Bemerkungen über kubische Involutionen.

Von Dr. **C. Le Paige**,
Professor an der Universität in Lüttich.

Die Untersuchung der höheren Involutionen führt, wie wir an verschiedenen Stellen gezeigt haben, in einfachster Art zur geometrischen Darstellung einer grossen Zahl von Invarianten algebraischer Formen.

Der Gegenstand dieser kurzen Arbeit soll die Betrachtung kubischer Involutionen sein; wir werden hiedurch zu einigen, unseres Erachtens nicht uninteressanten Resultaten gelangen, und bemerken, dass den Anstoss zu den folgenden Entwickelungen die Note gegeben hat, welche Professor Emil Weyr unserer Arbeit über die singulären Elemente kubischer Involutionen[1] beigefügt hat.

Es sei

$$a_x^3+\lambda b_x^3=0, \tag{1}$$

die Gleichung der kubischen Involution; dann sind die Doppelpunkte gegeben durch:

$$J_x^4\equiv(ab)a_x^2b_x^2=0, \tag{2}$$

und die Verzweigungspunkte durch:

$$\Psi_x^4\equiv-3(IJ_x^4+3pa_x^3+3\pi b_x^3)=0. \tag{3}$$

Hierin ist:

$$I=(ab)^3,\quad p=(\theta b)^2b_x\quad \pi=(\theta a)^2a_x$$

und

$$\theta_x^2=(ab)^2a_xb_x.$$

Die in (3) vorkommende Combinante

$$pa_x^3+\pi b_x^3$$

---

[1] Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften, Bd. LXXXI. S. 159—164.

kann durch die Hesse'sche Function der Jacobi'schen Function ersetzt werden, so dass:

$$\Psi_x^4 \equiv -3(3H_J + IJ').$$

Die Verzweigungspunkte der beigeordneten kubischen Involution sind gegeben durch:

$$\varphi_x^4 \equiv [(ab)^2 a_x b_x] - [(aa')^2 a_x a'_x][(bb')^2 b_x b'_x] = 0,$$

oder

$$\varphi_x^4 \equiv (\theta_x^2)^2 - \Delta_x^2 \nabla_x^2 \equiv -(3H_J - IJ = 0. \tag{4}$$

Es ist nun leicht, auf Grund der Gleichung der Verzweigungspunkte den von Emil Weyr aufgestellten Satz zu beweisen: „Es gibt zwei kubische Involutionen mit gemeinschaftlichen Doppelpunkten".

In der That, setzen wir voraus, diese Doppelpunkte wären gegeben durch die Gleichung:

$$f = \alpha_x^4 = J_x^4 = 0.$$

Bekanntlich ist:

$$[(ab)^3]^2 = 6(JJ')^4;$$

es entsprechen daher die Verzweigungspunkte den Wurzeln der Gleichung:

$$3(\alpha\alpha')^2 \alpha_x^2 \alpha'^2_x \pm \sqrt{6(\alpha\alpha')^4} \,.\, \alpha_x^4 = 0$$

und es gibt somit zwei von einander verschiedene Gruppen von Verzweigungspunkten, welche mit den Doppelpunkten kubische Involutionen bilden.

Die zwei Verzweigungselementengruppen, welche derselben Gruppe

$$\alpha_x^4 = 0,$$

von Doppelelementen entsprechen, sind somit die Wurzeln der Gleichung:

$$3[(\alpha\alpha')^4 \alpha_x^2 \alpha'^2_x]^2 - 2(\alpha\alpha')^4 [\alpha_x^4]^2 = 0.$$

Wie nun Professor Weyr gezeigt hat, lassen sich diese Verzweigungspunkte paarweise construiren, sobald man die vier Doppelpunkte kennt, wovon man sich analytisch in folgender Weise überzeugen kann.

