ergeben:

$$r_1 = r_o$$

$$r_2 = \frac{v_o^2}{4g\cos\alpha} + \sqrt{\left(\frac{v_o^2}{4g\cos\alpha}\right)^2 + \frac{v_o^2}{2g\cos\alpha}\cdot r_o}$$

$$r_3 = \frac{v_o^2}{4g\cos\alpha} - \sqrt{\left(\frac{v_o^2}{4g\cos\alpha}\right)^2 + \frac{v_o^2}{2g\cos\alpha}\cdot r_o};$$

r_1 und r_2 sind positiv, r_3 negativ, es muss also das charakteristische Binom kleiner als Null sein.

Wenn dies aber für $v_0 = v_{0\varphi}$ stattfindet, so muss es um so mehr stattfinden für $v_0 > v_{0\varphi}$, was ja doch in der Regel der Fall sein muss.

Die cubische Gleichung 11) gibt daher stets zwei positive Werthe für r, es sind dies die äussersten Grenzen r_{max} und r_{min} zwischen denen sich der Punkt unaufhörlich bewegen wird, ohne die Kegelspitze je zu erreichen. Die Bewegung ist demzufolge eine Oscillation zwischen jenen Grenzen.

Nennt man t_1 die Oscillationsdauer für die Bewegung vom höchsten bis zum tiefsten Punkte, so ist

$$t_1 = \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{r\,dr}{\sqrt{C_1 r^2 - 2g\cos\alpha\, r^3 - C^2}},$$

also ein constanter Werth. Die volle Oscillationsdauer ist

$$T = 2t_1.$$

Die Gleichung der Bahn ergibt sich durch Division der Ausdrücke 7) und 8) folgendermassen:

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{r}{C}\sqrt{C_1 r^2 - 2g\cos\alpha r^3 - C^2}$$

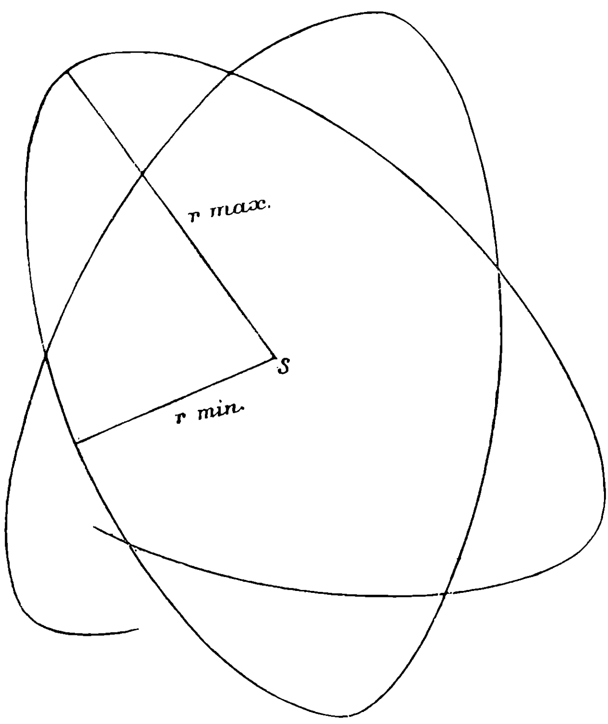
und hieraus

$$\varphi - \varphi_0 = \int_{r_0}^{r} \frac{C.dr}{r\sqrt{C_1 r^2 - 2g\cos\alpha r^3 - C^2}} \qquad 12)$$

Der Ausdruck für $\frac{dr}{d\varphi}$ nimmt für denselben Werth von r auch gleiche Werthe an, nur je nachdem positiv oder negativ, der Quadratwurzel zufolge. Die Äste der Bahn zwischen je einem höchsten und tiefsten Punkte sind daher congruent.

Ein beiläufiges Bild der Bahn im Developpement gibt folgende Figur:

Fig. 14.



