Über eine neue Methode zur Integration der linearen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit zwei unabhängigen Veränderlichen.

Von dem w. M. **A. Winckler.**

Obgleich die von Monge zur Integration der hier in Rede stehenden Differentialgleichung

$$R\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+S\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}+T\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+U=0 \qquad \ldots(1)$$

erdachte Methode schon vor ihrer 1787 erfolgten Veröffentlichung[1] und seither oft wiederholt als in vielen Fällen erfolglos erkannt wurde, so ist sie doch, meines Wissens, bis jetzt durch keine andere ersetzt worden, welche in jenen Fällen mehr geleistet und in zahlreichen anderen Fällen wenigstens mit derselben Leichtigkeit zum Ziel geführt hätte, wie die Monge'sche Methode.

Alle Versuche, diese Methode durch Umformungen,[2] Unterscheidung gewisser Fälle u. dgl. zu verbessern, blieben bekanntlich ohne praktischen Erfolg, weil durch sie an der häufig nicht zutreffenden Hypothese Monge's, der Gleichung (1) könne durch partielle Differentialgleichungen erster Ordnung, wovon jede eine willkürliche Function enthält, Genüge geschehen, nichts geändert wurde.

Hievon wesentlich verschieden, ist die Classification der Integrale, welche Ampère in seiner grossen Abhandlung[3] zum

---

[1] Mémoire sur le calcul intégral des équations aux différences partielles. (Histoire de l'Académie royale des sciences. Année 1784.) p, 126.

[2] Siehe z. B. Boole: Treatise on differential equations Supplementary Volume. p. 119—174.

[3] Considérations générales sur les intégrales des équations aux différentielles partielles. Journal de l'école polytechnique. T. X et XI.

Ausgangspunkt für die Lösung eines die Gleichung (1) an Allgemeinheit weit übertreffenden Problems genommen hat. Aber abgesehen davon, dass die Theorie Ampère's, wie aus dem zweiten, einer beträchtlichen Anzahl von Beispielen gewidmeten Theil jener Abhandlung hervorgeht, bis jetzt in den meisten Fällen nur zu einer Reduction gegebener Differentialgleichungen auf andere, einfachere geführt hat, die entweder gar nicht oder nur durch besondere Methoden (z. B. durch bestimmte Integrale) integrirt werden können, tritt der bekannte und wohl zu beachtende Umstand ein, dass diese Theorie, auf die Gleichung (1) angewendet, wieder mit jener Monge's zusammenfällt, wie dies namentlich die Herren Graindorge[1] und Imschenetsky[2] näher gezeigt haben.

Die nach Euler benannte Methode hat, so wichtig auch ihre speciellen, sehr zahlreichen Ergebnisse sind, nicht sowohl die Integration der Gleichung (1) im Allgemeinen, als die Zurückführung der letztern auf eine andere, in welcher von den drei partiellen Differentialquotienten von z nur noch der mittlere erscheint, und weiterhin die besonderen Fälle zum Gegenstand, in welchen das Integral der reducirten Gleichung gefunden werden kann.

Hiermit sind, wenn ich nicht irre, alle Methoden allgemeinern Charakters, welche sich auf die im Nachstehenden ausschliesslich in Betracht kommende Gleichung (1) beziehen, in Kürze bezeichnet.

Es unterliegt wohl keinem Zweifel, dass unter denselben die Theorie von Monge, auf welche ich jetzt zurückkomme, die vollste Aufmerksamkeit verdient.

So richtig nun auch die allenthalben hervorgehobene Thatsache ist, dass jene Theorie auf einer, rücksichtlich der ersten Integrale in zahlreichen Fällen nicht stattfindenden Hypothese beruhe, so habe ich doch nirgends eine Andeutung darüber finden können, welche Bewandtniss es in diesen Fällen mit der zu integrirenden Gleichung habe, insbesondere, was an die

---

[1] Mémoire sur l'intégration des équations aux dérivées partielles des deux premiers ordres. Bruxelles. 1872. p. 173.

[2] Etude sur les méthodes d'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre... Paris. p. 125.

Stelle jener ersten Integrale trete und an welchen anderen Gleichungen, wenn nicht an den Monge'schen, die doch immerhin unerlässlichen Integrationen auszuführen seien, durch welche allein die zur Bildung des gesuchten allgemeinen Integrals erforderlichen willkürlichen Functionen in die Rechnung kommen können.

Diese sehr nahe liegenden Fragen scheinen hauptsächlich in Folge des vorwaltenden Bestrebens, die Gleichung (1), von der zweiten Ordnung, auf eine gewöhnliche Gleichung erster Ordnung und damit das Problem in üblicher Weise auf ein einfacheres zurückzuführen, bisher unerörtert geblieben zu sein.

Aber ein vielberufenes, schon Monge in der französischen Akademie entgegengehaltenes Beispiel, nämlich die von Euler mittelst Reihenentwicklung integrirte Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2}{x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \qquad \ldots(2)$$

reicht hin, um der Antwort auf jene Fragen sehr leicht um Vieles näher zu kommen, zumal in fast allen Lehrbüchern (Siehe z. B. Lacroix, II. art. 790) nicht nur das Integral

$$z = \varphi(y+x) + \psi(y-x) - x[\varphi'(y+x) - \psi'(y-x)]$$

angeführt, sondern, daraus abgeleitet, auch die Gleichungen:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -x[\varphi''(y+x) + \psi''(y-x)]$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -x[\varphi''(y+x) - \psi''(y-x)] + \varphi'(y+x) + \psi'(y-x)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\;[\varphi''(y+x) + \psi''(y-x)] - x[\varphi'''(y+x) - \psi'''(y-x)]$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -x[\varphi'''(y+x) + \psi'''(y-x)]$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -x[\varphi'''(y+x) - \psi'''(y-x)] + \varphi''(y+x) + \psi''(y-x)$$

und noch mehrere andere (ohne zu dem Euler'schen Integral zu gelangen) entwickelt werden. Es blieb aber unbemerkt, dass aus den soeben angeführten Gleichungen auch die beiden folgenden:

$$\frac{1}{x}\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right]=-\varphi'''(y+x)$$

$$\frac{1}{x}\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right]=+\psi'''(y-x)$$

abgeleitet werden können, welche, da in jeder nur eine willkürliche Function erscheint, aus anderen durch je eine und zwar eine erste Integration hervorgehen müssen, und daher als erste Integrale der gegebenen Gleichung zu betrachten sind.

Diese Integrale sind wieder partielle Differentialgleichungen, aber nicht, wie Monge sie suchte, von der ersten, sondern von der zweiten Ordnung. Es tritt also schon bei der so einfachen Gleichung (2) die merkwürdige Anomalie ein, dass die Ordnung derselben nach Ausführung der beiden ersten Integrationen nicht erniedrigt ist, und an einer grösseren Anzahl ebenso einfacher Gleichungen von der Form (1) wird sich später zeigen, dass die ersten Integrale nicht bloss von der zweiten, sondern von viel höherer Ordnung sind und dass darin der Grund liegt, aus welchem die Methode von Monge, die ihrer Anlage nach nur Integrale erster Ordnung gibt, in vielen Fällen nicht zum Ziel führen kann. Da indessen die ersten Integrale nicht immer von gleicher Ordnung sind, so liegt der Schluss nahe, dass eine Methode, welche erste Integrale bloss von der zweiten, oder bloss von der dritten etc. Ordnung zu liefern vermag, ebensowenig wie jene von Monge in allen Fällen zum Ziele führen kann und dass die letztere nur als der Anfang oder das erste und einfachste Glied einer unbegrenzten Reihe methodischer Vorgänge zu betrachten ist, wovon jeder, je nach Beschaffenheit der Coëfficienten $R, S, T, U,$ als der entsprechende zur Anwendung kommen kann.

Von einer allgemeinen, auf der Voraussetzung des Bestehens erster Integrale beruhenden Methode zur Integration der Gleichung (1) kann also nur dann die Rede sein, wenn bei ihr die Ordnung dieser Integrale keine bestimmte, sondern eine beliebige ganze Zahl n ist.

Dies vorausgeschickt, werde ich, in der vorliegenden Arbeit immer auf Grund der soeben bezeichneten Voraussetzung, zunächst die Relationen, welche zur Bestimmung der ersten Integrale dienen, mit der Ordnung $n=1$ (Monge'sche Methode) beginnend, nach einander für $n=2$, 3 und 4 entwickeln, was der unmittelbar sich anschliessenden Anwendungen wegen und weil die Aufstellung der einer beliebigen Ordnungszahl n entsprechenden Gleichungen dann ohne weitere Rechnung geschehen kann, als zweckmässig erscheint.

Als Beispiele zur Anwendung jener Relationen habe ich (mit einigen Ausnahmen) nur Differentialgleichungen, welche in den Art. 322 bis 378 der Instit. calc. integr. Vol. III von Euler vorkommen, aus dem, wie ich glaube, sehr triftigen Grund gewählt, weil gerade an diesen sehr zahlreichen, von Euler auf besonderen Wegen integrirten Gleichungen, bis jetzt jede allgemeine Methode erfolglos geblieben ist. Alle diese „Beispiele", mit welchen Euler der Entwicklung der Theorie weit vorausgeeilt ist, können mittelst der weiter unten folgenden allgemeinen Formeln vollständig zu Ende geführt werden.

Der Umstand, dass diese Formeln oft viel weitläufigere Rechnungen als die von Euler angewandten, dem betreffenden Fall angepassten Hilfsmittel erfordern, konnte, da es sich hier vor Allem um die Methode handelt, kein Grund sein, die zu längeren Rechnungen führenden Fälle zu unterdrücken.

Literarische Angaben werde ich jedesmal denjenigen Stellen des Textes beifügen, an welchen von bereits bekannten Resultaten die Rede ist.

1.

Monge stellt seine Methode in der ursprünglichen, mit geometrischen Gesichtspunkten scheinbar nicht zusammenhängenden Fassung wie folgt dar:

„Es sei die allgemeine lineare Gleichung[1]

$$Rz^{(2)}+Sz_1'+Tz_2+U=0 \qquad \ldots(1)$$

gegeben, in welcher R, S, T, U in irgend einer Weise durch $x, y,$

---

[1] Im Nachstehenden wird, wenn es sich um partielle Differentialquotienten handelt, durchgehend die Lagrange'sche Bezeichnung:

$$z_s^{(r)}=\frac{\partial^{r+s}z}{\partial x^r \partial y^s}$$

angewendet.

z, z', z_1 ausgedrückt sind. Diese Gleichung stellt eine einfache Relation zwischen den drei Grössen $z^{(2)}, z'_1, z_2$ dar und kann zur Bestimmung jeder einzelnen derselben durch x, y, z, z', z_1 nicht genügen. Wenn man daher mit Hilfe der beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} dz' &= z^{(2)} dx + z'_1 dy \\ dz_1 &= z'_1\, dx + z_2 dy \end{aligned} \qquad \ldots(2)$$

welche nichts Neues besagen, zwei dieser drei Grössen eliminirt, so sollen die drei sich ergebenden Gleichungen

$$\begin{aligned} (Sdy - Tdx)\, dz' + Tdydz_1 + Udy^2 &= -z^{(2)} [Rdy^2 - Sdydx + Tdx^2], \\ Rdydz' + Tdxdz_1 + Udydx &= +z'_1\, [Rdy^2 - Sdydx + Tdx^2], \\ (Sdx - Rdy) dz_1 + Rdxdz' + Udx^2 &= -z_2\, [Rdy^2 - Sdydx + Tdx^2] \end{aligned}$$

die Werthe von $z^{(2)}, z'_1, z_2$ nicht bestimmen, und weil diese stattfinden, so ist erforderlich, dass dies unabhängig von diesen Werthen geschehe; d. h. dass jedes Glied dieser Gleichungen für sich Null sei, oder dass man gleichzeitig habe:

$$Rdy^2 - Sdydx + Tdx^2 = 0, \qquad \ldots(3)$$

$$\begin{aligned} Rdydz' + Tdxdz_1 + Udydx &= 0, \\ (Sdy - Tdx)\, dz' + Tdydz_1 + Udy^2 &= 0, \\ (Sdx - Rdy)\, dz_1 + Rdxdz' + Udx^2 &= 0 \end{aligned} \qquad \ldots(4)$$

Von diesen vier Gleichungen sind nur zwei nothwendig, denn aus irgend zwei derselben folgen die beiden anderen.

Die gegebene Gleichung aufstellen, heisst also aussprechen, dass irgend zwei dieser Gleichungen gleichzeitig stattfinden, unabhängig von dem Werth von $\frac{dy}{dx}$, welcher ihnen gemeinschaftlich ist und welchen man in die gegebene einführt, um daraus diese beiden Gleichungen zu erhalten."

Weiterhin zeigt nun Monge, ohne Rechnung, wie man die beiden ersten Integrale von (1) finden könne. Allgemein ausgedrückt, besteht das Verfahren, wie bekannt, darin, dass man in einer der Gleichungen (4), z. B. in der ersten

$$Rdydz' + Tdxdz_1 + Udydx = 0 \qquad \ldots(5)$$

sowie in der Gleichung

$$dz - [z'dx + z_1 dy] = 0 \qquad \ldots(6)$$

für dy einen der beiden aus (3) folgenden Werthe, nämlich $dy = kdx$ setzt, wodurch die erste Gleichung rücksichtlich der Differentiale linear gemacht werden kann, dass man dann noch die Gleichung

$$dy - kdx = 0 \qquad \ldots(7)$$

hinzunehme und aus diesen drei Gleichungen, oder auch nur aus je einer oder zwei derselben, zwei andere bilde, die sich integriren lassen. Angenommen die Integrale seien $p = \alpha$, $P = a$, wobei α, a willkürliche Constanten bezeichnen, so ist:

$$P = \varphi(p)$$

ein erstes Integral der Gleichung (1), unter φ die Charakteristik einer willkürlichen Function verstanden.

Auf gleiche Art erhält man mittelst der zweiten Auflösung $dy = ldx$ der Gleichung (3) ein zweites erstes Integral, wenn es existirt, nämlich die Gleichung:

$$Q = \psi(q)$$

mit einer willkürlichen Function ψ.

Die Art, wie dieser Satz durch Rechnung verificirt werden kann, ist aus den Lehrbüchern, z. B. dem Traité von Lacroix bekannt.

In manchen Fällen, wenn R, S, T, U bloss von x, y, z abhängen, kann es zur Ermittelung der ersten Integrale hinreichen, wenn man die Gleichungen (5), (6), (7) mit noch unbestimmten Multiplicatoren versieht, dann zusammenaddirt und die Multiplicatoren so bestimmt, dass die aus der Addition hervorgegangene Gleichung integrabel wird.

Mittelst der beiden ersten Integrale, durch welche z' und z_1 als Functionen von x, y, z bestimmt sind, und der Gleichung $dz = z'dx + z_1 dy$ lässt sich das gesuchte allgemeine Integral finden. Dies kann übrigens, wie bekannte Beispiele lehren, nicht selten auch aus bloss einem ersten Integral abgeleitet werden.

In den wohl zu berücksichtigenden besonderen Fällen, wenn R oder T, oder R und $T=0$, sind statt der ersten die zweite oder dritte der Gleichungen (4) anzuwenden.[1]

Ist $R=0$, also $Sz'_1+Tz_2+U=0$ die vorgelegte Gleichung, so ergeben sich aus (3), (4) und (8) die beiden folgenden, getrennt zu betrachtenden Systeme von Gleichungen:

1. $dx=0, \qquad Sdz'+Tdz_1+Udy=0, \qquad dz-z_1dy=0,$
2. $Sdy-Tdx=0, \qquad Tdz_1+Udy=0, \qquad dz-(z'dx+z_1dy)=0.$

Ist $T=0$, also $Rz^{(2)}+Sz'_1+U=0$ die gegebene Gleichung, so findet man ebenso die entsprechenden Systeme:

1. $dy=0, \qquad Sdz_1+Rdz'+Udx=0, \qquad dz-z'dx=0,$
2. $Sdx-Rdy=0, \qquad Rdz'+Udx=0, \qquad dz-(z'dx+z_1dy)=0.$

Ist $R=0$ und $T=0$, also $Sz'_1+U=0$ die gegebene Gleichung, so folgt:

1. $dx=0, \qquad Sdz'+Udy=0, \qquad dz-z_1dy=0$
2. $dy=0, \qquad Sdz_1+Udx=0, \qquad dz-z'dx=0.$

Jedes dieser Systeme tritt im betreffenden Fall an die Stelle der Gleichungen (5) und (6), welche dem früher betrachteten allgemeinen Fall entsprechen.

2.

Den bekanntlich sehr zahlreichen, mehr oder weniger speciellen Fällen, in welchen die beschriebene Methode zum Ziel führt, mögen die folgenden sich anschliessen.