Bringen wir die biquadratische Form in die kanonische Form:

$$ax^4 + bcx^2y^2 + ey^4,$$

so sind die Verzweigungspunkte die Wurzeln der Gleichung:

$$\varphi\Psi \equiv a^3ex^8 + bac(ae+9c^2)x^6y^2 - (a^2e^2 - 54aec^2 - 81c^4)x^4y^4 + \\ + bce(ae+9c^2)x^2y^6 + ae^3y^8 = 0.$$

Bekanntlich kann man nun die linke Seite dieser Gleichung in zwei Factoren zerlegen, denn es ist:

$$ae\varphi\Psi \equiv [a^2ex^4 + \{3c(ae+9c^2) - \Delta\}\, x^2y^2 + ae^2y^4] \times \\ [a^2ex^4 + \{3c(ae+9c^2) + \Delta\}\, x^2y^2 + ae^2y^4],$$

wobei

$$\Delta = +\sqrt{4D - \left(\frac{D}{ae}\right)^{3/2}}$$

zu setzen ist, und D die Discriminante der Form a_x^4 darstellt.

Stellt man sich die vier Doppelpunkte als vier Punkte einer kubischen Raumcurve vor, so kann man sich leicht die Verzweigungspunkte herstellen. Die vier Curventangenten in den Doppelpunkten haben zwei gemeinschaftliche Transversalen; lässt man um dieselben Ebenen rotiren, so bestimmen sie auf der Raumcurve die beiden kubischen Involutionen. Die Ebene, welche man durch eine dieser Transversalen und die Tangente eines der Doppelpunkte hindurchlegen kann, schneidet die Raumcurve in dem Verzweigungspunkte, welcher jenem Doppelpunkte entspricht.

Nach dem Weyr'schen Satze trennen die beiden Verzweigungspunkte v_1, v'_1, welche einem Doppelpunkte d_1 entsprechen, die Doppelelemente der durch die drei übrigen Doppelpunkte $d_2\, d_3\, d_4$ bestimmten cyklischen Projectivität harmonisch.

Da jedes Doppelelement der cyklischen Projectivität mit den drei Elementen $d_2\, d_3\, d_4$ ein äquianharmonisches System bildet, so sind die beiden Doppelelemente die Wurzeln der Hesse'schen Determinante der Function:

$$\frac{a_x^4}{(xy_1 - yx_1)}.$$

Aber andererseits ist die Hesse'sche Determinante der kanonischen Form:

$$\xi^3 - \eta^3$$

gleich

$$-2\xi\eta.$$

Man hat somit den bekannten Satz:

„Die Hesse'sche Function einer kubischen Form stellt die beiden dreifachen Elemente einer kubischen Involution dar, welche durch das aus der kubischen Form fliessende Elemententripel bestimmt erscheint."

Es ist leicht, die Doppelpunkte einer cyklischen Projectivität zu construiren; verlegt man nämlich die drei Punkte $d_2\ d_3\ d_4$ auf einen Kegelschnitt und construirt die Tangenten desselben in diesen Punkten, so ist das Tangentendreiseit mit dem Dreieck $d_2 d_3 d_4$ perspectivisch und die Perspectivitätsaxe trifft den Kegelschnitt in den beiden Doppelelementen. [1]

Wenn $d_2\ d_3\ d_4$ drei Punkte einer kubischen Raumcurve sind, so construire man ihre Schmiegungsebenen, welche sich in einem Punkte der Ebene $(d_2 d_3 d_4)$ schneiden werden; die durch diesen Punkt gehende Secante der Curve trifft die Curve in den beiden Doppelpunkten der durch $d_2 d_3 d_4$ bestimmten cyklischen Projectivität.

Sind also vier Punkte durch $a_x^4 = 0$ gegeben und bestimmt man durch je drei von ihnen eine cyklische Projectivität, so müssen sich, wie aus dem Früheren folgt, die acht Doppelelemente der vier cyklischen Projectivitäten, die man so erhält, durch Auflösung einer einzigen biquadratischen Gleichung bestimmen lassen. Um diese Gleichung zu finden, bilden wir das Product der Hesse'schen Formen von:

$$\frac{a_x^4}{xy_1 - yx_1},\quad \frac{a_x^4}{xy_2 - yx_2},\quad \frac{a_x^4}{xy_3 - yx_3},\quad \frac{a_x^4}{xy_4 - yx_4}$$

Dies Product findet man leicht, wenn man a_x^4 in der Form

$$a_0 x^4 + b a_2 x^2 y^2 + h a_3 x y^3 + a_4 y^4$$

voraussetzt; es ergibt sich:

---

[1] Siehe: Weyr, Grundzüge einer Theorie der kubischen Involutionen. S. 48. Abh. der kgl. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften. 1874.

