©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Normalenflächen längs ebener Flächenschnitte.

Von Dr. **Gustav Ad. V. Peschka,**
k. Regierungsrath, o. Professor an der k. k. technischen Hochschule in Brünn.

(Mit 4 Tafeln.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 22. April 1880.)

Die geringe Beachtung, welche die Normalenflächen vom Standpunkte der reinen Mathematik sowohl, als auch von jenem der projectivischen Geometrie bisher gefunden haben, dürfte es rechtfertigen, wenn der Verfasser seinem der kais. Akademie der Wissenschaften bereits unterbreiteten, jedoch noch keineswegs abgeschlossenen „Beitrag zur Theorie der Normalenflächen" unmittelbar eine zweite Abhandlung folgen lässt, welche sich auf die „Normalenflächen längs ebener Flächenschnitte" bezieht. Die hier niedergelegten Untersuchungen stützen sich im Wesentlichen auf das Studium der Projectionen der Normalenflächen und der daraus entspringenden Eigenschaften derselben, sowie auf die entsprechende Anwendung bekannter Theorien der projectivischen Geometrie auf diese Flächengattung. Selbstverständlich konnte auf diese Weise jede Rechnung umgangen werden, und ist auch hierin ein wesentlicher Unterschied zwischen dieser Abhandlung und den Schöpfungen anderer Autoren gelegen. Eine grössere Anzahl neuer, höchst interessanter Sätze, die sich aus den angestellten Untersuchungen anstandslos ergaben, wurde aufgestellt, eingehend begründet und gerechtfertigt.

I.

Normalenflächen längs ebener Schnitte der Flächen zweiter Ordnung.

Die Ordnung der einer Fläche m-ter Ordnung längs des Schnittes mit einer Fläche m'-ter Ordnung entsprechenden Normalenfläche [1] wurde durch

[1] Peschka, Normalenflächen.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$(m^2 . m')$$

ausgedrückt, während die Ordnung ihrer Doppelcurve durch

$$\frac{mm'}{2}(m^3 - 4m - m' + 4)$$

und die Zahl ihrer Kanten durch den Ausdruck

$$2\,mm'\,(2m + m' - 4)$$

bestimmt wurde.

Auf den vorliegenden Fall angewendet, in welchem $m = 2$ und $m' = 1$ ist, erhält man eine Normalenfläche vierten Grades mit einer Doppelcurve dritter Ordnung und vier Kanten.

Weitere Eigenschaften der Normalenflächen für Flächen zweiten Grades längs ihrer ebenen Schnitte ergeben sich ohne besondere Schwierigkeiten durch constructiv-geometrische Betrachtungen, sowie durch Untersuchung ihrer projectiven Darstellung.

Zunächst lässt sich die besagte Untersuchung auf Kegel und Cylinder zweiten Grades reduciren, da bekanntlich die einer Fläche zweiten Grades, längs eines ihrer ebenen Schnitte umschriebene developpable Fläche, ein Kegel zweiten Grades ist, und dieser längs der Leitcurve die nämliche Normalenfläche, wie die Fläche zweiten Grades selbst, besitzt.

Wir können uns hiernach auf die Betrachtung und Untersuchung der Normalenflächen längs der ebenen Schnitte von Kegeln und Cylindern zweiten Grades beschränken.

Zu diesem Zwecke wählen wir die Ebene der Leitcurve des Kegelschnittes K (Fig. 1) als horizontale Projectionsebene, und jene, welche durch die Verbindungsgerade des Mittelpunktes von K mit dem Kegelscheitel S geht, als zweite (verticale) Projectionsebene.

Die horizontalen Projectionen der Normalen des Kegels längs des Kegelschnittes K, sind die Normalen des Letzteren, mithin die horizontale Contour der Normalenfläche die Evolute des Kegelschnittes K. Diese Evolute ist, wie in der vorhergegangenen Abhandlung [1] allgemein nachgewiesen wurde, eine Curve sechster Ordnung und vierter Classe.

Die verticalen Projectionen der Normalen ergeben sich als die Perpendikel von den verticalen Projectionen der Punkte der

---

[1] Peschka, Theorie der Normalenflächen. Sitzungsberichte der kais. Akad. d. Wissenschaften. Wien, Band LXXXI.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Leitlinie K auf die verticalen Tracen der diesen Punkten entsprechenden Berührungsebenen des Leitkegels.

Um somit die Erzeugende der Normalenfläche, welche durch den Punkt (aa') der Leitlinie K geht, zu construiren, bestimmen wir zunächst die Tangentialebene A_v A_h des Kegels in diesem Punkte, und führen durch a und a' zu A_v und A_h die bezüglichen Senkrechten N_a und N'_a, welche bereits die Projectionen der gesuchten Erzeugenden repräsentiren. Die verticale Contour der Normalenfläche ergibt sich als Enveloppe aller Geraden N_a, und ist dieselbe, sowie überhaupt die Contour der besagten Fläche auf jede beliebige Ebene und für jedes beliebig gewählte Projectionscentrum, stets eine Curve sechster Ordnung und vierter Classe.

Wenden wir uns nun vorübergehend zu Betrachtungen anderer Art, und fragen wir zunächst um die Strictionslinie der Normalenfläche.

Eine einfache diesbezügliche Untersuchung liefert für die Normalenflächen der Flächen zweiten Grades, längs ihrer ebenen Schnitte, eine sehr interessante Eigenschaft der Strictionslinie.

Sei (S,K) ein beliebiger Kegel zweiter Ordnung, K ein ebener Schnitt desselben und zugleich die Leitlinie der Normalenfläche. Denken wir uns durch den Scheitel S zu jeder Tangentialebene B eine Senkrechte N' gezogen, so bildet die Gesammtheit dieser Geraden N' einen zweiten Kegel R' der zweiten Ordnung. Die Erzeugenden N' dieses Kegels sind zu den Erzeugenden N der Normalenfläche parallel, und wird somit obbezeichneter Kegel den Richtungskegel für die Normalenfläche repräsentiren.

Setzen wir nun voraus, es sei N eine Erzeugende der Normalenfläche in dem Punkte der Erzeugenden G von (S,K), N' die ihr parallele Erzeugende des Richtungskegels R', und denken wir uns die Berührungsebene B' des letzteren längs N' construirt, so ist diese Ebene senkrecht zur Erzeugenden G des ursprünglichen Kegels (S,K).

Nun ist aber aus der Theorie der windschiefen Flächen bekannt, dass die Ebene A, welche durch die Erzeugende N parallel zur Ebene B' gelegt wird, die windschiefe Normalen-

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

fläche in dem unendlich fernen Punkte der Erzeugenden N berührt, also eine asymptotische Ebene der Normalenfläche vorstelle.

Hieraus ist ersichtlich, dass die asymptotische Ebene der Normalenfläche für eine Erzeugende N diejenige Ebene A ist, welche durch N senkrecht zur entsprechenden Erzeugenden G des Leitkegels (S, K) geführt wird.

Nun ist uns weiters geläufig, dass die Ebene, welche durch die Erzeugende N der windschiefen Fläche senkrecht zur asymptotischen Ebene gelegt wird, die Centralebene der Erzeugenden ist, und die Fläche in dem Centralpunkte dieser Erzeugenden (welcher Punkt der Strictionslinie angehört) berührt.

Führen wir aber in dem vorliegenden Falle durch N eine senkrechte Ebene T auf die Ebene A, so muss diese unbedingt die Erzeugende G, also auch den Scheitel des Leitkegels enthalten.

Aus diesen Erörterungen folgt, dass die sämmtlichen Centralebenen der Normalenfläche, das ist die Ebenen, welche der Normalenfläche längs ihrer Strictionslinie umschrieben sind, einen Kegel umhüllen, dessen Scheitel mit jenem der ursprünglichen Leitfläche identisch ist.

Es ergibt sich hiernach der Satz:

„Die Strictionslinie der Normalenfläche eines Kegels zweiter Ordnung längs eines ebenen Schnittes ist die Berührungscurve der Normalenfläche mit dem ihr aus dem Scheitel des Leitkegels umschriebenen Kegel."

Durch eine geringfügige Änderung im Wortlaute kann man diesen Satz ganz allgemein für die Normalenflächen, entlang der ebenen Schnitte, von Flächen zweiten Grades aufstellen. Berücksichtigt man nämlich, dass in diesem Falle der Scheitel S des Leitkegels den Pol des ebenen Leitschnittes in Bezug auf die Leitfläche zweiten Grades vorstellt, so nimmt der oben aufgestellte Satz die folgende Gestalt an.

„Die Strictionslinie der Normalenfläche einer Fläche zweiten Grades längs eines ihrer ebenen Schnitte ist die Berührungscurve der Normalenfläche mit jenem Kegel, welcher ihr aus dem Pole des ebenen Leitschnittes, als Kegelscheitel betrachtet, umschrieben wird."

Diese Eigenschaft erlaubt uns auch, die Ordnung und Classe der Strictionslinie zu bestimmen.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Der einer Fläche m-ter Ordnung von einem Punkte ausserhalb umschriebene Kegel berührt, wie wir wissen, die Fläche in einer Curve m $(m-1)$-ter Ordnung, welche sich als deren Schnitt mit der ersten Polarfläche des genannten Punktes ergibt.

Besitzt jedoch die gegebene Fläche eine Doppellinie von der b-ten Ordnung, so geht durch diese, wie bekannt, die erste Polarfläche hindurch, ohne dass dieselbe einen Theil der Berührungscurve ausmacht. Der Schnitt der Polarfläche mit der gegebenen Fläche nach der erwähnten Doppellinie ist offenbar von der $2\,b$-ten Ordnung und mithin die Ordnung der Berührungscurve:

$$m\,(m-1)-2\,b.$$

Im vorliegenden Falle ist $m=4$ der Grad der Normalenfläche, $b=3$ die Ordnung ihrer Doppelcurve, folglich die Ordnung der Berührungscurve, also auch jene der Strictionslinie der Normalenfläche: $4\,(4-1)-2\cdot 3=6$.

Auch die Classe der Berührungscurve, oder, was dasselbe ist, die Classe des umschriebenen Kegels ist leicht zu ermitteln, indem die Classe eines einer krummen Fläche aus einem Punkte ausserhalb umschriebenen Kegels, also auch die seiner Berührungscurve, jener der Fläche selbst gleich, im gegenwärtigen Falle daher gleich „vier" ist. Die gewonnenen Resultate zusammengefasst, ergibt sich der Satz:

„Die Strictionslinie der Normalenfläche einer Fläche zweiten Grades längs eines ihrer ebenen Schnitte ist eine Raumcurve sechster Ordnung und vierter Classe."

Die Doppelcurve der eben betrachteteu Normalenfläche ist eine Raumcurve dritter Ordnung, und da im Allgemeinen die Doppelcurve einer windschiefen Fläche n-ten Grades jede Erzeugende in $(n-2)$ Punkten schneidet, so folgt, dass im vorliegenden Falle die Erzeugenden der Normalenfläche zweipunktige Sekanten der Doppelcurve dritter Ordnung seien, oder mit anderen Worten, dass jede Erzeugende der Normalenfläche von zwei anderen Erzeugenden derselben geschnitten werde.

Die Ebene der Leitlinie K wird von der Doppelcurve in drei leicht zu ermittelnden Punkten getroffen. Denn, die Tangenten t'_1 und t'_2 (Fig. 2) von S' an K sind offenbar die Tracen zweier verticaler Tangentialebenen des Kegels; die ihren Berührungspunkten x_1 und x_2 mit K' entsprechenden Normalen N_{x_1} und N_{x_2}

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

liegen demnach in der Ebene der Leitlinie K' und treffen sich in einem Punkte y der Doppelcurve. Ferner begegnet die Normale N_{x_1} den Kegelschnitt K' ausser in x_1 noch in einem Punkte y_1, in welchem sie auch die zugehörige Normale N_{y_1} der Fläche schneidet, woraus folgt, dass y_1 ebenfalls ein Punkt der Doppelcurve ist. In gleicher Weise lässt sich auch nachweisen, dass der Schnittpunkt y_2 der Normalen N_{x_2} mit dem Kegelschnitte K' einen in dieser Ebene liegenden Punkt der Doppellinie dritter Ordnung vorstelle.

Um direct Paare von sich schneidenden Erzeugenden der Normalenfläche zu erhalten, wollen wir noch eine weitere Betrachtung anstellen.

Setzen wir voraus, es seien a und b zwei Punkte der Leitlinie K' von solcher Beschaffenheit, dass sich die ihnen entsprechenden Normalen N_a und N_b des Kegels (S, K) schneiden. Die Verbindungsgerade der Punkte a und b ist dann gleichzeitig die Horizontaltrace der Ebene der beiden Normalen N_a und N_b.

Sind t_a und t_b die Tangenten in den besagten Punkten a und b des Kegelschnittes K, also die Tracen der Tangentialebenen an die Kegelfläche (S, K) in a und b, so stellt die Verbindungsgerade μ ihres Schnittpunktes M mit der horizontalen Projection S' des Kegelscheitels die horizontale Projection der Schnittlinie der genannten Tangentialebenen vor. Da nun weiters die Normalen N_a und N_b auf diesen Berührungsebenen senkrecht stehen, so ist auch deren Ebene senkrecht zur Schnittlinie der letzteren, und mithin die horizontale Trace ab senkrecht zur horizontalen Projection MS' oder μ der Schnittlinie. Ausserdem ist M, als Schnittpunkt der in a und b an den Kegel geführten Tangenten, der Pol der Geraden ab.

Diese einfache Betrachtung führt uns zur Kenntniss der Bedingung, welcher zwei Punkte der Leitlinie K' genügen müssen, damit sich die ihnen entsprechenden Erzeugenden der Normalenfläche schneiden.

Jedes Paar solcher Punkte (wie im vorliegenden Falle a und b) muss nämlich die Eigenschaft besitzen, dass die Verbindungslinie μ des Poles M der durch sie bestimmten Kegelschnittssehne ab mit der horizontalen Projection S' des Kegelscheitels zu ab senkrecht stehe.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Um nun solche Paare von Punkten constructiv zu bestimmen, nehmen wir umgekehrt an, es sei ein Strahl μ des Büschels S' gegeben und man hätte die Lage eines Punktes M auf der Geraden μ so zu bestimmen, dass dessen Polare ab eine zu μ senkrechte Stellung annehme.

Ist sodann σ der zu μ senkrechte Durchmesser des Kegelschnittes K', und τ der diesem Durchmesser σ conjugirte Durchmesser, so stellt letzterer gleichzeitig den Ort der Pole aller zu σ parallelen, also zu μ senkrechten Kegelschnittssehnen vor. Der Schnittpunkt M von μ und τ ist mithin der auf μ gesuchte Punkt, dessen Polare ab zu μ senkrecht steht. Es stellen demnach a und b zwei Punkte des Kegelschnittes dar, deren entsprechende Erzeugenden der Normalenfläche sich schneiden.

In gleicher Weise kann nunmehr für jeden durch S' gehenden anderweitigen Strahl μ' ein folgendes Punktepaar $a_1 b_1$ von der nämlichen Eigenschaft gefunden werden, und es wird somit auch nicht den geringsten Schwierigkeiten unterworfen sein, das Erzeugniss der Sehne ab zu ermitteln.

Beschreibt nämlich der durch S' gehende Strahl μ ein Strahlenbüschel, so wird der zu diesem senkrechte Kegelschnittsdurchmesser σ ein dem ersteren projectivisches Strahlenbüschel erzeugen.

Ebenso beschreibt auch der dem Durchmesser σ conjugirte Durchmesser τ ein Strahlenbüschel, welches dem Büschel σ als auch jenem S' projectivisch verwandt ist. Mithin ist der geometrische Ort des Punktes M (Schnittpunkt von entsprechenden Strahlen der Büschel τ und S') ein Kegelschnitt, welcher auch durch die Scheitel S' und O (Mittelpunkt des Leitkegelschnittes) geht.

Hieraus folgt, dass die Geraden ab, $a_1 b_1$ als Polaren der einzelnen Punkte M dieses Kegelschnittes in Bezug auf den Kegelschnitt K', einen neuen Kegelschnitt Σ umhüllen, welcher, wie leicht einzusehen, eine Parabel sein wird, da die Polare von O, das ist die unendlich ferne Gerade, eine seiner Tangenten ist.

Eine weitere Tangente dieser Parabel ist die Berührungssehne $x_1 x_2$ als Polare des Punktes S'.

Bedenkt man ferner, dass jede Tangente der Parabel Σ den Kegelschnitt K' in zwei Punkten a und b schneidet, für welche die

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Normalen der Kegelfläche in der nämlichen Ebene liegen, andererseits aber die Endpunkte der grossen und kleinen Axe von K', sowie auch die Punkte x_1 und y_1, x_2 und y_2 die nämliche Eigenschaft besitzen, so folgt, dass in gleicher Weise die beiden Axen A und B der Leitlinie K', sowie die in der Ebene von K' liegenden Kegelnormalen N_{x_1} und N_{x_2} Tangenten der Parabel Σ sind. Durch irgend vier von diesen fünf genannten Tangenten ist die Parabel vollkommen bestimmt, und kann auf bekannte Weise projectivisch construirt werden.

Wäre nnn irgend eine Normale, etwa N_b gegeben, so hätte man, um die beiden anderen Normalen, welche von der ersteren geschnitten werden, zu ermitteln, nichts anderes zu thun, als durch ihren Fusspunkt b die beiden Tangenten an die Parabel Σ zu ziehen und so in den Punkten a und c, wo diese den Kegelschnitt K zum zweiten Male treffen, die Fusspunkte der gesuchten Normalen N_a und N_c zu finden.

Der Kegelschnitt K' und die Parabel Σ besitzen vier (reelle oder imaginäre) gemeinschaftliche Tangenten, jede derselben trifft den Kegelschnitt K' in zwei unendlich nahen Punkten, für welche die Normalen des Kegels sich schneiden, das heisst die Berührungspunkte der vier gemeinschaftlichen Tangenten von von Σ und K' mit dem Kegelschnitte K' gehören den Kanten der Normalenfläche an, und die bezeichneten gemeinschaftlichen Tangenten selbst sind die horizontalen Tracen der Torsalebenen, das ist jener Ebenen, welche die Normalenfläche längs der Kanten berühren.

Untersuchen wir nun die Eigenschaften der Ebenen, welche durch Paare sich schneidender Erzeugenden der Normalenfläche, etwa durch N_a und N_b gehen.

Die Ebene $N_a N_b$ schneidet die Normalenfläche, welche vom vierten Grade ist, in einer Curve vierter Ordnung. Nachdem aber die beiden Erzeugenden N_a und N_b Bestandtheile erster Ordnung in diesem Schnitte repräsentiren, kann der Rest bloss vom zweiten Grade, das ist ein Kegelschnitt sein.

Dieser Kegelschnitt trifft jede der beiden Normalen N_a und N_b in zwei Punkten. Es ist bekannt, dass eine Ebene, welche eine Erzeugende einer windschiefen Fläche enthält, die letztere nach einer Curve schneidet, welche ihrerseits diese Erzeugende

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

in (n—1) Punkten trifft, wenn die Fläche vom n-ten Grade ist. Einer dieser (n—1) Punkte ist der Berührungspunkt der Ebene mit der Fläche, während die übrigen (n—2) Punkte die Schnittpunkte der Ebene mit der Doppelcurve der Fläche repräsentiren.