Es sei die Gleichung gegeben:

$$ {}^{2)}+2mz'_1+(m^2-n^2)z_2+pz'+qz_1=0 \qquad \ldots(1)$$

worin m, n, p, q blosse Functionen von x und y bezeichnen.

Da die Integration derselben in dieser Allgemeinheit nicht geschehen kann, so entsteht die Frage nach der nöthigen Einschränkung.

Hier ist:

$$R=1, \quad S=2m, \quad T=m^2-n^2, \quad U=pz'+qz_1$$

[1] Der Fall $R=0$ und $T=0$ wurde zuerst von Lacroix (II. art. 766) betrachtet. Die Gleichungen, welche den Fällen $R=0$ oder $T=0$ entsprechen, hat Graindorge in der obenerwähnten Abhandlung angegeben.

Aus den Gleichungen (3) und (4) des vorigen Artikels folgt daher:

$$dy^2 - 2m\,dy\,dx + (m^2 - n^2)\,dx^2 = 0,$$

$$dy\,dz' + (m^2 - n^2)\,dx\,dz_1 + (pz' + qz_1)\,dy\,dx = 0$$

und hieraus:

$$dy = (m \pm n)\,dx \qquad \ldots(2)$$

$$dz' + (m \mp n)\,dz_1 + (pz' + qz_1)\,dx = 0. \qquad \ldots(3)$$

Legt man der weitern Betrachtung das untere Zeichen zu Grund, setzt also

$$dy = (m - n)\,dx$$

so ist zunächst zu ermitteln, unter welcher Bedingung die Gleichnng

$$dz' + (m + n)\,dz_1 + (pz' + qz_1)\,dx = 0$$

integrabel sei. Nun sieht man aber leicht, dass diese in der Form

$$d[z' + (m+n)z_1] + p[z' + (m+n)z_1]\,dx$$
$$+ [q - (m+n)p]z_1\,dx - \left[\frac{\partial(m+n)}{\partial x}\,dx + \frac{\partial(m+n)}{\partial y}\,dy\right].z_1 = 0$$

geschrieben werden kann und dass, wenn man die Summe der letzteren, insgesammt den Factor z_1 enthaltenden Glieder gleich Null setzt, die beiden Gleichungen:

$$d[z' + (m+n)z_1] + p[z' + (m+n)z_1]\,dx = 0 \qquad \ldots(4)$$

$$q = (m+n)p + \frac{\partial(m+n)}{\partial x} + (m-n)\frac{\partial(m+n)}{\partial y} \qquad \ldots(5)$$

entstehen, wovon die letztere die gesuchte Bedingung für (1) ist. Dies vorausgesetzt, sei

$$\pi(x, y) = \alpha$$

das Integral der Differentialgleichung $dy = (m-n)dx$, wobei α eine willkürliche Constante bezeichnet. Mittelst desselben kann man p, welches als eine Function von x, y gedacht wird, durch x und α allein ausdrücken, wodurch die Gleichung (4), auf die Form:

$$\frac{d[z' + (m+n)z_1]}{z' + (m+n)z_1} = -p\,dx$$

gebracht, integrabel, und die Gleichung:

$$z' + (m+n) z_1 = \beta e^{-\int p\,dx}$$

als das Integral mit der willkürlichen Constante β erhalten wird. Hieraus nun lässt sich ein erstes Integral der gegebenen Gleichung ableiten. Setzt man nämlich:

$$e^{-\int p\,dx} = f(x, \alpha)$$

und der Monge'schen Methode gemäss: $\beta = \varphi(\alpha)$, wo φ eine willkürliche Function bezeichnet, so besteht jenes erste Integral in der partiellen Differentialgleichung:

$$z' + (m+n) z_1 = \varphi(\pi) f(x, \pi).$$

Um hieraus z zu finden, ist noch das Integral der Gleichung $dy = (m+n) dx$ erforderlich; angenommen dasselbe sei $\rho(x,y) = \gamma$ und man könne hieraus y folglich auch π als Function von x und γ darstellen, so folgt auf bekannte Art:

$$z = \int \varphi(\pi) f(x, \pi)\, dx + \psi(\gamma)$$

worin ψ eine willkürliche Function bezeichnet und nach vollzogener Integration γ durch $\rho(x, y)$ zu ersetzen ist. Hiermit ist das allgemeine Integral der Gleichung (1) unter der Voraussetzung gefunden, dass m, n, p, q der Bedingung (5) genügen.

Wie man sieht, bedarf es zur Herstellung desselben nur der Integration der Gleichung (2) für die beiden Zeichen von n.

Das hier erhaltene Resultat fällt mit demjenigen, welches Euler (Instit. calc. integr. III. art. 312) mittelst seiner Methode der Transformation durch zwei neue Veränderliche abgeleitet hat, zusammen, wenn man $m = 0$ setzt, also das z_1' enthaltende Glied in (1) weglässt.

Es bedarf keiner weitern Rechnung, um zu finden, dass, wenn man in den Gleichungen (2) und (3) das obere Zeichen von n zu Grunde legt, also

$$dy = (m+n)\, dx$$

setzt und die Gleichung

$$dz' + (m-n)\, dz_1 + (pz' + qz_1)\, dx = 0$$

auf gleiche Art wie oben betrachtet, die Bedingungsgleichung

$$q=(m-n)p+\frac{\partial(m-n)}{\partial x}+(m+n)\frac{\partial(m-n)}{\partial y} \qquad \ldots(6)$$

und dieser entsprechend, wieder ein erstes Integral der Gleichung (1) erhalten wird. Man hat nun allerdings zwei erste Integrale, welche aber, da die durch (5) und (6) bestimmten Werthe von q von einander verschieden sind, nicht ein und derselben Gleichung (1) angehören. Dieser Gleichung kann, von ganz speciellen Fällen abgesehen, überhaupt nicht durch zwei erste Integrale, wovon jedes wieder eine andere partielle Differentialgleichung erster Ordnung darstellt, genügt werden. Selbst der besondere Fall $n=0$ macht hiervon keine Ausnahme, denn für $n=0$ fallen nicht nur die Gleichungen (5) und (6), sondern auch die erwähnten ersten Integrale mit einander zusammen.

Die Gleichung (1) gehört also unter die, bekanntlich nicht sehr seltenen Fälle, in welchen die Methode von Monge zwar noch zu dem allgemeinen Integral, aber nur zu einem ersten Integral führt. Da in dem oben für z erhaltenen Ausdruck eine der beiden willkürlichen Functionen unter dem Integralzeichen steht, so kann jene Methode, in besonderen Fällen, das allgemeine Integral auch in einer die auf einander folgenden Differentialquotienten einer willkürlichen Function enthaltenden Form darstellen, wie dies beispielsweise bei der Gleichung

$$^{(2)}+\frac{3}{2}z_1'+\frac{1}{2}z_2-\frac{2}{x}(z'+z_1)=0$$

der Fall ist. Hier ist nämlich

$$m=\frac{3}{4}, \quad n=\frac{1}{4}, \quad p=q=-\frac{2}{x}.$$

Die Bedingung (5) findet statt und aus (4) erhält man:

$$z'+z_1=\beta x^2.$$

Aus
$$dy=(m-n)dx=\frac{1}{2}dx$$

folgt
$$2y-x=\alpha.$$

Es ist daher:

$$z'+z_1=x^2\varphi'''(2y-x)$$

ein erstes Integral der gegebenen Gleichung, worin φ''' die willkürliche Function bezeichnet. Man findet hieraus weiter:

$$z=\int x^2\varphi'''(x+2\gamma)\,dx+\psi(\gamma), \qquad \gamma=y-x$$

oder:

$$z=x^2\varphi''(x+2\gamma)-2x\varphi'(x+2\gamma)+2\varphi(x+2\gamma)+\psi(\gamma)$$

und wenn nun $y-x$ für γ gesetzt wird, die Gleichung:

$$z=x^2\varphi''(2y-x)-2x\varphi'(2y-x)+2\varphi(2y-x)+\psi(y-x),$$

welche das gesuchte Integral ist.

3.

Die Anwendung der in Rede stehenden Methode unterliegt, wenn sie nur ein erstes Intergral zu geben vermag, und dieses in Bezug auf z nicht linear ist, der von Ampère hervorgehobenen Schwierigkeit, dass die zweite Integration, der in jenem Integral vorkommenden willkürlichen Function wegen, nicht mehr möglich ist. In manchen Fällen ist es aber gerade die Willkürlichkeit dieser Function, welche jene Integration wesentlich erleichtert. Ich will dies an einem sehr bekannten Beispiel zeigen. Es sei dies die Gleichung:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=z\,.\frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{oder also} \quad z_1'-zz'=0 \qquad \text{...(1)}$$

Sie wurde von Liouville[1] in einer andern Form betrachtet und integrirt, die sich aus (1) ergibt, wenn man:

$$z'=\pm\frac{\lambda}{2a^2} \quad \text{also} \quad \frac{z_1'}{z'}=\frac{\partial\log\lambda}{\partial y}=z$$

setzt, woraus

$$\frac{\partial^2\log\lambda}{\partial x\partial y}=z'$$

---

[1] Siehe: Monge, Application de l'Analyse à la Géometrie. 5e Edit. Paris, 1850, p. 597.

oder:

$$\frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial x \partial y} = \pm \frac{\lambda}{2a^2}$$

folgt, welches die gedachte Form ist.

Um nun die Gleichung (1) zu integriren, hat man, weil $R = 0$ und $T = 0$, sodann $S = 1$ ist, die am Schlusse des Art. 1 angeführten Gleichungen anzuwenden, welche hier:

1. $dx = 0, \qquad dz' - zz'\,dy = 0, \qquad dz - z_1\,dy = 0$

2. $dy = 0, \qquad dz_1 - zz'\,dx = 0, \qquad dz - z'\,dx = 0$

sind. Aus dem ersten System lässt sich keine integrable Gleichung ableiten; aus dem zweiten aber findet man:

$$dy = 0, \qquad dz_1 - zdz = 0$$

daher durch Integration:

$$y = \alpha, \qquad z_1 - \frac{1}{2} z^2 = a$$

Es ist somit

$$z_1 - \frac{1}{2} z^2 = \frac{1}{2} \theta(y) \qquad \text{...(2)}$$

ein erstes Integral von (1); ein zweites aber, worin bloss z', z_1 vorkämen, existirt nicht. Übrigens hätte man die Gleichung (2) auch unmittelbar aus der gegebenen (1), welche eine Integration nach x zulässt, finden können. Von der Gleichung (2), welche in der Form

$$2 \frac{\partial z}{\partial y} - z^2 = \theta(y)$$

geschrieben, als eine gewöhnliche Differentialgleichung erscheint und worin $\theta(y)$ eine unbestimmte Function bedeutet, wird in mehreren Schriften behauptet, sie könne wegen des Gliedes z^2 nicht integrirt werden, was aber keineswegs der Fall ist. Denn setzt man:

$$\theta(y) = 2Y' - Y^2$$

unter Y eine willkürliche Function von y verstanden, so folgt:

$$2 \frac{\partial z}{\partial y} - z^2 = 2Y' - Y^2$$

und dieser Gleichung leistet $z = Y$ als particuläres Integral Genüge.

Zur Bestimmung des allgemeinen Integrals:

$$z = Y+u$$

erhält man daher die Gleichung:

$$2\frac{\partial u}{\partial y}-2uY-u^2=0,$$

aus welcher sich

$$\frac{1}{u}=\frac{1}{2}e^{-\int Ydy}\left[X-\int e^{\int Ydy}dy\right]$$

ergibt, unter X eine willkürliche Function von x verstanden. Man hat also

$$z=Y+\frac{2e^{\int Ydy}}{X-\int e^{\int Ydy}dy}$$

womit das allgemeine Integral der Gleichung (1) gefunden ist.

Um dasselbe in die gebräuchliche Form zu bringen, sei

$$X=e^{-\varphi(x)}, \qquad \int e^{\int Ydy}dy=e^{\psi(y)}$$

also:

$$e^{\int Ydy}=e^{\psi(y)}.\psi'(y), \quad Y=\frac{\psi''(y)}{\psi'(y)}+\psi'(y)$$

Dann folgt:

$$z=\frac{\psi''(y)}{\psi'(y)}+\psi'(y)+2.\frac{e^{\varphi(x)+\psi(y)}.\psi'(y)}{1-e^{\varphi(x)+\psi(y)}}$$

worin nun $\varphi(x)$ und $\psi(y)$ zwei willkürliche Functionen bezeichnen.

Liouville bemerkt a. a. O., dass er das Detail der Betrachtungen, durch welche er zu diesem Integral gelangt sei, unterdrücke und sich auf den Nachweis beschränke, dass letzteres der gegebenen Gleichung in der That Genüge leistet, und dasselbe geschieht in allen mir bekannten Schriften, in welchen von der Gleichung (1) die Rede ist. Da aber die blosse Verification umständlicher ist, als die vorstehende directe Herleitung, so scheint es, dass Liouville nicht auf dem oben eingeschlagenen Wege zu seinem Resultat gelangt sei.

Übrigens ist leicht zu bemerken, dass dieser Weg auch noch in Fällen allgemeinerer Art zum Ziele führt. Als Beispiel kann die Gleichung

$$p\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=(mz+n)\frac{\partial z}{\partial x} \qquad \text{...(3)}$$

dienen, in welcher p, m, n gegebene Functionen bloss von y sein sollen und welche in die vorhin betrachtete übergeht, wenn $p=0$, $m=1$, $n=0$ gesetzt wird. Man kann diese Gleichung sofort nach x integriren und erhält

$$p\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2}mz^2+nz+\theta(y) \qquad \text{...(4)}$$

wobei $\theta(y)$ eine unbestimmte Function von y ist. Auch bei dieser Gleichung würde das gewöhnliche Verfahren der Integration resultatlos bleiben. Nimmt man aber an, es sei z_0 eine Function bloss von y, welche für z gesetzt, der Gleichung (4) genüge, so ergibt sich die Bedingung

$$\frac{\partial z_0}{\partial y}=\frac{1}{2}mz_0^2+nz_0+\theta(y) \qquad \text{...(5)}$$

woraus hervorgeht, dass, weil für $\theta(y)$ jede beliebige Function von y gesetzt werden kann, z_0 ganz unbestimmt bleibt, und umgekehrt auch $\theta(y)$.

Es sei nun

$$z=z_0+u$$

das allgemeine Integral von (4), man habe also:

$$p\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{dz_0}{dy}=\frac{1}{2}mu^2+(mz_0+n)u$$
$$+\frac{1}{2}mz_0^2+nz_0+\theta(y)$$

oder mit Rücksicht auf (5):

$$p\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{2}mu^2+(mz_0+n)u$$

auch sei

$$mz_0+n=Y, \qquad z_0=\frac{1}{m}(Y-n)$$

wo nunmehr Y an die Stelle der früheren willkürlichen Functionen $\theta(y)$ resp. z_0 tritt: dann hat man es nur noch mit der Gleichung

$$p\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{2}mu^2+Yu \qquad \ldots(5)$$

zu thun, aus welcher u zu bestimmen ist. Dies kann aber geschehen, weil sie, bei sonst ganz gleicher Form, von (4) sich wesentlich durch das letzte Glied $\theta(y)$ der rechten Seite unterscheidet. Aus (5) ergibt sich nun auf bekannte Art:

$$u=\frac{2e^{\int Ydy}}{\varphi(x-\int pdy)-\int me^{\int Ydy}dy}$$

und also auch

$$z=\frac{1}{m}(Y-n)+u$$

womit die Aufgabe gelöst ist. Man kann das Resultat aber in anderer Form darstellen. Es sei zur Abkürzung:

$$\int me^{\int Ydy}dy=e^{\psi(y)}$$

also:

$$e^{\int Ydy}=\frac{1}{m}e^{\psi(y)}.\psi'(y), \qquad Y=\frac{\psi''(y)}{\psi'(y)}+\psi'(y)-\frac{m'}{m}.$$

Das Integral der Gleichung (3) lässt sich dann wie folgt ausdrücken:

$$z=\frac{1}{m}\left[\frac{\psi''(y)}{\psi'(y)}+\psi'(y)-\frac{m'}{m}-n\right]+\frac{2}{m}\cdot\frac{e^{\psi(y)}.\psi'(y)}{\varphi(x-\int pdy)-e^{\psi(y)}}$$

worin φ und ψ die Charakteristiken willkürlicher Functionen sind.

Auf gleiche Weise lässt sich das Integral der Gleichung:

$$p\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=(mz+n)\frac{\partial z}{\partial y}$$

finden, wenn p, m, n gegebene Functionen von x sind.

4.