Für den Fall, dass die Anfangsgeschwindigkeit v_0 horizontal gerichtet ist, d. h. für $v_0 = v_{0\varphi}$, erreichen die beiden Grenzen von r die Werthe

$$r_1 = r_0 \text{ und } r_2 = \frac{v_0^2}{4g\cos\alpha} + \sqrt{\left(\frac{v_0^2}{4g\cos\alpha}\right)^2 + \frac{v_0^2}{2g\cos\alpha} r_0}\,.$$

Hiebei ist r_2 grösser oder kleiner als r_1, je nachdem $\frac{v_0^2}{g\cos\alpha}$ grösser oder kleiner als r_0 ist. Im ersten Falle steigt also der Punkt in der Kegelfläche auf, im zweiten fällt er.

Wird

$$\frac{v_0^2}{g\cos\alpha} = r_0 \quad \text{, das heist } v_0 = \sqrt{g r_0 \cos\alpha},$$

so werden $r_1 = r_2 = r = r_0$. Der Punkt beschreibt in diesem Falle einen horizontalen Kreis in der Kegelfläche mit der constanten Geschwindigkeit $v = \sqrt{g r_0 \cos\alpha}$.

Um den Normaldruck auf die Kegelfläche zu erhalten, braucht man nur in Formel 7) von Nr. 5)...$r = 0$ zu setzen; man erhält dadurch

$$N = \frac{r_0^2 v_{0\varphi}^2}{r^3 \operatorname{tang} \alpha} - g \, . \sin\alpha \qquad 13)$$

Je weiter also der bewegte Punkt von der Kegelspitze entfernt ist, desto kleiner ist der Normaldruck.

Für die Bewegung des Punktes im Kreise wird:

$$N = g \, . \frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha}. \qquad 14)$$

9.

Wir wollen im Folgenden noch zwei Fälle der Bewegung auf der Kegelfläche behandeln, in welchen die Beschleunigung senkrecht zu den Kegelerzeugenden bleibt. Ihre Grösse sei eine Function von r.

I. Die Beschleunigung sei dem Radiusvector direct proportional.

Dann lauten die Bewegungsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2r}{dt^2} - r\,.\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = 0\\ 2\,\frac{dr}{dt}\,\frac{d\varphi}{dt} + r\,.\,\frac{d^2\varphi}{dt^2} = Cr\end{aligned}\right\}. \qquad 1)$$

Multipliciren wir dieselben mit $\frac{dr}{dt}$, respective mit $r.\,\frac{d\varphi}{dt}$ und addiren sie, so bekommen wir, ähnlich wie früher

$$\frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right] = Cr^2\,\frac{d\varphi}{dt}$$

oder

$$\frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\,v^2 = Cr^2\,\frac{d\varphi}{dt}. \qquad 2)$$

Multipliciren wir hingegen die erste der Gleichungen 1) mit r

$$r\,.\,\frac{d^2r}{dt^2} - r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = 0$$

und addiren hiezu

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = v^2,$$

so bekommen wir

$$r\,\frac{d^2r}{dt^2} + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = v^2$$

oder auch

$$\frac{d^2r^2}{dt^2} = 2v^2, \qquad 3)$$

Schreibt man ferner die zweite der Gleichungen 1) in der Form

$$\frac{1}{r}\,\frac{d}{dt}\left(r^2\,\frac{d\varphi}{dt}\right) = Cr$$

so ist nach 2)

$$\frac{d^2}{dt^2}\,v^2 = 2\,C^2\,r^2$$

oder

$$\frac{d^2}{dt^2}\,(2v^2) = 4C^2r^2$$

und daher in Vergleich mit Gleichung 3)

$$\frac{d^4r^2}{dt^4} = 4C^2r^2$$

Setzt man $r^2 = e^{\alpha t}$, so ergibt sich

$$\alpha^4 e^{\alpha t} = 4C^2 e^{\alpha t}$$

und mithin

$$\alpha = \pm\sqrt{\pm 2C}.$$

Es lautet demnach die Relation zwischen r und t:

$$r^2 = C_1 e^{\sqrt{2C}.t} + C_2 . e^{-\sqrt{2C}.t} + C_3 . e^{i\sqrt{2C}.t} + C_4 . e^{-i.\sqrt{2C}.t} \quad 4)$$

oder auch

$$r^2 = C_1 e^{\sqrt{2C}.t} + C_2 . e^{-\sqrt{2C}.t} + B_1 . \cos(\sqrt{2C}.t) + iB_2 . \sin(\sqrt{2C}.t). \quad 4^1)$$