Im vorliegenden Falle enthält die Ebene zwei Erzeugende N_a und N_b der windschiefen Normalenfläche, berührt mithin die Fläche in zwei verschiedenen Punkten, von welchen je einer auf einer der betreffenden Erzeugenden N_a und N_b sich vorfindet. Nach Früherem sind diese Berührungspunkte zwei von den Schnittpunkten der Erzeugenden N_a und N_b mit dem der Normalenfläche angehörenden, in der Ebene von N_a und N_b liegenden Kegelschnitte.

Die beiden anderen Schnittpunkte von N_a und N_b mit diesem Kegelschnitte gehören der Doppelcurve an und sind, wie leicht einzusehen, keine anderen als jene Punkte, in welchen die genannten Erzeugenden N_a und N_b von den anderweitigen Erzeugenden der Normalenfläche getroffen werden. Der dritte in der Ebene $N_a N_b$ liegende Doppelpunkt ist selbstverständlich der Schnittpunkt z der gegebenen Erzeugenden N_a und N_b.

Weiters ist noch zu berücksichtigen, dass die Trace ab der Bitangentialebene $(N_a N_b)$ eine Tangente der Parabel Σ ist, und dass auch die Ebene der Leitlinie K', sowie die unendlich ferne Ebene, Bitangentialebenen der Normalenfläche sind, indem sie die letztere in einem Kegelschnitte und zwei Erzeugenden schneiden. (Für die erstere fällt dieser Kegelschnitt mit dem Leitkegelschnitte K' zusammen, und die Erzeugenden erscheinen durch die beiden Normalen N_{x_1} und N_{x_2} dargestellt).

Fassen wir die Resultate der hier gepflogenen Erörterungen zusammen, so gelangen wir zu folgendem Schlusse:

a) „Die Normalenfläche einer Fläche zweiten Grades längs eines ihrer ebenen Schnitte besitzt unendlich viele Bitangentialebenen, das ist Ebenen, in welchen zwei sich schneidende Erzeugende der Fläche liegen und dieselbe daher in zwei verschiedenen Punkten berühren.

b) Jede dieser Bitangentialebenen schneidet die Normalenfläche ausser in den zwei Erzeugenden noch in einem Kegelschnitte, welcher die ersteren in den bezüglichen

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Berührungspunkten und ausserdem in zwei der Doppelcurve angehörenden Punkten trifft, und

c) Die Tracen der Bitangentialebenen auf der Ebene der Leitcurve der Normalenfläche umhüllen eine Parabel, welche durch die Axen der Leitcurve und die in der Ebene der letzteren liegenden Flächennormalen, als Tangenten, bestimmt ist.“

Auch die Berührungsebenen längs der Kanten der Normalenfläche schneiden diese ausser in den zwei zu einer Kante vereinigten Erzeugenden noch in einem Kegelschnitte.

Da eine solche Berührungsebene die Normalenfläche längs einer Geraden tangirt, so berührt sie auch alle auf der Fläche liegenden Curven und somit auch den obenbezeichneten Kegelschnitt und die Doppelcurve der Fläche in Punkten, welche dieser Geraden (Kante) angehören. Wir wissen aber, dass der Kegelschnitt, in welchem eine Bitangentialebene die Normalenfläche schneidet, auch die in dieser Ebene liegenden zwei Erzeugenden in Punkten der Doppelcurve begegnet. Das Gesagte muss selbstverständlich auch dann noch stattfinden, wenn die beiden Erzeugenden sich unausgesetzt nähern, die Bitangentialebene somit in eine Torsalebene der Normalenfläche übergeht.

In dem letztbezeichneten Falle werden auch die beiden Schnittpunkte der Erzeugenden mit dem Kegelschnitte unendlich nahe aneinander fallen, und da sie gleichzeitig Punkte der Doppelcurve darstellen, so muss sowohl der Kegelschnitt, als auch die Doppelcurve die Kante der Normalenfläche in einem und demselben Punkte berühren. Der dritte in der Torsalebene liegende Punkt der Doppelcurve ist die Spitze der betreffenden Kante, das ist der Schnittpunkt der beiden zur Kante vereinigten Erzeugenden der Fläche. Daher der Satz:

„Die Berührungsebenen der Normalenfläche längs ihrer vier Kanten schneiden die Fläche nach Kegelschnitten, welche die betreffenden Kanten in jenen Punkten berühren, in welchen diese auch von der Doppelcurve der Normalenfläche berührt werden.“

Die Tracen dieser Ebenen längs der Kanten auf der Ebene der Leitlinie K' sind, wie bereits früher gezeigt wurde, ebenfalls Tangenten der Parabel Σ. Besagte Tracen wurden als die vier

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

gemeinschaftlichen Tangenten der beiden Kegelschnitte K' und Σ erhalten.

Interessante Eigenschaften der Normalenfläche ergeben sich, wenn man jener Ebene, welche die Fläche zweiten Grades nach dem Leitkegelschnitte der Normalenfläche schneidet, besondere Lagen ertheilt.

Nehmen wir diesbezüglich an, dass die Ebene des Leitkegelschnittes senkrecht stehe zu einer der drei Haupt- oder Axenebenen der Fläche zweiten Grades.

Der Voraussetzung gemäss liegt diesfalls die Spitze des der Fläche längs jenes Leitkegelschnittes umschriebenen Kegels in der genannten Hauptebene. Betrachtet man also die Ebene des Leitkegelschnittes K (Fig. 3) als horizontale Projectionsebene, so fällt die horizontale Projection S' des Kegelscheitels in die eine Axe OS' des Leitkegelschnittes K'.

Als verticale Projectionsebene wollen wir die horizontalprojicirende Ebene durch OS' wählen, und voraussetzen, dass S die verticale Projection des Kegelscheitels sei.

Nachdem die Normalenfläche der Fläche zweiten Grades längs des Kegelschnittes K' identisch ist mit der Normalenfläche des Kegels (SK) längs der nämlichen Curve, so hat man bloss in den einzelnen Punkten von (KK') Normalen zu der Kegelfläche zu construiren, um Erzeugende der Normalenfläche zu erhalten.

Soll nun beispielsweise die dem Punkte (aa') der Leitcurve K entsprechende Normale dargestellt werden, so bestimmt man zunächst die Tangentialebene in dem genannten Punkte. Die Horizontaltrace E_h derselben ist die Tangente t_a an K' im Punkte a', während die zugehörige Verticaltrace E_v die Verbindungsgerade von S mit jenem Punkte α ist, in welchem t_a die Grundlinie OS' schneidet. Die Projectionen N'_a und N_a der verlangten Normalen gehen durch a, respective a' und sind zu den bezüglichen Tracen E_h und E_v der Berührungsebene senkrecht.

Hieraus ergibt sich sofort, dass die Horizontalprojectionen der Erzeugenden der Normalenfläche, die Normalen des Kegel-

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

schnittes K' sind, oder mit anderen Worten, dass die horizontale Contour der Normalenfläche die Enveloppe der Normalen von K', das ist also die Evolute des Kegelschnittes K' repräsentirt.

Was die verticale Projection anbelangt, so ist im Allgemeinen die Contour der Normalenfläche einer Fläche zweiter Ordnung längs eines ebenen Schnittes derselben, eine Curve sechster Ordnung und vierter Classe, indem die Normalenfläche selbst eine windschiefe Fläche vierten Grades ist, welche eine Doppelcurve dritter Ordnung besitzt.

Die besondere, im vorliegenden Falle getroffene Anordnung der Projectionsebene ist jedoch Ursache, dass die verticale Contour der Normalenfläche sich auf einen Kegelschnittt reducirt.

Wie leicht zu erkennen, fallen nämlich die verticalen Projectionen der Normalen paarweise zusammen, und zwar gilt dies von allen Paaren solcher Normalen, deren Fusspunkte (aa') und (bb') in zur Axe OS' senkrecht stehenden Geraden liegen. Je zwei solche Punkte besitzen nämlich einerseits dieselbe Verticalprojection a, respective b in OS', und andererseits schneiden sich die in den Punkten a' und b' des Kegelschnittes K' geführten Tangenten t_a und t_b in einem und demselben Punkte (α, β), wesshalb auch die Berührungsebenen des Kegels (SK) in a und b einerlei Verticaltrace E_v besitzen.

Hieraus erhellt unmittelbar, dass auch die verticalen Projectionen N_a und N_b der Normalen in (aa') und (bb') zusammenfallen müssen.

Es wurde nun früher allgemein nachgewiesen, dass die verticale Contour der Normalenfläche, das ist die Enveloppe der Verticalprojectionen ihrer Erzeugenden, eine Curve vierter Classe sei, dass also durch jeden Punkt vier solche Verticalprojectionen gehen. Im vorliegenden Falle coïncidiren aber je zwei Verticalprojectionen, so dass die vier durch einen Punkt gehenden Tangenten der verticalen Contour, zu je zwei, in zwei verschiedenen Geraden zusammenfallen.

Man kann hiernach durch einen Punkt an die verticale Contour nur zwei (allerdings doppelt zählende) Tangenten ziehen, das heisst die besagte Contour reducirt sich auf eine Curve zweiter Classe, also auf einen Kegelschnitt.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Durch eine einfache Untersuchung, wobei wir überdies noch eingehender über die Art und die Lage des fraglichen Kegelschnittes unterrichtet werden, lässt sich dies auch direct nachweisen.

Wenn wir nämlich berücksichtigen, dass $a'b'$ als Berührungssehne der von α aus gezogenen Kegelschnittstangenten t_a und t_b die Polare des Punktes α darstellt, mithin α und a zwei harmonisch conjugirte Punkte zu den Axenendpunkten A und B von K' repräsentiren, so ist klar, dass wenn α die Gerade OS' durchläuft, dasselbe auch der Punkt a in der Weise thue, dass α und a zwei projectivische Punktreihen beschreiben.

Ferner beschreibt die verticale Trace E_v einen zur Reihe α perspectivischen Strahlenbüschel aus dem Mittelpunkte S, welcher Strahlenbüschel sonach auch zur Reihe a projectivisch sein wird. Errichtet man endlich im Scheitel S auf jeden Strahl αS eine Senkrechte $S\alpha'$, so bilden diese Senkrechten einen neuen zum Büschel $S\alpha\ldots$, also auch einen zur Punktreihe a projectivischen Strahlenbüschel. Die Verticalprojection N_a der Normalen geht durch a und steht senkrecht zu $S\alpha$, ist also parallel zu $S\alpha'$.

Hieraus ist zu ersehen, dass die verticale Contour der Normalenfläche die Enveloppe aller Geraden ist, welche durch die einzelnen Punkte der Reihe a parallel zu den entsprechenden Strahlen eines dieser Reihe projectivischen Strahlenbüschels $S\alpha'$ gezogen werden können, oder, was dasselbe ist, die verticale Contour der Normalenfläche ist die Enveloppe derjenigen Geraden, welche die entsprechenden Punkte zweier perspectivischen Reihen, deren Träger beziehungsweise die Gerade OS' und die unendlich ferne Gerade sind, verbinden.

Diese Enveloppe ist, wie wir bereits wissen, jederzeit ein Kegelschnitt, welcher die Träger der beiden Reihen berührt. Da der eine dieser Träger die im Unendlichen liegende Gerade ist, so ist besagter Kegelschnitt speciell eine Parabel. Die letztere berührt die beiden Axen AB und CD des Kegelschnittes K'. Selbstverständlich tritt diese Berührung nur in den Projectionen und nicht auch im Raume ein, da die Parabel in der Ebene OS' und der Kegelschnitt K' in der horizontalen Projectionsebene liegt. Die Parabel berührt die Axe AB, weil letztere der Träger der einen erzeugenden Punktreihe a ist, und die Axe CD

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

desshalb, weil diese, wie leicht einzusehen, die verticalen Projectionen der den Punkten C und D entsprechenden Normalen enthält. Die Parabel, welche sich als Contour der Normalenfläche auf der horizontal-projicirenden Ebene OS' herausstellt, berührt also sowohl die Gerade OS', als auch die horizontal-projicirende Gerade O.

Wir gelangen sonach zu dem Satze:

„Wird als Leitcurve für die Normalenfläche einer Fläche zweiten Grades (oder speciell eines Kegels zweiten Grades) ein zu einer Hauptebene senkrechter Schnitt angenommen, so ist die Contour der Normalenfläche auf der bezeichneten Hauptebene (unter Voraussetzung orthogonaler Projection) eine Parabel. Die letztere berührt einerseits die Schnittgerade der Hauptebene mit der Ebene der Leitlinie und andererseits jene Gerade, welche im Mittelpunkte der Leitlinie auf der Ebene derselben senkrecht steht.“

Unter den Tangenten der Parabel gibt es eine, welche von besonderer Wichtigkeit ist. Wenn wir nämlich von S' aus Tangenten an K' ziehen, deren Berührungspunkte x' und y' sind, so werden die diesen Punkten entsprechenden Normalen des Kegels (SK) ihrer ganzen Ausdehnung nach in der Ebene des Leitkegelschnittes K' liegen, und sich in einem Punkte a_1 der Axe OS' treffen.

Betrachten wir nun a_1 als die Verticalprojection eines Punktes $(a_1 a_1')$ von (KK') und bestimmen wir die Verticalprojection N_{a_1} der diesem Punkte entsprechenden Kegelnormalen, indem wir durch a_1 auf die Verticaltrace E_v' der zugehörigen Berührungsebene eine Senkrechte errichten.

Diese Verticalprojection N_{a_1}, die wir insbesondere hervorheben und mit D bezeichnen wollen, ist eine Tangente der verticalen Contour (Parabel) und besitzt als solche eine sie auszeichnende Eigenschaft, welche wir durch nachstehende Betrachtung näher zu bestimmen beabsichtigen. Während OS' und D zwei Tangenten der Contourparabel darstellen, werden alle anderen Tangenten, das heisst die Verticalprojectionen N_a aller Normalen, auf den erstgenannten Geraden OS' und D zwei ähnliche Punktreihen a.. und σ. bestimmen. Ist ferner t_a die Tangente an K' in einem Punkte a' und N_a' die entsprechende Normale, so

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

treffen diese beiden Geraden die Axe OS' in zwei Punkten α und s', welche harmonisch conjugirt zu den Brennpunkten f_1 und f_2 des Kegelschnittes K' sind; denn verbindet man f_1 und f_2 mit a_1, so ist $\sphericalangle f_1 a's' = \sphericalangle f_2 a's'$ und $\sphericalangle \alpha a's' = 90°$ und sind mithin die Strahlen $a'(f_1 f_2 \alpha s')$, also auch die Punkte f_1, f_2, α, s' harmonisch gelagert.

Wenn nun die Tangente t_a und die zugehörige Normale N_a' alle möglichen zulässigen Lagen annehmen, so werden die Punkte α und s' offenbar zwei projectivische Punktreihen auf OS' beschreiben.

Nachdem aber im Vorhergehenden nachgewiesen wurde, dass auch die Punkte α und a zwei projectivische Punktreihen auf OS' beschreiben, so folgt hieraus unmittelbar, dass auch die Reihen a.. und s' projectivisch sind. Es lässt sich jedoch leicht zeigen, dass diese Reihen überdies auch ähnlich sind, das heisst, dass sich in den beiden Reihen die unendlich fernen Punkte entsprechen.

Versetzen wir nämlich vorübergehend den Punkt α nach O, so entsprechen demselben sowohl in Bezug auf AB, als auch in Bezug auf $f_1 f_2$ der unendlich ferne Punkt von OS' als harmonischer Punkt, welchem Umstande zufolge sich die unendlich fernen Punkte in den Reihen a.. und s' entsprechen müssen, die Reihen also ähnlich sind.

Denken wir uns nun durch sämmtliche Punkte s' zu OS' senkrechte Geraden ss',. gezogen, so bestimmen auch diese auf der Geraden D eine Punktreihe s. ., welche mit jener s' und mithin auch mit der Reihe a.. ähnlich ist. Die Tangenten der Contourparabel bestimmen aber, wie hervorgehoben wurde, auf D gleichfalls eine zu der Reihe a. ähnliche Punktreihe σ. daher wir zu dem Schlusse gelangen, dass sich auf D zwei ähnliche Punktreihen σ. und s. vorfinden.

Es lässt sich nun nachweisen, dass diese beiden Reihen identisch sind, das ist, dass alle Paare entsprechender Punkte coïncidiren. Zu diesem Zwecke wird es, da die beiden Reihen ähnlich sind, genügen, zu zeigen, das zwei Paare entsprechender Punkte zusammenfallen.

Nehmen wir behufs dieses Nachweises an, es falle α mit S' zusammen, und bezeichnen wir den genannten Punkt in dieser

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Lage mit α_2, so entspricht demselben in der Reihe $\alpha \ldots$ der Punkt a_2, und in der Reihe s' der mit a_1 zusammenfallende Punkt s'_2. Die verticale Projection der dem Punkte $(a_2 a'_2)$ entsprechenden Normalen stimmt mit OS' überein und trifft die Gerade D in dem ebenfalls mit a_1 zusammenfallenden Punkte σ_2 der Reihe σ. Endlich trifft die durch s'_2 senkrecht zu OS' gezogene Gerade die Contourtangente D auch in dem mit a_1 oder σ_2 zusammenfallenden Punkte s_2, woraus folgt, dass die einander entsprechenden Punkte σ_2 und s_2 der Reihen σ. und s. zusammenfallen.

Gelangt der Punkt α in unendliche Entfernung, und nennen wir ihn in dieser Lage α_3, so entsprechen demselben in den Reihen a. und s' die mit dem Mittelpunkte O übereinstimmenden Punkte a_3 und s'_3, und nachdem die durch a_3 gehende Parabeltangente durch die Axe CD dargestellt wird, fallen auch die beiden, sowohl einander als auch dem Punkte α_3 entsprechenden Punkte σ_3 und s_3 in den Reihen σ und s. zusammen.

Aus der angestellten Betrachtung ist zu ersehen, dass die beiden ähnlichen Reihen σ. und s. auf D zwei Paare entsprechender zusammenfallender Punkte σ_2 und s_2, σ_3 und s_3 besitzen, dass also diese Reihen identisch sind.

Ist mithin (aa') ein beliebiger Punkt des Kegelschnittes (KK'), sind ferner N_a und N'_a die Projectionen der ihm entsprechenden Kegelnormalen und schneidet N_a' die Axe OS' in dem Punkte s', so folgt als Resultat der gepflogenen Erörterungen, dass sich N_a und die durch s' senkrecht zu OS' gezogene Gerade $s's$, in einem und demselben Punkte s von D schneiden. Gleichzeitig entnehmen wir der vollführten Construction, dass auch (ss') der Schnittpunkt der Normale $(N_a N'_a)$ mit der verticalen Projectionsebene ist.

