„Über Polargruppen."

Von dem c. M. **Emil Weyr.**

1. Die Theorie der harmonischen Mittelpunkte verschiedener Grade kann man sofort von der geraden Punktreihe auf rationale Träger im Allgemeinen übertragen. Hat man auf einem rationalen Träger erster Stufe eine n-elementige Gruppe $a_1\, a_2\, a_3 \ldots a_n$ und ein variables Element x, so entspricht einem jeden x eine r-elementige Gruppe $y_1\, y_2\, y_3 \ldots y^r$, welche wir als die dem x entsprechende Polargruppe r-ten Grades bezeichnen wollen. Die Beziehung soll die folgende sein: Wenn man den rationalen einstufigen Träger auf eine Gerade abbildet, so sollen die Punkte $y_1\, y_2 \ldots y^r$ die harmonischen Mittelpunkte r-ten Grades von x bezüglich der Punktgruppe $a_1\, a_2 \ldots a_n$ sein.

Der aus der Theorie harmonischer Mittelpunkte herüber zunehmende Hauptsatz lautet:

„Gehört y der Polargruppe r-ten Grades von x an, so gehört x der $(n—r)$-ten Polargruppe von y an."

Hieraus folgt nun sofort:

„Die Elemente x und die Elemente ihrer Polargruppen r-ten Grades stellen zwei Elementensysteme in $(n—r)—r$-deutiger Beziehung dar. Die gemeinsamen $n—r+r$, d. i. n Elemente der beiden Systeme sind die n Fundamentelemente $a_1\, a_2 \ldots a_n$."

Betrachtet man je zwei Elemente $y_1\, y_2$, welche derselben Polargruppe r-ten Grades angehören, als einander entsprechende Elemente, so erhält man offenbar ein symmetrisches Elementensystem vom Grade $(r—1)\,(n—r)$.

Für $r = n—1$ geht dieses System in eine Involution über, weil $n—r = 1$ wird:

„Die sämmtlichen Polargruppen $(n—1)$-ten Grades bilden eine Involution $(n—1)$-ter Ordnung."

Selbstverständlich ist diese Involution projectivisch mit der Reihe der Polelemente x und die n gemeinsamen Elemente dieser Projectivität sind wieder die n Fundamentalelemente a.

2. Es kann die Frage nach der Bestimmung der Polargruppen aufgeworfen werden. Besteht die Fundamentalgruppe nur aus zwei Elementen $a_1\, a_2$, so ist die einem Elemente x entsprechende Polargruppe aus einem einzigen Elemente y constituirt, welches zu x bezüglich $a_1\, a_2$ harmonisch conjugirt ist.

Es sei nun ein Fundamentaltripel $a_1\, a_2\, a_3$ gegeben; der einfacheren Behandlung wegen sollen $a_1\, a_2\, a_3$ drei Punkte eines Kegelschnittes K sein. Die Aufgabe, die wir uns stellen, besteht darin, zu irgend einem Punkte x von K die zugehörige Polargruppe $y_1\, y_2$ zweiten Grades und den die Polargruppe ersten Grades darstellenden Punkt y' zu construiren.

Wenn x in einen der Punkte a, z. B. in a_1 fällt, so wird bekanntlich einer der Punkte y, z. B. y_1, identisch mit a_1, während der zweite y_2 der zu a_1 bezüglich $a_2\, a_3$ harmonisch conjugirte Punkt wird.

Legt man also in $a_1\, a_2\, a_3$ an K die Tangenten und verbindet die Ecken des entstehenden Dreiseites mit den Berührungspunkten $a_1\, a_2\, a_3$ der gegenüberliegenden Seiten, so werden die erhaltenen Strahlen, welche sich in einem Punkte o schneiden, den Kegelschnitt K in den Punkten $a'\, a''\, a'''$ treffen, welche zu a_1, a_2, a_3 bezüglich $a_2\, a_3$, $a_3\, a_1$, $a_1\, a_2$ conjugirt harmonisch sind.

Den drei Punkten $a_1\, a_2\, a_3$ entsprechen also in projectivischer Weise die drei quadratischen Polargruppen $a_1\, a'$, $a_2\, a''$, $a_3\, a'''$; hiedurch ist die Projectivität festgestellt. Die letztgenannten drei Punktepaare liegen, wie schon gesagt, auf drei durch einen Punkt o gehenden Geraden, welche der Reihe nach mit $A_1\, A_2\, A_3$ bezeichnet werden sollen. Die quadratische Involution der Polargruppen ist jene, welche die Strahlen durch o auf dem Kegelschnitte K bestimmen. Nun sieht man sofort, dass die Doppelelemente dieser Involution die beiden dreifachen Elemente einer kubischen Involution sind, welche durch das Fundamentaltripel $a_1\, a_2\, a_3$ bestimmt erscheint.

