Zur Theorie der symmetrischen Functionen.

Von **F. Mertens.**

1.

Die Hauptaufgabe der Lehre von den ganzen symmetrischen Functionen n willkürlicher Elemente $x_1, x_2, \ldots x_n$ besteht in dem Beweise des Satzes, dass sich jede solche Function durch die n einfachen symmetrischen Verbindungen

$$\begin{aligned} C_1 &= x_1+x_2+\ldots+x_n \\ C_2 &= x_1 x_2+x_1 x_3+\ldots+x_{n-1} x_n \\ & \\ C_n &= x_1 x_2 \ldots x_n, \end{aligned}$$

wo C_1 die Summe, C_2 die Summe der Producte je zweier, ... C_n das Product der Elemente bezeichnen, in ganzer Weise ausdrücken lässt, und in der Aufstellung eines bequemen zu dieser Umformung führenden Verfahrens. In dem Folgenden soll ein solches Verfahren auseinandergesetzt so wie auch die Anwendbarkeit des Cauchy'schen Verfahrens [1] auf symmetrische Ausdrücke von aus gleich vielen Gliedern bestehenden Elementengruppen gezeigt werden.

2.

Die in dem Folgenden auseinanderzusetzende Bestimmungsweise der symmetrischen Functionen beruht zum Theil auf der Vorfrage: [2]

Was kann von einem ganzen symmetrischen Ausdrucke S der n willkührlichen Elemente $x_1, x_2, \ldots x_n$ behauptet werden,

[1] Exercices de mathématiques IV, p. 103.

[2] Den ersten Theil dieses übrigens sehr leicht zu verallgemeinernden Satzes hat H. Kronegker in seinen Vorlesungen an der Berliner Universität in den sechziger Jahren gegeben.

welcher identisch verschwindet, wenn man eines der Elemente, etwa x_n, $= 0$ setzt?

In entwickelter Gestalt erscheint S als eine Summe von Gliedern, welche, unter c einen von $x_1, x_2, \ldots x_n$ unabhängigen Coëfficienten und unter $\alpha, \beta, \ldots \nu$ ganze nicht negative Zahlen verstanden, sämmtlich die Form

$$c x_1^{\alpha} x_2^{\beta} \ldots x_n^{\nu} \qquad 1)$$

besitzen, und man kann sich alle das nämliche Product $x_1^{\alpha} x_2^{\beta} \ldots x_n^{\nu}$ enthaltenden Glieder zusammengezogen beziehungsweise gestrichen denken, wenn sich dieselben aufheben. Nach dieser Zusammenziehung kann es in der Entwickelung von S kein Glied von der Form 1) mehr geben, in welchem eines der Elemente $x_1, x_2, \ldots x_n$ fehlt. Zunächst folgt nämlich aus der Voraussetzung, dass es keine Glieder geben kann, in welchen x_n fehlt. Würden nun sich nicht aufhebende Glieder vorkommen, in welchen etwa das Element x_k fehlt, so würde die Vertauschung von x_n mit x_k, welche S identisch ungeändert lässt, in S eine Gruppe von x_n nicht enthaltenden Gliedern einführen, welche sich weder gegen einander noch auch gegen die etwaigen anderen — x_n enthaltenden — Glieder aufheben könnten.

Ist nun der Grad m von S in Bezug auf $x_1, x_2, \ldots x_n < n$, so muss identisch $S \equiv 0$ sein, weil in diesem Falle in S keine alle Elemente $x_1, x_2, \ldots x_n$ enthaltenden Glieder vorkommen können.

Ist dagegen $m \geqq n$, so kann die Entwickelung von S nur aus Gliedern bestehen, welche das Product $x_1 x_2 \ldots x_n$ enthalten, und man kann

$$S = x_1 x_2 \ldots x_n S_1$$

setzen, wo S_1 ein ganzer und, wie unmittelbar erhellt, symmetrischer Ausdruck der Elemente $x_1, x_2, \ldots x_n$ vom Grade $m - n$ ist. Insbesondere ist S_1 eine Constante, wenn $m = n$.

3.