Zur Bestimmung der Constanten führt die dreimalige Differentiation dieses Ausdruckes, und Einführung von $t=0$ und der Anfangswerthe r_o, v_{or} und $v_{o\varphi}$ für den Radiusvector und die Componenten der Geschwindigkeit. Man findet

$$r_0^2 = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$$

$$2r_0\, v_{0r} = \sqrt{2C}\,(C_1 - C_2 + i\,C_3 - i\,C_4)$$

$$v_0^2 = C\,(C_1 + C_2 - C_3 - C_4)$$

$$r_0\, v_{0\varphi} = \sqrt{\frac{C}{2}}\,(C_1 - C_2 - i\,C_3 + i\,C_4),$$

woraus sich für die Constanten ergibt:

$$C_1 = \frac{1}{4}\left\{r_0^2 + \frac{v_0^2}{C} + r_0\sqrt{\frac{2}{C}}(v_{0\varphi} + v_{0r})\right\}$$

$$C_2 = \frac{1}{4}\left\{r_0^2 + \frac{v_0^2}{C} - r_0\sqrt{\frac{2}{C}}(v_{0\varphi} + v_{0r})\right\}$$

$$B_1 = C_3 + C_4 = \frac{1}{2}\left\{r_0^2 - \frac{v_0^2}{C}\right\}$$

$$i\,B_2 = i\,(C_3 - C_4) = \frac{1}{2}\,r_0\sqrt{\frac{2}{C}}\,(v_{0r} - v_{0\varphi}).$$

Für gewisse Annahmen kann die Gleichung zwischen r und t vereinfacht werden.

Setzt man nämlich für den Anfang der Bewegung voraus, dass

$$v_0 = \sqrt{C}.\, r_0 \text{ und } v_{0r} = v_{0\varphi}$$

ist, so werden die Constanten

$$C_2 = B_1 = B_2 = 0$$

und die Gleichung 4) übergeht in

$$r = r_0 \, . \, e^{\sqrt{\frac{C}{2}} \, . \, t} \tag{5}$$

Da ferner aus den Gleichungen 3) und 2) folgt:

$$\frac{d^3 r^2}{dt^3} = 2 \frac{dv^2}{dt^2} = 4 C r^2 \frac{d\varphi}{dt}$$

und durch dreimalige Differentiation von $r^2 = r_0^2 \, . \, e^{\sqrt{2C} . t}$

$$\frac{d^3 r^2}{dt^3} = 2 r_0^2 \, C \sqrt{2C} \, . \, e^{\sqrt{2C} . t}$$

wird, so ist

$$4 C r^2 \frac{d\varphi}{dt} = 2 r_0^2 C \sqrt{2C} \, . \, e^{\sqrt{2C} . t}$$

und

$$\frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{\frac{C}{2}},$$

woraus durch Integration

$$\varphi - \varphi_0 = \sqrt{\frac{C}{2}} \, . \, t. \tag{6}$$

Es ist also nach 5) und 6)

$$r = r_0 \, e^{\varphi - \varphi_0} \tag{7}$$

die Gleichung der Bahn, welche eine logarithmische Spirale ist.

Für die Geschwindigkeit ergibt sich der Ausdruck

$$v = \sqrt{C} \, . \, r \tag{8}$$

Die Niveaulinien sind somit Kreise.