Nach diesen Vorbemerkungen wende ich mich zu dem in der Einleitung bezeichneten Gegenstand dieser Abhandlung, der die Fälle betrifft, in welchen die Methode von Monge gar kein erstes Integral, nämlich keine partielle Differentialgleichung erster Ordnung mit einer willkürlichen Function zulässt, obgleich die gegebene Gleichung ein allgemeines Integral, mit zwei solchen Functionen, besitzt. Ich lasse mich hiebei von dem früher angegebenen Gesichtspunkt leiten und gehe vorerst von der Voraussetzung aus, die im Art. 1 definirte Differentialgleichung

$$Rz^{(2)}+Sz_1'+Tz_2+U=0 \qquad ...(1)$$

habe zwei erste Integrale, wovon jedes in einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit je einer willkürlichen Function besteht. Es ist eine nothwendige Folge dieser Voraussetzung, dass man auch die beiden durch partielle Differentiation aus (1) sich ergebenden Gleichungen:

$$\frac{dR}{dx}\cdot z^{(2)}+\frac{dS}{dx}\cdot z_1'+\frac{dT}{dx}\cdot z_2+\frac{dU}{dx}+Rz^{(3)}+Sz_1^{(2)}+Tz_2'=0 \qquad ...(2)$$

$$\frac{dR}{dy}\cdot z^{(2)}+\frac{dS}{dy}\cdot z_1'+\frac{dT}{dy}\cdot z_2+\frac{dU}{dy}+Rz_1^{(2)}+Sz_2'+Tz_3=0 \qquad ...(3)$$

in Betracht ziehe, worin unter $\frac{dR}{dx}, \ldots \frac{dR}{dy}, \ldots$ die vollständigen, auf alle in $R, \ldots U$ vorkommenden, von x, resp. y abhängigen Grössen x, y, z, z', z_1 sich beziehenden, partiellen Differentialquotienten von $R, \ldots U$ zu verstehen sind, so dass

$$\frac{dR}{dx}=\frac{\partial R}{\partial x}+\frac{\partial R}{\partial z}\cdot z'+\frac{\partial R}{\partial z'}\cdot z^{(2)}+\frac{\partial R}{\partial z_1}\cdot z_1'$$

u. s. w. ist.

Mittelst der weiteren Gleichungen:

$$\begin{aligned} dz^{(2)} &= z^{(3)}dx+z_1^{(2)}dy \\ dz_1' &= z_1^{(2)}dx+z_2'\,dy \\ dz_2 &= z_2'\,dx+z_3\,dy \end{aligned} \qquad ...(4)$$

kann man drei der Grössen $z^{(3)}, z_1^{(2)}, z_2', z_3$ durch die vierte, gleichgiltig welche dies sei, ausdrücken. Wählt man hiezu $z^{(3)}$, so ergibt sich:

$$z_1^{(2)} dy = dz^{(2)} - z^{(3)} dx$$
$$z_2' \; dy^2 = dz_1' dy - dz^{(2)} \; dx + z^{(3)} \; dx^2$$
$$z_3 \; dy^3 = dz_2 dy^2 - dz_1' dy dx + dz^{(2)} dx^2 - z^{(3)} dx^3.$$

Die hierdurch bestimmten Werthe von $z_1^{(2)}, z_2', z_3$ setze man in die Gleichungen (2) und (3) ein und fasse die gleichartigen Glieder zusammen, setze auch der Abkürzung wegen:

$$V_{(1,0)} = \frac{dR}{dx} z^{(2)} + \frac{dS}{dx} z_1' + \frac{dT}{dx} z_2 + \frac{dU}{dx}$$

$$V_{(0,1)} = \frac{dR}{dy} z^{(2)} + \frac{dS}{dy} z_1' + \frac{dT}{dy} z_2 + \frac{dU}{dy}$$

Dann findet man:

$$V_{(1,0)} dy^2 + [Rdy^2 - Sdydx + Tdx^2] \,.\, z^{(3)} + (Sdy - Tdx) dz^{(2)} + Tdz_1' dy = 0 \qquad \text{...(5)}$$

$$V_{(0,1)} dy^3 - [Rdy^2 - Sdydx + Tdx^2][z^{(3)} dx - dz^{(2)}] + (Sdy - Tdx) dz_1' dy + Tdz_2 dy^2 = 0. \qquad \text{...(6)}$$

Da diese Gleichungen stattfinden müssen, welche Werthe auch der Grösse $z^{(3)}$ beigelegt werden, diese aber ebensowenig als $z_1^{(2)}, z_2', z_3$ durch (2) und (3) bestimmt ist, so können jene Gleichungen, abgesehen davon, dass sie in der vorstehenden Form und weil in ihnen $dz^{(3)}$ nicht vorkommt, keiner Integration fähig sind, zu den gesuchten Relationen zwischen $z^{(2)}, z_1', z_2$ nur dann dienen, wenn $z^{(3)}$ aus der Rechnung verschwindet, oder also, wenn das Raisonnement Monge's[1] (Art. 1) bezüglich des Coëfficienten von $z^{(2)}$, hier auf den Coëfficienten von $z^{(3)}$ angewendet und wie früher

$$Rdy^2 - Sdydx + Tdx^2 = 0 \qquad \text{...(7)}$$

gesetzt wird.

In Folge dieser Gleichung verschwinden in (6) auch die Glieder, welche $dz^{(2)}$ enthalten und ergibt sich:

$$V_{(1,0)} \, dy^2 + [Sdy - Tdx] dz^{(2)} + Tdydz_1' = 0 \qquad \text{...(8)}$$

$$V_{(0,1)} \, dy^2 + [Sdy - Tdx] dz_1' + Tdydz_2 = 0. \qquad \text{...(9)}$$

Eine analoge Form erhalten diese Gleichungen, wenn man T mittelst der Gleichung (7) daraus eliminirt:

[1] Dasselbe wird, seiner Kürze und heuristischen Bedeutung wegen, hier und auch späterhin dessen bekannten Modificationen vorgezogen.

$$V_{(1,0)}\, dx^2 + [S dx - R dy] dz_1 + R dx dz^{(2)} = 0 \qquad \ldots(10)$$

$$V_{(0,1)}\, dx^2 + [S dx - R dy] dz_2 + R dx dz_1' = 0 \qquad \ldots(11)$$

und eine dritte, einfachere Form, die alsbald folgen wird, ergibt sich durch die Elimination von S.

Es liegt schon in der linearen Form der Gleichungen (2), (3) und (4), ist aber wohl zu beachten, dass die Gleichungen (7), (8) und (9) sich unabhängig davon ergeben, ob man der vorigen Betrachtung statt $z^{(3)}$ irgend eine andere der Grössen $z_1^{(2)}$, z_2', z_3 zu Grunde legt, und dass man immer wieder dieselbe Gleichung (7) erhält, auf welche auch die Methode von Monge führt.

Das im Allgemeinen zu befolgende Verfahren, durch welches die als bestehend vorausgesetzten ersten Integrale der Gleichung (1) abzuleiten sind, lässt sich nun wie folgt bezeichnen.

In den durch Elimination von S sich ergebenden Gleichungen:

$$\left[\frac{dR}{dx} z^{(2)} + \frac{dS}{dx} z_1' + \frac{dT}{dx} z_2 + \frac{dU}{dx}\right] dx dy + R dy dz^{(2)} + T dx dz_1' = 0 \;..(12)$$

$$\left[\frac{dR}{dy} z^{(2)} + \frac{dS}{dy} z_1' + \frac{dT}{dy} z_2 + \frac{dU}{dy}\right] dx dy + R dy dz_1' + T dx dz_2 = 0 \;..(13)$$

sowie in den Gleichungen:

$$\begin{aligned} dz - [z' \, dx + z_1 dy] &= 0 \\ dz' - [z^{(2)} dx + z_1' dy] &= 0 \\ dz_1 - [z_1' \, dx + z_2 dy] &= 0 \end{aligned} \qquad \ldots(14)$$

setze man für dy einen der beiden aus (7) folgenden Werthe, nämlich $dy = k dx$, mache die Gleichungen (12) und (13) in Hinsicht der Differentiale linear, und nehme die Gleichung

$$dy - k dx = 0$$

sowie die gegebene

$$R z^{(2)} + S z_1' + T z_2 + U = 0$$

und, wenn erforderlich, deren vollständiges Differential hinzu. Lassen sich aus diesen Gleichungen, oder einigen derselben, zwei andere ableiten, die integrirt werden können und deren Integrale $p = \alpha$, $P = a$ sind, so ist

$$P = \varphi(p)$$

ein erstes Integral der vorgelegten Differentialgleichung, wobei φ die Charakteristik einer willkürlichen Function bezeichnet.

Angenommen, es ergeben sich auf dieselbe Art für die zweite Auflösung $dy = ldx$ der Gleichung (7) zwei weitere Integrale $q = \beta$, $Q = b$, so stellt die Gleichung:

$$Q = \psi(q)$$

ebenfalls ein erstes Integral der gegebenen Gleichung mit einer willkürlichen Function ψ dar.[1]

In einfacheren Fällen, namentlich wenn R, S, T, U bloss von x, y, z abhängen, lassen sich diese Integrale dadurch erhalten, dass man jede der oben angeführten Gleichungen oder bloss einige derselben, mit einem noch unbestimmten Multiplicator versieht, sie dann insgesammt addirt und die Multiplicatoren, wenn möglich so bestimmt, dass die durch Addition entstandene Gleichung integrabel wird.

Sind zwei erste Integrale gefunden, so stellen diese mit der gegebenen Gleichung drei gleichzeitig für dieselbe Function z bestehende partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung dar, durch welche die Auffindung des gesuchten allgemeinen Integrals erleichtert ist. Die hierzu noch erforderlichen Integrationen können, da das allgemeine Integral nicht mehr als zwei willkürliche Functionen enthalten kann, die Zahl der letzteren nicht vermehren. Gleichwohl sind die entsprechenden unbestimmten Constanten nicht ausser Acht zu lassen und, namentlich wenn jene Functionen nur von je einer der Veränderlichen abhängen, so zu bestimmen, dass entweder die beiden Differentialgleichungen erster Ordnung unter sich verträglich sind, oder dass das mit den Integrationsconstanten noch behaftete allgemeine Integral der gegebenen Gleichung Genüge leiste.

Der bisher vorausgesetzte Fall, dass diese Gleichung zwei erste Integrale, jedes von der zweiten Ordnung, zulasse, tritt nicht immer ein, da es geschehen kann, dass nur eines dieser Integrale von der zweiten, das andere dagegen von der ersten

---

1 Da weiterhin mehrere ganz analoge, aber allmälig verallgemeinerte Sätze in Rede kommen, deren einfachster jener von Monge (Art. 1) ist, so werde ich, um Wiederholungen zu vermeiden, einen dieselben umfassenden Beweis bei einer andern Gelegenheit folgen lassen.

Ordnung ist und mittelst der Monge'schen Methode gefunden werden kann, oder dass auch letzteres nicht besteht.

Wenn die hier zu Grunde liegenden Voraussetzungen zutreffen und es also keine partielle Differentialgleichung erster Ordnung gibt, welche (1) genügt und nur eine einzige willkürliche Function enthält, so können die zwei ersten Integrale mit je einer willkürlichen Function nach vollzogener Elimination der letzteren im Allgemeinen nicht die Gleichung (1), sondern nur die Gleichungen (2) und (3), welchen jene zunächst genügen, wieder geben.

Findet dagegen gar kein erstes Integral von der vorausgesetzten Beschaffenheit statt, so zeigt sich dies entweder darin, dass man keine integrable Gleichung finden kann, oder dass das oben bezeichnete Verfahren auf eine Gleichung zweiter Ordnung mit einer willkürlichen Function führt, welche vermöge der gegebenen Gleichung nur bestehen, wenn man diese Function gleich Null setzt.

In den besonderen Fällen, wenn R oder T, oder R und T gleich Null sind, werden die Gleichungen (12) und (13) unbrauchbar, weil dann vermöge der Gleichung (7) zugleich auch entweder dx oder dy, oder dx und dy gleich Null zu setzen sind. In diesen Fällen müssen die Gleichungen (8) und (9) oder (10) und (11) zu Hilfe genommen werden.

Ist $R=0$, also $Sz_1'+Tz_2+U=0$ die gegebene Gleichung, so erhält man aus (7), (8) und (9) die beiden folgenden, einzeln zu betrachtenden Systeme von Gleichungen:

1. $dx=0$, $$\left[\frac{dS}{dx}z_1'+\frac{dT}{dx}z_2+\frac{dU}{dx}\right]dy+Sdz^{(2)}+Tdz_1'=0,$$
$$\left[\frac{dS}{dy}z_1'+\frac{dT}{dy}z_2+\frac{dU}{dy}\right]dy+Sdz_1+Tdz_2=0,$$

2. $Sdy-Tdx=0$, $$\left[\frac{dS}{dx}z_1'+\frac{dT}{dx}z_2+\frac{dU}{dx}\right]dy+Tdz_1'=0,$$
$$\left[\frac{dS}{dy}z_1'+\frac{dT}{dy}z_2+\frac{dU}{dy}\right]dy+Tdz_2=0.$$

Ist $T=0$, also $Rz^{(2)}+Sz_1'+U=0$ die gegebene Gleichung, so findet man aus (7), (10) und (11) die beiden Systeme:

1. $dy = 0,$ $\left[\frac{dR}{dx} z^{(2)} + \frac{dS}{dx} z'_1 + \frac{dU}{dx}\right] dx + S dz'_1 + R dz^{(2)} = 0,$

$\left[\frac{dR}{dy} z^{(2)} + \frac{dS}{dy} z'_1 + \frac{dU}{dy}\right] dx + S dz_2 + R dz'_1 = 0$

2. $S dx - R dy = 0,$ $\left[\frac{dR}{dx} z^{(2)} + \frac{dS}{dx} z'_1 + \frac{dU}{dx}\right] dx + R dz^{(2)} = 0,$

$\left[\frac{dR}{dy} z^{(2)} + \frac{dS}{dy} z'_1 + \frac{dU}{dy}\right] dx + R dz'_1 = 0$

Ist $R = 0$ und $T = 0$, also $S z'_1 + U = 0$ die vorgelegte Gleichung, so hat man:

1. $dx = 0,$ $\left[\frac{dS}{dx} z'_1 + \frac{dU}{dx}\right] dy + S dz^{(2)} = 0,$

$\left[\frac{dS}{dy} z'_1 + \frac{dU}{dy}\right] dy + S dz'_1 = 0$

2. $dy = 0,$ $\left[\frac{dS}{dx} z'_1 + \frac{dU}{dx}\right] dx + S dz'_1 = 0,$

$\left[\frac{dS}{dy} z'_1 + \frac{dU}{dy}\right] dx + S dz_2 = 0.$

Es braucht kaum bemerkt zu werden, dass jedem dieser Systeme noch die Gleichungen (14) mit den entsprechenden Werthen von dx, resp. dy beizufügen sind.

Um die Anwendung des vorhin beschriebenen Verfahrens zu zeigen, mag eine grössere Anzahl von Beispielen dienen, wozu u. a. einige der von Euler herrührenden Fälle am geeignetsten erscheinen, in welchen die Methode von Monge nicht zum Ziele führt, und die bisher nach einer allgemeinen Methode nicht erledigt worden sind.

5.

Als erstes Beispiel diene die Gleichung:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2}{x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}$$

oder also:

$$x z^{(2)} - x z_2 - 2z' = 0 \qquad \ldots(1)$$

welche, wie bereits erwähnt, Monge als Beweis der Unzulänglichkeit seiner Methode einst vorgelegt wurde und deren allgemeines Integral er vergeblich abzuleiten suchte.

Da hier

$$R=x,\ S=0,\ T=-x,\ U=-2z'$$

also:

$$\frac{dU}{dx}=-2z^{(2)},\qquad \frac{dU}{dy}=-2z'_1$$

so folgt aus den Gleichungen (12) und (13) des vorigen Artikels

$$-[z^{(2)}+z_2]dxdy+xdydz^{(2)}-xdxdz'_1=0 \qquad ...(2)$$

$$-2z'_1dxdy+xdydz'_1\ -xdxdz_2=0 \qquad ...(3)$$

und aus der Gleichung (7):

$$dy^2-dx^2=0 \qquad ...(4)$$

Die erste Auflösung von (4):

$$dy=-dx \qquad ...(5)$$

in (2) und (3) eingesetzt, gibt:

$$[z^{(2)}+z_2]\,dx=x[dz^{(2)}+dz'_1]$$

$$2z'_1dx=x[dz'_1\ +dz_2]$$

Hieraus durch Addition

$$[z^{(2)}+2z'_1+z_2]\,dx=xd[z^{(2)}+2z'_1+z_2] \qquad ...(6)$$

Die Gleichungen (5) und (6) lassen sich sofort integriren, ihre Integrale sind:

$$y+x=\alpha,\qquad \frac{1}{x}[z^{(2)}+2z'_1+z_2]=a$$

folglich ist:

$$z^{(2)}+2z'_1+z_2=-4x\varphi'''(y+x) \qquad ...(7)$$

ein erstes Integral der Gleichung (1), wenn man die willkürliche Function mit $-4\,\varphi'''$ statt früher mit φ bezeichnet, was offenbar geschehen kann.