Dies vorausgeschickt, lautet der Hauptsatz der Lehre von den ganzen symmetrischen Ausdrücken n willkürlicher Elemente $x_1, x_2, \ldots x_n$, wie folgt:

Ein ganzer symmetrischer Ausdruck S der Elemente x_1, $x_2, \ldots x_n$ lässt sich immer und nur auf eine Weise in einen ganzen

Ausdruck der in der Entwickelung des Productes

$$(x+x_1)\ldots(x+x_2)\ldots(x+x_n)$$

nach Potenzen von x auftretenden symmetrischen Verbindungen

$$\begin{aligned} C_1 &= x_1+x_2+\ldots+x_n \\ C_2 &= x_1\,x_2+x_1\,x_3+\ldots+x_{n-1}x_n \\ & \\ C_n &= x_1\,x_2\ldots x_n \end{aligned}$$

umformen, dessen Coëfficienten $x_1, x_2, \ldots x_n$ nicht mehr enthalten und in ganzer ganzzahliger Weise aus den Coëfficienten von S zusammengesetzt sind.

Die Behauptung, dass die genannte Umformung von S nur auf eine Weise ausführbar ist, hat den Sinn, dass, nachdem man in dem erhaltenen Ausdrucke von $C_1, C_2 \ldots C_n$, dessen Glieder alle die Form $c\,C_1^{\alpha}\,C_2^{\beta}\ldots C_n^{\nu}$ haben, alle Glieder mit demselben Producte $C_1^{\alpha}\,C_2^{\beta}\ldots C_n^{\nu}$ zusammengezogen hat, eine zweite derartige Form desselben Ausdruckes S, welche nicht Glied für Glied mit jener übereinstimmt, unmöglich ist. Eine unmittelbare Folge hievon ist, dass der Grad jedes einzelnen Gliedes $c\,C_1^{\alpha}\,C_2^{\beta}\ldots C_n$ in Bezug auf $x_1, x_2, \ldots x_n$ in dem umgeformten Ausdrucke, d. h. die Zahl $\alpha+2\beta+\ldots+n\nu$ den Grad m von S nicht übersteigen kann. Wäre dies nämlich der Fall, so könnte man diese Glieder derart in zwei Gruppen φ und ψ theilen, dass in jedem Gliede von φ $\alpha+2\beta+\ldots+n\nu \leqq m$, in jedem Gliede von ψ hingegen $\alpha+2\beta+\ldots+n\nu > m$ wäre. Da alsdann $S-\varphi \equiv \psi$ wäre und $S-\varphi$ nach den Elementen $x_1, x_2, \ldots x_n$ entwickelt nur Glieder enthalten kann, deren Grad m nicht übersteigt, so müsste identisch $S-\varphi \equiv 0$ sein und man hätte für S zwei Umformungen φ und $\varphi+\psi$.

Um diesen Satz zu beweisen, kann man annehmen, dass, wenn in einem ganzen symmetrischen Ausdrucke S der Elemente $x_1, x_2, \ldots x_n$ $x_n = 0$ gesetzt und das Resultat mit S^0 bezeichnet wird, S^0 sich und zwar nur auf eine Weise in einen ganzen Ausdruck der durch die Identität

$$(x+x_1)(x+x_2)\ldots(x+x_{n-1}) - x^{n-1} = B_1\,x^{n-2}+B_2\,x^{n-3}+\ldots \\ +B_{n-1}$$

erklärten Verbindungen $B_1, B_2, \ldots B_{n-1}$ umformen lasse. Diese

Annahme ist gestattet, wenn $n = 2$ ist, da in diesem Falle S^0 eine Function von x_1 allein ist, also unmittelbar als ganze Function des Coëfficienten des Ausdruckes $(x+x_1)-x$ erscheint und nur einer solchen Form fähig ist. Wenn aber $n > 2$ ist, so ist S^0 ein ganzer symmetrischer Ausdruck der $n-1$ Elemente $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ und die obige Annahme läuft auf die Voraussetzung hinaus, dass die Giltigkeit des zu beweisenden Satzes für $n-1$ Elemente bereits feststehe.