II. Die Beschleunigung sei dem Radiusvector verkehrt proportional.

Die Bewegungsgleichungen lauten dann:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2 r}{dt^2} - r \, . \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 &= 0 \\ 2 \frac{dr}{dt} \, . \, \frac{d\varphi}{dt} + r \, . \, \frac{d^2\varphi}{dt^2} &= \frac{C}{r} \end{aligned}\right\} . \tag{9}$$

Um die Gleichung der Bahn zu finden, schreiben wir die letztere dieser Gleichungen in der Form:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dt}\left(r^2 \frac{d\varphi}{dt}\right) = \frac{C}{r},$$

so wird

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = Ct + C_1.$$

Nimmt man an, dass die Anfangsgeschwindigkeit in die Richtung des Radiusvectors fällt, so wird $C_1 = 0$, und somit

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{Ct}{r^2}; \qquad \alpha)$$

wodurch der ersten der Gleichungen 9) die Form gegeben werden kann:

$$\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{C^2t^2}{r^3} = 0. \qquad 10)$$

Um diese Gleichung zu vereinfachen, setzen wir

$$r = e^\theta z \text{ und } t = e^\theta,$$

wodurch

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \left(\frac{d^2z}{d\theta^2} + \frac{dz}{d\theta}\right) \cdot e^{-\theta}$$

wird. Durch Substitution dieses Ausdruckes in 10) übergeht diese Gleichung in

$$\frac{d^2z}{d\theta^2} + \frac{dz}{d\theta} - \frac{C^2}{z^3} = 0.$$

Setzt man hierin $\frac{dz}{d\theta} = x$, so wird $\frac{d^2z}{d\theta^2} = x \cdot \frac{dx}{dz}$, mithin

$$x\frac{dx}{dz} + x = \frac{C^2}{z^3}. \qquad 11)$$

Gelingt es, aus dieser Gleichung $x = f(z)$ zu bestimmen, so findet man weiter aus $\frac{dz}{d\theta} = x = f(z)$

$$d\theta = \frac{dz}{f(z)}$$

und

$$\theta = F(z),$$

somit wird

$$r = z . e^{F(z)} \text{ und } t = e^{F(z)}$$

Durch Elimination von z aus diesen beiden Ausdrücken erhält man

$$r = f(t),$$

und mit Hilfe von Gleichung α)

$$r = \Psi(\varphi)$$

als Gleichung der Bahn.

Um einen Ausdruck für die Geschwindigkeit zu erhalten, multipliciren wir die beiden Gleichungen 9) mit $\frac{dr}{dt}$, respective mit $r . \frac{d\varphi}{dt}$, und addiren dieselben, so erhalten wir:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt}(v^2) = C \frac{d\varphi}{dt},$$

woraus

$$\frac{1}{2} v^2 - \frac{1}{2} v_0^2 = C(\varphi - \varphi_0). \qquad 12)$$

Die Niveaulinien sind somit die Erzeugenden der Kegelfläche.

10.

Die vorhergehenden Betrachtungen lassen sich mit Leichtigkeit verwenden zur Untersuchung von Bewegungen auf vorgeschriebenen Bahnen in developpablen Flächen.

Ist nähmlich eine beliebige developpable Fläche gegeben, und auf ihr irgend eine Bahn, welche der bewegte Punkt zu durchlaufen gezwungen ist, und sollen die Bewegungszustände des letzteren in jedem Momente sowie der Normaldruck auf die Fläche aufgesucht werden, so developpire man die Fläche, und mit ihr die Bahn in eine Ebene, bestimme das Beschleunigungsgesetz für die developpirte Bewegung, ermittle die Geschwindigkeit v und den Widerstand n der ebenen Bahn.

Der Ausdruck für den Normalwiderstand N der Fläche ist bekanntlich:

$$N = \frac{(v . \sin\alpha)^2}{r_1} - \gamma_N,$$

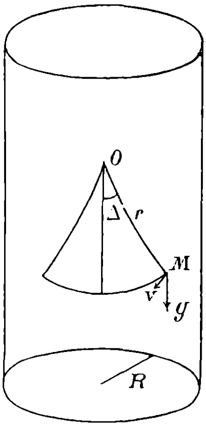
v wurde soeben gefunden; α, der Winkel der Bahn mit der Erzeugenden der Fläche, ist aus dem Developpement zu entnehmen; somit ist N bekannt.