Die zweite Auflösung von (4):

$$dy=+dx \qquad ...(8)$$

gibt, in (2) und (3) eingeführt:

$$[z^{(2)}+z_2]\,dx = x[dz^{(2)}-dz'_1]$$

$$2z'_1\,dx = x\,[dz'_1-dz_2]$$

Hieraus durch Subtraction:

$$[z^{(2)}-2z'_1+z_2]\,dx = x\,d[z^{(2)}-2z'_1+z_2] \qquad \ldots(9)$$

Die Integrale der Gleichungen (8) und (9) sind:

$$y-x=\beta, \qquad \frac{1}{x}[z^{(2)}-2z'_1+z_2]=b$$

Es ist daher:

$$z^{(2)}-2z'_1+z_2 = 4x\psi'''(y-x) \qquad \ldots(10)$$

ebenfalls ein erstes Integral von (1).

Durch Subtraction der Gleichungen (7) und (10) ergibt sich nun weiter:

$$z'_1 = -x[\varphi'''(y+x)+\psi'''(y-x)]$$

und hieraus durch Integration nach y:

$$z' = -x[\varphi''(y+x)+\psi''(y-x)]$$

Wird nun auch diese Gleichung und zwar nach x integrirt, so folgt:

$$z=\varphi(y+x)+\psi(y-x)-x[\varphi'(y+x)-\psi'(y-x)]$$

wobei auf die Constanten der beiden Integrationen keine Rücksicht zu nehmen ist, da der Ausdruck für z zwei willkürliche Functionen enthält und der Gleichung (1) genügt, folglich das allgemeine Integral dieser Gleichung sein muss. Man weiss, dass dieses Integral, welches auch der Form nach mit dem von Euler gefundenen übereinstimmt, sowohl durch Reihenentwicklung als auch durch Transformation der Gleichung (1) mittelst zweier neuer Veränderlichen [1], zumeist nach längeren Rechnungen, niemals aber mittelst einer allgemeinen und directen Methode erhalten wurde. (S. Einleitung.)

---

[1] Siehe Nathani: Die höhere Analysis. S. 363—65. Die Anwendung der Methode von Ampère auf diese Differentialgleichung wurde, meines Wissens, noch nirgends versucht.

6.

Die vorhin betrachtete Differentialgleichung lässt, wie ersichtlich, kein erstes Integral zu, welches blos eine willkürliche Function und ausser x, y, z nur z' und z_1 enthielte. Im Vorhergehenden war nun wiederholt von der bekannten Thatsache die Rede, dass es lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit bloss einem ersten Integral erster Ordnung[1] gebe, welches auch die Methode von Monge liefert. Obgleich ein solches Integral zur Herleitung des allgemeinen in manchen Fällen hinreicht, so ist doch die Frage, wie es sich in solchen Fällen mit dem andern ersten Integral verhalte, meines Wissens unerörtert geblieben. Für die beiden folgenden, sehr einfachen Beispiele, die ich wieder dem Werke Euler's entnehme, lässt sich die Antwort leicht finden.

Es sei gegeben:

$$c^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{c^2}{x} \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{c}{x} \frac{\partial z}{\partial y}$$

oder also:

$$c^2 x z^{(2)} - x z_2 - c^2 z' + c z_1 = 0. \qquad \text{...(1)}$$

Hier ist

$$R = c^2 x, \quad S = 0, \quad T = -x, \quad U = -c^2 z' + c z_1$$

also:

$$\frac{dU}{dx} = -c^2 z^{(2)} + c z_1', \qquad \frac{dU}{dy} = -c^2 z_1' + c z_2$$

und gehen die Gleichungen (12), (13) und (7) des Art. 4 über in die folgenden:

$$(c z_1' - z_2)\, dx dy + c^2 x dy dz^{(2)} - x dx dz_1' = 0 \qquad \text{...(2)}$$

$$(c^2 z_1' - c z_2)\, dx dy - c^2 x dy dz_1' + x dx dz_2 = 0 \qquad \text{...(3)}$$

$$c^2 dy^2 - dx^2 = 0. \qquad \text{...(4)}$$

Die erste Auflösung von (4):

$$c dy = dx \qquad \text{...(5)}$$

---

[1] Weiterhin werde ich diese Integrale nach der Ordnung des höchsten darin vorkommenden partiellen Differentialquotienten von z benennen.

in (2) und (3) eingesetzt, ergibt:

$$(cz_1'-z_2)\,dx+c^2x\,dz^{(2)}-cx\,dz_1'=0$$

$$(cz_1'-z_2)\,dx-\;cx\,dz_1'\;+x\,dz_2\;\;=0$$

Hieraus durch Subtraction

$$c^2dz^{(2)}-dz_2=0 \qquad \ldots(6)$$

und wenn man (5) und (6) integrirt:

$$x-cy=\alpha, \qquad\qquad c^2z^{(2)}-z_2=a$$

Es ist daher:

$$c^2z^{(2)}-z_2=-4c^2\varphi''(x-cy) \qquad \ldots(7)$$

ein erstes Integral, wofür jedoch mit Rücksicht auf (1) auch

$$cz'-z_1=-4cx\varphi''(x-cy) \qquad \ldots(8)$$

geschrieben werden kann. Die letztere Gleichung hätte man auch mittelst des Verfahrens von Monge erhalten können.

Die zweite Auflösung von (4):

$$c\,dy=-dx \qquad \ldots(9)$$

verwandelt die Gleichungen (2) und (3) in die folgenden:

$$(cz_1'-z_2)\,dx+c^2x\,dz^{(2)}+cx\,dz_1'=0$$

$$(cz_1'-z_2)\,dx-\;cx\,dz_1'\;-x\,dz_2\;\;=0$$

aus welchen sich:

$$c^2dz^{(2)}+2c\,dz_1'+dz_2=0 \qquad \ldots(10)$$

ergibt. Aus (9) und (10) folgt

$$x+cy=\beta, \qquad\qquad c^2z^{(2)}+2cz_1'+z_2=b,$$

es ist daher:

$$c^2z^{(2)}+2cz_1'+z_2=4c^2\psi''(x+cy) \qquad \ldots(11)$$

ebenfalls ein erstes Integral von (1).

Durch Addition der Gleichungen (7) und (11) erhält man

$$cz^{(2)}+z_1'=2c\psi''(x+cy)-2c\varphi''(x-cy)$$

und hieraus:

$$cz'+z_1=2c\psi'(x+cy)-2c\varphi'(x-cy). \qquad \ldots(12)$$

Weiter folgt aus (8) und (12)

$$z' = \psi'(x+cy) - \varphi'(x-cy) - 2x\varphi''(x-cy)$$

und wenn man nach x integrirt:

$$z = \varphi(x-cy) + \psi(x+cy) - 2x\varphi'(x-cy)$$

das allgemeine Integral von (1), wie Euler es angibt. Da dasselbe der gegebenen Gleichung genügt und zwei willkürliche Functionen enthält, so kommen auch hier die Constanten der zuletzt ausgeführten Integrationen nicht in Betracht.

Ich habe dieses Beispiel, welches schon mittelst der Gleichung (8) leicht erledigt werden kann, als eines derjenigen angeführt, welchen ein erstes Integral erster, und ein solches zweiter Ordnung (Gleichung (11)) entspricht.

7.

Die Gleichung

$$n^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \text{ oder } n^2 z^{(2)} - z_2 = 0 \qquad \ldots(1)$$

worin n eine näher zu bestimmende Function von x und y bedeutet, ist ebenfalls von der soeben besprochenen Art. Ihr allgemeines Integral, von Euler durch Anwendung der nach ihm benannten Methode gefunden, lässt sich in vollständig entwickelter Form darstellen, was bei der Gleichung (1) des Art. 2, wovon die obenstehende ein specieller Fall ist, nicht geschehen konnte.

Ihr entspricht ein erstes Integral erster Ordnung, wofür das Verfahren von Monge die Gleichungen

$$n^2 dy^2 - dx^2 = 0, \quad n^2 dy dz' - dx dz_1 = 0$$

oder, was dasselbe ist, die beiden folgenden:

$$n dy = \pm dx, \quad n dz' \mp dz_1 = 0 \qquad \ldots(2)$$

gibt, aus welchen sich aber nicht leicht ersehen lässt, wie die Function n allgemein zu bestimmen sei, damit diese Gleichungen integrirt werden können.

Wendet man sich dagegen zu den Gleichungen (12), (13) und (7) des Art. 4 und setzt darin $R = n^2$, $S = 0$, $T = -1$, $U = 0$, so findet man:

$$2n\frac{\partial n}{\partial x}\,.\,z^{(2)}dxay+n^2dydz^{(2)}-dxdz_1'=0 \qquad ...(3)$$

$$2n\frac{\partial n}{\partial y}\,.\,z^{(2)}dxdy+n^2dydz_1'\;-dxdz_2=0 \qquad ...(4)$$

$$n^2dy^2-dx^2=0 \qquad ...(5)$$

Die zwei ersten Integrale von (1) ergeben sich hieraus wie folgt:

1. Für $ndy=dx$ findet man aus (3) und (4)

$$2\frac{\partial n}{\partial x}z^{(2)}dx+ndz^{(2)}-dz_1'=0$$

$$2\frac{\partial n}{\partial y}z^{(2)}dx+ndz_1'\;-dz_2=0$$

und hieraus

$$2\left(n\frac{\partial n}{\partial x}-\frac{\partial n}{dy}\right)z^{(2)}dx+n^2dz^{(2)}-2ndz_1'+dz_2=0 \qquad ...(6)$$

Wenn man nun mit Euler die Function n durch die Gleichung

$$n\frac{\partial n}{\partial x}-\frac{\partial n}{\partial y}=0$$

definirt und diese integrirt, so erhält man

$$ny+x=f(n) \qquad ...(7)$$

wo f die Charakteristik einer als gegeben zu betrachtenden, aber beliebig zu wählenden Function von n bezeichnet. Unter dieser Voraussetzung geht (6) über in die folgende:

$$n^2dz^{(2)}-2ndz_1'+dz_2=0,$$

welche zu der aus (1) durch vollständige Differentiation hervorgehenden

$$n^2dz^{(2)}+2nz^{(2)}dn-dz_2=0$$

addirt, zu der Gleichung

$$ndz^{(2)}+z^{(2)}dn-dz_1'=0$$

führt, deren Integral

$$nz^{(2)} - z_1' = a \qquad \text{...(8)}$$

ist. Um nun auch die Gleichung $ndy = dx$ zu integriren, bemerke man, dass aus (7)

$$ndy + ydn + dx = f'(n)dn$$

oder also:

$$2ndy + ydn \qquad = f'(n)\,dn$$

folgt. Das Integral der letztern, in Bezug auf y linearen Gleichung ist:

$$\int \frac{f'(n)}{\sqrt{n}}\,dn - 2y\sqrt{n} = \alpha \qquad \text{...(9)}$$

daher:

$$nz^{(2)} - z_1' = 2\varphi''\left[\int \frac{f'(n)}{\sqrt{n}}\,dn - 2y\sqrt{n}\right] \qquad \text{...(10)}$$

ein erstes Integral von (1).

2. Um das zweite, der Auflösung

$$ndy = -dx \qquad \text{...(11)}$$

entsprechende zu finden reicht es hin, die Gleichungen (14) des Art. 4, nämlich:

$$dz' = z^{(2)}dx + z_1'dy, \quad dz_1 = z_1'dx + z_2dy$$

zu benutzen, welche hier

$$dz' = \left[z^{(2)} - \frac{1}{n}z_1'\right] dx, \quad dz_1 = \left[z_1' - \frac{1}{n}z_2\right] dx$$

sind, und durch deren Addition man:

$$ndz' + dz_1 = \frac{1}{n}\left[n^2 z^{(2)} - z_2\right] dx$$

oder also, mit Rücksicht auf (1)

$$ndz' + dz_1 = 0 \qquad \text{...(12)}$$

erhält. Dies ist die Gleichung (2), welche auch das Verfahren von Monge gibt, die aber erst jetzt, nachdem n durch (7) bereits bestimmt ist, integrirt werden kann. Denn aus (11) und

$$ny + x = f(n)$$

folgt:

$$[y-f'(n)]\,dn=0, \quad dn=0$$

also $n=\beta$, und aus (12):

$$\beta z'+z_1=b$$

Es sind daher:

$$nz'+z_1=2\chi(n) \qquad \text{...(13)}$$

und (10):

$$nz^{(2)}-z_1'=2\varphi''(u) \qquad \text{...(14)}$$

die beiden ersten Integrale von (1), wobei zur Abkürzung:

$$u=\int\frac{f'(n)}{\sqrt{n}}\,dn-2y\sqrt{n} \qquad \text{...(15)}$$

gesetzt wurde. Das eine dieser Integrale ist, wie man sieht, zweiter Ordnung und kann durch die Methode von Monge nicht erlangt werden. Um nun auch die Gleichung (14) auf die erste Ordnung zu bringen, bemerke man, dass aus (15):

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{n}}[f''(n)-y]\cdot\frac{\partial n}{\partial x}$$

und aus (7):

$$\frac{\partial n}{\partial x}=\frac{1}{f''(n)-y}$$

folgt, also:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{n}}$$

ist, daher die Gleichung (14) in der Form:

$$\sqrt{n}\,.\,z^{(2)}-\frac{1}{\sqrt{n}}z_1'=2\varphi''(u)\frac{\partial u}{\partial x}$$

geschrieben werden kann. Man erhält hieraus durch partielle Integration nach x:

$$\sqrt{n}\,.\,z'-\frac{1}{\sqrt{n}}\,.\,z_1-\int\frac{1}{2n\sqrt{n}}(nz'+z_1)\,.\,\frac{\partial n}{\partial x}\,.\,\partial x=2\varphi'(u)$$

oder mit Rücksicht auf (13):

$$\sqrt{n}\,.\,z'-\frac{1}{\sqrt{n}}\,.\,z_1=2\varphi'(u)+\int\frac{\chi(n)}{n\sqrt{n}}\,dn$$

Mittelst dieser Gleichung und jener (13) findet man nun:

$$z' = \frac{1}{\sqrt{n}} \varphi'(u) + \frac{\chi(n)}{n} + \frac{1}{2\sqrt{n}} \int \frac{\chi(n)}{n\sqrt{n}} dn$$

$$z_1 = -\sqrt{n} \cdot \varphi'(u) + \chi(n) - \frac{\sqrt{n}}{2} \int \frac{\chi(n)}{n\sqrt{n}} dn$$

und hat also zwei Gleichungen, wovon jede zur Bestimmung von z dient. Obgleich hiermit die Aufgabe als gelöst betrachtet werden kann, so glaube ich doch, auch die bemerkenswerthe Form, welche Euler dem Endresultate gegeben hat, und in welcher keine der willkürlichen Functionen unter einem Integralzeichen erscheint, aus einer der beiden Gleichungen, z. B. aus jener für z' ableiten zu sollen. Da

$$\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{\partial u}{\partial x} \text{ und } [f'(n) - y] \frac{\partial n}{\partial x} = 1$$

so kann man jene Gleichung wie folgt darstellen:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi'(u) \frac{\partial u}{\partial x} + [f'(n) - y] \left[\frac{\chi(n)}{n} + \frac{1}{2\sqrt{n}} \int \frac{\chi(n)}{n\sqrt{n}} dn\right] \frac{\partial n}{dx}.$$

Es sei nun

$$\int \frac{\chi(n)}{n\sqrt{n}} dn = w$$

also w wie $\chi(n)$ eine willkürliche Function von n. Man hat dann

$$\frac{\chi(n)}{n} + \frac{1}{2\sqrt{n}} \int \frac{\chi(n)}{n\sqrt{n}} dn = \sqrt{n} \cdot \frac{dw}{dn} + \frac{1}{2\sqrt{n}} w = \frac{d \cdot w\sqrt{n}}{dn}$$

und kann setzen:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi'(u) \frac{\partial u}{\partial x} + [f'(n) - y] \cdot \frac{d \cdot w\sqrt{n}}{dn} \quad \frac{\partial n}{\partial x}$$

Hieraus ergibt sich:

$$z = \varphi(u) + [f'(n) - y] w\sqrt{n} - \int w\sqrt{n} \cdot f''(n) dn$$

und wenn

$$\int w\sqrt{n} \cdot f''(n) dn = \psi(n) \text{ also } w\sqrt{n} = \frac{\psi'(n)}{f''(n)}$$

gesetzt wird, wobei nun $\psi(n)$ eine willkürliche Function bezeichnet, so findet man endlich:

$$z=\varphi\left[\int\frac{f'(n)}{\sqrt{n}}dn-2y\sqrt{n}\right]-\psi(n)+\frac{f'(n)-y}{f''(n)}\cdot\psi'(n)$$

als das allgemeine Integral von (1) unter der Voraussetzung, dass n der Gleichung $ny+x=f(n)$ genüge.