Aus der Symmetrie aller Elemente des Gebildes gegen die horizontal-projicirende Ebene OS' ergibt sich endlich noch, dass (ss') auch der Schnittpunkt der Ebene OS' mit jener Normalen $N_b N'_b$ sei, deren Fusspunkt b' mit a' auf derselben zu OS' senkrechten Kegelschnittssehne liegt. Da ferner Paare jener Normalen, deren Fusspunkte, wie a' und b', auf den zu OS' senkrechten Kegelschnittssehnen liegen, das ist solche Paare von Normalen, welche eine zur Ebene OS' symmetrische Lage besitzen, sich in

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Punkten der Geraden DD' schneiden, folgt, dass diese Gerade eine Doppelgerade der Normalenfläche sei.

Nachdem aber die vollständige Doppelcurve der vorliegenden Normalenfläche eine Curve dritter Ordnung im Raume ist, und die Gerade DD' einen Bestandtheil erster Ordnung derselben repräsentirt, so muss der Rest der Doppelcurve aus einer Linie zweiter Ordnung bestehen, und wird diese, wie sich leicht nachweisen lässt, ein wirklicher Kegelschnitt sein.

Würde nämlich der Rest der Doppellinie wieder, etwa in zwei Doppelgerade, zerfallen, so hätte die Normalenfläche, die Doppelgerade DD' mit eingerechnet, drei gerade Leitlinien, und müsste sich daher, was diesfalls nicht möglich ist, als ein Hyperboloid darstellen. Ebenso könnte man allenfalls anzunehmen geneigt sein, dass die übrig bleibende Doppellinie zweiter Ordnung aus einer eigentlichen Doppelgeraden und einer Doppelerzeugenden oder selbst aus zwei Doppelerzeugenden bestehe. Wie sich jedoch constructiv nachweisen lässt, können auch diese beiden letztgenannten Fälle nicht eintreten.

Die Doppelcurve der Fläche ist hiernach eine eigentliche Curve zweiter Ordnung, indem sie, wie wir zu zeigen beabsichtigen, den Ort der Schnittpunkte von verschiedenen Erzeugenden der Normalenfläche vorstellt.

Wie wir wissen, ist die Doppelgerade DD' (Fig. 4) gleichzeitig der Ort der verticalen Durchstosspunkte aller Erzeugenden der Normalenfläche. Denken wir uns nun durch den Schnittpunkt M der Doppelgeraden DD' mit der Geraden OS' in der Ebene der Leitlinie K' (horizontale Projectionsebene) eine beliebige Gerade e_h gezogen, und betrachten wir D oder e_v und e_h als die verticale, respective horizontale Trace einer Ebene. Die horizontale Trace e_h schneidet die Leitlinie (KK') in zwei Punkten (aa') und (bb'), deren entsprechende Normalen wir beziehungsweise mit $(N_a N_a')$ und $(N_b N_b')$ bezeichnen wollen.

Nachdem nun die horizontalen Durchstosspunkte a' und b' dieser Normalen in der horizontalen Trace e_h, und die verticalen Durchstosspunkte in der verticalen Trace e_v liegen, so befinden sich auch die Normalen selbst, ihrer ganzen Ausdehnung nach, in der Ebene $e_v e_h$ und schneiden sich in einem Punkte (rr') derselben. Der geometrische Ort der Punkte (rr'), für alle möglichen

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Lagen in der Ebene $e\,e_h$ ist sodann die Doppelcurve zweiten Grades, das heisst ein Kegelschnitt.

Legen wir durch (DD') eine zweite Ebene $e'_v e'_h$, deren Horizontaltrace e'_h in Bezug auf die Gerade OS' symmetrisch zu e_h ist, so erhalten wir ebenfalls zwei in dieser Ebene liegende Erzeugende $(N'_{a_1} N_{a_1})$, $(N'_{b_1} N_{b_1})$ der Normalenfläche, welche sich in einem Punkte $(r_1 r'_1)$ treffen, dessen horizontale Projection r'_1 symmetrisch zu r' in Bezug auf OS' ist, und desse verticale Projection r_1 mit jener r zusammenfällt.

Hieraus ist zu entnehmen, dass einerseits der Doppelkegelschnitt in einer zur Ebene OS' senkrechten Ebene liegt, und dass andererseits eine seiner Hauptaxen in die Ebene OS' fällt.

Führen wir ferner durch (DD') die vertical-projicirende Ebene $e_v e^2_h$, so schneiden sich die in derselben liegenden Normalen in einem Punkte (ss'), welcher, der Construction zufolge, sowohl dem Doppelkegelschnitte, als auch der Doppelgeraden D angehört, woraus weiter hervorgeht, dass sich die Doppelgerade und der Doppelkegelschnitt in einem Punkte treffen.

Endlich hat der Doppelkegelschnitt auch mit der Leitcurve K' zwei Punkte gemein, und zwar jene Punkte y'_1 und y'_2, in welchen die in der Ebene des Leitkegelschnittes K' liegenden Erzeugenden N_{x1} und N_{x2} diesen zum zweiten Male treffen; denn die Normale im Punkte y'_1 schneidet die Normale N_{x1} in eben demselben Punkte y'_1. Letzterer gehört demnach der Doppelcurve an. Das Gleiche gilt vom Punkte y'_2.

Die Gerade $y'_1 y'_2$ ist somit die horizontale Trace der Ebene des Doppelkegelschnittes, und die Verbindungslinie von r mit dem Punkte α, in welchem $y'_1 y'_2$ die Gerade OS' trifft, deren verticale Trace.

Die Länge der in der Ebene OS' liegenden Axe des Doppelkegelschnittes ist leicht zu bestimmen, indem (in der verticalen Projection) s der eine Endpunkt derselben ist, während sich der andere Endpunkt als der Schnittpunkt β jener Erzeugenden n_1 und n_2 ergibt, welche den Endpunkten A, respective B der Axe von K' entsprechen.

Da die Winkel βAS und βBS rechte Winkel sind, so lässt sich durch die Punkte β, S, A und B ein Kreis K_1 legen, dessen Mittelpunkt o der Halbirungspunkt der Strecke βS ist. Nachdem

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

AB eine Sehne dieses Kreises ist, so steht oO senkrecht zu OS' und ist $RO = S'O$.

Jene Ebenen, welche Paare von Erzeugenden enthalten, die sich in einem Punkte der Doppelgeraden D schneiden, berühren die Normalenfläche in zwei Punkten, von welchen je einer auf einer der beiden Erzeugenden liegt. Besagte Ebenen sind demgemäss Bitangentialebenen der Normalenfläche.

Die Bitangentialebenen sind vertical-projicirend, und ihre Verticaltracen umhüllen dieselbe Parabel P, welche sich als verticale Contourcurve der Normalenfläche ergab, woraus erhellt, dass die eben betrachtete Schaar von Bitangentialebenen einen vertical-projicirenden, parabolischen Cylinder umhüllt.

Jede der Bitangentialebenen enthält zwei gerade Erzeugende der Normalenfläche, und jede derselben wird die letztere noch in einem Kegelschnitt Σ schneiden. Dass dieser Kegelschnitt Σ symmetrisch zur horizontal-projicirenden Ebene OS' sei, ist selbstverständlich.

Der Gesammtschnitt der Normalenfläche mit der Bitangentialebene besitzt drei Doppelpunkte und zwar

a) den Schnittpunkt der beiden in der Bitangentialebene liegenden Erzeugenden der Normalenfläche untereinander, und

b) je einen der Schnittpunkte jeder dieser Erzeugenden mit dem vorerwähnten Kegelschnitte Σ.

Der zweite Schnittpunkt jeder der beiden Erzeugenden mit Σ ist einer der Berührungspunkte der Bitangentialebene.

Unter den Berührungsebenen des parabolischen Cylinders P gibt es insbesondere zwei, welche nicht nur Bitangentialebenen der Normalenfläche vorstellen, sondern die Normalenfläche auch längs der ganzen Länge der Erzeugenden berühren. Die beiden in jeder dieser besonderen Ebenen liegenden Erzeugenden folgen also unmittelbar aufeinander. Wie leicht einzusehen, sind dies die Ebenen $T_v\, T_h$ und $T'_v\, T'_h$, deren horizontale Tracen T_h und T'_h den Leitkegelschnitt in A und B berühren.

Längs der den Scheitelpunkten A und B des Leitkegelschnittes K' entsprechenden Normalen n_1 und n_2 ist die Normalenfläche entwickelbar. Diese Normalen repräsentiren sonach insbesondere zwei Kanten der Normalenfläche und ergeben sich noch weitere zwei Kanten in ähnlicher Weise.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Es wurde ferner nachgewiesen, dass jede Ebene, welche durch die Doppelgerade (DD') der Normalenfläche geht, zwei Erzeugende der letzteren enthält; es werden daher die Ebenen des Büschels (DD') ebenfalls eine Schaar von Bitangentialebenen bilden.

Besonders hervorzuheben sind jene beiden (imaginären) Bitangentialebenen des Büschels D, welche gleichzeitig den Kegelschnitt K' berühren. Der Berührungspunkt jeder dieser Ebenen vereinigt in sich die Fusspunkte zweier unmittelbar aufeinander folgenden, sich gegenseitig schneidenden Erzeugenden der Normalenfläche. Die natürliche Folge hievon ist, dass jede dieser Bitangentialebenen die Normalenfläche längs dieser zusammenfallenden Erzeugenden berührt.

Diese Erzeugenden werden mithin die vorerwähnten zwei Kanten der Fläche repräsentiren.

Jede der Bitangentialebenen des Büschels D enthält ausser den beiden Erzeugenden auch die im Schnitte doppelt zählende Doppelgerade (DD'). Diese drei Geraden bestimmen bereits einen Schnitt von der vierten Ordnung, repräsentiren also den vollständigen Schnitt der Bitangentialebene mit der Normalenfläche.

Die Berührungspunkte der genannten Bitangentialebene mit der Normalenfläche sind die beiden Schnittpunkte der Doppelgeraden mit den in der Bitangentialebene liegenden Erzeugenden.

Die vertical-projicirende Ebene $e_v\ e_h^2$ des Büschels D ist speciell eine Bitangentialebene von der Beschaffenheit, dass sich die beiden in ihr liegenden Erzeugenden der Normalenfläche in einem Punkte ss' der Doppelgeraden D schneiden, die zwei vorher genannten Berührungspunkte sonach in einen zusammen fallen. Nachdem in ss' die beiden Berührungspunkte der Bitangentialebene $e_v\ e_h^2$ in einem und demselben Punkte sich vereinigen, wird der bezeichnete Punkt ss' ein Doppelpunkt der Doppelcurve sein, in welchem sich die Mäntel der Normalenfläche berühren.

Die Ergebnisse zusammengefasst, erhalten wir für die Normalenfläche einer Fläche zweiten Grades längs eines ebenen, zu einer ihrer Hauptebene H senkrecht stehenden Schnittes, folgende Sätze:

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

a) „Die Contour der Normalenfläche auf der Ebene des Leitkegelschnittes *K* ist die Evolute des letzteren. Die Contour der Fläche auf der Ebene des Hauptschnittes *H* ist eine Parabel, welche den Schnitt der Hauptebene mit der Ebene des Leitkegelschnittes, als auch die im Mittelpunkte des Leitkegelschnittes auf dessen Ebene senkrecht errichtete Gerade berührt.“

b) „Die Doppelcurve der Normalenfläche besteht einerseits aus einer Geraden, welche in der Hauptebene *H* liegt und die Ebene des Leitkegelschnittes in jenem Punkte trifft, in welchem sich die in letzterer Ebene liegenden Erzeugenden der Normalenfläche begegnen, und andererseits aus einem Kegelschnitte, dessen Ebene zur Hauptebene *H* senkrecht steht und dieselbe nach einer Axe des Kegelschnittes schneidet. Die Doppelgerade hat mit dem Doppelkegelschnitte den einen Endpunkt der genannten Axe gemein.“

c) „Die Normalenfläche enthält zwei verschiedene Schaaren von Bitangentialebenen. Die eine davon umhüllt den zur Hauptebene *H* senkrechten Cylinder, welcher durch die Contourparabel geht. Jede Ebene dieser Schaar schneidet die Normalenfläche ausser in den zwei Erzeugenden noch in einem Kegelschnitte, die andere Schaar von Bitangentialebenen bildet ein Ebenenbüschel, welches die Doppelgerade der Normalenfläche zur Axe hat. Jede Ebene dieser Schaar hat mit der Normalenfläche ausser den zwei Erzeugenden nur noch die doppelt zählende Doppelgerade gemein. Die Ebenen beider Schaaren, welche gleichzeitig auch den Leitkegelschnitt berühren, tangiren die Normalenfläche längs Erzeugenden.“

d) „Der Punkt, in welchem die Doppelgerade den Doppelkegelschnitt trifft, ist ein Doppelpunkt der Doppelcurve; es fallen in diesem Punkte beide Tangentialebenen der Normalenfläche in eine zusammen, daher sich die beiden Mäntel der Normalenfläche in demselben berühren.“

Setzen wir nun als Leitlinie der Normalenfläche auf der Fläche zweiten Grades, also auch auf dem umschriebenen Kegel, einen Kreis voraus.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Betrachten wir die Ebene des gegebenen Kreises als die horizontale Projectionsebene und sei S' (Fig. 5) die orthogonale des Kegelscheitels auf dieser Ebene.

Die horizontalen Projectionen der Kegelnormalen in den einzelnen Punkten von (KK') sind diesfalls die Normalen des Kreises K' selbst und gehen mithin durch den Mittelpunkt O desselben.

Hieraus folgt unmittelbar, dass sämmtliche Normalen die horizontal-projicirende Gerade O schneiden, dass also diese Gerade eine Leitlinie der Normalenfläche darstelle.

Was die Doppellinie der Normalenfläche anbelangt, so ist leicht nachzuweisen, dass sie in dem vorliegenden Falle eine degenerirte Curve dritter Ordnung sei, das ist aus Curven niederer Ordnung zusammengesetzt ist, deren Ordnungssumme gleich drei ist.

Der Kegel besitzt nämlich eine Symmetrieebene, und zwar ist dieselbe jene horizontalprojicirende Ebene, deren horizontale Trace OS' ist. Es ist klar, dass auch die Normalen der Kegelfläche für solche Paare von Punkten auf K', welche wie a und b symmetrisch gegen OS' liegen, in Bezug auf die projicirende Ebene OS' symmetrisch gelagert sind, sich also in einem Punkte y dieser Ebenen schneiden müssen.

Nachdem sich nun aber die horizontalen Projectionen der Normalen n_a und n_b in O treffen, so muss nothwendigerweise der Schnittpunkt y der beiden Normalen n_a und n_b in der horizontal-projicirenden Geraden O liegen. Besagte Gerade ist mithin eine Doppellinie der Normalenfläche.

Wie wir früher nachgewiesen haben, entspricht der Normalenfläche eine Doppelcurve dritter Ordnung; es wird daher, da die Gerade O einen Bestandtheil erster Ordnung derselben bildet, der Rest eine Curve zweiter Ordnung sein. Letztere wird sich durch folgende einfache Betrachtung ergeben.

Jeder Durchmesser bc des Kreises K' enthält die horizontalen Projectionen zweier Kegelnormalen und zwar jener, deren Fusspunkte die Endpunkte b und c des Durchmessers sind. Die beiden Normalen, welche durch die diametral entgegengesetzten Punkte gehen, liegen daher in der horizontal-projicirenden Ebene bc und schneiden sich mithin in einem Punkte z, welcher der Doppel-

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

curve angehört. Um uns über die Lage des Punktes z volle Klarheit zu verschaffen, denken wir uns die projicirende Ebene bc als verticale Projectionsebene angenommen und S_0 als die um bc umgelegte verticale Projection der Kegelspitze vorausgesetzt, so zwar, dass sodann S_0b und S_0c die umgelegten Verticaltracen der Berührungsebenen an die Kegelfläche in den Punkten b und c sein werden. In Folge dessen sind die zu bS_0 und cS_0 senkrecht geführten Geraden bz_0 und cz_0 die um bc umgelegten Normalen.

Der Fusspunkt des von ihrem Schnittpunkte z_0 auf bc gefällten Perpendikels stellt die horizontale Projection des Schnittpunktes der Normalen in b und c und hiermit die horizontale Projection eines Punktes der Doppelcurve vor. Es wird sich nunmehr noch darum handeln, den geometrischen Ort des Punktes z für alle möglichen Kreisdurchmesser bc festzustellen.

In den Dreiecken S_0bz_0 und S_0cz_0 sind die Winkel bei b und c je gleich 90°, daher sich durch die vier Punkte b, c, S_0 und z_0 ein Kreis K_3 legen lässt, dessen Mittelpunkt m der Halbirungspunkt von S_0z_0 ist. Da nun bc eine Sehne dieses Kreises ist, geht die Senkrechte vom Kreismittelpunkte m auf bc durch ihren Halbirungspunkt O und in Folge der Parallelität von mO, z_0z und $S'S_0\zeta$ wird auch $Oz = O\zeta$ sein.

Der geometrische Ort des Punktes ζ, als Fusspunkt der von S' auf den Durchmesser bc gefällten Senkrechten ist jener Kreis K_2, welcher über OS' als Durchmesser beschrieben werden kann.

Es ist daher einleuchtend, dass der zu ζ, in Bezug auf O, symmetrische Punkt gleichfalls einen Kreis K_1 beschreiben wird, welcher mit dem Kreise K_2 in Bezug auf den Punkt O symmetrisch liegt und mit jenem K_2 congruent ist. Der Mittelpunkt M dieses Kreises K_1 liegt auf der Verlängerung von OS' über O hinaus, während die Kreisperipherie selbst durch O geht.

Hieraus ist zu ersehen, dass der zweite Theil der Doppelcurve ein Kegelschnitt ist, welcher sich auf der Ebene der Leitlinie der Normalenfläche als Kreis projicirt.

Was die räumliche Lage des Kegelschnittes K_1 anbelangt, so ist aus den gepflogenen Erörterungen zu entnehmen, dass seine kreisförmige Projection, und mithin der Kegelschnitt selbst, symmetrisch gegen die horizontal-projicirende Ebene OS' liegt

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

wie es auch unmittelbar aus der Symmetrie des Kegels sowohl, als auch der Normalenfläche gegen diese Ebene folgt.

Aus dem Gesagten geht hervor, dass die Ebene des Kegelschnittes K_1 auf der horizontal-projicirenden Ebene OS' senkrecht steht.

Ferner ist einleuchtend, dass der Kegelschnitt die Doppelgerade, da seine Projection K_1 durch die Projection O der horizontalprojicirenden Doppelgeraden geht, in einem Punkte schneidet. Ebenso leicht werden wir finden, dass der Kegelschnitt die kreisförmige Leitlinie (KK') der Normalenfläche in zwei Punkten y_1 und y_2 schneidet. Sind nämlich $S'x_1$ und $S'x_2$ die von S' an den Leitkreis K' gezogenen Tangenten, und x_1 und x_2 deren Berührungspunkte, so ist klar, dass die diesen Punkten entsprechenden Erzeugenden der Normalenfläche ihrer ganzen Ausdehnung nach in der Ebene des Kreises K' liegen, indem sie zu den horizontal-projicirenden Kegelberührungsebenen $S'x_1$ und $S'x_2$ senkrecht stehen. Die Normale x_1y_1 trifft den Kreis K' zum zweiten Male im Punkte y_1, durch welchen ebenfalls eine Normale der Kegelfläche geht. Dieser Punkt y_1 gehört mithin zwei Erzeugenden der Normalenfläche an; er ist folglich ein Punkt der Doppelcurve. Dasselbe gilt von dem Punkte y_2, in welchem die Normale x_2y_2 den Leitkreis K' das zweite Mal begegnet.