Der Totalwiderstand der vorgeschriebenen Bahn setzt sich zusammen aus dem Widerstande N der Fläche, und jenem n der developpirten Bahn; da N und n nothwendigerweise aufeinander senkrecht stehen, indem N in die Normale der Fläche, n in deren Tangentenebene fällt, so folgt die Relation

$$W = \sqrt{N^2 + n^2}.$$

Eine einfache Anwendung des Vorhergehenden möge hier auf die Kreispendelbewegung auf cylindrischen oder konischen Flächen gemacht werden. Hiebei sei vorausgesetzt, dass die Fläche aus zwei unendlich nahen Schalen bestehe, zwischen denen sich der Faden des Pendels bewegen möge, so dass er sich in keiner Weise von der Fläche entfernen kann.

Fig. 15



Bei einem senkrechten Kreiscylinder entsteht durch das Developpement die einfache Kreispendelbewegung, indem die Beschleunigung g die parallele Richtung beibehält. Es wird also

$$v^2 = v_0^2 + 2g\,(y - y_0),$$

worin y den Abstand des Punktes M von der durch 0 gelegten Horizontalebene bedeutet. Daher kann auch geschrieben werden:

$$v^2 = v_0^2 + 2gr\,(\cos\Delta - \cos\Delta_0),$$

worin r die Pendellänge und Δ den Auschlagwinkel bedeutet. Nun ist $\sin\alpha = \cos\Delta$, daher wird

$$N = \frac{v_0^2 + 2gr\,(\cos\Delta - \cos\Delta_0)}{R}\cos^2\Delta.$$

Gelangt der Punkt M in gleiche Höhe mit dem Aufhängepunkt 0, so wird $\Delta = 90°$, und

$$N = 0.$$

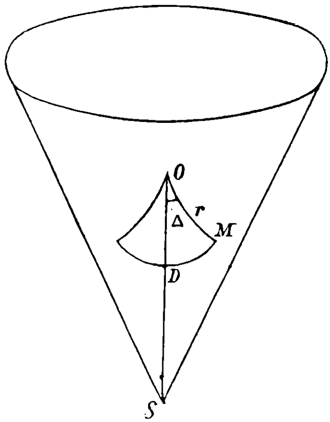
Da ferner der Widerstand des Pendels in der Ebene

$$n = \frac{v^2 + rg\cos\Delta}{r}$$

ist, so wird

$$W = \sqrt{N^2+n^2} = \frac{1}{Rr}\sqrt{R^2(v^2+rg\cos\Delta)+r^2v^4\cos^4\Delta}.$$

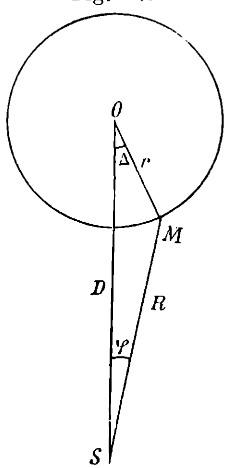
Fig. 16.



Die Pendelbewegung auf einem senkrechten Kreiskegel kann ebenso untersucht werden. Nur übergeht sie nach dem Developpement nicht in eine gewöhnliche Pendelbewegung; denn die Beschleunigung erscheint nach einem in endlicher Entfernung gelegenen Punkte gerichtet.

Bezeichnen R und φ die Polarcoordinaten, γ die Beschleunigung, n_R und n_φ die Componenten des Bahnwiderstandes im Developpement, so wird

Fig. 17.



$$\frac{d^2R}{dt^2} - R\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = -\gamma + n_R$$

$$2\,\frac{dR}{dt}\cdot\frac{d\varphi}{dt} + R\cdot\frac{d^2\varphi}{dt^2} = n_\varphi.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen mit $\frac{dR}{dt}$, respective mit $R\,\frac{d\varphi}{dt}$, und addirt sie, so erhält man:

$$\frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}(v^2) = -\gamma.\frac{dR}{dt} + n_R.\frac{dR}{dt} + n_\varphi.R.\frac{d\varphi}{dt}.$$