Hierin ist eines der allgemeinsten Resultate enthalten, zu welchen Euler mittelst seiner Methode gelangt ist. Mag auch die vorstehende Rechnung der Euler'schen an Umfang nicht beträchtlich nachstehen, so wollte ich dieselbe doch in Rücksicht auf die Verschiedenheit der Methoden hier anführen.

8.

Die Gleichung:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{4}{x}\quad\frac{\partial z}{\partial x}$$

oder also:

$$xz^{(2)}-xz_2+4z'=0 \qquad \text{...(1)}$$

deren Integral Euler aus einer Reihenentwicklung hergeleitet hat, später aber, soviel mir bekannt, auf einem andern Wege nicht gefunden wurde, erfordert, obschon sie von der Gleichung (1) des Art. 5 nur durch den Coëfficienten 4 von z' sich unterscheidet, eine ausgedehntere Anwendung der im Art. 4 angegebenen Gleichungen (12), (13), (7) und (14).

Dieselben gehen, da $R=x$, $S=0$, $T=-x$, $U=4z'$ ist, über in:

$$[5z^{(2)}-z_2]dxdy+xdydz^{(2)}-xdxdz'_1=0 \qquad \text{...(2)}$$

$$4z'_1dxdy+xdydz'_1-xdxdz_2=0 \qquad \text{...(3)}$$

$$dy^2-dx^2=0 \qquad \text{...(4)}$$

$$dz=z'dx+z_1dy,\quad dz_1=z'_1dx+z_2dy \qquad \text{...(5)}$$

Hier nun tritt der Fall ein, dass für keine der beiden Auflösungen von (4) sich aus (2) und (3) eine integrable Combination ohne Beiziehung der Gleichungen (5) finden lässt.

1. Für $dy = dx$ erhält man:

$$\begin{aligned} [5z^{(2)} - z_2]\,dx + x\,dz^{(2)} - x\,dz'_1 &= 0, \\ 4z'_1 dx + x\,dz'_1 \quad - x\,dz_2 &= 0, \\ [xz^{(2)} - xz_2 - 4z_1]dx \quad + 4dz \quad &= 0, \\ dz_1 - (z'_1 + z_2)\,dx &= 0 \end{aligned}$$

wobei zugleich z' mittelst der Gleichung (1) eliminirt wurde. Man kann nun die Multiplicatoren bestimmen, mit welchen diese Gleichungen zu versehen sind, damit sich nach deren Addition eine integrable Relation ergebe. Diese Multiplicatoren sind, wie leicht zu finden ist, der Ordnung nach:

$$x, \quad 5x, \quad -3, \quad 12x,$$

daher die gedachte Relation:

$$4[3z_1\,dx + 3x\,dz_1 + 2xz'_1 dx + x^2 dz'_1] + 2xz^{(2)} dx + x^2 dz^{(2)} \\ - 10xz_2 dx - 5x^2 dz_2 - 12dz = 0$$

woraus durch Integration die Gleichung:

$$4[3xz_1 + x^2 z'_1] + x^2 z^{(2)} - 5x^2 z_2 - 12z = a$$

sich ergibt. Da ferner aus $dx - dy = 0$ folgt: $x - y = \alpha$ so ist:

$$4[3xz_1 + x^2 z'_1] + x^2 z^{(2)} - 5x^2 z_2 - 12z = 8\psi'''(x-y) \qquad \text{...(6)}$$

ein erstes Integral der Gleichung (1), wobei wieder der Factor 8 der Vereinfachung des Endresultats wegen hinzugenommen wurde.

2. Für $dy = -dx$ findet man aus (2), (3) und (5):

$$\begin{aligned} [5z^{(2)} - z_2]\,dx + x\,dz^{(2)} \quad + x\,dz'_1 &= 0, \\ 4z'_1 dx + x\,dz'_1 \quad + x\,dz_2 &= 0, \\ [xz^{(2)} - xz_2 + 4z_1]dx + 4dz \quad &= 0, \\ dz_1 - (z'_1 - z_2)dx &= 0. \end{aligned}$$

Multiplicirt man diese Gleichungen der Ordnung nach mit:

$$-x, \quad 5x, \quad +3, \quad 12x$$

und addirt sie dann, so ergibt sich auf gleiche Weise wie vorhin:

$$4[3xz_1 + x^2 z'_1] - x^2 z^{(2)} + 5x^2 z_2 + 12z = -8\varphi'''(x+y) \qquad \text{...(7)}$$

Die Gleichungen (6) und (7) stellen die beiden ersten Integrale von (1) dar; beide sind von der zweiten Ordnung. Es ist nun sehr leicht, hieraus das allgemeine Integral abzuleiten.

Durch Addition jener Gleichungen ergibt sich nämlich die folgende:

$$3xz_1+x^2z_1'=\psi'''(x-y)-\varphi'''(x+y),$$

welche sowohl nach x als nach y integrirt werden kann.

Bringt man sie behufs der Integration nach x in die Form:

$$\frac{\partial z_1}{\partial x}+\frac{3}{x}.z_1=\frac{1}{x^2}[\psi'''(x-y)-\varphi'''(x+y)]$$

und integrirt nun, so erfolgt

$$z_1=\frac{1}{x^3}\int x[\psi'''(x-y)-\varphi'''(x+y)]\partial x$$

oder also:

$$z_1=\frac{1}{x^3}[\varphi'(x+y)-\psi'(x-y)]+\frac{1}{x^2}[-\varphi''(x+y)+\psi''(x-y)].$$

Hieraus endlich erhält man:

$$z=\frac{1}{x^3}[\varphi(x+y)+\psi(x-y)]-\frac{1}{x^2}[\varphi'(x+y)+\psi'(x-y)]$$

das allgemeine Integral, wie es Euler fand.

9.

Es sei die Gleichung

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+pz=0$$

gegeben und p als Function von x so zu bestimmen, dass die beiden ersten Integrale dieser Gleichung von der zweiten Ordnung sind.

Da hierbei

$$z^{(2)}-z_2+pz=0 \qquad ...(1)$$

also

$$R=1,\ S=0,\ T=-1,\ U=pz$$

und

$$\frac{dU}{dx} = pz' + p'z, \qquad \frac{dU}{dy} = pz_1$$

so gehen die Gleichungen (12) und (13) des Art. 4 über in:

$$(pz' + p'z)\,dxdy + dydz^{(2)} - dxdz_1' = 0 \qquad \ldots(2)$$

$$pz_1\,dxdy + dydz_1' \;\; - dxdz_2 = 0 \qquad \ldots(3)$$

womit die folgenden:

$$dy^2 = dx^2 \qquad \ldots(4)$$

$$dz - [z' \;\; dx + z_1\,dy] = 0$$

$$dz' - [z^{(2)}dx - z_1'dy] = 0 \qquad \ldots(5)$$

$$dz_1 - [z_1'dx + (z^{(2)} + pz)dy] = 0$$

zu verbinden sind. Da in der letzten dieser Gleichungen z_2 mittelst der gegebenen eliminirt ist, so kann (3) weiterhin unberücksichtigt bleiben. Dies vorausgesetzt betrachte man nun einzeln die zwei Auflösungen von (4).

1. Für $dy = -dx$ folgt aus (2) und (5):

$$(pz' + p'z)dx + dz^{(2)} + dz_1' = 0,$$

$$dz + [z_1 - z']dx = 0,$$

$$dz' + [z_1' - z^{(2)}]dx = 0,$$

$$dz_1 + [z^{(2)} + pz - z_1']dx = 0$$

und wenn man die drei letzten Gleichungen der Ordnung nach mit den Factoren W, X, X versieht, dann sämmtlich zur ersten addirt und die sich entsprechenden Glieder vereinigt, so ergibt sich die Gleichung:

$$\begin{aligned} &dz^{(2)} + dz_1' \\ &+ Xdz' + (p - W)z'dx \\ &+ Xdz_1 \qquad + Wz_1\,dx \\ &+ Wdz + (p' + pX)\,zdx = 0 \end{aligned} \qquad \ldots(6)$$

Die Bedingungen der Integrabilität dieser Gleichung sind

$$\frac{dX}{dx} = p - W = W \quad \text{und} \quad \frac{dW}{dx} = p' + pX.$$

Man erhält hieraus

$$W = \frac{1}{2} p, \qquad X = \frac{1}{2} \int p dx$$

und die Bedingung

$$p' + p \int p dx = 0 \qquad \ldots(7)$$

Durch Integration von (6) und der Gleichung $dx + dy = 0$ erhält man:

$$z^{(2)} + z_1' + X(z' + z_1) + Wz = 2\varphi'''(x+y) \qquad \ldots(8)$$

als erstes Integral von (1).

2. Für $dy = dx$ ergibt sich aus (2) und (5)

$$\begin{aligned} (pz' + p'z)dx + dz^{(2)} - dz_1' &= 0 \\ dz - [z' + z_1]dx &= 0 \\ dz' - [z^{(2)} + z_1']dx &= 0 \\ dz_1 - [z_1' + z^{(2)} + pz]dx &= 0 \end{aligned}$$

woraus man, wenn die drei letzten Gleichungen mit den Multiplicatoren W_0, X_0, $-X_0$ versehen werden, wie vorhin die Gleichung findet:

$$\begin{aligned} & dz^{(2)} - dz_1' \\ & + X_0 dz' + (p - W_0) z' dx \\ & - X_0 dz_1 - W_0 z_1 dx \\ & + W_0 dz + (p' + pX_0) z dx = 0 \end{aligned}$$

welche integrabel ist, wenn:

$$\frac{dX_0}{dx} = p - W_0 = W_0 \quad \text{und} \quad \frac{dW_0}{dx} = p' + pX_0$$

gesetzt wird. Man findet hieraus

$$W_0 = W, \quad X_0 = X$$

und wieder die Bedingung (7), folglich durch Integration:

$$z^{(2)} - z_1' + X(z' - z_1) + Wz = 2\psi'''(x-y) \qquad \ldots(9)$$

Dies ist ebenfalls ein erstes Integral von (1) und wie (8) von der zweiten Ordnung. Durch Subtraction von (8) und (9) folgt:

$$z_1'+Xz_1=\varphi'''(x+y)-\psi'''(x-y)$$

und wenn man nach y integrirt:

$$z'+Xz=\varphi''(x+y)+\psi''(x-y) \qquad \text{...(10)}$$

woraus z gefunden werden kann.

Die Gleichung (7) ist die gesuchte Bedingung für p. Setzt man der Abkürzung wegen:

$$\int p\,dx=2q, \quad p=2q'$$

so folgt:

$$q''+2qq'=0, \quad q'+q^2=C.$$

Für den besonderen Fall $C=0$ erhält man

$$q=\frac{1}{x+c}, \quad p=-\frac{2}{(x+c)^2}, \quad X=q$$

also aus (10)

$$z=-\frac{1}{x+c}[\varphi(x+y)+\psi(x-y)]+\varphi'(x+y)+\psi'(x-y)$$

als das allgemeine Integral der Gleichung:

$$z^{(2)}-z_2-\frac{2}{(x+c)^2}.z=0,$$

wie Euler mittelst Reihenentwicklung fand.

Wird $C=-c^2$ gesetzt, so folgt aus der Gleichung $q'+q^2=-c^2$

$$q=-c\,\mathrm{tang}(cx+k), \quad p=-\frac{2c^2}{\cos^2(cx+k)}, \quad X=q$$

daher aus (10)

$$z'-c\,\mathrm{tang}(cx+k).z=\varphi''(x+y)+\psi''(x-y)$$

und wenn man diese Gleichung integrirt:

$$z=\frac{1}{\cos(cx+k)}\int\partial x[\varphi''(x+y)+\psi''(x-y)]\cos(cx+k)$$

Dieser Ausdruck hat den Nachtheil, dass die willkürlichen Functionen unter dem Integralzeichen stehen. Bemerkt man aber, dass

$$c^2\varphi(x+y)+\varphi''(x+y) \quad \text{für} \quad \varphi''(x+y)$$

und

$$c^2\psi(x-y)+\psi''(x-y) \quad \text{für} \quad \psi''(x-y)$$

geschrieben werden kann, so erscheint z in der Form

$$z=\frac{1}{\cos(cx+k)}\int\partial x\left[c^2(\varphi(x+y)+\psi(x-y))+\varphi''(x+y)+\psi''(x-y)\right]\cos(c$$

und wenn man auf die beiden letzten Glieder in der Klammer die theilweise Integration wiederholt anwendet:

$$z=c\operatorname{tang}(cx+k)[\varphi(x+y)+\psi(x-y)]+\varphi'(x+y)+\psi'(x-y).$$

Diese von Euler auf anderem Wege abgeleitete Formel stellt das allgemeine Integral der Gleichung:

$$z^{(2)}-z_2-\frac{2c^2}{\cos^2(cx+k)}.z=0$$

dar.

Ein dritter Fall ergibt sich für $C=+c^2$; ihm entspricht die Gleichung $q^1+q^2=c^2$, aus welcher man

$$q=c.\frac{e^{cx+k}-e^{-(cx+k)}}{e^{cx+k}+e^{-(cx+k)}}$$

erhält.

Die weitere Ausführung ist jener des vorigen Falles ganz analog.

10.

Die hier noch folgenden Differentialgleichungen entsprechen dem am Schluss des Art. 4 betrachteten Fall, dass $R=0$ und $T=0$ seien.

Zunächst sei die Gleichung

$$(x+y)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}$$

oder also:

$$(x+y)z_1'-(z'+z_1)=0$$

gegeben, wofür $S=x+y$, $U=-(z'+z_1)$ ist.

Derselben sind, wie a. a. O. gezeigt ist, die beiden Systeme zugehörig:

$$1. \quad dx=0, \qquad z^{(2)}dy-(x+y)dz^{(2)}=0$$

$$z_2\,dy-(x+y)dz_1'=0$$

2. $$dy = 0, \qquad z^{(2)}dx-(x+y)dz_1' = 0$$
$$z_2\,dx-(x+y)dz_2 = 0$$

aus welchen man sofort:

$$x = \alpha, \qquad \frac{z^{(2)}}{\alpha+y} = a,$$

$$y = \beta, \qquad \frac{z_2}{x+\beta} = b$$

folglich die beiden ersten Integrale:

$$z^{(2)} = -\frac{1}{2}(x+y)\,\varphi'''(x), \qquad z_2 = -\frac{1}{2}(x+y)\,\psi'''(y)$$

erhält, die wieder von der zweiten Ordnung sind. Um aus ihnen durch partielle Integration nach x, resp. y die richtigen Ausdrücke für z' und z_1 zu finden, muss man, da die willkürlichen Functionen hier nur von je einer der Veränderlichen abhängen, auf die Integrationsconstanten Rücksicht nehmen, was in den vorhergehenden Fällen nicht nöthig war.

Zunächst folgt:

$$z' = -\frac{1}{2}(x+y)\,\varphi''(x)+\frac{1}{2}\varphi'(x)+Y,$$

$$z_1 = -\frac{1}{2}(x+y)\,\varphi''(y)+\frac{1}{2}\psi'(y)+X$$

und hieraus:

$$z_1' = -\frac{1}{2}\varphi''(x)+Y', \qquad z_1' = -\frac{1}{2}\psi''(y)+X'$$

Es muss daher:

$$X = -\frac{1}{2}\varphi'(x), \qquad Y = -\frac{1}{2}\psi'(y)$$

und

$$z' = \frac{1}{2}[\varphi'(x)-\psi'(y)]-\frac{1}{2}(x+y)\,\varphi''(x)$$

$$z_1 = \frac{1}{2}[\psi'(y)-\varphi'(x)]-\frac{1}{2}(x+y)\,\psi''(y)$$

gesetzt werden. Nun findet man weiter:

$$z = \varphi(x) - \frac{1}{2}(x+y)\varphi'(x) - \frac{1}{2}x\psi'(y) + Y$$

$$z = \psi(y) - \frac{1}{2}(x+y)\psi'(y) - \frac{1}{2}y\psi'(x) + X$$

wobei Y und X zwei neue Integrationsconstante, nämlich unbestimmte Functionen von y, resp. x sind. Damit diese beiden Gleichungen mit einander zusammenfallen, muss

$$X = \varphi(x) - \frac{1}{2}x\varphi'(x), \qquad Y = \psi(y) - \frac{1}{2}y\psi'(y)$$

gesetzt werden, wodurch sich

$$z = \varphi(x) + \psi(y) - \frac{1}{2}(x+y)[\varphi'(x) + \psi'(y)]$$

als das allgemeine Integral der vorgelegten Gleichung ergibt, wie es Euler fand.