$$\rho_x^8 \equiv 24ih^2 + \frac{i^2}{4} f^2 - 12j \, . \, hf,$$

oder

$$4\rho_x^8 \equiv 96(\alpha\alpha')^4[(\alpha\alpha')^2\alpha_x^2\alpha'^2_x]^2 + [(\alpha\alpha')^4]^2[\alpha_x^4]^2 - 48[(\alpha\alpha')(\alpha'\alpha'')(\alpha''\alpha)][(\alpha\alpha')^2\alpha_x^2\alpha'^2_x]\alpha_x^4.$$

Es ist übrigens auch:

$$4\rho_x^8 \equiv \left[if - \frac{24j}{i}\, h\right]^2 + 96h^2\left[\frac{i^3 - 6j^2}{i^2}\right]$$

woraus folgt:

$$4\rho_x^8 \equiv \left[if - \frac{24j + 4\sqrt{-6D}}{i}\, . \, h\right]\left[if - \frac{24j - 4\sqrt{-6D}}{i}\, . \, h\right].$$

Hiemit ist das oben erwähnte algebraische Theorem, welches aus der Construction der ρ-Punkte folgte, erwiesen.

Überdies kann auf Grund der vorigen Betrachtung auch der folgende Satz ausgesprochen werden:

„Die Doppelpunkte der vier cyclischen Projectivitäten bilden zwei Quadrupel der durch die Punktquadrupel φ_x^4, Ψ_x^4 bestimmten biquadratischen Involution."

Eine kubische Involution kann auch definirt werden als Gesammtheit des Tripel

$$b_x^3 = 0,$$

für welche

$$(ba)^3 a_x = 0$$

ist.

Denn in der That genügt hiefür, wenn man hat:

$$a_0 x x_1 x_2 + a_1(x x_1 y_2 + x x_2 y_1 + x_1 x_2 y) + a_2(x y_1 y_2 + x_1 y y_2 + x_2 y y_1) + a_3 y y_1 y_2 = 0,$$

$$a_1 x x_1 x_2 + a_2(x x_1 y_2 + x x_2 y_1 + x_1 x_2 y) + a_3(x y_1 y_2 + x_1 y y_2 + x_2 y y_1) + a_4 y y_1 y_2 = 0.$$

Die Doppelpunkte dieser kubischen Involution sind die Wurzeln von:

$$h_x^4 = 0.$$

Die dieser Involution beigeordnete Involution ist:

$$k(a_0 x^3 + 3a_1 x^2 y + 3a_2 x y^2 + a_3 y^3) + l(a_1 x^3 + 3a_2 x^2 y + 3a_3 x y^2 + a_4 y^3) = 0;$$

beide haben dieselben Doppelelemente. Wir haben somit den Satz:

„Das Verschwinden der Hesse'schen Function der Form a_x^4 liefert die Doppelpunkte der kubischen Involution, welche man erhält, wenn man die ersten Polaren aller Punkte der Reihe bezüglich des Quadrupels a_x^4 bestimmt."

Nehmen wir an, es soll die kubische Involution bestimmt werden, wenn sie in obiger Weise definirt ist, und vier durch

$$\alpha_x^4 = 0$$

gegebene Doppelpunkte besitzt.

Diese Doppelpunkte werden dargestellt durch die Hesse'sche Function einer gewissen biquadratischen Form; wenn wir mit h_{kl} die Hesse'sche Function von $kf+lh$ darstellen, so ist

$$h_{kl} = h\left(k^2 - \frac{i}{6}\,l^2\right) + f\left(\frac{i}{3}\,hl + \frac{j}{3}\,l^2\right)$$

und es muss somit:

$$k^2 - \frac{i}{6}\,l^2 = 0$$

oder

$$k = \sqrt{\frac{i}{6}}\,.\,l$$

sein.

Man wird somit zu zwei Gruppen von Punkten geführt, nämlich:

$$\pm\sqrt{\frac{i}{6}}\,.\,f + h = 0.$$

Auch diese zwei Gruppen gehören der obenerwähnten biquadratischen Involution an, und sollen nach Reye zwei apolare Gruppen genannt werden.