Wenn die behauptete Umformung von S möglich ist und man sich nach Ausführung derselben alle C_n nicht enthaltenden Glieder in den Ausdruck $\varphi_0\,(C_1, C_2, \ldots C_{n-1})$ zusammengefasst denkt, welcher unter Umständen auch identisch $= 0$ sein kann, wenn nämlich Glieder wie die obgenannten gar nicht vorkommen, so ist die Differenz $S-\varphi_0\,(C_1, C_2, \ldots C_{n-1})$ entweder identisch $= 0$ oder doch aus lauter Gliedern zusammengesetzt, welche C_n als Factor enthalten. Setzt man daher $x_n = 0$ und bezeichnet den Ausdruck, in welchen dadurch S übergeht, mit S^0, so gehen $C_1, C_2, \ldots C_{n-1}$ beziehungsweise in $B_1, B_2, \ldots B_{n-1}$ über und es wird

$$S^0 = \varphi_0\,(B_1, B_2, \ldots B_{n-1}).$$

Da eine solche Identität nach der Annahme nur auf eine Weise hergestellt werden kann, so erhellt, dass φ_0 der aus der Verwandlung des ganzen symmetrischen Ausdruckes S^0 der $n-1$ Elemente $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ in eine ganze Function von $B_1, B_2, \ldots B_{n-1}$ hervorgehende Ausdruck sein muss. Bezeichnet umgekehrt $\varphi_0\,(B_1, B_2, \ldots B_{n-1})$ diesen Ausdruck und ersetzt man in demselben $B_1, B_2, \ldots B_{n-1}$ beziehungsweise durch $C_1, C_2, \ldots C_{n-1}$, so verschwindet die Differenz $S-\varphi_0\,(C_1, C_2, \ldots C_{n-1})$ identisch, wenn man $x_n = 0$ setzt, und ist daher, je nachdem der Grad m von $S < n$ oder $\geqq n$ ist, entweder identisch $= 0$ oder durch C_n theilbar und der Quotient S_1 ein ganzer symmetrischer Ausdruck von $x_1, x_2, \ldots x_n$ vom Grade $m-n$.

Ist nun $m < n$, so ist die Umformung von S beendigt und man hat

$$S = \varphi_0\,(C_1, C_2, \ldots C_{n-1}).$$

Ist $m = n$, so ist S_1 eine Constante c, deren Werth durch Einsetzung besonderer Werthe für $x_1, x_2, \ldots x_n$ leicht zu ermitteln ist, und

$$S = \varphi_0 (C_1, C_2, \ldots C_{n-1}) + c\, C_n.$$

Ist aber $m > n$, so verfahre man mit S_1 so wie mit S. Es wird dann, je nachdem $m < 2n$ oder $m \gtreqless 2n$ ist,

$$S_1 = \varphi_1 (C_1, C_2, \ldots C_{n-1})$$

oder

$$S_1 = \varphi_1 (C_1, C_2, \ldots C_{n-1}) + C_n S_2,$$

wo S_2 symmetrisch und vom Grade $m-2n$ ist. Setzt man diese Ausdrücke statt S_1 ein, so ergibt sich

$$S = \varphi_0 (C_1, C_2, \ldots C_{n-1}) + C_n\, \varphi_1 (C_1, C_2, \ldots C_{n-1})$$

beziehungsweise

$$S = \varphi_0 (C_1, C_2, \ldots C_{n-1}) + C_n\, \varphi_1 (C_1, C_2, \ldots C_{n-1}) + C_n^2 S_2.$$

Im ersten Falle ist die Umformung von S geleistet. Im zweiten Falle ist sie ebenfalls erreicht, wenn $m = 2n$ ist, da alsdann S_2 eine Constante ist. Wenn aber $m > 2n$ ist, so ist auf S_2 wieder dasselbe Verfahren wie auf S anzuwenden. Fährt man in dieser Weise fort, so muss man nach höchstens $\left[\frac{m+n-1}{n}\right]$ Schritten, wo $\left[\frac{m+n-1}{n}\right]$ die grösste in $\frac{m+n-1}{n}$ enthaltene ganze Zahl bezeichnet, zu der gewünschten Umformung von S gelangen.