Als weiteres Beispiel kann die von Euler (III. Art. 324) betrachtete Differentialgleichung

$$(x+y)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x+y)\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right] + (c+1)(c-2)u = 0$$

dienen, worin R und T ebenfalls Null sind. Sie ist einer der ersten Fälle, in welchen sich zeigte, dass das allgemeine Integral auch Differentialquotienten der willkürlichen Functionen enthalten könne. (Siehe Darboux, Comptes rendus T. XCIV.)

Um die Rechnung abzukürzen, setze man:

$$u = \frac{z}{(x+y)^{c+1}}.$$

Die gegebene Gleichung geht dann über in die frühere:

$$(x+y)z_1' - (z' + z_1) = 0.$$

womit nun auch

$$u = \frac{\varphi(x) + \psi(y)}{(x+y)^{c+1}} - \frac{\varphi'(x) + \psi'(y)}{2(x+y)^c}$$

gefunden ist, übereinstimmend mit dem von Euler durch Reihenentwicklung hergeleiteten Resultat.

Hierzu die Bemerkung, dass auch das Integral der Gleichung

$$(x+y).z_1' = z' + z_1 + p$$

worin p eine beliebige Function von x und y bezeichnet, auf dem oben befolgten Weg gefunden werden kann. Ihre beiden ersten Integrale sind

$$z^{(2)} = (x+y)\left[\int \frac{\partial p}{\partial x} \quad \frac{\partial y}{x+y} + \varphi(x)\right], \quad z_2 = (x+y)\left[\int \frac{\partial p}{\partial y} \quad \frac{\partial x}{x+y} + \psi(y)\right].$$

Schliesslich will ich beispielsweise noch anführen, dass die Gleichung

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{x+a}{x+b} \quad \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{b-a}{(x+b)^2} .z = 0$$

einer der im Art. 4 erwähnten besonderen Fälle ist, in welcher nur e i n erstes Integral zweiter, und k e i n solches erster Ordnung besteht, das allgemeine Integral aber gleichwohl gefunden werden kann.

Das eine der entsprechenden Systeme von Gleichungen ist hier:

$$dx = 0, \qquad dz = z_1 dy$$

$$\left[\frac{x+a}{x+b} .z^{(2)} + \frac{2(b-a)}{(x+b)^3} .z\right] .dy - dz^{(2)} = 0,$$

$$\left[\frac{x+a}{x+b} .z_1' - \frac{b-a}{(x+b)^2} .z_1\right] .dy - dz_1' = 0.$$

Multiplicirt man die beiden letzteren Gleichungen der Ordnung nach mit P, Q und addirt sie dann, so wird die hiedurch sich ergebende Gleichung integrabel, wenn

$$P = \frac{1}{2}(x+a)e^{-\frac{x+a}{x+b}.y}, \qquad Q = e^{-\frac{x+a}{x+b}}$$

gesetzt wird.

Durch Integration jener Gleichung erhält man als erstes Integral der gegebenen die folgende:

$$Pz^{(2)} + Qz_1' + \frac{b-a}{(x+b)^2} .Qz = \varphi(x)$$

oder, da:

$$z_1' - \frac{x+a}{x+b} \cdot z' + \frac{b-a}{(x+b)^2} \cdot z = 0$$

ist, in einfacherer Form:

$$Pz^{(2)} + \frac{x+a}{x+b} \cdot Qz' = \varphi(x)$$

woraus das gesuchte allgemeine Integral gefunden werden kann.

Aus dem Vorstehenden ergibt sich, dass es viele und sehr einfache Differentialgleichungen der in Rede stehenden Art gibt, welchen erste Integrale der zweiten Ordnung angehören und dass die im Art. 4 vorgeschlagene Methode mit Leichtigkeit zum allgemeinen Integral dieser Gleichungen führt. Dieser Zweck hätte sich wohl auch durch die weniger ausführliche Betrachtung einer geringern Anzahl von Beispielen erreichen lassen, aber die Beispiele an sich schienen mir, wie bereits in der Einleitung bemerkt wurde, von einem um so grösseren, wenn auch nur historischen Interesse zu sein, als mehrere derselben, seit Euler bekannt und selten mehr erwähnt, wie die übrigen bis jetzt einer allgemeinen Methode der Integration sich nicht unterwerfen liessen.

11.

Die weitere Ausführung des im Art. 4 eingeschlagenen Verfahrens, womit sich das zunächst Folgende beschäftigt, betrifft die Fälle, in welchen die beiden ersten Integrale, oder wenigstens eines derselben, von der dritten Ordnung sind.

Es sei wieder die Gleichung

$$Rz^{(2)} + Sz_1' + Tz_2 + U = 0 \qquad \ldots(1)$$

gegeben.

Man setze der Kürze wegen, wie früher:

$$\left.\begin{aligned} V_{(1,0)} &= \frac{dR}{dx} z^{(2)} + \frac{dS}{dx} z_1' + \frac{dT}{dx} z_2 + \frac{dU}{dx}, \\ V_{(0,1)} &= \frac{dR}{dy} z^{(2)} + \frac{dS}{dy} z_1' + \frac{dT}{dy} z_2 + \frac{dU}{dy} \end{aligned}\right\} \qquad \ldots(2)$$

und weiter:

$$V_{(2,0)} = \frac{d^2R}{dx^2} z^{(2)} + \frac{d^2S}{dx^2} z'_1 + \frac{d^2T}{dx^2} z_2 + \frac{d^2U}{dx^2}$$
$$+2\left[\frac{dR}{dx} z^{(3)} + \frac{dS}{dx} z_1^{(2)} + \frac{dT}{dx} z'_2\right],$$

$$V_{(1,1)} = \frac{d^2R}{dxdy} z^{(2)} + \frac{d^2S}{dxdy} z'_1 + \frac{d^2T}{dxdy} z_2 + \frac{d^2U}{dxdy}$$
$$+ \frac{dR}{dx} z_1^{(2)} + \frac{dS}{dx} z'_2 + \frac{dT}{dx} z_3 \qquad \ldots(3)$$
$$+ \frac{dR}{dy} z^{(3)} + \frac{dS}{dy} z_1^{(2)} + \frac{dT}{dy} z'_2,$$

$$V_{(0,2)} = \frac{d^2R}{dy^2} z^{(2)} + \frac{d^2S}{dy^2} z'_1 + \frac{d^2T}{dy^2} z_2 + \frac{d^2U}{dy^2}$$
$$+2\left[\frac{dR}{dy} z_1^{(2)} + \frac{dS}{dy} z'_2 + \frac{dT}{dy} z_3\right]$$

wobei $\frac{dR}{dx}, \frac{d^2R}{dx^2}, \ldots$ die vollständigen partiellen Differentialquotienten erster und zweiter Ordnung von $R, \ldots$ nach x und y bezeichnen.

Die aus (1) durch Differentiation hervorgehenden Gleichungen sind dann die folgenden:

$$\begin{aligned} V_{(1,0)} + Rz^{(3)} + Sz_1^{(2)} + Tz'_2 &= 0 \\ V_{(0,1)} + Rz_1^{(2)} + Sz'_2 + Tz_3 &= 0 \end{aligned} \qquad \ldots(4)$$

und:

$$\begin{aligned} V_{(2,0)} + Rz^{(4)} + Sz_1^{(3)} + Tz_2^{(2)} &= 0 \\ V_{(1,1)} + Rz_1^{(3)} + Sz_2^{(2)} + Tz'_3 &= 0 \\ V_{(0,2)} + Rz_2^{(2)} + Sz'_3 + Tz_4 &= 0. \end{aligned} \qquad \ldots(5)$$

Da nun

$$\begin{aligned} dz^{(3)} &= z^{(4)}dx + z_1^{(3)}dy \\ dz_1^{(2)} &= z_1^{(3)}dx + z_2^{(2)}dy \\ dz'_2 &= z_2^{(2)}dx + z'_3\, dy \\ dz_3 &= z'_3\, dx + z_4\, dy, \end{aligned} \qquad \ldots(6)$$

so kann man vier der Grössen $z^{(4)}$, $z_1^{(3)}$, $z_2^{(2)}$, z_3', z_4 durch die fünfte, z. B. durch $z^{(4)}$ ausdrücken, und erhält:

$$z_1^{(3)}dy = dz^{(3)} \quad - z^{(4)}dx$$
$$z_2^{(2)}dy^2 = dz_1^{(2)}dy - dz^{(3)}dx \quad + z^{(4)}dx^2$$
$$z_3' \; dy^3 = dz_2'dy^2 - dz_1^{(2)}dydx + dz^{(3)}dx^2 \quad - z^{(4)}dx^3$$
$$z_4 \; dy^4 = dz_3\,dy^3 - dz_2'dy^2dx + dz_1^{(2)}dydx^2 - dz^{(3)}dx^3 + z^{(4)}dx^4.$$

Werden die hieraus für $z_1^{(3)}, \ldots z_4$ sich ergebenden Ausdrücke in die Gleichungen (5) eingesetzt und die analogen Glieder zusammengefasst, so lassen sich diese Gleichungen wie folgt schreiben:

$$V_{(2,\,0)}\,dy^2 + [Rdy^2 - Sdydx + Tdx^2]\,.\,z^{(4)} + (Sdy - Tdx)\,dz^{(3)} + Tdz_1^{(2)}dy = 0,$$
$$V_{(1,\,1)}\,dy^3 - [Rdy^2 - Sdydx + Tdx^2][z^{(4)}dx - dz^{(3)}] + (Sdy - Tdx)dz_1^{(2)}dy + Tdz_2'dy^2 = 0,$$
$$V_{(0,\,2)}\,dy^4 + [Rdy^2 - Sdydx + Tdx^2][z^{(4)}dx^2 - dz^{(3)}dx + dz_2'dy] + (Sdy - Tdx)\,dz_2'dy^2 + Tdz_3dy^3 = 0.$$

Da hierin $z^{(4)}$ eine wesentlich unbestimmte Grösse ist und $dz^{(4)}$ nicht vorkommt, so gelten alle Gründe, welche früher für das Verschwinden von $z^{(3)}$ aus den Gleichungen (5) und (6) des Art. 4 angeführt wurden, nun auch in Bezug auf $z^{(4)}$; diese Grösse aber verschwindet aus den vorstehenden drei Gleichungen, wenn wieder:

$$Rdy^2 - Sdydx + Tdx^2 = 0 \qquad ..(7)$$

gesetzt wird, wodurch jene Gleichungen in die folgenden

$$\begin{aligned} V_{(2,\,0)}\,dy^2 + (Sdy - Tdx)\,dz^{(3)} + Tdydz_1^{(2)} &= 0 \\ V_{(1,\,1)}\,dy^2 + (Sdy - Tdx)\,dz_1^{(2)} + Tdydz_2' &= 0 \\ V_{(0,\,2)}\,dy^2 + (Sdy - Tdx)dz_2' + Tdydz_3 &= 0 \end{aligned} \qquad \ldots(8)$$

übergehen. Man kann hieraus T mittelst (7) eliminiren und erhält

$$\begin{aligned} V_{(2,\,0)}\,dx^2 + (Sdx - Rdy)\,dz_1^{(2)} + Rdxdz^{(3)} &= 0 \\ V_{(1,\,1)}\,dx^2 + (Sdx - Rdy)\,dz_2' + Rdxdz_1^{(2)} &= 0 \\ V_{(0,\,2)}\,dx^2 + (Sdx - Rdy)\,dz_3 + Rdxdz_2' &= 0 \end{aligned} \qquad \ldots(9)$$

Eine dritte, einfachere Form erhalten diese Gleichungen, wenn man, was alsbald geschehen wird, S aus ihnen eliminirt.

Es braucht nicht näher gezeigt zu werden, dass man zu den drei Gleichungen, in der einen oder anderen Form, auch gelangt wäre, wenn man der vorigen Betrachtung irgend eine der Grössen $z_1^{(3)}$, $z_2^{(2)}$, $z_3^{(1)}$, z_4 statt $z^{(4)}$ zu Grund gelegt hätte.

Die Gleichung (7) der Monge'schen „Charakteristiken" hat sich auch hier wieder eingestellt.

Wenn die gegebene Gleichung (1) ein erstes Integral dritter Ordnung zulässt, so besteht im Allgemeinen der Weg, dasselbe zu finden, zunächst darin, dass man in den durch Elimination von S entstehenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} V_{(2,\,0)}\,dxdy + Rdydz^{(3)} + Tdxdz_1^{(2)} &= 0 \\ V_{(1,\,1)}\,dxdy + Rdydz_1^{(2)} + Tdxdz_2' &= 0 \\ V_{(0,\,2)}\,dxdy + Rdydz_2' + Tdxdz_3 &= 0, \end{aligned} \qquad \ldots(10)$$

sowie in den Gleichungen:

$$\begin{aligned} dz &- [z'\,dx + z_1\,dy] = 0 \\ dz' &- [z^{(2)}dx + z_1'\,dy] = 0 \\ dz_1 &- [z_1'\,dx + z_2\,dy] = 0 \\ dz^{(2)} &- [z^{(3)}dx + z_1^{(2)}dy] = 0 \\ dz_1' &- [z_1^{(2)}dx + z_2'\,dy] = 0 \\ dz_2 &- [z_2'\,dx + z_3\,dy] = 0 \end{aligned} \qquad \ldots(11)$$

dy mittelst einer der beiden aus (7) folgenden Auflösungen $dy = kdx$ durch dx ausdrückt, die Gleichungen (10) hinsichtlich der Differentiale linear macht und die weiteren Gleichungen:

$$\begin{aligned} dy - kdx &= 0, \\ Rz^{(2)} + Sz_1' + Tz_2 + U &= 0 \\ Rz^{(3)} + Sz_1^{(2)} + Tz_1' + V_{(1,\,0)} &= 0 \\ Rz_1^{(2)} + Sz_2' + Tz_3 + V_{(0,\,1)} &= 0 \end{aligned} \qquad \ldots(12)$$

und, wenn erforderlich, das vollständige Differential der drei letzteren hinzu nimmt. Lassen sich nun aus diesen Gleichungen, oder einigen derselben, zwei andere ableiten, die integrirt werden können und deren Integrale $p = \alpha$, $P = a$ sind, so ist

$$P = \varphi(p)$$

ein erstes Integral der Gleichung (1).

Können auf dieselbe Weise auch für die zweite Auflösung $dy = l dx$ der Gleichung (7) zwei Integrale $q = \beta$, $Q = b$ gefunden werden, so ist auch

$$Q = \psi(q)$$

ein erstes Integral von (1). Dabei sind φ und ψ, wie durchgehend, die Charakteristiken willkürlicher Functionen.

Das hiernach als sehr umständlich oder schwierig erscheinende Verfahren gestaltet sich in vielen Fällen beträchtlich einfacher. Enthalten R, S, T, U bloss x, y, z, so reicht es nicht selten hin, bloss einige der angeführten Gleichungen zu Hilfe zu nehmen, dieselben mit Multiplicatoren zu versehen und in der, Art. 4, angegebenen Weise weiter zu verfahren.

Rücksichtlich der Art, wie aus den beiden ersten Integralen, die hier in der Regel von der dritten Ordnung sind, das allgemeine Integral gefunden werden kann, mögen die Bemerkungen des gedachten Artikels, und die früheren Beispiele, soweit es die Analogie zulässt, genügen.

Wenn R oder T, oder R und $T = 0$ sind, können die, in anderen Fällen bequemsten Gleichungen (10) nicht mehr angewendet werden, und müssen (8) und (9) an deren Stelle treten. Die Gleichungen (11) und (12) erleiden nur insofern eine Änderung, als in ihnen, dem Fall entsprechend, dx oder dy, dann R oder T, oder beide, in $V_{(1,0)}$, $V_{(0,1)}$ ebenso wie in $V_{(2,0)}$, $V_{(1,1)}$, $V_{(0,2)}$ gleich Null zu setzen sind.