Wenn A_x^3 eine Gruppe der Involution

$$a_x^3 + \lambda b_x^3 = 0$$

darstellt, so hat man:

$$\left(A_x^3,\ \sqrt{h + \sqrt{\frac{i}{6}}\,.\,f}\right)_3 \equiv 0,$$

wodurch eine neue Form der Beziehung zwischen einer Punktgruppe und den vier Doppelelementen gegeben ist.[1]

Man sieht, dass sich an die Untersuchung der kubischen Involution von selbst die Betrachtung der besonderen biquadratischen Involution:

$$kf+lh=0 \tag{5}$$

anschliesst.

Bekanntlich ist die Jacobi'sche Function der beiden Formen f und h gleich der Covariante T der biquadratischen Form; das Quadrat dieser Covariante ist gleich dem Producte:

$$(mf-h)(m'f-h)(m''f-h)$$

in welchem jeder Factor durch ein Quadrat dargestellt ist.

Die Doppelpunkte der biquadratischen Involution (5) vereinigen sich in drei verschiedenen Arten paarweise zu Quadrupeln derselben Involution.

Auf Grund der durchgeführten Untersuchungen und mit Rücksicht auf die von Professor Emil Weyr erhaltenen Resultate[2] (dual übersetzt) erhält man folgende Sätze:

„Ist auf einem Kegelschnitte eine kubische Punktinvolution, so werden die Seiten der vollständigen Vierecke, welche gebildet sind: aus den vier Doppelpunkten, aus den vier Verzweigungspunkten, aus den Verzweigungspunkten der beigeordneten Involution, aus den der Hesse'schen Function der Doppelpunkte entspringenden Punkten, aus den zwei apolaren Gruppen und aus den zwei ρ-Gruppen, eine Curve dritter Classe umhüllen. Die gemeinsamen Tangenten dieser Curve und des Kegelschnittes berühren letzteren in den sechs Doppelpunkten der Involution, welche durch die Covariante T dargestellt werden. Diese sechs Doppelpunkte lassen sich so in Paare $\delta_1\delta_2$, $\delta_3\delta_4$, $\delta_5\delta_6$ gruppiren, dass z. B. die Sehne $\delta_1\delta_2$ und die in δ_1 und δ_2 an den Kegelschnitt gelegten Tangenten ein der Curve dritter Classe umschriebenes Dreiseit bilden."

---

[1] Sur certaines covariants d'un système cubo-biquadratique; Bull. de l'Acad. roy. de Belgique, 2me série, t. XLVI, 1878.

[2] Die Curven dritter Ordnung als Involutionscurven. Sitzungsb. der kgl. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften, 1877.

Die Verzweigungspunkte dieser biquadratischen Involution sind die Schnittpunkte der Curve dritter Classe mit dem Kegelschnitt, und da es zwölf Verzweigungspunkte gibt, so ist die Curve dritter Classe zugleich von der sechsten Ordnung.

Es wären noch einige Bemerkungen zu machen über die speciellen Fälle, in denen die kubische Involution:

$$a_x^3+\lambda b_x^3 = 0$$

nicht mehr allgemeiner Natur ist.

Angenommen es wäre $(ab)^3=0$. Dann ist die Quadrinvariante der Jacobi'schen Function gleich Null und die Doppelpunkte bilden ein äquianharmonisches System.

Die beiden Verzweigungsgruppen sind in diesem Falle identisch; sie sind dargestellt durch die Hesse'sche Function der Jacobi'schen Function und sind ebenfalls äquianharmonisch. Die beiden ρ-Gruppen fallen zusammen mit der Gruppe der Doppelelemente und jener der Verzweigungselemente.

Dasselbe gilt von den beiden apolaren Gruppen.

Die Discriminante der Jacobi'schen Function ist das Product der Invarianten R, Q zweier kubischer Formen; R ist ihre Resultante und Q die Invariante, welche verschwindet, wenn die Involution einen dreifachen Punkt erhält.

Wenn $Q=0$ ist, so wird $D=0$; dann fallen zwei Doppelpunkte zusammen. Das Product $\varphi\Psi$ ist ein Quadrat und ebenso die Form ρ_x^8.

Alle diese Ergebnisse fliessen auch aus den von Herrn Emil Weyr gegebenen geometrischen Constructionen.

Dieselben Schlüsse gelten, wenn $R=0$ ist; nur geht in diesem Falle die kubische Involution über in einen festen Punkt und eine quadratische Involution.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1880

Band/Volume: 81_2

Autor(en)/Author(s): Paige C. Le

Artikel/Article: Bemerkungen über kubische Involutionen. 845-852