Dieser Beweis erhärtet die Wahrheit des Satzes zunächst unmittelbar für zwei Elemente; steht derselbe aber für zwei Elemente fest, so gilt er auch für drei, u. s. w. Überdies ist klar, dass, wenn die Coëfficienten der Glieder in $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$ in ganzer ganzzahliger Weise aus den Coëfficienten von S zusammengesetzt sind, dies auch von der Umformung von S gilt und dass es nur eine Umformung geben kann.

Die lästige Bestimmung der Ausdrücke $S_1, S_2, \ldots$ kann man umgehen und $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$, wie folgt, bestimmen.

Man entwickele S nach Potenzen von x_n bis zur k^{ten} Potenz, wenn k die grösste in $\frac{m}{n}$ enthaltene ganze Zahl bezeichnet, und es sei

$$S = Q_0 + Q_1\, x_n + Q_2\, x_n^2 + \ldots + Q_n\, x_n^k + \ldots.$$

Es sind dann $Q_0, Q_1 \ldots Q_k$ symmetrisch in Bezug auf $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ und können daher in ganze Ausdrücke von $B_1, B_2, \ldots B_{n-1}$ verwandelt werden, so dass

$$S = f_0\,(B_1, B_2, \ldots B_{n-1}) + x_n f_1\,(B_1, B_2, \ldots B_{n-1}) + \ldots$$
$$+ x_n^k f_k\,(B_1, B_2 \ldots B_{n-1}) + \ldots$$

wird. Bezeichnet man nun allgemein den Coëfficienten von x_n^h in der Entwickelung des Ausdruckes

$$\psi\,(C_1, C_2, \ldots C_{n-1}) = \psi\,(B_1 + x_n, B_2 + B_1 x_n, \ldots B_{n-1} + B_{n-2} x_n)$$

nach Potenzen von x_n mit $\psi^{(h)}$ und vergleicht in der Identität

$$\varphi_0\,(C_1, C_2, \ldots C_{n-1}) + C_n\,\varphi_1\,(C_1, C_2, \ldots C_{n-1}) + \ldots$$
$$= f_0\,(B_1, B_2, \ldots B_{n-1}) + x_n f_1\,(B_1, B_2, \ldots B_{n-1}) + \ldots$$

beiderseits die Coëfficienten von $x_n^0, x_n^1, \ldots x_n^k$, so ergeben sich die zur Bestimmung von $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$ hinreichenden Gleichungen:

$$\varphi_0 = f_0$$
$$\varphi_0^{(1)} + B_{n-1}\,\varphi_1 = f_1$$
$$\varphi_0^{(2)} + B_{n-1}\,\varphi_1^{(1)} + B_{n-1}\,\varphi_2 = f_2$$
$$\ldots$$
$$\varphi_0^{(k)} + B_{n-1}\,\varphi_1^{(k-1)} + \ldots + B_{n-1}^k\,\varphi_k = f_k,$$

in welchen sich die Functionszeichen $\varphi_0, f_0, \ldots$ auf $B_1, B_2, \ldots B_{n-1}$ beziehen. Wenn insbesondere m ein Vielfaches von n ist, so ist φ_k eine Constante und die letzte Gleichung entbehrlich.

4.

Behufs Beurtheilung der Brauchbarkeit des mitgetheilten Verfahrens will ich dasselbe auf einige weniger einfache Beispiele anwenden.

I. Es sei

$$n = 3$$
$$C_1 = x_1 + x_2 + x_3$$
$$C_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3$$
$$C_3 = x_1 x_2 x_3$$
$$B_1 = x_1 + x_2$$
$$B_2 = x_1 x_2 \text{ und}$$
$$S = (x_1 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 (x_2 - x_3)^2.$$

Hier ist die Form

$$S = \varphi_0 (C_1, C_2) + C_3 \varphi_1 (C_1, C_2) + c\, C_3^2$$

anzusetzen, wo c eine Constante bezeichnet. Da

$$\begin{aligned} S &= [(x_1+x_2)^2 - 4 x_1 x_2] [x_1 x_2 - (x_1+x_2) x_3 + x_3^2]^2 \\ &= (B_1^2 - 4 B_2) (B_2^2 - 2 B_1 B_2 x_3 + \ldots) \end{aligned}$$

ist, so hat man zur Bestimmung von φ_0, φ_1 die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= B_1^2 B_2^2 - 4 B_2^3 \\ \varphi_0^{(1)} + B_2 \varphi_1 &= -2 B_1^3 B_2 + 8 B_1 B_2^2. \end{aligned}$$

