Notiz über harmonische Mittelpunkte eines Quadrupels.

Von **Emil Weyr.**

Am Schlusse der Abhandlung: „Über Polargruppen" hatten wir Gelegenheit zu erwähnen, dass eine ebene rationale Curve dritter Ordnung in directer Weise die Beziehung zwischen den harmonischen Mittelpunkten ersten und zweiten Grades für ein Fundamentaltripel veranschaulicht.

Sind nämlich $a_1 a_2 a_3$ die drei Inflexionspunkte der Curve, $x_1 x_2$ zwei conjugirte Punkte und y ihr gemeinschaftlicher Tangentialpunkt, so sind $x_1 x_2$ die harmonischen Mittelpunkte zweiten Grades von y in Bezug auf das Punktetripel $a_1 a_2 a_3$ und y ist der harmonische Mittelpunkt ersten Grades von x_1 und x_2 bezüglich desselben Fundamentaltripels $a_1 a_2 a_3$.

Es ist nicht ohne Interesse zu sehen, dass die harmonischen Mittelpunkte eines Punktquadrupels durch eine rationale Raumcurve vierter Ordnung in directer Weise geliefert werden.

„Es seien $a_1 a_2 a_3 a_4$ die Berührungspunkte einer solchen Curve mit den vier stationären Schmiegungsebenen; durch einen beliebigen Punkt y der Curve lassen sich drei Schmiegungsebenen legen, deren Berührungspunkte $x_1 x_2 x_3$ die harmonischen Mittelpunkte dritten Grades von y bezüglich des Punktquadrupels $a_1 a_2 a_3 a_4$ darstellen".

„Der Punkt y, in welchem die Curve von der Schmiegungsebene des Punktes x_1 geschnitten wird, ist der harmonische Mittelpunkt ersten Grades in Bezug auf $a_1 a_2 a_3 a_4$."

„Durch die Tangente eines Punktes y lassen sich zwei Ebenen legen, welche die Curve noch an einer Stelle berühren welche Doppeltangentialebenen der Curve sind); die Berührungspunkte $y' y''$ dieser beiden Ebenen sind die harmonischen Mittelpunkte zweiten Grades von y bezüglich $a_1 a_2 a_3 a_4$."

„Die Tripel $x_1 x_2 x_3$ bilden eine cubische Involution, deren Doppelpunkte bekanntlich die Berührungspunkte der Curve mit den vier sie schneidenden Tangenten sind; diese Involution ist projectivisch mit der einfachen Reihe y und $a_1 a_2 a_3 a_4$ sind die der Involution und der Reihe gemeinsamen vier Punkte."

„Die Punktepaare yy' bilden ein symmetrisches Elementensystem zweiten Grades."

„Die Involution dritten Grades, welche von den Trisecanten auf der Curve bestimmt wird, hat mit der Involution der harmonischen Mittelpunkte dritten Grades dieselben Doppelelemente; beide Involutionen sind somit beigeordnete Involutionen".

Da der Punkt y immer in der Ebene $x_1 x_2 x_3$ liegt, so bilden $y x_1 x_2 x_3$ ein ebenes Quadrupel der Curve; alle ebenen Quadrupel bilden jedoch eine biquadratische Involution dritter Stufe, für welche $a_1 a_2 a_3 a_4$ die vierfachen Elemente sind. Wir haben daher auch den Satz:

„Construirt man zu einem Punkte bezüglich einer Punktquadrupel $a_1 a_2 a_3 a_4$ die drei harmonischen Mittelpunkte dritten Grades, so bilden sie mit jenem Punkte ein Quadrupel der biquadratischen Punktinvolution dritter Stufe, welche durch die vier Punkte $a_1 a_2 a_3 a_4$, wenn man jeden als vierfaches Element auffasst, bestimmt erscheint."

Die Abbildung der Curve auf einen Kegelschnitt liefert die nothwendigen Mittel zur constructiven Behandlung der harmonischen Mittelpunkte eines Punktquadrupels. Wenn man die bezüglichen Resultate[1]) im Auge behält, so zeigt sich auch, „dass die biquadratische Involution, welche Herr Professor Le Paige am Schlusse seiner Abhandlung: „Bemerkungen über cubische Involutionen"[2] erwähnt, eigentlich in drei quadratische Involutionen zerfällt. Die Covariante T (siehe l. c.) liefert die drei Punktepaare der Raumcurve, deren Verbindungslinien durch einen und denselben Punkt hindurchgehen und zugleich die Schnittlinien der Schmiegungsebenen der betreffenden Punkte sind."

---

[1] „Über die Abbildung einer rationalen Raumcurve vierter Ordnung auf einen Kegelschnitt." Sitzg. vom 9. December 1875.

„Weitere Bemerkungen über die Abbildung u. s. Sitzg. vom 17. Februar 1876.

[2] Sitzgber. vom 22. April 1880.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1880

Band/Volume: 81_2

Autor(en)/Author(s): Weyr Emil

Artikel/Article: Notiz über harmonische Mittelpunkte eines Quadrupels. 1218-1219