Da ferner $\sphericalangle\, Ox_1S' = \sphericalangle\, Ox_2S' = 90°$ ist, liegen die Punkte x_1 und x_2 auf dem Kreise K_2, mithin die denselben in Bezug auf O symmetrischen Punkte y_1 und y_2 auf dem Kreise K_1. Selbstverständlich steht x_1x_2 senkrecht zu OS' und gilt das Gleiche auch von y_1y_2. Die letztgenannte Gerade repräsentirt also gleichzeitig auch die horizontale Trace der Ebene des Doppelkegelschnittes K_1.

Um die räumliche Lage des Doppelkegelschnittes präciser festzustellen, wollen wir denjenigen Punkt auf demselben bestimmen, welcher sich als Schnittpunkt der Normalen in den Endpunkten c' und b' des Kreisdurchmessers OS' ergibt.

Denken wir uns die horizontal-projicirende Ebene $S'O$ umgelegt, wobei der Kegelscheitel nach S_0' gelangt, so finden wir die umgelegten Normalen als die zu $b'S'_0$ und $c'S'_0$ Senkrechten $b'z'_0$ und $c'z'_0$. Der Schnittpunkt der letzteren ist z'_0 und

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

die von demselben auf OS' gefällte Senkrechte $z'_0 z'$ trifft OS' in dem Punkte z' des Kreises K_1.

Ferner ist leicht einzusehen, dass die Gerade, welche z'_0 mit dem Schnittpunkte α der beiden Geraden $y_1 y_2$ und OS' verbindet, nichts anderes als die um OS' umgelegte Schnittlinie der Ebene OS' mit der Ebene des Doppelkegelschnittes darstelle und hiemit der Winkel $z_0' \alpha z'$ die Horizontalneigung der Ebene des Doppelkegelschnittes repräsentire.

Nachdem nun weiters jeder der Winkel $S'_0 b' z_0$ und $S_0' c' z'_0$ gleich 90° ist, so enthält der über $S'_0 z'_0$ als Durchmesser beschriebene Kreis K_4 auch die Punkte b' und c'. Endlich werden sich die Gerade $z' z'_0$ und jene durch S'_0 parallel zu OS', also senkrecht zu z'_0 geführte Gerade $S'_0 s$ gleichfalls in einem Punkte s des Kreises K_4 schneiden.

Denken wir uns nun den Kreis K_4 als Erzeugniss der Schnittpunkte entsprechender Strahlen zweier projectivischer (gleicher) Strahlenbüschel aus den bezüglichen Mittelpunkten S'_0 und z'_0, so ist klar, dass den Strahlen $S'_0 b'$, $S'_0 c'$ und $S'_0 s$ des ersteren Büschels, beziehungsweise jene $z'_0 b'$, $z'_0 c'$ und $z'_0 s$ des zweiten entsprechen.

Wählen wir uns ferner in dem Büschel S'_0 etwa den Strahl $S'_0 O$, und bestimmen wir den diesem Strahle entsprechenden Strahl im Büschel z'_0, indem wir berücksichtigen, dass das Doppelverhältniss von irgend vier Strahlen des Büschels z'_0 dem Doppelverhältnisse der vier entsprechenden Strahlen im Büschel S'_0, gleich sein müsse. Die vier Strahlen $S'_0 b'$, $S'_0 c'$, $S'_0 s$ und $S'_0\, O$ sind, nachdem dieselben perspectivisch zu den vier harmonischen Punkten b', c', O und U_∞ sind, harmonisch liegend, daher auch der dem Strahle $S'_0 O$ des Büschels S'_0 entsprechende Strahl im Büschel z'_0 harmonisch zu den drei Strahlen $z'_0 b$, $z'_0 c'$, $z'_0 s$ ($z'_0 b'$ und $z'_0 c'$ als conjugirte Strahlen betrachtet) sein muss.

Der Nachweis, dass letztgenannter Strahl mit $z'_0 \alpha$ zusammenfalle, dürfte aus Folgendem hervorgehen. Der Kreis K_1, der Punkt z' und die Gerade $\overline{y_1 \alpha y_2}$ sind symmetrisch in Bezug auf den Punkt O und zwar beziehungsweise zu dem Kreise K_2, zum Punkte S' und zu der Geraden $x_1 x_2$. Da nun $x_1 x_2$ die Polare des Punktes S' in Bezug auf den Kreis K_2 ist, so stellt auch $\overline{y_1 \alpha y_2}$ die Polare des Punktes z' in Bezug auf den Kreis K_1

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

dar. Es sind mithin die vier Punkte b', c', z' und α, also auch die vier durch dieselben gehenden Strahlen $z'_0 b'$, $z'_0 c'$, $z'_0 s$ und $z'_0 \alpha$ harmonisch, und folglich ist auch $z'_0 \alpha$ der dem Strahle $S'_0 O$ entsprechende Strahl.

Die beiden entsprechenden Strahlen $S'_0 O$ und $z'_0 \alpha$ treffen sich in einem Punkte p des Kreises K_4; sie stehen sonach wechselseitig auf einander senkrecht. Vordem wurde aber auch gezeigt, dass $z'_0 \alpha$ der Schnitt der horizontal-projicirenden Ebene OS' mit der Ebene des Doppelkegelschnittes sei; es steht folglich auch die letztere zur Geraden OS'_0, also zu dem der Kreisschnittsebene K conjugirten Kegeldurchmesser senkrecht.

Die Ergebnisse der angestellten Untersuchungen zusammengefasst, folgt der Satz:

„Die Doppelcurve der Normalenfläche eines Kegels vom zweiten Grade, längs eines seiner Kreisschnitte, zerfällt in eine Gerade und in einen Kegelschnitt. Die Doppelgerade geht durch den Mittelpunkt des Leitkreises und steht auf der Ebene des letzteren senkrecht. Der Doppelkegelschnitt schneidet die Doppelgerade in einem Punkte und den Leitkreis in zwei Punkten, während seine Ebene senkrecht steht auf dem der Ebene des Leitkreises conjugirten Kegeldurchmesser. Die eine Hauptaxe des Doppelkegelschnittes liegt in der Ebene, welche durch obgenannten Kegeldurchmesser senkrecht zur Ebene des Leitkreises geführt wird und eine Hauptebene des Kegels repräsentirt. Der Doppelkegelschnitt projicirt sich orthogonal auf die Ebene des Leitkreises, als Kreis."

Dieser Satz gilt unmittelbar auch für die Normalenfläche der allgemeinen Flächen zweiter Ordnung längs ihrer Kreisschnitte, und kann daher auch in folgender Form ausgesprochen werden.

„Die Doppelcurve der Normalenfläche einer Fläche zweiten Grades längs eines ihrer Kreisschnitte, zerfällt in eine Gerade und einen Kegelschnitt."

„Die Doppelgerade geht durch den Mittelpunkt des Kreisschnittes und steht senkrecht auf der Ebene des letzteren."

„Der Doppelkegelschnitt schneidet die Doppelgerade in einem, den Leitkreis dagegen in zwei Punkten. Die Ebene des Doppelkegelschnittes steht senkrecht zu dem der Ebene des Leitkreises

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

conjugirten Durchmesser der Fläche zweiten Grades. Die eine Hauptaxe des Doppelkegelschnittes liegt in jener Ebene, welche durch obgenannten Durchmesser senkrecht auf die Ebene des Leitkreises geführt wird und eine Hauptebene der Fläche zweiten Grades darstellt. Endlich ist die orthogonale Projection des Doppelkegelschnittes auf die Ebene des Leitkreises ein Kreis.“

Zu erwähnen ist hier noch, dass bezüglich der Bitangentialebenen, der Strictionslinie und der verticalen Contour der eben betrachteten Normalenfläche, dieselben Sätze ihre volle Giltigkeit beibehalten, wie für den allgemeinen Fall, wenn als Leitlinie für die Normalenfläche ein zu einer Hauptebene senkrechter Schnitt der Leitfläche zweiten Grades angenommen wird; denn in beiden Fällen liegt die horizontale Projection des Kegelscheitels S' (vergleiche Fig. 3, 4 und 5) in einer Axe des Leitkegelschnittes. Für die oben erörterten Sätze ist diese Eigenschaft massgebend, während die Form der Leitlinie (Kegelschnitt oder Kreis) an den gegenseitigen Beziehungen nichts ändert.

Wird als Leitlinie für die Normalenfläche auf einer Fläche zweiten Grades ein zu einer der Hauptebenen paralleler ebener Schnitt gewählt, so ist die diesem Schnitte conjugirte Hauptaxe der Fläche zweiten Grades gleichzeitig auch die Axe jenes Kegels zweiten Grades, welcher der Fläche längs des genannten ebenen Schnittes umschrieben ist.

Das bezeichnete Problem reducirt sich sodann auf jenes, die Normalenfläche eines Kegels zweiten Grades, längs eines zu dessen Hauptaxe senkrechten Schnittes, zu untersuchen.

Dieser Fall wurde bereits für ein dreiaxiges Ellipsoid[1] in eingehender Weise behandelt. Obzwar in den daselbst angestellten Untersuchungen durchwegs das dreiaxige Ellipsoid als „Leitfläche“ vorausgesetzt wird, so ist doch von selbst einleuchtend, dass die meisten der dort gefundenen Sätze unmittelbar, andere dagegen, nach einer geringfügigen Änderung des Wort-

[1] Prof. Šolin (Abh. d. k. böhm. Ges. d. Wissensch. S. VI, Bd. II.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

lautes, für alle Arten der Flächen zweiter Ordnung volle Giltigkeit besitzen.

Wenn wir daher das bezeichnete Problem an dieser Stelle unserer Discussion unterziehen, so geschieht es nur aus dem Grunde, weil es uns zu wichtig dünkt, als dass wir uns mit dem blossen Hinweise auf obangezogene Abhandlung begnügen sollten, zu wichtig, als dass es hier ganz und gar übergegangen werden könnte. Auch dürfte die Verschiedenheit der Lösung und Durchführung des bezeichneten Problems einiges Interesse bieten.

Nehmen wir also, um auf die uns gestellte Aufgabe zurückzukommen, als

Leitlinie für die Normalenfläche, einen zu einer der drei Hauptebenen der Fläche zweiten Grades parallelen Schnitt an.

Der Scheitel des der Fläche zweiten Grades, längs des bezeichneten Schnittes, umschriebenen Kegels liegt bekanntlich auf jener Hauptaxe, welche der vorgenannten Hauptebene conjugirt ist. Die Leitlinie der Normalenfläche ist mithin gleichzeitig ein Hauptschnitt des umschriebenen Kegels, und die vorliegende Aufgabe wird sich sonach, auf Grund der gemachten Andeutungen, auf die Untersuchung der Normalenfläche eines Kegels zweiten Grades längs eines Hauptschnittes (geraden Schnittes) desselben, reduciren.

Setzen wir also voraus, besagter Hauptschnitt sei ein in der horizontalen Projectionsebene liegender Kegelschnitt (KK') (Fig. 6.) Der Scheitel (SS') des Kegels befindet sich mithin, unserer Annahme gemäss, in der durch den Mittelpunkt O' des Kegelschnittes K' gehenden horizontal-projicirenden Geraden, und die Erzeugenden der Normalenfläche werden durch die Normalen des Kegels (K, S) in den einzelnen Punkten des Kegelschnittes (KK') dargestellt erscheinen.

Sei $(a a')$ ein Punkt der Leitlinie (KK'), so wird sich die diesem Punkte entsprechende Normale des Kegels (KS) leicht construiren lassen, da, wie wir wissen, dieselbe zu der Tangentialebene im Punkte $(a a')$ senkrecht zu führen ist. Die Horizontaltrace dieser Ebene fällt zusammen mit der Tangente t_a an den Leitkegelschnitt K' in dem betreffenden Punkte a', während die horizontale Projection N_a' der Kegelnormale durch die

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Normale des Kegelschnittes K' im Punkte a' dargestellt erscheint. Bezüglich der verticalen Trace der Berührungsebene genügt es, für den vorliegenden Zweck die Richtung derselben zu kennen. Bestimmen wir zu diesem Behufe den Schnitt der Tangentialebene mit der durch den Kegelscheitel $(S S')$ parallel zur verticalen Projectionsebene gelegten Ebene H_h. Ein Punkt dieser Schnittlinie ist der Kegelscheitel (SS') selbst, ein zweiter ergibt sich als Durchstosspunkt $(\delta \delta')$ von t_a mit H_h, daher die Gerade $S\delta$ die vertikale Projection der gesuchten zur vertikalen Trace der Berührungsebene parallelen Schnittebene repräsentirt. Die verticale Projection N_a der Kegelnormale wird sonach durch jene Gerade dargestellt, welche durch a senkrecht zu $S\delta$ gezogen werden kann.

Denken wir uns die Leitellipse K' affin in einen Kreis K_1' verwandelt, wobei wir die Axe H_h desselben als Affinitätsaxe annehmen. Construiren wir über K_1' und (SS') den Rotationskegel $(K_1 S)$, so ist auch dieser zu dem ursprünglichen Kegel (KS) affin und stellt diesfalls die horizontal-projicirende Ebene H_h die Affinitätsebene vor.

Dem Punkte $(a a')$ des Kegelschnittes (KK') entspricht auf dem Kreise K_1' der Punkt $(\alpha \alpha')$. Die Berührungsebene des ursprünglichen Kegels (KS) und jene des ihm affinen Rotationskegels $(K_1 S)$, in den entsprechenden Punkten $(a a')$ und $(\alpha\alpha')$, sind affine Ebenen, und schneiden demgemäss die Affinitätsebene H_h in einer und derselben Geraden δS.

Hieraus folgt, dass die Verticalprojectionen N_a und N_α der Normalen der Kegel (KS) und $(K_1 S)$ in den entsprechenden Punkten $(a a')$ und $(\alpha \alpha')$, da beide durch a gehen und auf δS senkrecht stehen, zusammenfallen. Nachdem das Gesagte selbstverständlich von den Normalen der beiden Kegel in allen Paaren entsprechender Punkte der Leitcurve K und K_1 gilt, so lässt sich ganz allgemein behaupten, dass die Verticalprojectionen der Erzeugenden jener Normalenflächen, welche den beiden Kegeln (KS) und $(K_1 S)$ entsprechen, zusammenfallen müssen.

Wie wir wissen, schneiden sich sämmtliche Normalen des Kegels $(K_1 S)$ längs des Kreises K_1 in dem nämlichen Punkte (L, O') der Kegelaxe $(SO, S'O')$; es werden sich mithin auch die Verticalprojectionen der Normalen des zweiten Kegels

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

(KS) im Punkte L treffen, und gelangen wir sonach zu dem Schlusse, dass alle Erzeugenden der zu untersuchenden Normalenfläche die vertical-projicirende Gerade $(L\,L')$ schneiden. Die Letztere wird somit eine gerade Leitlinie der Normalenfläche darstellen.

In gleicher Weise lässt sich darthun, dass die Normalenfläche eine zweite gerade Leitlinie (MM') besitze, welche ebenfalls die Kegelaxe trifft und zur anderen Axe des Leitkegelschnittes (KK') parallel ist. Zum Zwecke dieses Nachweises hätte man obige Betrachtung in der Art zu wiederholen, dass man die verticale Projectionsebene parallel zur Axe CD des Leitkegelschnittes annimmt und hierauf den Kegel (KS) durch affine Transformation in jenen Rotationskegel verwandelt, dessen Leitlinie durch den dem Kegelschnitte K' eingeschriebenen Kreis K'_2 repräsentirt wird.

Jede der beiden Leitgeraden (LL') und (MM') ist, wie aus der folgenden Betrachtung hervorgeht, eine Doppelgerade der Normalenfläche.

Denken wir uns zu diesem Zwecke die Normalen $(N_a\,N'_a)$ und $(N_b\,N'_b)$ für zwei Punkte (aa') und (bb'), deren Verbindungsgerade zur Axe $(AB, A'B')$ des Leitkegelschnittes parallel ist, construirt. Die Verticalprojectionen der bezeichneten Normalen schneiden sich in L, die horizontalen Projectionen N'_a und N'_b derselben dagegen werden sich, da sie die Normalen des Kegelschnittes K' in den Punkten a' und b' sind, welche in Bezug auf die Axe $C'D'$ symmetrisch liegen, in einem und demselben Punkte r' dieser Axe schneiden. Hieraus ist zu entnehmen, dass sich die beiden Normalen $(N_a\,N'_a)$ und $(N_b\,N'_b)$ in dem nämlichen Punkte (rr') von (LL') treffen.

Dasselbe gilt selbstverständlich von allen Normalenpaaren, deren Fusspunkte, wie a' und b' auf Sehnen des Leitkegelschnittes K', welche zur Axe $A'B'$ parallel laufen, liegen. Analog findet man, dass jene Normalenpaare, deren Fusspunkte, wie beispielsweise a' und a'_1 auf zur Axe $C'D'$ parallelen Sehnen gelegen sind, sich in Punkten der Leitgeraden (MM') schneiden.

Wir wissen bereits, dass die Doppellinie der vorliegenden Normalenfläche in ihrer Gesammtheit einen Ort dritter Ordnung vorstelle.

Ausser den beiden doppelten Leitgeraden (LL') und (MM') muss daher die Normalenfläche noch eine dritte Doppelgerade besitzen, welche aber offenbar keine Leitlinie der Normalenfläche sein kann, da eine windschiefe Fläche, welcher drei gerade Leitlinien zukommen, eine windschiefe Fläche zweiten Grades sein würde, während die unserer Betrachtung unterzogene Normalenfläche vom vierten Grade ist.

Die bezeichnete Doppelgerade kann mithin nur eine Doppelerzeugende der Normalenfläche sein. Die Existenz einer solchen lässt sich, wie folgt, nachweisen.

Denken wir uns vorderhand ganz allgemein, als Leitlinien einer windschiefen Fläche, zwei sich kreuzende Geraden und einen beliebigen Kegelschnitt, so hat bekanntlich jede Erzeugende dieser Fläche mit jeder der genannten drei Leitlinien einen Punkt gemein. Jede der beiden Leitgeraden L_1 und L_2 (Fig. 7) ist eine Doppelgerade der Fläche, das heisst durch jeden Punkt von L_1 und L_2 gehen zwei Erzeugenden der windschiefen Fläche. Ist beispielsweise p_1 ein beliebiger Punkt von L_1 und legen wir durch denselben und die Leitgerade L_2 eine Ebene, welche den Leitkegelschnitt L_3 in den Punkten p_3 und p'_3 schneidet, so sind $(p_1 p_3)$ und $(p_1 p'_3)$ die beiden sich in p_1 schneidenden Erzeugenden der windschiefen Fläche. Wählen wir statt des Punktes p_1 speciell den Schnittpunkt π_1 der Leitgeraden L_1 mit der Ebene des Leitkegelschnittes L_3 und denken wir uns durch diesen Punkt und die Leitgerade L_2 eine Ebene gelegt, so schneidet besagte Ebene die Ebene des Leitkegelschnittes L_3 in einer Geraden, welche durch die Schnittpunkte π_1 und π_2 der Leitgeraden mit der Ebene P des Leitkegelschnittes L_3 geht.