Aus der ersten derselben folgt:

$$\varphi_0^{(1)} = 2 B_1^3 B_2 - 10 B_1 B_2^2$$

und sodann aus der zweiten:

$$\varphi_1 = -4 B_1^3 + 18 B_1 B_2.$$

Man hat also

$$S = C_1^2 C_2^2 - 4 C_2^3 - 4 C_1^3 C_3 + 18 C_1 C_2 C_3 + c\, C_3^2.$$

Um c zu bestimmen, setze man $x_1 = 2$, $x_2 = x_3 = -1$; es wird dann $S = 0$, $C_1 = 0$, $C_2 = -3$, $C_2 = 2$ und somit $c = -27$. Es ist also

$$S = C_1^2 C_2^2 - 4 C_2^3 - 4 C_1^3 C_3 + 18 C_1 C_2 C_3 - 27 C_3^2.$$

II. Es sei

$$\begin{aligned} n &= 4 \\ C_1 &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ C_2 &= x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4 \\ C_3 &= x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4 \\ C_4 &= x_1 x_2 x_3 x_4 \\ B_1 &= x_1 + x_2 + x_3 \\ B_2 &= x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 \\ B_3 &= x_1 x_2 x_3 \text{ und} \end{aligned}$$

$$S = (x_1-x_2)^2 (x_1-x_3)^2 (x_1-x_4)^2 (x_2-x_3)^2 (x_2-x_4)^2 (x_3-x_4)^2.$$

Hier ist die Form

$$S = \varphi_0 (C_1, C_2, C_3) + C_4 \varphi_1 (C_1, C_2, C_3) + C_4^2 \varphi_2 (C_1, C_2, C_3) + c\, C_4^3$$

anzusetzen, wo c eine Constante bezeichnet.

Setzt man zur Abkürzung

$$B_1^2\, B_2^2 - 4\, B_2^3 - 4\, B_1^3\, B_3 + 18\, B_1\, B_2\, B_3 - 27\, B_3^2 = D,$$

so ergibt sich auf Grund des vorhergehenden Beispiels

$$\begin{aligned} S &= D\,(x_1 - x_4)^2 (x_2 - x_4)^2\, (x_3 - x_4)^2 \\ &= D\,(B_3 - B_2\, x_4 + B_1\, x_4^2 - x_4^3)^2 \\ &= D\,(B_3^2 - 2\, B_2\, B_3\, x_4 + (B_2^2 + 2\, B_1\, B_3)\, x_4^2 + \ldots) \end{aligned}$$

und man hat zur Bestimmung von φ_0, φ_1, φ_2 die Gleichungen:

$$\begin{aligned} &\varphi_0 = B_3^2 D \\ &\varphi_0^{(1)} + B_3\, \varphi_1 = -2\, B_2\, B_3\, D \\ &\varphi_0^{(2)} + B_3\, \varphi_1^{(1)} + B_3^2\, \varphi_2 = (B_2^2 + 2 B_1\, B_3) D. \end{aligned}$$

Aus der ersten folgt:

$$\begin{aligned} \varphi_0^{(1)} &= 2 B_2\, B_3 D + B_3^2 D^{(1)} \\ \varphi_0^{(2)} &= B_2^2 D + 2 B_2\, B_3 D^{(1)} + B_3^2 D^{(2)}; \end{aligned}$$

aus der zweiten

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= -4 B_2 D - B_3 D^{(1)} \\ \varphi_1^{(1)} &= -4 B_1 D - 5 B_2 D^{(1)} - B_3 D^{(1)\,(1)}; \end{aligned}$$

aus der dritten

$$B_3\, \varphi_2 = 6 B_1 D + 3 B_2 D^{(1)} + B_3 (D^{(1)\,(1)} - D^{(2)}).$$

Es ist aber:

$$\begin{aligned} D^{(1)} &= 8 B_1\, B_2^2 + 6 B_1^2 B_3 - 2 B_1^3\, B_2 - 36\, B_2\, B_3 \\ D^{(2)} &= B_1^4 - 2 B_1^2\, B_2 - 8\, B_2^2 + 6\, B_1\, B_3 \\ D^{(1)\,(1)} &= -2 B_1^4 + 16 B_1^2\, B_2 - 24\, B_1 B_3 - 28\, B_2^2. \end{aligned}$$