Wenn wir die Reihe $a_1\, a_2\, a_3\, x$. aus einem Punkte von K projiciren, so erhalten wir selbstverständlich ein dem Strahlenbüschel $A_1\, A_2\, A_3\, X\ldots$ projectivisches Büschel, mit X die durch o

gehende Verbindungsgerade von y_1 und y_2 verstanden. Wird die Projection aus einem der Punkte a', a'', a''', z. B. aus a' durchgeführt, so sind überdies beide Büschel perspectivisch und $a_2\, a_3$ ist die zugehörige Perspectivitätsaxe. Zieht man also $x\, a'$ und verbindet den Punkt, in welchem diese Gerade die Gerade $a_2\, a_3$ schneidet, mit o, so erhält man den Strahl X, welcher K in dem gesuchten Punktepaare $y_1\, y_2$ trifft.

Allgemein:

„Projicirt man die Punkte a', a'', a''' an einem Punkte x von K auf die drei Geraden $a_2\, a_3$, $a_3\, a_1$, $a_1\, a_2$ respective, so erhält man drei mit o in gerader Linie X liegende Punkte; die Gerade X schneidet K in zwei Punkten $y_1\, y_2$, welche zusammen die quadratische Polargruppe von x, bezüglich des Fundamentaltripels $a_1\, a_2\, a_3$ darstellen."

Der zu x bezüglich $y_1\, y_2$ harmonisch conjugirte Punkt y' stellt die Polargruppe ersten Grades von x bezüglich $a_1\, a_2\, a_3$ dar.

Man erhält y' als Schnittpunkt von K mit der Geraden, welche x mit dem Pole von X verbindet. Überträgt man (etwa durch Projection aus einem Punkte von K) die Punkte von K auf eine Gerade, so wird $y_1\, y_2$ das Paar harmonischer Mittelpunkte zweiten Grades von x bezüglich $a_1\, a_2\, a_3$, und y' stellt den harmonischen Mittelpunkt ersten Grades von x bezüglich $a_1\, a_2\, a_3$ dar.

3. Aus den vorangehenden Untersuchungen folgt auch:

„Construirt man zu den Elementen x bezüglich des Fundamentaltripels $a_1\, a_2\, a_3$ die quadratischen Polargruppen $y_1\, y_2$, so erhält man eine ein-zweideutige Beziehung. Die Doppelelemente des zweideutigen Gebildes sind die dreifachen Elemente einer kubischen Involution, welche durch das Fundamentaltripel bestimmt erscheint; zugleich stellen diese beiden Doppelelemente die Verzweigungselemente des eindeutigen Systemes dar, so zwar, dass jedes der beiden Elemente als Doppelelement aufgefasst, dem anderen, wenn man dieses als Verzweigungselement auffasst, entspricht. Die drei gemeinsamen Elemente sind die Elemente $a_1\, a_2\, a_3$ des Fundamentaltripels."

4. Ein solches System als Punktsystem erhält man auf einer ebenen Curve dritter Ordnung, wenn man x als einen Curvenpunkt und $y_1\, y_2$ als die Berührungspunkte der beiden von x aus an die Curve gelegten Tangenten betrachtet.

Die beiden Doppelelemente, welche zugleich als Verzweigungselemente auftreten, sind die Nachbarpunkte des Doppelpunktes der Curve und die Inflexionspunkte stellen die drei gemeinsamen Punkte $a_1\, a_2\, a_3$ der Beziehung dar.

Wir haben somit bezüglich der ebenen Curven dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte die folgenden Sätze:

„Legt man aus einem Punkte x der Curve an sie die beiden Tangenten, so stellen deren Berührungspunkte $y_1\, y_2$ die quadratische Polargruppe von x bezüglich der Gruppe der drei Inflexionspunkte $a_1\, a_2\, a_3$ dar.“

„Der Tangentialpunkt x eines Punktes y_1 stellt die lineare Polargruppe (den harmonischen Mittelpunkt ersten Grades) von y_1 bezüglich der Inflexionsgruppe als Fundamentaltripel dar.“