Ist $R = 0$, also $Sz_1' + Tz_2 + U = 0$ die gegebene Gleichung, so sind die folgenden zwei Systeme getrennt zu betrachten:

1. $dx = 0,$
$$V_{(2,0)} dy + S dz^{(3)} + T dz_1^{(2)} = 0,$$
$$V_{(1,1)} dy + S dz_1^{(2)} + T dz_2' = 0,$$
$$V_{(0,2)} dy + S dz_2' + T dz_3 = 0.$$

2. $S dy - T dx = 0,$
$$V_{(2,0)} dy + T dz_1^{(2)} = 0$$
$$V_{(1,1)} dy + T dz_2' = 0$$
$$V_{(0,2)} dy + T dz_3 = 0$$

Ist $T = 0$, also die Gleichung $Rz^{(2)} + Sz_1' + U = 0$ gegeben, so hat man:

1. $dy = 0,\qquad V_{(2,0)}dx + Sdz_1^{(2)} + Rdz^{(3)} = 0,$

$$V_{(1,1)}dx + Sdz_2' + Rdz_1^{(2)} = 0,$$
$$V_{(0,2)}dx + Sdz_3 + Rdz_2' = 0.$$

2. $Sdx - Rdy = 0,\qquad V_{(2,0)}dx + Rdz^{(3)} = 0,$

$$V_{(1,1)}dx + Rdz_1^{(2)} = 0,$$
$$V_{(0,2)}dx + Rdz_2' = 0.$$

Ist $R = 0$ und $T = 0$, also $Sz_1' + U = 0$ die gegebene Gleichung, so finden die folgenden zwei Systeme statt:

1. $dx = 0,\qquad V_{(2,0)}dy + Sdz^{(3)} = 0,$

$$V_{(1,1)}dy + Sdz_1^{(2)} = 0,$$
$$V_{(0,2)}dy + Sdz_2' = 0.$$

2. $dy = 0,\qquad V_{(2,0)}dx + Sdz_1^{(2)} = 0,$

$$V_{(1,1)}dx + Sdz_2' = 0,$$
$$V_{(0,2)}dx + Sdz_3 = 0.$$

Zunächst mögen wieder einige, den Voraussetzungen dieses Artikels entsprechende Beispiele folgen.

12.

Es sei die Gleichung

$$c^2 x^{\frac{4}{3}} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \text{ oder also } c^2 x^{\frac{4}{3}} z^{(2)} - z_2 = 0 \qquad \ldots(1)$$

gegeben, deren Integral Euler im Art. 345 seines Werkes mittelst Reihenentwicklung gefunden hat.

Da hierbei

$$V_{(1,1)} = \frac{4}{3} c^2 x^{\frac{1}{3}} z_1^{(2)}$$

so folgt aus (10) die Gleichung

$$\frac{4}{3} c^2 x^{\frac{1}{3}} z_1^{(2)} dxdy + c^2 x^{\frac{4}{3}} dydz_1^{(2)} - dxdz_2' = 0,$$

welcher noch:

$$dz_1' - [z_1^{(2)} dx + z_2' dy] = 0$$

und

$$c^2 x^{\frac{4}{3}} dy^2 = dx^2$$

hinzuzufügen sind. Es ist nun jede der beiden Auflösungen der letzteren Gleichung einzeln zu betrachten.

1. Für $dy = x^{-\frac{2}{3}} \frac{dx}{c}$ erhält man:

$$\frac{4}{3} cz_1^{(2)} dx + cx dz_1^{(2)} - x^{\frac{1}{3}} dz_2' = 0,$$

$$\frac{1}{3} cdz_1' - \frac{1}{3} cz_1^{(2)} dx - \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} z_2' dx = 0$$

und hieraus durch Addition:

$$cz_1^{(2)} dx + cx dz_1^{(2)} + \frac{1}{3} cdz_1' - [x^{\frac{1}{3}} dz_2' + \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} z_2' dx] = 0,$$

wozu

$$-cdy + x^{-\frac{2}{3}} dx = 0$$

gehört. Aus diesen zwei Gleichungen folgt:

$$cxz_1^{(2)} + \frac{1}{3} cz_1' - x^{\frac{1}{3}} z_2' = 6c^2 \psi^{\mathrm{IV}} (3x^{\frac{1}{3}} - cy) \qquad \ldots(2)$$

als erstes Integral von (1).

2. Für $dy = -x^{-\frac{2}{3}} \frac{dx}{c}$ ergibt sich:

$$\frac{4}{3} cz_1^{(2)} dx + cx dz_1^{(2)} + x^{\frac{1}{3}} dz_2' = 0,$$

$$\frac{1}{3} cdz_1' - \frac{1}{3} cz_1^{(2)} dx + \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} z_2' dx = 0,$$

daher auf dieselbe Weise, wie vorhin:

$$cxz_1^{(2)} + \frac{1}{3} cz_1' + x^{\frac{1}{3}} z_2' = -6c^2 \varphi^{\mathrm{IV}} (3x^{\frac{1}{3}} + cy) \qquad \ldots(3)$$

noch ein erstes Integral der gegebenen Gleichung. Die beiden Integrale (2) und (3) sind von der dritten Ordnung. Man findet aus ihnen:

$$x^{\frac{1}{3}} z_2' = -3c^2 [\varphi^{\mathrm{IV}} (3x^{\frac{1}{3}} + cy) + \psi^{\mathrm{VI}} (3x^{\frac{1}{3}} - cy)]$$

und wenn man zweimal nach y integrirt:

$$z' = -3x^{-\frac{1}{3}}[\varphi''(3x^{\frac{1}{3}}+cy)+\psi''(3x^{\frac{1}{3}}-cy)].$$

Durch theilweise Integration nach x ergibt sich weiter:

$$z = -3x^{\frac{1}{3}}[\varphi'(3x^{\frac{1}{3}}+cy)+\psi'(3x^{\frac{1}{3}}-cy)]$$
$$+\int x^{-\frac{2}{3}}[\varphi'(3x^{\frac{1}{3}}+cy)+\psi'(3x^{\frac{1}{3}}-cy)]\,\partial x$$

oder endlich:

$$z = \varphi(3x^{\frac{1}{3}}+cy)+\psi(3x^{\frac{1}{3}}-cy)-3x^{\frac{1}{3}}[\varphi'(3x^{\frac{1}{3}}+cy)+\psi'(3x^{\frac{1}{3}}-cy)],$$

was im Wesentlichen mit dem Resultate Euler's übereinstimmt. Der hier betrachtete Fall ist von einigem Interesse, weil, obgleich die beiden ersten Integrale von der dritten Ordnung sind, im allgemeinen Integral nicht auch die zweiten oder dritten, sondern nur die ersten Differentialquotienten der willkürlichen Functionen vorkommen. Übrigens findet ein nothwendiger Zusammenhang zwischen der Ordnung dieser Differentialquotienten und jener der ersten Integrale im Allgemeinen nicht statt.

13.

Die Gleichung

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + (px+q)\frac{\partial z}{\partial x} - 2pz + rf(x) = 0 \qquad \ldots(1)$$

worin p, q, r beliebige Functionen von y bezeichnen, hat ein erstes Integral dritter Ordnung. Da hierbei:

$$R = 0,\ T = 0 \text{ und } U = (px+q)z' - 2pz + rf(x)$$

also:

$$V_{(2,\,0)} = \frac{d^2 U}{dx^2} = (px+q)z^{(3)} + rf''(x),$$

so erhält man aus der ersten der am Schluss des Art. 11 angegebenen Gleichungen:

$$dx = 0, \qquad [(px+q)z^{(3)} + rf''(x)]\,dy + dz^{(3)} = 0$$

Es ist daher $x = \alpha$ und

$$\frac{dz^{(3)}}{dy} + (p\alpha + q) z^{(3)} + r f'''(\alpha) = 0.$$

Bestimmt man aus dieser linearen Gleichung $z^{(3)}$, so ergibt sich als erstes Integral von (1) die Gleichung:

$$z^{(3)} = e^{-\int (px+q)\,\partial y} \left[\varphi(x) - f'''(x) \int r e^{\int (px+q)\partial y} \partial y \right]$$

und weiter, wenn man nach x integrirt, das zweite:

$$z^{(2)} = \int \partial x \,.\, e^{-\int (px+q)\partial y} \left[\varphi(x) - f'''(x) \int r e^{\int (px+q)\partial y} \partial y\right] + \psi(y),$$

worin nun $\varphi(x)$ und $\psi(y)$ zwei willkürliche Functionen bedeuten.

Die Constanten der zwei noch erforderlichen Integrationen sind hier zu berücksichtigen und auf ähnliche Art, wie in den Beispielen des Art. 10 zu ermitteln. Da jedoch die Ausführung zu weitläufige Formeln liefern würde, mag dieselbe auf den besonderen Fall $f'''(x) = 0$ beschränkt bleiben, in welchem man es, wenn k und l Constante bezeichnen, mit der Gleichung

$$z'_1 + (px+q) z' - 2pz + (kx+l) r = 0 \qquad \ldots(2)$$

zu thun hat, deren zweites Integral

$$z^{(2)} = \int e^{-\int (px+q)\partial y} \varphi(x) \partial x + \psi(y) \qquad \ldots(3)$$

ist. Man findet daraus

$$z' = x\psi(y) + x \int e^{-\int (px+q)\partial y} \varphi(x)\partial x - \int e^{-\int (px+q)\partial y} .\, x\varphi(x)\partial x + Y \ldots(4)$$

und kann Y auf folgende Art ermitteln. Da aus (2):

$$z_1^{(2)} + (px+q) z^{(2)} - pz' + kr = 0 \qquad \ldots(5)$$

und aus (3)

$$z_1^{(2)} = \psi'(y) - \int (px+q)\, e^{\int (px+q)\partial y} .\, \varphi(x)\partial x \qquad \ldots(6)$$

folgt, so ergibt sich durch Substitution der Werthe von $z^{(2)}$, z', $z_1^{(2)}$ aus (3), (4) und (6) in (5) eine Gleichung, aus der man:

$$pY = \psi'(y) + q\psi(y) + kr \qquad \ldots(7)$$

findet, so dass Y als bekannt betrachtet werden kann.

Man integrire nun (4) nach x und wende dabei wieder das Verfahren der theilweisen Integration an; man erhält dann, wie leicht zu sehen, die Gleichung:

$$z = \frac{1}{2} x^2 \psi(y) + xY + Y_0 \qquad \ldots(8)$$

$$+ \frac{1}{2} x^2 \int e^{-\int (px+q)\partial y} . \varphi(x) \partial x - x \int e^{-\int (px+q)\partial y} . x\varphi(x) \partial x$$

$$+ \frac{1}{2} \int e^{-\int (px+q)\partial y} . x^2 \varphi(x) \partial x$$

wobei Y_0 noch zu bestimmen ist, und erhalten wird, wenn man die aus (4) und (8) sich ergebenden Ausdrücke für z'_1, z', z in die Gleichung (2) einsetzt. Wie vorauszusehen war, heben sich die Integrale gegenseitig auf und besteht das Resultat dieser Substitution in der Gleichung:

$$x[\psi'(y) + q\psi(y) + kr - pY] + Y' + qY + lr - 2pY_0 = 0 \quad \ldots(9)$$

Da hierin der Coëfficient von x verschwinden muss, so erhält man wieder die Gleichung (7), deren frühere Herleitung also zur Prüfung der Rechnung dient. Zugleich aber folgt aus (9)

$$2pY_0 = Y' + qY + lr$$

und wenn man Y substituirt, für Y_0 die Gleichung

$$2p^3 Y_0 = p\psi''(y) + (2pq - p')\psi'(y) + (pq^2 - p'q + pq')\psi(y)$$
$$+ k(pqr - p'r + pr') + lp^2 r. \qquad \ldots(10)$$

Die Gleichung (8) stellt das nun in allen Theilen durch (7) und (10) bestimmte allgemeine Integral der Gleichung (2) dar.

Herr Imschenetsky[1] hat das allgemeine Integral der Gleichung

$$z'_1 + xyz' - 2yz = 0$$

durch Verallgemeinerung der „Laplace'schen Methode" gefunden; aus den vorstehenden Resultaten ergibt sich dasselbe, wenn man $p = y$, $q = 0$ und $r = 0$ setzt.

---

[1] Siehe die oben erwähnte Abhandlung p. 58.

14.

Die Gleichung

$$(x+y)^2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c(x+y)\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right]+(c+2)(c-3).u=0 \quad\ldots(1)$$

deren Integral man in dem Werke Euler's (III. Art. 325) findet, lässt sich in einfachere Form bringen, wenn man

$$u=\frac{z}{(x+y)^{c+2}}$$

setzt; es ergibt sich nämlich die Gleichung:

$$(x+y)\,z_1'-2\,(z'+z_1)=0 \quad\ldots(2)$$

von welcher hier, um unnöthige Weitläufigkeiten zu vermeiden, ausgegangen werden wird.

Da

$$R=0,\quad S=x+y,\quad T=0,\quad U=-2(z'+z_1)$$

folglich:

$$\frac{d^2U}{dx^2}=-2\left[z^{(3)}+z_1^{(2)}\right],\qquad \frac{d^2U}{dy^2}=-2\left[z_2'+z_3\right]$$

so ist:

$$V_{(2,\,0)}=-2z^{(3)},\qquad V_{(0,\,2)}=-2z_3$$

und findet man aus den am Schluss des Art. 11 angeführten Formeln die beiden Systeme von Gleichungen:

$$\begin{aligned} dx&=0, & -2z^{(3)}dy+(x+y)dz^{(3)}&=0,\\ dy&=0, & -2z_3\,dy+(x+y)dz_3&=0,\end{aligned}$$

durch deren Integration man zu den beiden folgenden

$$\begin{aligned} z^{(3)}&=(x+y)^2\varphi^{\mathrm{V}}(x)\\ z_3&=(x+y)^2\psi^{\mathrm{V}}(y)\end{aligned}$$

gelangt. Dies sind die ersten Integrale der gegebenen Gleichung (2); man kann beide zugleich benutzen, um die aus den noch erforderlichen Integrationen hervorgehenden Constanten zu bestimmen. Zunächst findet man:

$$z^{(2)} = (x+y)^2\varphi^{\mathrm{IV}}(x) - 2(x+y)\,\varphi'''(x) + 2\varphi''(x) + Y$$
$$z_2 = (x+y)^2\psi^{\mathrm{IV}}(y) - 2(x+y)\,\psi'''(y) + 2\psi''(y) + X$$

und hieraus:

$$z' = (x+y)^2\varphi'''(x) - 4(x+y)\,\varphi''(x) + 6\varphi'(x) + xY + Y_0$$
$$z_1 = (x+y)^2\psi'''(y) - 4(x+y)\,\psi''(y) + 6\psi'(y) + yX + X_0$$

Da aber aus diesen beiden Gleichungen

$$z'_1 = 2(x+y)\,\varphi'''(x) - 4\varphi''(x) + xY' + Y'_0$$
$$z'_1 = 2(x+y)\,\psi'''(y) - 4\psi''(y) + yX' + X'_0$$

folgt, so erhält man, wie leicht zu sehen:

$$X = 2\varphi''(x), \qquad Y = 2\psi''(y)$$
$$X_0 = 2x\varphi''(x) - 6\varphi'(x), \quad Y_0 = 2y\psi''(y) - 6\psi'(y)$$

somit:

$$z' = (x+y)^2\varphi'''(x) - 4(x+y)\varphi''(x) + 2(x+y)\psi''(y) + 6\varphi'(x) - 6\psi'(y)$$
$$z_1 = (x+y)^2\varphi'''(y) - 4(x+y)\psi''(y) + 2(x+y)\varphi''(x) + 6\psi'(y) - 6\varphi'(x)$$

und hieraus endlich:

$$z = (x+y)^2[\varphi''(x) + \psi''(y)] - 6(x+y)[\varphi'(x) + \psi'(y)] + 12[\varphi(x) + \psi(y)]$$

als das allgemeine Integral von (2), womit auch jenes von (1) gefunden ist, wie es Euler a. a. O. angibt.

15.

Es sei noch die Gleichung

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + pz = 0$$

oder in der einfacheren Schreibweise:

$$z^{(2)} - z_2 + pz = 0 \qquad \ldots(1)$$

gegeben, in welcher p als Function von x so bestimmt werden soll, dass die beiden ersten Integrale dieser Gleichung von der dritten Ordnung sind.

Da

$$R = 1, \quad S = 0, \quad T = -1, \quad U = pz$$

so ist

$$V_{(2,\,0)} = \frac{d^2U}{dx^2} = pz^{(2)} + 2p'z' + p''z$$

folglich nach der ersten der Gleichungen (10) des Art. 11

$$[pz^{(2)} + 2p'z' + p''z]\,dxdy + dydz^{(3)} - dxdz_1^{(2)} = 0 \qquad \ldots(2)$$

und

$$dy^2 = dx^2 \qquad \ldots(3)$$

Mit diesen sind noch die fünf ersten der Gleichungen (11) zu verbinden, aus welchen zugleich, um die Rechnung abzukürzen, z_2 und $z^{(3)}$ mittelst der aus (1) folgenden Gleichungen:

$$z_2 = z^{(2)} + pz\ , \qquad z^{(3)} = z_2' - (pz' + p'z)$$

eliminirt werden können, so dass jene fünf Gleichungen in folgender Form erscheinen:

$$\begin{aligned}
&dz \quad - [z'dx + z_1 dy] = 0 \\
&dz' \quad - [z^{(2)}dx + z_1' dy] = 0 \\
&dz_1 \quad - [z_1'dx + (z^{(2)} + pz)dy] = 0 \\
&dz^{(2)} + [pz' + p'z - z_2']dx - z_1^{(2)}dy = 0 \\
&dz_1' \quad - [z_1^{(2)}dx + z_2' dy] = 0.
\end{aligned} \qquad \ldots(4)$$

Es sind nun die beiden Auflösungen der Gleichung (3) einzeln in Betracht zu ziehen.