Die bezeichnete Hilfsebene $(\pi_1 L_2)$ schneidet sonach den Kegelschnitt L_3 in zwei Punkten π_3 und π'_3, welche mit π_1 und π_2 in einer und derselben Geraden liegen, so dass durch $\overline{\pi_1 \pi_2 \pi_3}$ und $\overline{\pi_1 \pi_2 \pi'_3}$ zwei zusammenfallende Erzeugenden der windschiefen Fläche $(L_1 L_2 L_3)$ dargestellt werden. Schneidet die Gerade $\pi_1 \pi_2$ den Kegelschnitt L_3 nicht in reellen Punkten, so ist dieselbe eine sogenannte singuläre oder isolirte Erzeugende der Kegelfläche.

Wenden wir das Resultat dieser Betrachtung auf die vorliegende Normalenfläche an, so finden wir, dass die beiden Leit-

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

geraden (LL') und (MM') (Fig. 6) die Ebene des Leitkegelschnittes K', also die horizontale Projectionsebene in unendlicher Entfernung schneiden; es wird mithin die unendlich ferne Gerade dieser Ebene die gesuchte Doppelerzeugende repräsentiren, welche diesfalls, da sie mit der Leitellipse keinen reellen Punkt gemein hat, eine isolirte Doppelerzeugende sein wird.

Es wurde nachgewiesen, dass die Normalenpaare, deren Fusspunkte in zu den Axen $A'B'$ oder $C'D'$ parallelen Sehnen des Leitkegelschnittes K' liegen, sich beziehungsweise in Punkten der Doppelgeraden (LL') oder (MM') schneiden.

Nimmt man speciell, statt der Sehnen, die zu den betreffenden Axen $A'B'$ oder $C'D'$ parallelen Tangenten an, so rücken die vorgenannten Fusspunkte der Normalenpaare einander unendlich nahe; sie erscheinen in den Axenendpunkten vereinigt. Die ihnen zugehörigen Normalen, welche sich nach den obigen Erörterungen in Punkten von (LL'), respective von (MM') treffen, übergehen somit in unmittelbar aufeinanderfolgende Erzeugenden der Normalenfläche, oder, was dasselbe ist, die Normalen des Kegels (KS) in den Axenendpunkten (AA'), (BB'), (CC') und (DD') repräsentiren die vier (reellen) Kanten der Normalenfläche.

Nachdem die Normalenfläche zwei Doppelgeraden und eine Doppelerzeugende besitzt, gibt es auch drei verschiedene Schaaren von Bitangentialebenen, und zwar:

a) Die Ebenen des Büschels (LL'). Denkt man sich nämlich durch (LL') eine beliebige Ebene $e_v\, e_h$ gelegt, deren horizontale Trace e_h den Leitkegelschnitt in den Punkten (aa') und $(a_1 a'_1)$ trifft, ferner die horizontalen Projectionen N'_a und N'_{a_1} der diesen Punkten entsprechenden Erzeugenden der Normalenfläche ebenso wie die verticalen Projectionen N_a und N_{a_1} derselben ausgemittelt, so fallen die letzteren in eine und dieselbe Gerade zusammen, welche durch L geht. Hieraus folgt, dass die beiden Erzeugenden (N_a und N'_a), (N_{a_1} und N'_{a_1}) in der Ebene $e_v\, e_h$ liegen, dass diese sonach die Normalenfläche in zwei verschiedenen Punkten, von welchen der eine auf $(N_a N'_a)$, der andere dagegen auf $(N_{a_1} N'_{a_1})$ gelegen ist, berührt.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Da die vorliegende Normalenfläche vom vierten Grade ist, so kann ihr Gesammtschnitt mit der Ebene $e_v e_h$ nur aus der doppelt zählenden Geraden (LL') und den beiden Erzeugenden $(N_a N'_a)$ und $(N_{a_1} N'_{a_1})$ bestehen.

b) Die Ebenen des Büschels (MM'). Es lässt sich diesfalls genau und in derselben Weise wie unter *a)* nachweisen, dass jede durch $(M'M'')$ gelegte Ebene $\vartheta_k \vartheta_h$ zwei Erzeugenden $(N'_a N''_a)$ und $(N'_b N''_b)$ gemein hat, also eine Bitangentialebene der Normalenfläche sei. Auch hier besteht der Gesammtschnitt der Fläche mit der Bitangentialebene aus der Doppelgeraden und den beiden der Ebene angehörenden Flächenerzeugenden.

c) Die Ebenen, welche durch die unendlich ferne (isolirte) Doppelerzeugende gehen. Da durch diese Doppelerzeugende zwei (allerdings imaginäre) Mäntel der Normalenfläche gehen, wird jede durch dieselbe gelegte Ebene auch jeden der beiden Mäntel berühren und zwar in Punkten tangiren, welche, im Allgemeinen, nicht zusammenfallen werden. Es sind mithin alle durch die unendlich ferne Doppelerzeugende geführten, das ist alle zur Ebene des Leitkegelschnittes (KK') parallelen Ebenen, uneigentliche Bitangentialebenen der Normalenfläche.

Der Gesammtschnitt der Fläche mit einer solchen Ebene muss aber vom vierten Grade sein, das heisst, derselbe muss ausser der Doppelerzeugenden noch aus einer Curve zweiten Grades bestehen. Die letztere kann weiters nicht in zwei Gerade (Erzeugenden der Normalenfläche) degeneriren, da es überhaupt keine Erzeugenden gibt, welche zur Ebene des Leitkegelschnittes parallel sind.

Der Ort der Schnittpunkte aller Erzeugenden der Fläche mit einer zur Ebene des Leitkegelschnittes parallelen Ebene ist daher unbedingt ein eigentlicher Kegelschnitt.

Wenn wir erwägen, dass die Normalenfläche zwei Hauptebenen (Symmetrieebenen) und zwar jene horizontal-projicirenden Ebenen, welche durch die Axe $A'B'$ und $C'D'$ des Leitkegelschnittes (KK') gehen, besitzt, dass also die horizontal-projicirende Gerade durch O' (Axe des gegebenen Leitkegels) gleichzeitig eine Axe der Normalenfläche repräsentire, so ist klar, dass die

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Mittelpunkte der Schnitte mit den zur horizontalen Projectionsebene parallelen Ebenen auf dieser Axe liegen müssen.

Da ferner keine Erzeugenden auf der Normalenfläche existiren, welche zur horizontalen Projectionsebene parallel sind, so besitzen die oben genannten horizontalen Flächenschnitte keine unendlich fernen Punkte, sind somit durchwegs Ellipsen.

Diese Eigenschaft, respective die Richtigkeit des Gesagten, lässt sich auch durch folgende Betrachtungen nachweisen:

Nehmen wir ganz allgemein als Leitlinie für eine windschiefe Fläche einen Kegelschnitt K und zwei sich kreuzende Geraden L und M an, und treffen wir bezüglich der Projectionsebene und des Projectionscentrums nachstehende Verfügungen:

Als Projectionsebene gelte die Ebene des Leitkegelschnittes K und das Projectionscentrum wählen wir auf einer der beiden Leitgeraden, etwa auf jener L so, dass sich die Centralprojection der letzteren auf den Punkt L (Fig. 8) reducire, während dv die Centralprojection der Leitgeraden M darstelle.

Diesen Voraussetzungen entsprechend, werden wir auf höchst einfache Weise einzelne Erzeugenden der windschiefen Fläche construiren können, und ebenso leicht das vorgesetzte Ziel erreichen.

Legen wir nämlich durch dv eine beliebige Ebene $e_b e_v$, so trifft dieselbe den in der Bildebene liegenden Kegelschnitt in zwei Punkten a und b, und die centralprojicirende Gerade L in einem Punkte, dessen Centralprojection mit L zusammenfällt, so dass La und Lb die Centralprojectionen der in der Ebene $e_b e_v$ liegenden Erzeugenden darstellen. In gleicher Weise können nunmehr beliebig viele Paare von Erzeugenden mit der grösstmöglichen Leichtigkeit centralprojectivisch dargestellt werden.

Suchen wir ferner auch den Schnitt der Fläche mit einer Ebene $E_b E_v$ auf, welche durch die Schnittpunkte der beiden Leitgeraden L und M mit der Ebene des Leitkegelschnittes gehen. Die Bildflächtrace E_b einer derartigen Ebene ist offenbar die Verbindungsgerade der Punkte L und D, während die Fluchttrace E_v durch irgend eine zu Ld Parallele vertreten werden kann.

Behufs Bestimmung des Schnittes der windschiefen Fläche mit der Ebene $E_v E_b$ ermitteln wir die Durchstosspunkte der einzelnen Erzeugenden der Kegelfläche mit der bezeichneten Ebene. Construiren wir also den Schnitt dv_1 der Ebene $E_b E_v$ mit der Hilfsebene $e_b\, e_v$, so erhalten wir dort, wo dieser Hilfsschnitt die Erzeugenden La und Lb trifft, bereits zwei Punkte a_1 und b_1 der gesuchten Schnittcurve. Ein Gleiches kann nun bezüglich aller durch dv gelegten Hilfsebenen wiederholt und durchgeführt werden.

Da auf Grund der vollführten Construction jedem Punkte a des Leitkegelsschnittes ein Punkt a_1 der Schnittcurve und zwar in der Weise entspricht, dass, während entsprechende Punkte, wie a und a_1, b und b_1 etc. mit L auf dem nämlichen Strahle liegen, sich entsprechende Geraden ab und $a_1 b_1$ in einem festen Punkte d schneiden, so ist zu vermuthen, dass die Schnittcurve und der Leitkegelschnitt in Bezug auf L als Collineationscentrum und eine gewisse durch d gehende Gerade als Collineationsaxe, perspectivisch collinear sind. Bezeichnete Vermuthung findet auch in der That ihre vollberechtigte Bestätigung.

Es ist von selbst einleuchtend, dass die Geraden $\overline{dab}$ und $\overline{da_1 b_1}$ entsprechende Strahlen zweier projectivischer Strahlenbüschel sind und zwar jener beiden Büschel, in welchen das durch dv geführte Ebenenbüschel die Bildebene, respective die Ebene $E_v E_b$ trifft.

Sollen die beiden Büschel nicht nur untereinander projectivisch, sondern auch collinear in Bezug auf das Centrum L sein, so ist einerseits nothwendig und andererseits hinreichend, dass die Gerade Ld zwei einander entsprechende Strahlen der beiden Büschel repräsentire. Die Überzeugung, dass dieser Bedingung im vorliegenden Falle entsprochen werde, kann man sich einfach dadurch verschaffen, wenn man durch dv jene Ebene $e'_b e'_v$ legt, deren Bildflächtrace Ld ist. Dieser Ebene entspricht sowohl im Büschel $d(ab\quad.)$ als auch im Büschel $d(a_1 b_1\quad.)$ die Gerade Ld selbst.

Weiters wird es sich noch darum handeln, die Collineationsaxe zu bestimmen. Dieselbe muss bekanntlich das zweite Paar zusammenfallender Strahlen der beiden Büschel $d(ab\quad.)$ und $d(a_1 b_1\quad.)$ repräsentiren und kann demnach nur die Gerade dv sein.

Denkt man sich nämlich durch dv die centralprojicirende Ebene $e''_b e''_v$ gelegt, so schneidet dieselbe sowohl die Bildebene,

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

als auch die Ebene $E_b E_v$ nach Geraden, deren Projectionen mit dv zusammenfallen.

Hieraus ist zu ersehen, dass die Büschel $d(ab \dots)$ und $d(a_1 b_1 \dots)$, also auch der Leitkegelschnitt K und die gesuchte Schnittcurve, in Bezug auf dv als Collineationsaxe und L als Collineationscentrum, perspectivisch collinear sind, dass mithin jede Ebene, welche durch die Durchstosspunkte der Leitgeraden L und M mit der Ebene des Leitkegelschnittes K geht, die windschiefe Fläche (L, M, K) nach einen Kegelschnitt schneidet.

Im vorliegenden Falle, wo es sich um die Normalenfläche des geraden Kegels zweiten Grades handelt, sind die Leitgeraden L und M parallel zu der Ebene des Leitkegelschnittes K und somit die beiden oben genannten Durchstosspunkte in unendlicher Entfernung. Aus diesem Umstande folgt, dass die Ebenen, welche die Normalenfläche nach Kegelschnittslinien schneiden, parallel zur Ebene des Leitkegelschnittes K sein müssen, was bereits vordem auf anderem Wege nachgewiesen wurde.

Schliesslich erübrigt noch, die Strictionslinie der Normalenfläche für den gegebenen Fall näher zu kennzeichnen.

Es ist bekannt, dass bei jeder windschiefen Fläche die asymptotischen Ebenen, d. i. jene Ebenen, welche durch die geradlinigen Erzeugenden der Fläche gehen und in den unendlich fernen Punkten derselben die Fläche berühren, parallel zu den Berührungsebenen des Richtungskegels sind.

Auf unseren Fall angewendet, ist der Richtungskegel der Normalenfläche ein Kegel zweiten Grades, dessen Erzeugenden, da dieselben parallel zu jenen der Normalenfläche sind, senkrecht auf den Berührungsebenen des gegebenen Leitkegels (KS) stehen. Umgekehrt sind aber auch die Tangentialebenen des Richtungskegels senkrecht zu den Erzeugenden des gegebenen Leitkegels (SK); woraus folgt, dass die asymptotischen Ebenen der Normalenflächen senkrecht zu den Erzengenden des Leitkegels sein müssen.

Es werden mithin jene Ebenen, welche durch die Erzeugenden der Normalenfläche senkrecht zu den betreffenden asymtotischen Ebenen gelegt werden, die entsprechenden Erzeugenden des Leitkegels, also auch dessen Scheitel S enthalten. Andererseits wissen wir aber auch, dass jene Ebenen, welche durch die

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Erzeugenden einer windschiefen Fläche senkrecht zu den betreffenden asymptotischen Ebenen gelegt werden — die Centralebenen — die Fläche in Punkten der Strictionslinie berühren.

Der vorausgeschickten Betrachtung gemäss gehen die Centralebenen der Normalenfläche durch den Scheitel S des Leitkegels; die Strictionslinie ist somit die Berührungscurve der Normalenfläche mit dem ihr aus dem Scheitel des Leitkegels umschriebenen Kegel.

Betrachten wir nun den Leitkegel (SK) als den einer Fläche zweiten Grades, längs eines zu einer Hauptebene parallelen Schnittes, umschriebenen Kegel, wobei selbstverständlich der Scheitel S den Pol der Schnittebene, welcher in der zur letztgenannten Ebene senkrechten Axe der Leitfläche liegen muss, vorstellt, so ergeben sich durch Zusammenfassung der diesfalls in Bezug auf die Normalenfläche festgestellten Resultate, folgende Sätze

a) „Der Normalenfläche einer Fläche zweiten Grades längs eines zu einer Hauptebene parallelen (oder zu einer Axe senkrechten) Schnittes, entsprechen zwei gerade Leitlinien welche gleichzeitig Doppelgeraden der Normalenflächen sind."

b) „Die Doppelgeraden laufen zu den Axen des Leitkegelschnittes parallel und schneiden die zur Ebene des Leitkegelschnittes senkrechte Axe der gegebenen Leitfläche."

c) „Die unendlich ferne Gerade der Ebene des Leitkegelschnittes repräsentirt eine isolirte (im Falle der Leitkegelschnitt eine Hyperbel ist, eine wirkliche) Doppelerzeugende der Normalenfläche."

d) „Die Ebenen, welche durch die beiden Leitgeraden gehen, bilden Büschel von Bitangentialebenen der Normalenfläche. Jede dieser Ebenen hat mit der Fläche, ausser der betreffenden Doppelgeraden, zwei Erzeugenden gemein."

e) „Die Ebenen durch die Doppelerzeugende, d. i. die zur Ebene des Leitkegelschnittes parallelen Ebenen sind gleichfalls (eigentliche oder uneigentliche, je nachdem der Leitkegelschnitt eine Hyperbel oder Ellipse ist) Bitangentialebenen der Normalenfläche."

f) „Letztbezeichnete Ebenen schneiden die Normalenfläche nach Kegelschnittslinien, deren Axen zu jenen des Leit-

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

kegelschnittes parallel laufen, und deren Mittelpunkt auf der zur Ebene des Leitkegelschnittes senkrechten Axe der Leitfläche (welche somit auch eine Axe der Normalenfläche ist) liegen."

g) „Die Strictionslinie der Normalenfläche ist deren Berührungscurve mit jenem Kegel, dessen Scheitel der Pol der Ebene des Leitkegelschnittes in Bezug auf die Leitfläche zweiten Grades ist."

Normalenfläche einer Fläche zweiten Grades längs eines Diametralschnittes.

Wird eine Fläche zweiten Grades mittelst einer durch ihren Mittelpunkt gehenden Ebene nach einer Kegelschnittslinie K geschnitten, so ist bekanntlich die Developpable, welche der Fläche längs des Kegelschnittes umschrieben wird, ein Cylinder, dessen Erzeugenden zu dem der bezeichneten Durchmesserebene conjugirten Durchmesser der Fläche parallel sind.

Es wird somit für diesen Fall genügen, die Normalenfläche eines Cylinders vom zweiten Grade längs eines ebenen Schnittes zu untersuchen.

Zu diesem Behufe setzen wir die Ebene des Leitkegelschnittes (KK') (Fig. 9), als horizontale Projectionsebene voraus, und nehmen als verticale Projectionsebene diejenige Ebene an, welche durch die Axe (ZZ') des Cylinders geht. Hierbei fällt naturgemäss die horizontale Projection Z' der Cylinderaxe mit der Grundlinie gg zusammen.

Ist nun aa' ein beliebiger Punkt der Leitlinie (KK'), so entspricht der Berührungsebene des Cylinders in diesem Punkte, als horizontale Trace, die Tangente t_a an K' im Punkte a'. Die Horizontalprojection N'_a der dem Punkte (aa') entsprechenden Cylindernormalen ist selbstverständlich senkrecht zu t_a, und repräsentirt als solche die Normale des Leitkegelschnittes K' im Punkte a'.

Hieraus ist wieder, wie in den vorhergegangenen Betrachtungen, zu entnehmen, dass die horizontale Contour der Normalenfläche, das ist die Enveloppe der Horizontalprojectionen aller Erzeugenden der Normalenfläche die Evolute des Leitkegelschnittes sei.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Was die verticalen Projectionen der Erzeugenden der Normalenfläche anbelangt, so haben wir zu berücksichtigen, dass, da die Erzeugenden der Cylinderfläche, in Folge der besonderen Anordnung der Projectionsebenen, sämmtlich parallel zur verticalen Projectionsebene sind, auch die verticalen Tracen aller Ebenen, welche eine Cylindererzeugende enthalten, also insbesondere jene aller Berührungsebenen des Cylinders, parallel zu diesen Cylindererzeugenden, das ist parallel zu Z sein werden.