Durch Einsetzung dieser Ausdrücke ergibt sich:

$$\begin{aligned} \varphi_0\, (C_1, C_2, C_3) &= C_1^2\, C_2^2\, C_3^2 - 4 C_2^3\, C_3^2 - 4 C_1^3\, C_3^3 + 18 C_1\, C_2\, C_3^3 \\ &\quad - 27\, C_3^4 \\ \varphi_1\, (C_1, C_2, C_3) &= 16\, C_2^4 - 4 C_1^2\, C_2^3 + 18\, C_1^3\, C_2\, C_3 - 80\, C_1\, C_2^2\, C_3 \\ &\quad - 6\, C_1^2 C_3^2 + 144\, C_2\, C_3^2 \\ \varphi_2\, (C_1, C_2, C_3) &= -27\, C_1^4 + 144 C_1^2\, C_2 - 128 C_2^2 - 192 C_1\, C_3. \end{aligned}$$

c findet man am einfachsten, wenn man $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = i$, $x_3 = -i$ nimmt. Es wird dann $C_1 = C_2 = C_3 = 0$, $C_4 = -1$, $S = -256$ und daher $c = 256$.

III. Es sei $n = 4$ und

$$x_1\, x_2 + x_3\, x_4 = y_1$$
$$x_1\, x_3 + x_2\, x_4 = y_2$$
$$x_2\, x_3 + x_1\, x_4 = y_3;$$

es sollen die Coëfficienten

$$P = y_1 + y_2 + y_3$$
$$Q = y_1\, y_2 + y_1\, y_3 + y_2\, y_3$$
$$R = y_1\, y_2\, y_3$$

der Lagrange'schen Resolvente

$$(y - y_1)\,(y - y_2)\,(y - y_3) = 0$$

berechnet werden.

P erscheint unmittelbar in der Form C_2. Um Q zu bestimmen, hat man die Form

$$Q = \varphi_0\,(C_1,\, C_2,\, C_3) + c\, C_4$$

anzusetzen, wo c eine Constante bezeichnet. Setzt man $x_4 = 0$, so geht Q in $B_1\, B_3$ über; man hat daher

$$Q = C_1\, C_3 + c\, C_4.$$

Zur Bestimmung von c setze man $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$ es wird dann:

$$12 = 16 + c$$

also

$$c = -4$$

und

$$Q = C_1\, C_3 - 4\, C_4.$$

Für R ist die Form

$$R = \varphi_0\,(C_1,\, C_2,\, C_3) + C_4\, \varphi_1\,(C_1,\, C_2,\, C_3)$$

anzusetzen. Entwickelt man R nach Potenzen von x_4, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} R &= B_3^2 + B_3\,(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)\, x_4 + \cdot \\ &= B_3^2 + B_3\,(B_1^2 - 2B_2)\, x_4 + \cdot \end{aligned}$$

Man hat daher:

$$\varphi_0 = B_3^2$$
$$\varphi_0^{(1)} + B_3\, \varphi_1 = B_3\,(B_1^2 - 2B_2).$$

Aus der ersten Gleichung folgt:

$$\varphi_0^{(1)} = 2B_2\, B_3$$

und sodann aus der zweiten

$$\varphi_1 = B_1^2 - 4B_2,$$

so dass

$$R = C_3^2 + C_1^2\, C_4 - 4C_2\, C_4$$

wird.