Nun ist aber

$$n_R.\frac{dR}{dt} + n_\varphi.R.\frac{d\varphi}{dt} = 0,$$

weil der Bahnwiderstand n auf der Geschwindigkeitsrichtung senkrecht steht. Es wird also

$$v^2 - v_0^2 = -2\gamma(R - R_0)$$

und in Übereinstimmung mit Gleichung 13) aus Nr. 8,

$$N = \frac{C}{R^3} - g.\sin\alpha,$$

wenn $2a$ den Winkel an der Spitze des Kegels bezeichnet. Drückt man R durch den Ausschlagwinkel Δ des Pendels aus, so wird

$$R^2 = D^2 + r^2 - 2Dr \cdot \cos\Delta,$$

somit

$$N = \frac{C}{(D^2 + r^2 - 2Dr \cdot \cos\Delta)^{3/2}} - g \cdot \sin a.$$

Den kleinsten Werth erreicht der Normaldruck für $\Delta = \pi$, nämlich

$$N_1 = \frac{C}{(D+r)^3} - g \cdot \sin a,$$

den grössten hingegen für $\Delta = 0$, und zwar

$$N_2 = \frac{C}{(D-r)^3} - g \cdot \sin a.$$

Ähnliche Resultate liefert die Untersuchung der Pendelbewegung auf schiefliegendem Cylinder und Kegel.

11.

Es ist unschwer, die bisherigen Betrachtungen auf ein Capitel der Mechanik auszudehnen, welches freilich ausserhalb des Rahmens dieses Aufsatzes fällt.

Es ist dies die Theorie der Bewegung auf einer vorgeschriebenen Bahn.

Ist nämlich die vorgeschriebene Bahn in Form einer beliebigen, doppelt gekrmmte n Curve gegeben, so lassen sich durch dieselbe unendlich viele developpable Flächen legen. Wählt man eine von diesen, bestimmt die Componenten der gegebenen Beschleunigung, welche in die Normale, beziehungsweise in die Tangentenebene der gewählten Fläche fallen, und developpirt letztere sammt der n ihr gegebenen Bahn, so ist das räumliche Bewegungsproblem auf ein solches in der Ebene zurückgeführt. Man bestimme nun den Normalwiderstand n der ebenen Bahn und die Geschwindigkeit v des bewegten Punktes, und mit Hilfe letzterer und des offenbar bekannten Winkels α den Normalwiderstand N der developpablen Fläche. Beide Widerstände zusammengenommen geben den Totalwiderstand W der vorgeschriebenen Bahn mittelst der Relation

$$W = \sqrt{N^2 + n^2}.$$

Es ist selbstverständlich, dass man von allen developpablen Flächen, welche durch die Bahn gelegt werden können, die einfachste wählen wird. Dies wird entweder eine Cylinder- oder Kegelfläche sein, oder aber eine durch die speciellen Eigenschaften der Bahn besonders empfohlene; auch steht nichts im Wege, die Bahn selbst als Wendecurve der Fläche anzusehen.

Zum Schlusse dieses Aufsatzes soll noch erwähnt werden, wie die Theorie der Bewegung auf developpablen Flächen mit Vortheil angewendet werden kann auf die Bewegung eines Punktes auf beliebiger Fläche.

Es kann nämlich auf einer beliebigen Fläche irgend eine Bahn gegeben sein, auf welcher sich der Punkt bewegen soll, und es kann die Frage aufgeworfen werden: Welchem Beschleunigungsgesetze muss der bewegte Punkt unterworfen sein, wenn er bei seiner Bewegung auf der Fläche jene Bahn nicht verlassen soll, ohne dass dieselbe einen anderen Widerstand ausübe, als jenen normal zur Fläche?

Dies kann in folgender Weise auf die Bewegung auf developpablen Flächen zurückgeführt werden. Legt man in allen Punkten der gegebenen Bahn Tangentialebenen an die Fläche, so umhüllen dieselben eine developpable Fläche, deren Erzeugende die Schnittlinien sind je zweier unendlich nahen Tangentialebenen. Dadurch wird aber die gegebene Bahn vollkommen auf die developpable Fläche übertragen, und das Problem ist gerade so zu behandeln, als wenn die Bewegung auf dieser stattfinden würde. Das unterliegt aber nach dem Früheren keinen Schwierigkeiten.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1880

Band/Volume: 81_2

Autor(en)/Author(s): Wittenbauer Ferd.

Artikel/Article: Theorie der Bewegung auf developpablen Flächen. 697-742