Eine unmittelbare Folge des Gesagten ist, dass auch die Verticalprojectionen N_a aller Erzeugenden der Normalenfläche untereinander parallel sein müssen, nachdem dieselben zu den genannten Verticaltracen senkrecht stehen.

Die Erzeugenden der Normalenfläche sind demgemäss im vorliegenden Falle sämmtlich zu einer vertical-projicirenden, zu den Cylindererzeugenden senkrechten Ebene R_v R_h parallel, und kann diese letztere sonach als Richtebene der Normalenfläche betrachtet werden. Die unendlich ferne Gerade der bezeichneten Ebene, stellt demnach eine Leitgerade der Normalenfläche dar.

Die Doppelcurve der Normalenfläche ist, wie allgemein nachgewiesen wurde, von der dritten Ordnung. Es lässt sich nunmehr leicht darthun, dass diesfalls die Doppellinie dritter Ordnung in eine Gerade und einen Kegelschnitt zerfällt.

Denken wir uns nämlich einen beliebigen Durchmesser a' b' des Kegelschnittes K' gezogen, so werden die Tangentialebenen des Cylinders in den Punkten a' und b' zueinander parallel sein, und wird das Gleiche auch von den entsprechenden Normalen $(N_a\ N'_a)$ und $(N_b\ N'_b)$ gelten.

Es gibt mithin auf der Normalenfläche unendlich viele Paare paralleler Erzeugenden, deren Fusspunkte auf der Leitlinie K' durch die Diameter von K' bestimmt sind. Die unendlich fernen Punkte aller Erzeugenden der Normalenfläche liegen auf der unendlich fernen Geraden der Richtebene R_v R_h, und nachdem jede Erzeugende eine zweite zu ihr parallele Erzeugende auf der Normalenfläche besitzt, so ist die unendlich ferne Gerade der Normalenfläche gleichzeitig eine Doppelgerade derselben.

Der Rest der Doppellinie muss desshalb von der zweiten Ordnung, das heisst ein Kegelschnitt sein. Wir wollen denselben

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

D nennen, und seine Lage im Raume, sowie seine besonderen Eigenschaften näher untersuchen.

Zunächst wird es sich darum handeln, die Entstehung des Kegelschnittes D zu bestimmen, das ist festzustellen, welche Paare von Normalen sich in Punkten desselben schneiden.

Die Normale des Cylinders im Punkte (aa') der Leitlinie (KK') ist $(N_a N'_a)$; die verticale Projection N_a ist parallel zu R_v, hat also für alle möglichen Punkte (aa') von (KK') die nämliche Richtung; ferner ist ersichtlich, dass a gleichzeitig die Verticalprojection zweier Punkte (aa') und $(a_1 a'_1)$ der Leitlinie (KK') darstelle, jener Punkte nämlich, in welchen die durch a zu Z senkrecht geführte Gerade den Leitkegelschnitt K' trifft.

Die Horizontalprojectionen der Normalen in diesen Punkten sind N'_a, N'_{a1}, während deren verticale Projectionen in der Geraden N_a vereinigt erscheinen. Die beiden Normalen liegen hiernach in einer und derselben vertical projicirenden Ebene und werden sich desshalb auch in einem Punkte (ss') schneiden müssen, welcher dem Doppelkegelschnitte D angehört.

Denken wir uus nun durch a' und a'_1 die Durchmesser des Leitkegelschnittes K' geführt, so bestimmen dieselben auf dem letzteren zwei neue Punkte b' und b'_1, deren Verbindunsgerade parallel zu $a'a'_1$, also senkrecht zu Z' ist. Die den beiden Punkten (bb') und (bb'_1) entsprechenden Cylindernormalen $(N_b N'_b)$ und $(N_b N'_{b1})$ schneiden sich ebenfalls in einem Punkte rr' des Doppelkegelschnittes D. Da aber ausserdem die Normalen N'_a und N'_b des Leitkegelschnittes K' in den diametral entgegengesetzten Punkten a' und b' einander parallel sind, und das Gleiche auch von N'_{a1} und N'_{b1} gilt, so ergibt sich, dass die Punkte s' und r' und mithin auch die Punkte s und r symmetrisch gegen den Mittelpunkt O des Leitkegels K' liegen.

Ändert man nun die Lage der Sehne $a'b'$, das ist verschiebt man $a'b'$ parallel zu sich selbst, so findet man, dass die Punkte des Doppelkegelschnittes paarweise symmetrisch gegen den Mittelpunkt O gelagert sind, dass also der Mittelpunkt des Leitkegelschnittes K' gleichzeitig auch der Mittelpunkt des Doppelkegelschnittes D sei.

Sind ferner t_x und t_y die zu Z' parallelen Tangenten des Leitkegelschnittes K', oder mit anderen Worten, die horizontalen

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Tracen der horizontal-projicirenden Berührungsebenen des Cylinders, so erhalten wir in den Geraden N_{x_1} und N_{y_1}, welche durch die betreffenden Berührungspunkte x'_1 und y'_1 senkrecht zu Z' gezogen werden, die beiden in der horizontalen Projectionsebene (Ebene der Leitlinie K) liegenden Erzeugenden der Normalenfläche. Jede derselben trifft den Leitkegelschnitt K' noch in einem zweiten Punkte x'_2, respective y'_2, und wird gleichzeitig von der entsprechenden Normalen in eben diesem Punkte begegnet.

Zwei Punkte des Doppelkegelschnittes D sind also x'_2 und y'_2, und ihre Verbindungsgerade e_h ist somit die horizontale Trace der Ebene des Doppelkegelschnittes. Dass e_h durch den Punkt O gehen müsse, ist selbstverständlich, da O, als Mittelpunkt des Doppelkegelschnittes D und des Leitkegelschnittes K, den Ebenen dieser beiden Kegelschnitte, also auch der Schnittlinie e_h derselben, angehören muss.

Nachdem der Doppelkegelschnitt D einen Mittelpunkt O im Endlichen besitzt, so ist weiters noch die Frage zu beantworten, ob der besagte Kegelschnitt eine Ellipse oder eine Hyperbel sei.

Im vorliegenden Falle wird, da sich ohne weiters nachweisen lässt, dass derselbe einen (und hiermit auch noch einen zweiten) unendlich fernen Punkt besitze, der Doppelkegelschnitt eine Hyperbel sein.

Denken wir uns jene Sehne des Parallelstrahlenbüschels $a'b'$, welche durch O geht, also einen Durchmesser des Leitkegelschnittes K' darstellt, gezogen, so ergeben sich in den Schnittpunkten m' und n' derselben mit K' zwei Punkte, deren Normalen $(N_m N'_m)$ und $(N_n N'_n)$ untereinander parallel sind. Der unendlich ferne Schnittpunkt dieser Normalen gehört aber dem Doppelkegelschnitte an; letzterer wird daher, insoferne als die Leitcurve K' eine Ellipse ist, eine Hyperbel sein. Wäre K eine Hyperbel, so kann der mögliche Fall eintreten, dass der zu Z' senkrechte Durchmesser derselben, die besagte Curve in zwei imaginären Punkten m' und n' trifft. Unter dieser Voraussetzung sind sodann auch die einander parallelen Normalen des Cylinders imaginär, der Doppekegelschnitt besitzt also keine reellen unendlich fernen Punkte, wird somit eine Ellipse sein.

Die eine Asymptote des Doppelkegelschnittes D ist mithin, indem wir den vorliegenden Fall im Auge behalten, jene Gerade,

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

welche durch O parallel zu den Normalen N'_m und N'_n gezogen werden kann. Die zweite Asymptote ergibt sich, obwohl sie gleichfalls reell ist, nicht in gleicher Weise, indem parallele Normalen, von der vorher entwickelten Eigenschaft, die Existenz eines zweiten zu Z' senkrechten Durchmessers des Leitkegelschnittes K' voraussetzen würden, was offenbar nicht denkbar ist. Es zeigt sich vielmehr, dass die Hyperbel D nicht in ihrer ganzen Ausdehnung eine Doppellinie der Normalenfläche liefere, dass diese bloss längs eines gewissen, beschränkten Theiles als solche anzusehen sei, während der übrige Theil derselben ganz bedeutungslos (ideal, parasitisch) ist.

Der unendlich ferne Schnittpunkt der parallelen Erzeugenden N_m und N_n der Normalenfläche gehört nicht nur dem Doppelkegelschnitte, sondern auch der Doppelgeraden der Normalenfläche an.

Die Ebenen, welche zwei Erzeugende der Normalenfläche enthalten, sind Bitangentialebenen der letzteren, das heisst sie berühren die Fläche in zwei verschiedenen Punkten, wovon je einer auf einer der beiden Erzeugenden liegt. Es gibt zwei Schaaren solcher Bitangentialebenen. Die eine Schaar bildet ein Parallelebenenbüschel, welches die unendlich ferne Leit- oder Doppelgerade zur Axe hat. Jede Bitangentialebene aus dieser Schaar hat mit der Normalenfläche die Doppelgerade und zwei Erzeugenden gemein. Die bezeichneten drei Geraden bestimmen in ihrer Gesammtheit einen Ort vierter Ordnung, also den vollständigen Durchschnitt der Bitangentialebene mit der Normalenfläche.

Die Berührungspunkte mit der Normalenfläche sind offenbar jene Punkte, in welchen die beiden in der Bitangentialebene liegenden Erzeugenden die Doppelgerade schneiden. Nachdem aber die Doppelgerade der Normalenfläche in unendlicher Entfernung liegt, so ergibt sich als natürliche Folgerung, dass jede Bitangentialebene der in Rede stehenden Schaar, die Fläche in den unendlich fernen Punkten der in ihr liegenden Erzeugenden berührt, also für diese beiden Erzeugenden die „asymptotische Ebene" der windschiefen Normalenfläche repräsentire.

Da ferner die Bitangentialebenen der genannten Schaar ein Parallelebenenbüschel bilden, so gelangen wir, auf Grund der

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

eben vorausgeschickten Betrachtungen, zu dem Schlusse, dass die asymptotische Developpable der Normalenfläche mit dem bezeichneten Parallelebenenbüschel identisch sei.

Auf diese Eigenschaft gestützt, wird es nunmehr auch nicht den geringsten Schwierigkeiten unterliegen, die Strictionslinie der Normalenfläche zu bestimmen.

Die Centralebene einer Erzeugenden, das ist die durch die Erzeugende gehende Ebene, welche die windschiefe Fläche im Centralpunkte dieser Erzeugenden berührt, steht auf der entsprechenden asymptotischen Ebene senkrecht. Da im vorliegenden Falle die asymptotischen Ebenen untereinander parallel sind, und zu den Cylindererzeugenden senkrecht stehen, werden diesfalls die Centralebenen jene sein, welche durch die Erzeugenden der Normalenfläche parallel zu den Cylindererzeugenden gelegt werden. Die besagten Centralebenen umhüllen also einen Cylinder, dessen Erzeugenden dieselbe Richtung, wie jene des gegebenen Leitcylinders (K, Z) besitzen.

Die Berührungscurve dieses Cylinders mit der Normalenfläche ist der geometrische Ort der Centralpunkte oder, mit anderen Worten, die Strictionslinie der Normalenfläche.

Was die Bitangentialebenen der zweiten Schaar anbelangt, so wissen wir, dass sie Paare von parallelen Erzeugenden der Normalenfläche enthalten. So wird beispielsweise die Ebene, welche durch die Normalen $(N_a N'_a)$ und $(N_b N'_b)$ geht, eine derartige Bitangentialebene vergegenwärtigen.

Die horizontale Trace der Bitangentialebene ist immer ein Durchmesser des Leitkegelschnittes K' und zwar jener, welcher die Fusspunkte der parallelen Normalen auf der Leitlinie K' miteinander verbindet. Es erhellt hieraus, dass die Bitangentialebenen dieser Schaar alle durch den Mittelpunkt O der Leitlinie K' gehen, oder dass ihre horizontalen Tracen das Durchmesserbüschel der Leitlinie K' vorstellen.

Die Bitangentialebene, welche durch die parallelen Normalen $(N_a N'_{a_1})$ und $(N_b N'_{b_1})$ geht, ist senkrecht zu den Tangentialebenen des Cylinders in den Punkten $(aa')_1$ und $(bb')_1$, oder, was dasselbe ist, senkrecht zu der Ebene, welche durch (ZZ') und den dem Durchmesser $a'_1 b'_1$ conjugirten Durchmesser $\alpha\beta$ geht. Diese

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Ebene ist projectivisch durch die bezüglichen Tracen Z und $\alpha\beta$ dargestellt.

Auf Grund dieser Erörterungen ergibt sich, dass jede der Bitangentialebenen der letztbetrachteten Schaar durch einen Durchmesser des Kegelschnittes K' geht und senkrecht auf jener Ebene des Ebenenbüschels (ZZ') steht, welche den dem genannten Durchmesser conjugirten Durchmesser von K' enthält.

Um zu ermitteln, was für ein geometrisches Gebilde die Bitangentialebenen dieser Schaar bestimmen, denken wir uns in der horizontalen Projectionsebene einen beliebigen Punkt (OO') angenommen, und ziehen ausserdem in der verticalen Projectionsebene eine zur Geraden Z Parallele ζ, welche die Grundlinie gg im Punkte c trifft. Führt man weiters durch c eine zum Durchmesser $\alpha\beta$ des Leitkegelschnittes K' parallele Gerade T^a_h, so ist ζ respective T^a_v die verticale, und T^a_h die horizontale Trace einer Ebene, welche zu den Berührungsebenen des Cylinders (ZK) in den Punkten (aa'_1) und (bb'_1) parallel läuft.

Zieht man endlich durch O' eine zu dem Durchmesser $a'_1b'_1$ Parallele B_h, welche die Grundlinie in d schneidet, und durch (OO') eine Senkrechte $(\sigma\sigma')$ zu $T^a_vT^a_h$, deren verticaler Durchstosspunkt d'_1d_1 sei, so stellen B_h und dd_1, respective B_v die bezügliche Horizontal- und Verticaltrace einer Ebene dar, die zu der Bitangentialebene, welche die Erzeugenden N_{a_1} und N_{b_1} enthält, parallel ist. Wenn wir nun durch (OO') die Parallelebenen zu allen möglichen Bitangentialebenen der fraglichen Schaar führen, so wird das Erzeugniss dieser Parallelebenen offenbar congruent und parallel liegend zu dem Erzeugnisse der Bitangentialebene selbst sein.

Die Construction zeigt, dass T^a_v, also auch σ für alle möglichen Lagen der Bitangentialebenen, die ursprüngliche Lage nicht ändern. Ferner ist zu ersehen, dass der Strahl B_h ein dem Durchmesserbüschel von K' paralleles Büschel, und daher der Punkt d eine Reihe beschreibe, welche zu dem Durchmesserbüschel von K' projectivisch ist. Ebenso beschreibt der Strahl T^a_h, da entsprechende Strahlen von B_h und T^a_h zu conjugirten Durchmessern von K' parallel sind, ein Büschel, welches zu dem Büschel B_h projectivisch sein wird. Hieraus folgt, dass sowohl das Strahlenbüschel σ', also auch die Reihe $d'_1\ldots$ auf der Grund-

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

linie gg, sowie jene d_1 auf der Geraden σ zum Büschel T_η^v und demnach auch zum Büschel B_h, respective zur Reihe d projectivisch sind.

Hiernach sind d und d_1 entsprechende Punkte zweier projectivischen Reihen auf den Trägern gg und σ, während deren Verbindungslinie B_v einen Kegelschnitt umhüllt, welcher gleichzeitig gg und σ berührt.

Als unmittelbare Folge des Gesagten ergibt sich, dass die Ebene B_vB_h einen Kegel zweiten Grades, dessen Scheitel (OO') ist, umhülle, welcher einerseits die horizontale Projectionsebene, und andererseits die zur Geraden Z senkrekte Ebene tangirt, und dass also auch die Bitangentialebenen, welche durch Paare paralleler Erzeugenden der Normalenfläche gehen, einen Kegel umhüllen, dessen Scheitel mit dem Mittelpunkte des Leitkegelschnittes K zusammenfällt, und welcher die Ebene des Leitkegelschnittes K, sowie auch jene Ebene, welche durch den Mittelpunkt O senkrecht zu den Cylindererzeugenden gelegt werden kann, berührt.

Jede dieser Bitangentialebenen hat mit der Normalenfläche zwei parallele Erzeugende gemein und schneidet daher die Fläche ausserdem noch in einem Kegelschnitte, welcher jede der genannten zwei Erzeugenden in zwei Punkten trifft. Einer dieser Schnittpunkte auf jeder Erzeugenden ist ein Berührungspunkt der Bitangentialebene mit der Normalenfläche, während der zweite dem Doppelkegelschnitte angehört.

Wenn daher als Leitlinie für die Normalenfläche einer Fläche zweiten Grades, ein Diametralschnitt K derselben angenommen wird, und wir, um uns kurz fassen zu können, den Mittelpunkt der Fläche zweiten Grades, also auch jenen von K mit O, und den dem Diametralschnitte conjugirten Durchmesser, dessen Richtung auch jene der Erzeugenden des der Fläche längs K umschriebenen Cylinders ist, mit Z bezeichnen, so gelangen wir, als Resultat der hier durchgeführten Untersuchungen, zu dem Schlusssatze:

a) „Die orthogonale Projection der Normalenfläche auf die Ebene der Leitlinie K ergibt sich als die Evolute der letzteren."

„Die Projection auf jene Ebene, welche durch Z senkrecht zu K gelegt wird, reducirt sich auf ein

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Parallel-Strahlenbüschel, dessen Elemente zu Z senkrecht stehen."

b) „Die Doppellinie der Normalenfläche zerfällt in eine Gerade und einen Kegelschnitt. Die Doppelgerade ist die unendlich ferne Gerade der zu Z senkrechten Ebenen. Der Doppelkegelschnitt hat den nämlichen Mittelpunkt O wie der Leitkegelschnitt K. Der erstere trifft den letzteren in zwei Punkten. Die Doppelgerade und der Doppelkegelschnitt haben einen Punkt gemeinschaftlich."

c) „Die Bitangentialebenen der Normalenfläche bilden zwei Schaaren. Das Erzeugniss der einen Schaar ist ein Parallelebenenbüschel, dessen Axe die Doppelgerade der Normalenfläche ist. Die Bitangentialebenen dieses Büschels haben mit der Normalenfläche je zwei Erzeugende und die Doppelgerade gemein."

„Das Büschel der Bitangentialebenen ist gleichzeitig die asymptotische Developpable der Normalenfläche."

„Die zweite Schaar von Bitangentialebenen umhüllt einen Kegel, dessen Scheitel der Mittelpunkt O der Leitlinie ist. Der bezeichnete Kegel berührt einerseits die Ebenen der Leitlinie K und andererseits die durch O senkrecht zu Z gelegte Ebene."

„Die Bitangentialebenen dieser Schaar haben mit der Normalenfläche je zwei parallele Erzeugende und je einen Kegelschnitt gemein."

d) „Die Strictionslinie der Normalenfläche ist die Berührungscurve mit jenem ihr umschriebenen Cylinder, dessen Erzeugenden zu Z parallel sind."