IV. Es sei $n = 4$ und der symmetrische Ausdruck

$$S = (x_1 + x_2 - x_3 - x_4)\,(x_1 - x_2 + x_3 - x_4)\,(x_1 - x_2 - x_3 + x_4)$$

umzuformen. Hier ist die Form

$$S = \varphi_0\,(C_1, C_2, C_3)$$

anzusetzen und man erhält für $x_4 = 0$:

$$(x_1 + x_2 - x_3)\,(x_1 - x_2 + x_3)\,(x_1 - x_2 - x_3) = \varphi_0\,(B_1, B_2, B_3).$$

Setzt man

$$\varphi_0\,(B_1, B_2, B_3) = \psi_0\,(B_1, B_2) + c\,B_3,$$

so ist c eine Constante und man kann zur Bestimmung von ψ_0 $x_3 = 0$ setzen. Es wird dann:

$$\begin{aligned}\psi_0\,(x_1 + x_2, x_1\, x_2) &= (x_1 + x_2)\,(x_1 - x_2)^2 \\ &= (x_1 + x_2)[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1\, x_2].\end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich:

$$\psi_0\,(B_1, B_2) = B_1\,(B_1^2 - 4B_2).$$

Setzt man, um c zu bestimmen, $x_1 = x_2 = x_3 = 1$, so wird $-1 = -9 + c$ also $c = 8$ und daher

$$\begin{aligned}\varphi_0\,(B_1, B_2, B_3) &= B_1^3 - 4\,B_1\,B_2 + 8\,B_3 \\ S &= C_1^3 - 4\,C_1\,C_2 + 8\,C_3.\end{aligned}$$

5.

Ein ganzer symmetrischer Ausdruck A der n Gruppen

$$\begin{matrix} x_1\; y_1 \ldots z_1 \\ x_2\; y_2 \ldots z_2 \\ \\ x_n\; y_n \ldots z_n \end{matrix}$$

von je p Elementen d. h. ein ganzer Ausdruck dieser Elemente, welcher identisch ungeändert bleibt, wenn man die Gruppen in irgend einer Weise gegen einander vertauscht, lässt sich immer identisch als ganze Function der Coëfficienten des nach $t, x, y, \ldots z$ zu entwickelnden Productes

$$T = (t+t_1)(t+t_2).\ \ .(t+t_n)$$

darstellen, wo zur Abkürzung

$$x_i x + y_i y + .\ \ . + z_i z = t_i$$

gesetzt worden ist.

Man nehme an, dass dieser Satz richtig ist, wenn man sämmtliche Elemente $x_n, y_n, \ldots z_n$ der letzten Gruppe $= 0$ setzt. Diese Annahme bedarf für $n = 2$ keiner Begründung und läuft für grössere Werthe von n auf die Voraussetzung hinaus, dass der Satz für $n-1$ Gruppen von je p Elementen bereits feststeht. Gelingt daher der Beweis des Satzes unter dieser Annahme, so schliesst man die Richtigkeit desselben zunächst für zwei, sodann für drei Gruppen u. s. w.

Denkt man sich A nach den Elementen $x_n, y_n, \ldots z_n$ entwickelt, so sind die Coëfficienten der verschiedenen Producte von der Form $x_n^\alpha y_n^\beta \ldots z_n^\varepsilon$ ganze symmetrische Ausdrücke der $n-1$ Gruppen

$$\begin{array}{l} x_1\, y_1 \ldots z_1 \\ x_2\, y_2 \ldots z_2 \\ \\ x_{n-1}\, y_{n-1} \ldots z_{n-1} \end{array}$$

oder auch in dem Falle $n = 2$ Functionen von $x_1, y_1, \ldots z_1$ allein und lassen sich daher nach der obigen Annahme identisch als ganze Functionen der Coëfficienten des Productes $\frac{T}{t+t_n}$ darstellen. Diese Coëfficienten erscheinen aber als ganze Functionen von x_n, $y_n, \ldots z_n$ und der Coëfficienten von T, wenn man die entwickelte Form von T durch $t+t_n$ algebraisch theilt, wodurch nämlich, wenn

$$T = t^n + P_1\, t^{n-1} + P_2\, t^{n-2} + \ldots\ + P_n$$

gesetzt wird,

$$\frac{T}{t+t_n} = t^{n-1} + (P_1 - t_n)\, t^{n-2} \ldots\ + P_{n-1} - t_n\, P_{n-2} + \ldots \pm t_n{}^{n-1}$$

erhalten wird. Es lässt sich daher A identisch als ganze Function von $x_n, y_n, \ldots z_n$ und der Coëfficienten von T darstellen, so dass man

$$A = \Sigma H_{\alpha\beta \ldots \varepsilon} x_n^\alpha y_n^\beta \ldots z_n^\varepsilon \qquad 2)$$

setzen kann, wo $H_{\alpha\beta\ldots\varepsilon}$ die Coëfficienten von T in ganzer Weise enthält.

Man kann sogar bewirken, dass in jedem Gliede dieser Summe $\alpha+\beta+\ldots+\varepsilon < n$ sei. Da nämlich T für $t = -t_n$ verschwindet, so hat man

$$t_n^n - P_1 t_n^{n-1} + P_2 t_n^{n-2} - \ldots \pm P_n = 0$$

und durch Multiplication mit t_n^{m-n}, wenn $m \geqq n$ ist,

$$t_n^m = P_1 t_n^{m+n-1} - P_2 t_n^{m+n-2} + \ldots \mp P_n t_n^{m-n}.$$

Nimmt man nun, wofern $\alpha+\beta+\ldots+\varepsilon \geqq n$ ist, $m = \alpha+\beta+\ldots+\varepsilon$ und vergleicht in der vorstehenden Identität beiderseits die Coëfficienten von $x^\alpha y^\beta \ldots z^\varepsilon$, so erhält man $x_n^\alpha y_n^\beta \ldots z_n^\varepsilon$ linear durch Glieder von derselben Form aber mit geringerer Exponentensumme ausgedrückt, wobei als Coëfficienten dieser Glieder nur ganze Verbindungen der Coëfficienten von T auftreten können.

Da die Gleichung 2) in Bezug auf alle Elemente identisch ist, so kann man in derselben die Gruppen beliebig mit einander vertauschen und erhält

$$A = \Sigma H_{\alpha\beta\ldots\varepsilon} x_1^\alpha y_1^\beta \ldots z_1^\varepsilon$$
$$A = \Sigma H_{\alpha\beta\ldots\varepsilon} x_2^\alpha y_2^\beta \ldots z_2^\varepsilon$$

$$A = \Sigma H_{\alpha\beta\ldots\varepsilon} x_n^\alpha y_n^\beta \ldots z_n^\varepsilon.$$

Addirt man diese Identitäten und setzt zur Abkürzung:

$$x_1^\alpha y_1^\beta \ldots z_1^\varepsilon + x_2^\alpha y_2^\beta \ldots z_2^\varepsilon + \ldots + x_n^\alpha y_n^\beta \ldots z_n^\varepsilon = s_{\alpha\beta\ldots}$$

so wird

$$A = \frac{1}{n} \Sigma H_{\alpha\beta\ldots\varepsilon} s_{\alpha\beta\ldots}.$$

Stellt man nun den in Bezug auf $t_1, t_2, \ldots t_n$ symmetrischen Ausdruck $t_1^k + t_2^k + \ldots + t_n^k$ als ganze Function von $P_1, P_2, \ldots P_n$

dar, so erscheint derselbe auch als ganze Function φ von $x, y, .$ und der Coëfficienten von T. Nimmt man dann $k = \alpha + \beta + \ldots + \varepsilon$ und vergleicht in der Identität

$$t_1^k + t_2^k + \ldots + t_n^k = \varphi$$

auf beiden Seiten die Coëfficienten von $x^\alpha y^\beta \ldots z^\varepsilon$, so ergibt sich unmittelbar $s_{\alpha\beta\ldots\varepsilon}$ als ganze Function der Coëfficienten von T.

Nach Einsetzung der für die verschiedenen Summen $s_{\alpha\beta\ldots\varepsilon}$ gefundenen Werthe ist die Umformung von A vollendet.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1880

Band/Volume: 81_2

Autor(en)/Author(s): Mertens F.

Artikel/Article: Zur Theorie der symmetrischen Functionen. 988-1000