Anschliessend an unsere bisherigen Untersuchungen, wollen wir noch die

Normalenfläche eines Umdrehungscylinders längs eines schiefen Schnittes

in das Bereich unserer derzeitigen Betrachtungen einbeziehen.

Nehmen wir wieder die Ebene der kreisförmigen Basis (CC') (Fig. 10) des Rotationscylinders als horizontale Projectionsebene an, und wählen wir als verticale Projectionsebene jene Ebene, welche auf der Ebene der Leitcurve (KK') (der Normalen-

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

fläche) senkrecht steht. Letztere Ebene werde durch die verticalprojicirende Ebene $e_v e_h$ dargestellt.

Wir wissen, dass alle Normalen eines Umdrehungscylinders die Rotationsaxe (ZZ') desselben schneiden und gleichzeitig zu dieser senkrecht stehen, mithin, zufolge der getroffenen Anordnung der Projectionsebenen, zur horizontalen Projectionsebene parallel sind.

Die zu untersuchende Normalenfläche ist somit, wie leicht ersichtlich, eine besondere Form eines geraden Kegelschnitts-Conoides, dessen Richtebene die Horizontalebene, dessen Leitgerade die Cylinderaxe ZZ', und dessen Leitkegelschnitt (KK') ist.

Bestimmen wir die Erzeugende der Normalenfläche in einem beliebigen Punkte (aa') der Leitlinie (KK'). Da die Normale zur Horizontalebene parallel ist und die Cylinderaxe ZZ' schneidet, so wird ihre horizontale Projection N'_a durch die Verbindungsgerade der Punkte a' und Z' dargestellt, die verticale Projection N_a dagegen durch die dem Punkte a entsprechende Parallele zur Grundlinie respräsentirt erscheinen. Nachdem aber mit dem Punkte a selbstverständlich die verticale Projection a_1 eines zweiten Punktes $(a_1 a'_1)$ der Leitlinie (KK') zusammenfällt, wird N_a gleichzeitig auch die verticale Projection N_{a_1} einer zweiten Erzeugenden $(N_{a_1} N'_{a_1})$ der Normalenfläche darstellen.

Die beiden Erzeugenden $(N_a N'_a)$ und $(N_{a_1} N'_{a_1})$ der letztgenannten Fläche schneiden sich offenbar in einem Punkte $(\alpha\alpha')$ der Cylinderaxe. Das Gleiche gilt für alle Paare von Erzeugenden, welche, wie die beiden letztangeführten, in einer zur horizontalen Projectionsebene parallelen Ebene liegen. Hieraus folgt, dass die Cylinderaxe eine Doppelgerade der Normalenfläche ist.

Denken wir uns ferner einen beliebigen Durchmesser $a'b'$ des Kreises K' gezogen, so fallen mit diesem Durchmesser die Horizontalprojectionen N'_a und N'_b der den Punkten (aa') und (bb') der Leitlinie (KK') entsprechenden Cylindernormalen zusammen; es werden hiernach diese letzteren in der durch $a'b'$ gehenden horizontal-projicirenden Ebene liegen, und sich als solche schneiden müssen.

Berücksichtigen wir ferner, dass die verticalen Projectionen N_a und N_b der Normalen parallel zur Grundlinie, also unter einander parallel sind, während die horizontalen Projectionen N'_a und N'_b zusammenfallen, so gelangen wir zu dem Schlusse, dass die

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Normalen $(N_a N'_a)$ und $(N_b N'_b)$ selbst zueinander parallel seien, und sonach ihr Schnittpunkt in der unendlich fernen Geraden der horizontalen Projectionsebene (Richtebene) oder kurz in der unendlich fernen Leitgeraden der Normalenfläche liege.

Da das Gesagte für alle Paare von Erzeugenden gilt, deren Fusspunkte in der horizontalen Projection Endpunkte eines Durchmessers sind, so ersieht man, dass die unendlich ferne Leitgerade der Normalenfläche gleichfalls eine Doppelgerade der Normalenfläche repräsentire.

Wie wir bereits wissen, ist die Doppellinie der Normalenfläche ein Ort dritter Ordnung. Nachdem wir nunmehr zwei Bestandtheile derselben, das heisst die beiden eben gefundenen Doppelgeraden kennen, kann der Rest der Doppellinie nur wieder eine Gerade sein.

Selbstverständlich ist, dass diese Doppelgerade keine Leitgerade der Normalenfläche sein könne, da, wenn wir dies annehmen wollten, die letztere nothwendigerweise eine windschiefe Fläche zweiten Grades sein müsste. Aus dieser einfachen Betrachtung ist zu ersehen, dass die dritte Doppelgerade der Fläche nur durch eine Doppelerzeugende, das ist durch eine Gerade, in welcher zwei nicht unmittelbar aufeinander folgende Erzeugenden der Normalenfläche vereinigt sind, vertreten werden könne.

Diese Doppelerzeugende lässt sich leicht ermitteln. Dieselbe ist repräsentirt durch jenen Durchmesser (Axe) N_{12} N'_{12} des Leitkegelschnittes (KK'), welcher auf der verticalen Projectionsebene senkrecht steht. Besagte Axe trifft den Leitkegelschnitt in den beiden Punkten (CC'), (DD'), deren Verticalprojectionen C und D zusammenfallen. Die Horizontalprojectionen der diesen Punkten entsprechenden Cylindernormalen sind in der zur Grundlinie senkrechten Geraden N'_{12} vereinigt, während sich deren verticale Projectionen auf den Punkt N_{12} reduciren. Es ist sonach einleuchtend, dass die kleine Axe $(N_{12} N'_{12})$ oder $(CD, C'D')$ der Leitellipse die Doppelerzeugende der Normalenfläche darstelle.

Die somit abgeleitete Normalenfläche besitzt drei Schaaren von Bitangentialebenen und zwar:

a) Die Ebenen des Büschels (ZZ'). Jede durch die Cylinderaxe (ZZ') gehende Ebene, wie beispielsweise $P_v P_h$, enthält

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

ausser der Doppelgeraden *(ZZ')* noch zwei parallele Erzeugenden N_a und N_b der Normalenfläche, und berührt diese letztere in den beiden Punkten α und β, in welchen die Erzeugenden die Doppelgerade *(ZZ')* treffen. Ausser der Doppelgeraden *Z* und den beiden parallelen Erzeugenden hat eine Ebene des Büschels *(ZZ')* keine anderweitige Linie mit der Normalenfläche gemein.

b) Die Ebenen des horizontalen Ebenenbüschels, das heisst alle zur horizontalen Projectionsebene (Richtebene der Normalenfläche) parallelen Ebenen.

Jede derartige Ebene, wie beispielsweise ε_v enthält ausser der unendlich fernen Doppelgeraden der Normalenfläche noch zwei Erzeugenden (N_a und N_{a_1}), welche sich in einem Punkte α der Doppelgeraden schneiden. Die Ebene ε_v berührt die Normalenfläche in den unendlich fernen Punkten der beiden Erzeugenden N_a und N_b und repräsentirt sonach gleichzeitig die a s y m t o t i s c h e E b e n e für diese beiden Erzeugenden.

Jene Ebene η'_v und η^2_v des horizontalen Ebenenbüschels, welche gleichzeitig den Leitkegelschnitt *(KK')* und zwar in den Punkten *(AA')*, respective *(BB')* berühren, enthalten zwei unmittelbar aufeinander folgende, sich gegenseitig schneidende Erzeugenden der Normalenfläche. Die angedeuteten beiden Paare von Erzeugenden sind ($N_A N'_A$), respective ($N_B N'_B$) und repräsentiren z w e i K a n t e n der Normalenfläche; die beiden anderen Kanten der Normalenfläche liegen in jenen Bitangentialebenen des Büschels *(ZZ')*, welche gleichzeitig den Kegelschnitt *(KK')* berühren, sind mithin imaginär.

c) Die Ebenen des Büschels ($N_{12}N'_{12}$). Nachdem nämlich die Doppelerzeugende ($N_{12}N'_{12}$) zu gleicher Zeit zwei verschiedenen Mänteln der Normalenfläche angehört, so wird irgend eine durch dieselbe gelegte Ebene E_vE_h die beiden Mäntel der windschiefen Fläche in Punkten der Erzeugenden ($N_{12}N'_{12}$) berühren, also eine Bitangentialebene der Normalenfläche darstellen.

Untersuchen wir den Schnitt der Bitangentialebene E_vE_h mit der Normalenfläche, so finden wir, dass derselbe, nebst der

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

doppelt zählenden Geraden $(N_{12}N'_{12})$ offenbar noch aus einem Kegelschnitte bestehe, welcher sich als der geometrische Ort der Schnittpunkte der Ebene E_vE_h mit den Erzeugenden der Normalenfläche ergibt. Die Erzeugende $(N_bN'_b)$ z. B. schneidet die Ebene E_vE_h in dem Punkte (pp'), welcher der Schnittcurve angehört.

Nachdem sich $p'O' : O'b' = p\delta : \delta b$, und nachdem in Folge der gegenseitig unveränderlichen Lage von e_v, Z und E_v das Verhältniss $p\delta : pb$, welches für alle Erzeugenden das nämliche ist, constant bleibt, so muss auch das Gleiche von dem Verhältnisse $p'O'$ $O'b'$ gelten. Da aber überdies $O'b'$, als Radius des Kreises K', constant ist, muss auch dem $p'O'$ ein unveränderlicher Werth entsprechen, das heisst die horizontalen Projectionen p' aller Punkte des Schnittes sind von O' gleich weit entfernt, oder mit anderen Worten, die horizontale Projection der Schnittcurve ist ein Kreis K'_1, welcher mit dem Grundkreise K' des Leitcylinders concentrisch ist.

Der Kegelschnitt $(k_1 k'_1)$ schneidet die Doppelerzeugende $(N_{12}N'_{12})$ in den Punkten $(s_1 s'_1)$ und $(s_2 s'_2)$, welche, da sie keiner der zwei vorgenannten Doppelgeraden angehören, die beiden Berührungspunkte der Ebene E_vE_h mit der Normalenfläche darstellen.

Denken wir uns durch $(N_{12}N'_{12})$ eine zweite Ebene $E'_vE'_h$ so gelegt, dass sie zu der ersteren Ebene E_vE_h in Bezug auf Z symmetrisch ist, so erhalten wir für deren Schnittpunkt (nn') mit der Erzeugenden $(N_bN'_b)$ die Relation:

$$n\delta : b\delta = n'O' : O'b'.$$

Da aber $p\delta = n\delta$, also auch $p'O' = n'O'$ ist, wird die Ebene $E'_vE'_h$ die Normalenfläche nach einen Kegelschnitt schneiden, dessen horizontale Projection abermals der Kreis k'_1 ist. Auch dieser Kegelschnitt trifft in gleicher Weise, wie jener in der Ebene E_vE_h liegende Kegelschnitt, die Doppelerzeugende $(N_{12}N'_{12})$ in den Punkten $(s_1 s'_1)$ $(s_2 s'_2)$.

Diesem Ergebnisse ist zu entnehmen, dass je zwei Ebenen des Büschels $(N_{12}N'_{12})$, welche symmetrisch gegen die Doppelgerade (ZZ') liegen, die Normalenfläche in zwei congruenten Ellipsen mit gemeinschaftlicher kleiner Axe $(s_1 s_2,\ s'_1 s'_2)$ schneiden, und dass beide Ebenen die windschiefe Normalenfläche in

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

den Endpunkten dieser kleinen Axe berühren. Die beiden Ellipsen haben als Horizontalprojection einen und denselben Kreis.

Diejenige Bitangentialebene des Büschels $(N_{12} N'_{12})$, welche gleichzeitig die Doppelgerade (ZZ') enthält, berührt die Normalenfläche in zwei Punkten, welche sich im Schnittpunkte (MM') von $(N_{12} N'_{12})$ und (ZZ') zu einem vereinigen; woraus weiter folgt, dass sich die beiden Mäntel der Normalenfläche in diesem Punkte berühren.

Bezeichneter Schnittpunkt ist somit ein eigentlicher Doppelpunkt der Doppellinie. Dass die Strictionslinie der Normalenfläche die Leitgerade (ZZ') sei, bedarf diesfalls keines besonderen Beweises und zwar um so weniger, als diese Eigenschaft überhaupt allen Conoiden zukömmt.

Unter der Voraussetzung also, dass man als Leitfläche für die Normalenfläche einen Rotationscylinder und als Leitlinie einen schiefen, ebenen Schnitt desselben annimmt, ergibt sich auf Grund der hier angestellten Untersuchungen der Satz:

„Die Normalenfläche ist ein gerades Kegelschnittsconoid, dessen Richtebene die zu den Cylindererzeugenden senkrechte Ebene, und dessen Leitgerade die durch den Mittelpunkt des Leitkegelschnittes gehende Cylinderaxe ist.“

„Bezeichnete Leitgerade, sowie die unendlich ferne Leitlinie (unendlich ferne Gerade der Richtebene) sind Doppelgeraden der Normalenfläche. Ferner besitzt die Normalenfläche eine Doppelerzeugende, welche durch die kleine Axe des Leitkegelschnittes repräsentirt wird.“

„Alle zur Richtebene parallelen Ebenen sind Bitangentialebenen der Normalenfläche, da eine jede von ihnen zwei Erzeugende enthält, welche sich in einem Punkte der Doppelgeraden treffen. Jede dieser Ebenen berührt die Normalenfläche in den unendlich fernen Punkten der genannten Erzeugenden und ist somit gleichzeitig eine asymtotische Ebene der Normalenfläche.“

„Die Ebenen jenes Büschels, welches die Doppelgerade zur Axe hat, sind gleichfalls Bitangentialebenen der Normalenfläche, da jede derselben zwei (untereinander parallelle) Erzeugenden der letzteren enthält.“

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

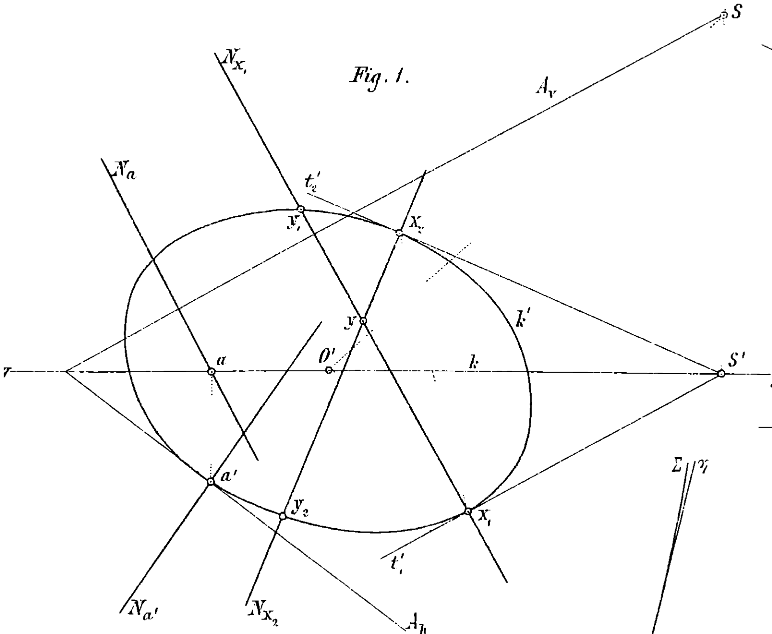


Fig. 1.

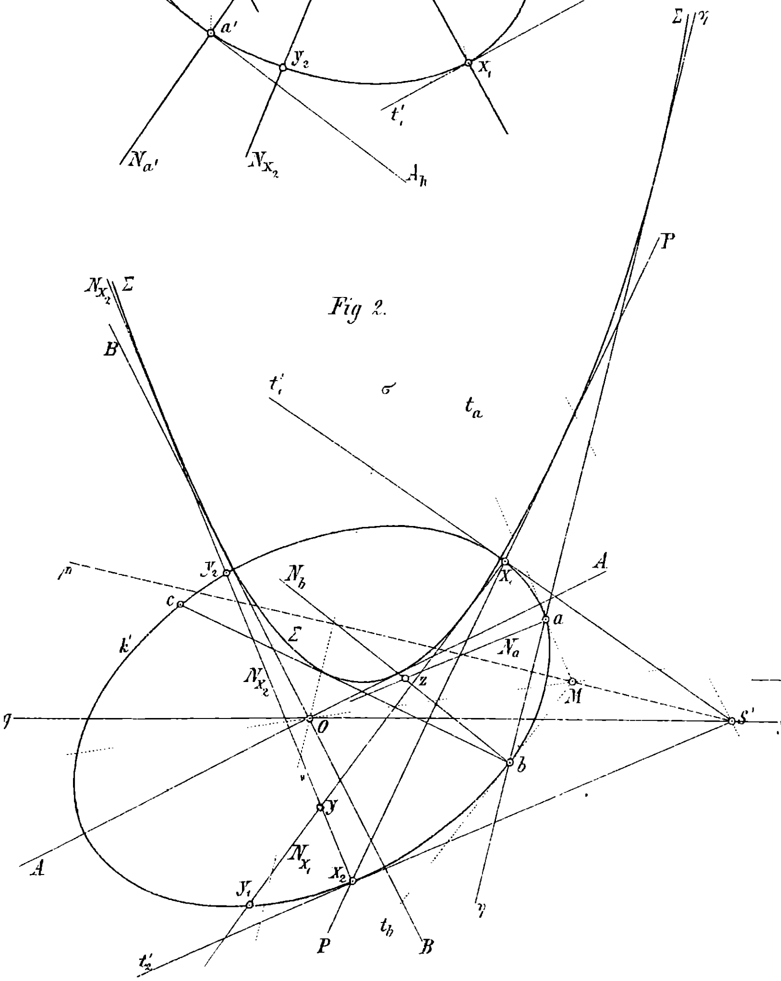


Fig 2.

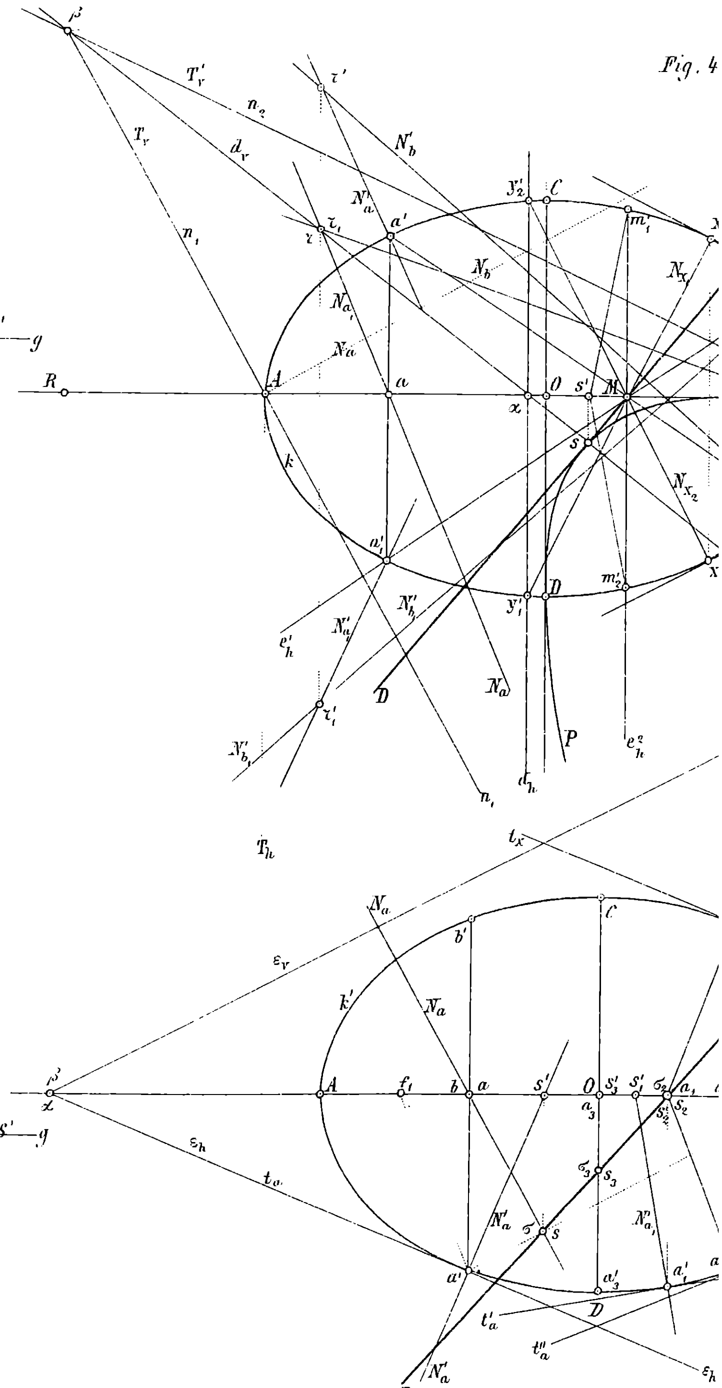
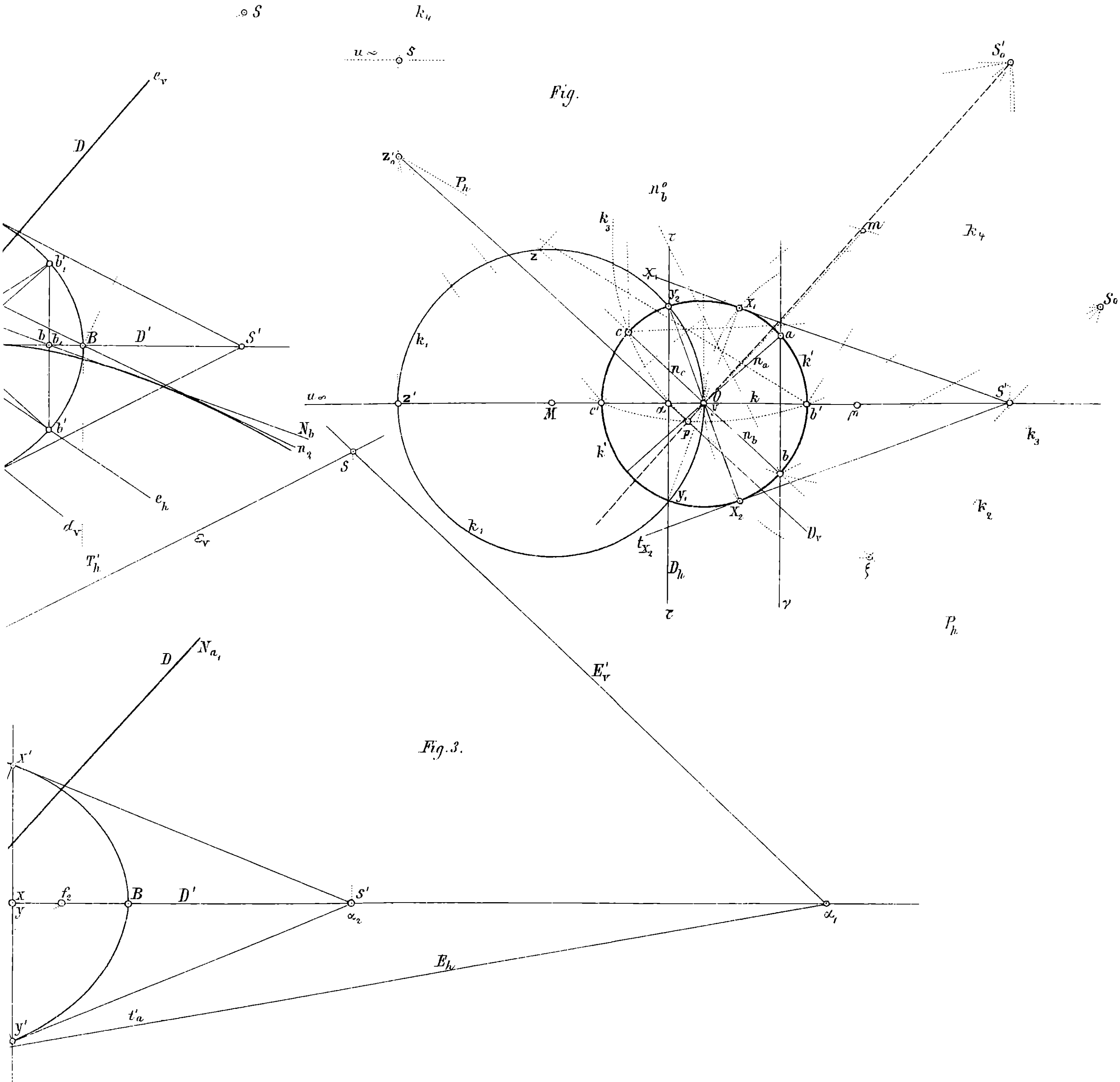


Fig. 4

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at



Druck v. J. Wagner Wien.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

„Endlich sind auch jene Ebenen, welche durch die Doppelerzeugende gehen, Bitangentialebenen, indem jede derselben die beiden Mäntel der Fläche berührt."

„Je zwei Ebenen dieses Büschels, welche gegen die Doppelgerade symmetrisch liegen, schneiden die Normalenfläche nach zwei congruenten Ellipsen mit gemeinschaftlicher kleiner Axe, deren Projectionen auf die Richtebene durch einen und denselben Kreis dargestellt erscheinen. Bezeichnete Ebenen berühren die Normalenfläche in den Endpunkten der gemeinschaftlichen kleinen Axe dieser Ellipsen."

„Die Strictionslinie der Normalenfläche ist die (Cylinderaxe) Doppelgerade."

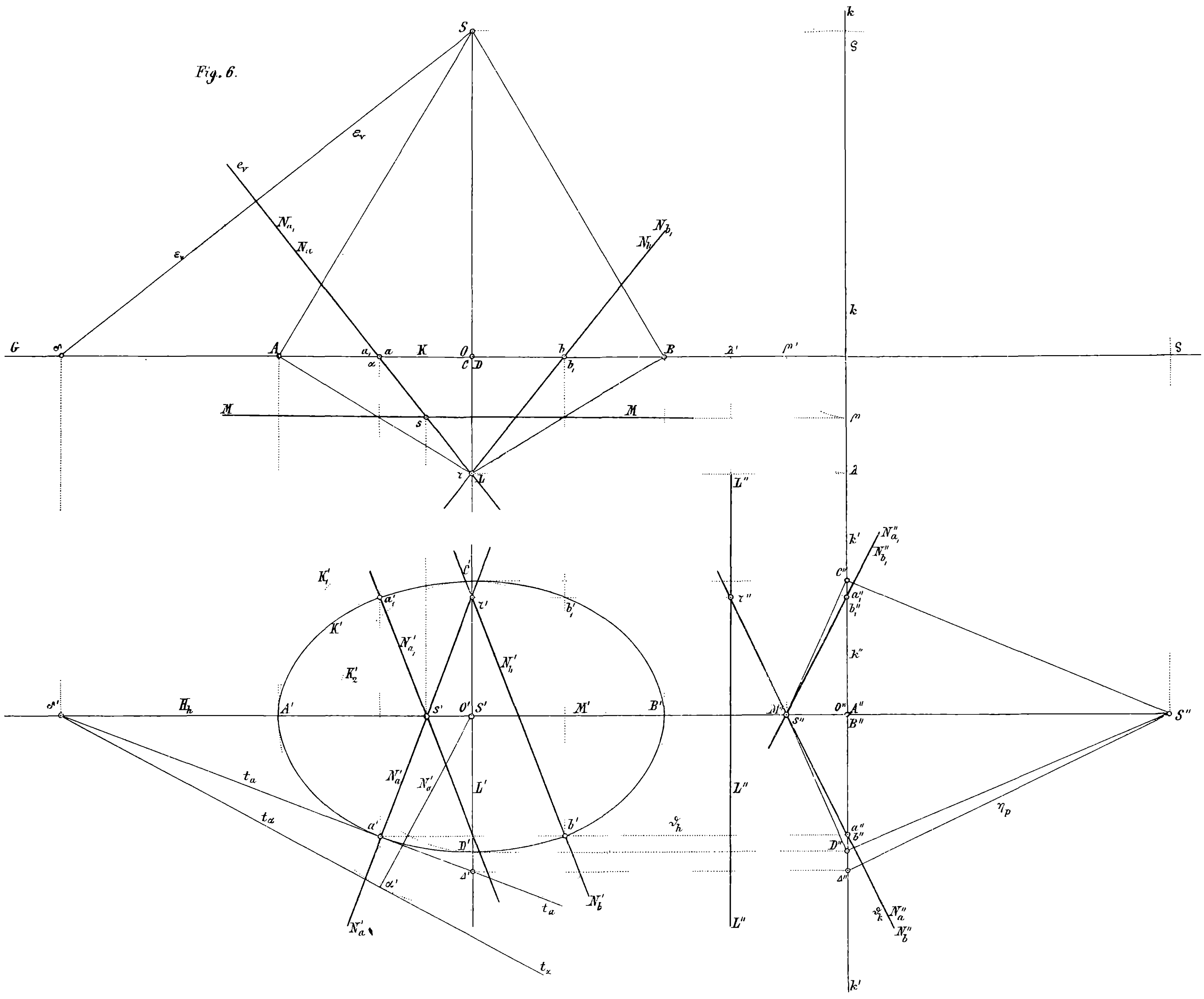
Weitere Betrachtungen und Untersuchungen über Normalenflächen wollen wir einer folgenden Abhandlung vorbehalten.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

© Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Fig. 6.



©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Fig. 7.

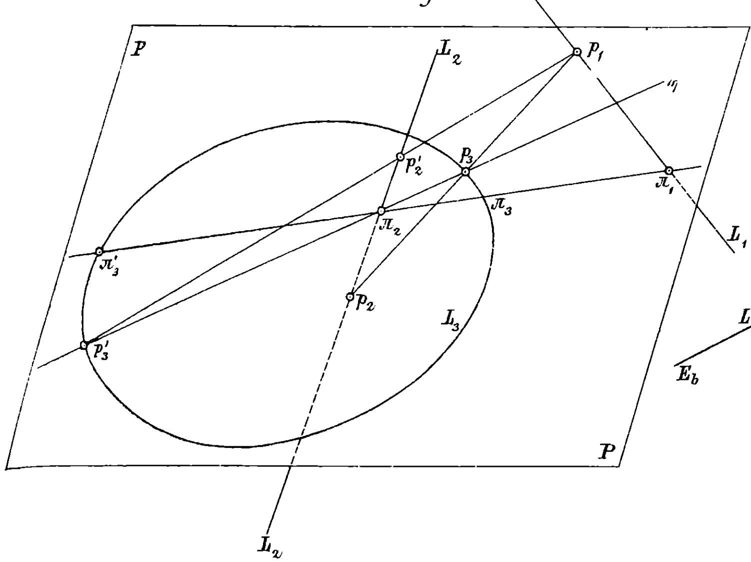


Fig. 8.

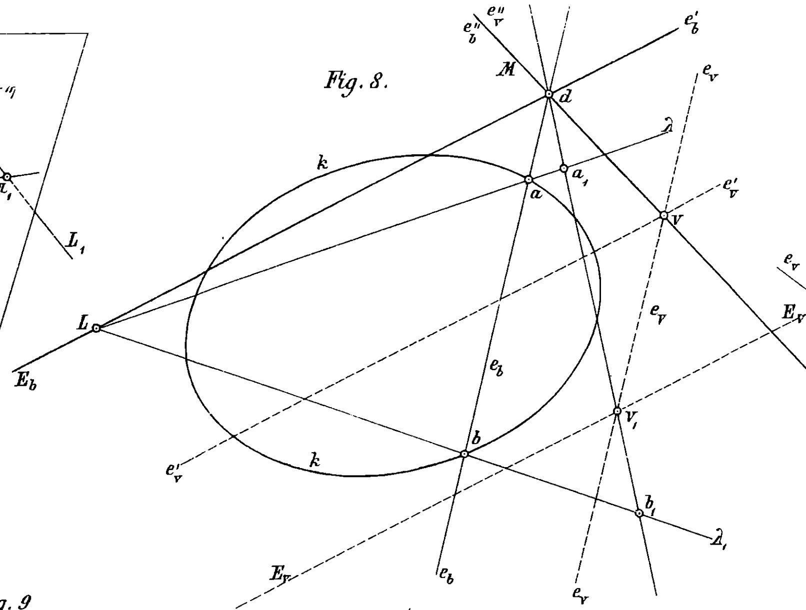


Fig. 10.

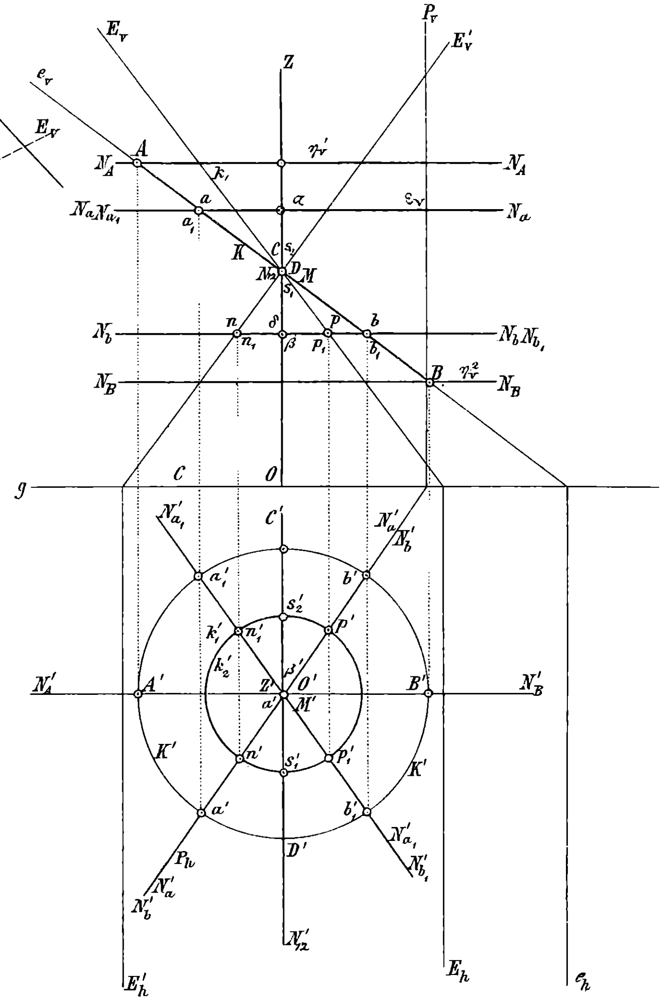
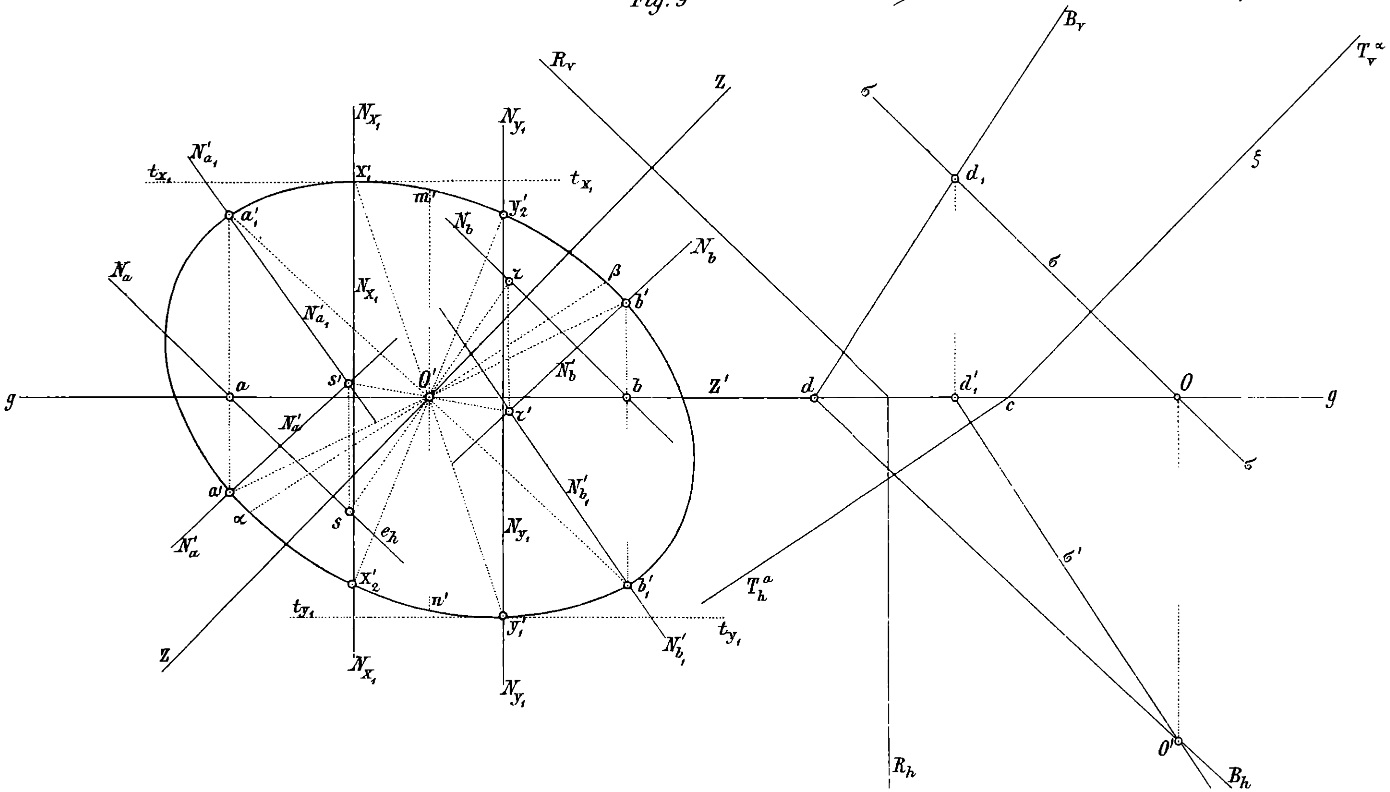


Fig. 9



ück v. J. Wagner Wien

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1880

Band/Volume: 81_2

Autor(en)/Author(s): Peschka Gustav Ad. V.

Artikel/Article: Normalenflächen längs ebener Flächenschnitte. 1163-1214