1. Für $dy = -dx$ folgt

$$[pz^{(2)} + 2p'z' + p''z]dx + dz^{(3)} + dz_1^{(2)} = 0$$

und wenn man die Gleichungen (4) der Ordnung nach mit den Multiplicatoren X, Y, Z, W, W versieht und dann insgesammt zur letzteren addirt, ergibt sich eine Gleichung, die ich, der leichteren Übersicht wegen, in die Form bringe:

$$\begin{aligned}
&dz^{(3)} + dz_1^{(2)} \\
&+ Xdz \quad + (p'' + p'W + pZ)\,.\,zdx \\
&+ Ydz' \quad + (2p' + pW - X)\,.\,z'dx \\
&+ Zdz_1 \quad + Xz_1 dx \\
&+ Wdz^{(2)} + (p - Y + Z)z^{(2)}dx \\
&+ Wdz_1' \quad + (Y - Z)z_1'dx \qquad = 0.
\end{aligned} \qquad \ldots(5)$$

Hierin sind nun die vier Multiplicatoren als Functionen von x so zu bestimmen, dass die in je einer Linie stehenden Ausdrücke ein vollständiges Differential ausmachen, dass also:

$$\frac{dX}{dx} = p'' + p'W + pZ$$

$$\frac{dY}{dx} = 2p' + pW - X$$

$$\frac{dZ}{dx} = X$$

und

$$\frac{dW}{dx} = p - Y + Z = Y - Z$$

ist. Man findet hieraus:

$$W = \frac{1}{2}\int p dx$$

$$Z = \frac{3}{4}p + \frac{1}{8}[\int p dx]^2$$

$$Y = \frac{5}{4}p + \frac{1}{\;}[\int p dx]^2$$

$$X = \frac{3}{4}p + \frac{1}{4}p\int p dx$$

und für p die Bedingungsgleichung:

$$2p'' + 2p'\int p dx + 4p^2 + p[\int p dx]^2 = 0. \qquad \text{...(6)}$$

Durch Integration von (5) und der Gleichung $dx + dy = 0$ ergibt sich:

$$z^{(3)} + z_1^{(2)} + W[z^{(2)} + z_1'] + Yz' + Zz_1 + Xz = 2\varphi^{\mathrm{V}}(x+y) \qquad \text{...(7)}$$

als erstes Integral von (1).

2. Für $dy = dx$ findet man aus (2) und (4), wenn die Multiplicatoren mit X_0, Y_0, Z_0, W_0, $-W_0$ bezeichnet werden, auf dieselbe Weise wie vorhin die Gleichung:

$$
\left.\begin{aligned}
&dz^{(3)}-dz_1^{(2)}\\
&+X_0dz \quad +(p''+p'W_0-pZ_0)zdx\\
&+Y_0dz' \quad +(2p'+pW_0-X_0)z'dx\\
&+Z_0dz_1 \quad -X_0z_1dx\\
&+W_0dz^{(2)}+(p-Y_0-Z_0)z^{(2)}dx\\
&-W_0dz_1' \quad -(Y_0+Z_0)z_1'dx \qquad =0
\end{aligned}\right\}\ldots(8)
$$

welche integrabel ist, wenn

$$\frac{dX_0}{dx}=p''+p'W_0-pZ_0$$

$$\frac{dY_0}{dx}=2p'+pW_0-X_0$$

$$\frac{dZ_0}{dx}=-X_0$$

und

$$\frac{dW_0}{dx}=p-Y_0-Z_0=Y_0+Z_0$$

gesetzt wird. Hieraus folgt:

$$W_0=W,\quad Z_0=-Z,\quad Y_0=Y,\quad X_0=X$$

und als Bedingung wieder die Gleichung (6).

Aus (8) und der Gleichung $dx-dy=0$ folgt weiter:

$$z^{(3)}-z_1^{(2)}+W[z^{(2)}-z_1']+Yz'-Zz_1+Xz=2\psi^{\mathrm{V}}(x-y) \quad \ldots(9)$$

Die Gleichungen (7) und (9) sind die beiden ersten Integrale der gegebenen (1) unter der Voraussetzung, dass p der Bedingung (6) Genüge leiste.

Durch Addition und Subtraction jener Gleichungen entstehen die beiden folgenden:

$$
\left.\begin{aligned}
&z^{(3)}+Wz^{(2)}+Yz'+Xz=\varphi^{\mathrm{V}}(x+y)+\psi^{\mathrm{V}}(x-y)\\
&z_1^{(2)}+Wz_1'\ \ +Zz_1 \qquad =\varphi^{\mathrm{V}}(x+y)-\psi^{\mathrm{V}}(x-y).
\end{aligned}\right\}\ldots(10)
$$

Die erste genügt der Integrabilitätsbedingung $W''-Y'+X=0$; das Integral des Ausdrucks linker Hand ist

$$z^{(2)}+Wz'+(Y-W')z$$

da aber $Y - W' = Z$, so folgt aus jener Gleichung:

$$z^{(2)} + Wz' + Zz = \varphi^{\mathrm{IV}}(x+y) + \psi^{\mathrm{IV}}(x-y) \qquad \ldots(11)$$

wobei keine Integrationsconstante beizufügen ist, weil sich alle Glieder der Gleichung (11) wieder ergeben, wenn man die zweite der Gleichungen (10) nach y integrirt.

Die Möglichkeit, das allgemeine Integral von (1) zu finden, hängt von der Integration der linearen Gleichung (11) ab, in welcher W und Z durch p, und p durch die Gleichung (6) bestimmt ist.

Setzt man der Kürze wegen

$$p = 2q',$$

so lässt sich (6) in den drei Formen

$$\begin{aligned} q''' + 2qq'' + 4q'^2 + 2q^2q' &= 0, \\ D_x^{(2)}(q'+q^2) + 2q'(q'+q^2) &= 0, \\ D_x^{(2)}[(q'+q^2)x - 2q] + 2q'[(q'+q^2)x - 2q] &= 0 \end{aligned} \qquad \ldots(12)$$

schreiben.

Die erste dieser Gleichungen wird durch den Factor q integrabel, ihr erstes Integral ist

$$2qq'' - q'^2 + 4q^2q' + q^4 = C,$$

welches, wenigstens für $C = 0$, noch eine Integration mittelst eines Multiplicators von der Form $Q_0 q' + Q$ zulässt. Indessen kann (11) nur für die folgenden Formen von q integrirt werden, welche sich aus der zweiten und dritten der Gleichungen (12) unmittelbar ergeben.

Der zweiten Gleichung in (12) genügt die Annahme $q' + q^2 = 0$, welche im Art. 9 näher betrachtet wurde.

Der dritten Gleichung entspricht die particuläre Lösung

$$(q'+q^2)x - 2q = 0, \qquad \ldots(13)$$

wofür auch die Gleichung (11), nämlich:

$$z^{(2)} + qz' + \frac{1}{2}(3q'+q^2) \,.\, z = \varphi^{\mathrm{IV}}(x+y) + \psi^{\mathrm{IV}}(x-y)$$

oder also:

$$xz^{(2)}+qxz'+(q'x+q)z=x[\varphi^{\mathrm{IV}}(x+y)+\psi^{\mathrm{IV}}(x-y)] \quad ...(14)$$

integrirt werden kann. Als erstes Integral erhält man:

$$xz'+(qx-1)z=x[\varphi'''(x+y)+\psi'''(x-y)]-[\varphi''(x+y)+\psi''(x-y)]$$

wofür jedoch, weil nach (13)

$$q-\frac{1}{x}=\frac{1}{x}-\frac{q'}{q}$$

ist, auch

$$z'+\left[\frac{1}{x}-\frac{q'}{q}\right].z=\varphi'''(x+y)+\psi'''(x-y)-\frac{1}{x}[\varphi''(x+y)+\psi''(x-y)]$$

gesetzt werden kann. Hieraus folgt nun

$$z=\frac{q}{x}\int\frac{x}{q}\left[\varphi'''(x+y)+\psi'''(x-y)-\frac{1}{x}[\varphi''(x+y)+\psi''(x-y)]\right]\partial x$$

und wenn man bemerkt, dass aus (13)

$$q=\frac{3x^2}{x^3+c^3}, \quad \text{also } p=\frac{6x(2c^3-x^3)}{(x^3+c^3)^2}$$

erhalten wird, wenn c die Integrationsconstante bezeichnet, so findet man nach einer leichten Rechnung:

$$z=\frac{3x}{x^3+c^3}\left[\varphi(x+y)+\psi(x-y)-x[\varphi'(x+y)+\psi'(x-y)]+\varphi''(x+y)+\psi''(\right.$$

Dies ist somit das allgemeine Integral der Gleichung:

$$z^{(2)}-z_2+\frac{6x(2c^3-x^3)}{(x^3+c^3)^2}.z=0,$$

welche sich aus (1) ergibt, wenn man darin für p den angegebenen Ausdruck setzt. Dieses Resultat wurde von Euler (III. Art. 370) durch ein besonderes Verfahren gefunden.

16.

In dem nicht selten eintretenden Fall, dass einige oder alle erste Integrale der gegebenen Gleichung

$$Rz^{(2)}+Sz_1+Tz_2+U=0 \quad ...(1)$$

von der vierten Ordnung sind, bedarf auch das im Art. 11 auseinander gesetzte Verfahren einer weiteren Entwickelung.

Es sei der Kürze wegen:

$$V_{(3,\,0)} = \frac{d^3R}{dx^3} z^{(2)} + \frac{d^3S}{dx^3} z_1' + \frac{d^3T}{dx^3} z_2 + \frac{d^3U}{dx^3}$$
$$+ 3\left[\frac{d^2R}{dx^2} z^{(3)} + \frac{d^2S}{dx^2} z_1^{(2)} + \frac{d^2T}{dx^2} z_2'\right]$$
$$+ 3\left[\frac{dR}{dx} z^{(4)} + \frac{dS}{dx} z_1^{(3)} + \frac{dT}{dx} z_2^{(2)}\right],$$

$$V_{(2,\,1)} = \frac{d^3R}{dx^2dy} z^{(2)} + \frac{d^3S}{dx^2dy} z_1' + \frac{d^3T}{dx^2dy} z_2 + \frac{d^3U}{dx^2dy}$$
$$+ \frac{d^2R}{dx^2} z_1^{(2)} + \frac{d^2S}{dx^2} z_2' + \frac{d^2T}{dx^2} z_3$$
$$+ 2\left[\frac{d^2R}{dxdy} z^{(3)} + \frac{d^2S}{dxdy} z_1^{(2)} + \frac{d^2T}{dxdy} z_2'\right]$$
$$+ 2\left[\frac{dR}{dx} z_1^{(3)} + \frac{dS}{dx} z_2^{(2)} + \frac{dT}{dx} z_3'\right]$$
$$+ \frac{dR}{dy} z^{(4)} + \frac{dS}{dy} z_1^{(3)} + \frac{dT}{dy} z_2^{(2)},$$

$$V_{(1,\,2)} = \frac{d^3R}{dxdy^2} z^{(2)} + \frac{d^3S}{dxdy^2} z_1' + \frac{d^3T}{dxdy^2} z_2 + \frac{d^3U}{dxdy^2}$$
$$+ \frac{d^2R}{dy^2} z^{(3)} + \frac{d^2S}{dy^2} z_1^{(2)} + \frac{d^2T}{dy^2} z_2'$$
$$+ 2\left[\frac{d^2R}{dxdy} z_1^{(2)} + \frac{d^2S}{dxdy} z_2' + \frac{d^3T}{dxdy} z_3\right]$$
$$+ 2\left[\frac{dR}{dy} z_1^{(3)} + \frac{dS}{dy} z_2^{(2)} + \frac{dT}{dy} z_3'\right]$$
$$+ \frac{dR}{dx} z_2^{(2)} + \frac{dS}{dx} z_3' + \frac{dT}{dx} z_4$$

$$V_{(0,\,3)} = \frac{d^3R}{dy^3} z^{(2)} + \frac{d^3S}{dy^3} z_2' + \frac{d^3T}{dy^3} z_2 + \frac{d^3U}{dy^3}$$
$$+ 3\left[\frac{d^2R}{dy^2} z_1^{(2)} + \frac{d^2S}{dy^2} z_2' + \frac{d^2T}{dy^2} z_3\right]$$
$$+ 3\left[\frac{dR}{dy} z_2^{(2)} + \frac{dS}{dy} z + \frac{dT}{dy} z_4\right].$$

Die durch Differentiation von (1) entstehenden Gleichungen sind dann die folgenden:

$$\begin{aligned} V_{(3,0)}+Rz^{(5)}+Sz_1^{(4)}+Tz_2^{(3)} &= 0 \\ V_{(2,1)}+Rz_1^{(4)}+Sz_2^{(3)}+Tz_3^{(2)} &= 0 \\ V_{(1,2)}+Rz_2^{(3)}+Sz_3^{(2)}+Tz_4' &= 0 \\ V_{(0,3)}+Rz_3^{(2)}+Sz_4^{(1)}+Tz_5 &= 0. \end{aligned} \qquad \ldots(2)$$

Da nun zwischen den sechs hierin vorkommenden partiellen Differentialquotienten fünfter Ordnung von z die Gleichungen:

$$\begin{aligned} dz^{(4)} &= z^{(5)}dx+z_1^{(4)}dy \\ dz_1^{(3)} &= z_1^{(4)}dx+z_2^{(3)}dy \\ dz_2^{(2)} &= z_2^{(3)}dx+z_3^{(2)}dy \\ dz_3' &= z_3^{(2)}dx+z_4'\,dy \\ dz_4 &= z_4'\,dx+z_5\,dy \end{aligned}$$

bestehen, so kann man irgend welche fünf dieser Differentialquotienten durch den sechsten, z. B. durch $z^{(5)}$ ausdrücken, wie solches in den folgenden Gleichungen geschieht:

$$\begin{aligned} z_1^{(4)}dy &= dz^{(4)} - z^{(5)}dx, \\ z_2^{(3)}dy^2 &= dz_1^{(3)}dy - dz^{(4)}dx+z^{(5)}dx^2, \\ z_3^{(2)}dy^3 &= dz_2^{(2)}dy^2 - dz_1^{(3)}dydx + dz^{(4)}dx^2 - z^{(5)}dx^3, \\ z_4'\,dy^4 &= dz_3'\,dy^3 - dz_2^{(2)}dy^2dx + dz_1^{(3)}dydx^2 - dz^{(4)}dx^3 + z^{(5)}dx^4, \\ z_5\,dy^5 &= dz_4\,dy^4 - dz_3'dy^3dx + dz^{(2)}dy^2dx^2 - dz_1^{(3)}dydx^3 + dz^{(4)}dx^4 \\ &\qquad - z^{(5)}dx^5. \end{aligned}$$

Setzt man die hieraus für $z_1^{(4)}, z_2^{(3)}, \ldots z_5$ sich ergebenden Ausdrücke in die Gleichungen (2) ein, so wird jede derselben nur noch $z^{(5)}$ enthalten, dessen Coëfficient aus den früher (Art. 4 und 11) bezüglich $z^{(3)}$ und $z^{(4)}$ angegebenen Gründen gleich Null zu setzen ist. Da aber $z^{(5)}$ aus allen jenen Gleichungen verschwindet, wenn wieder

$$Rdy^2 - Sdydx + Tdx^2 = 0 \qquad \ldots(3)$$

gesetzt wird, so reduciren sich dieselben nach einigen sich von selbst ergebenden Reductionen auf die folgenden:

$$\left.\begin{aligned}
&V_{(3,0)}dy^2+(Sdy-Tdx)dz^{(4)}+Tdz_1^{(3)}dy=0\\
&V_{(2,1)}dy^2+(Sdy-Tdx)dz_1^{(3)}+Tdz_2^{(2)}dy=0\\
&V_{(1,2)}dy^2+(Sdy-Tdx)dz_2^{(2)}+Tdz_3'\;dy=0\\
&V_{(0,3)}dy^2+(Sdy-Tdx)dz_3'\;+Tdz_4\;dy=0,
\end{aligned}\right\}\quad\ldots(4)$$

welche, wenn T mittelst (3) eliminirt wird, auch in der Form:

$$\left.\begin{aligned}
&V_{(3,0)}dx^2+(Sdx-Rdy)dz_1^{(3)}+Rdz^{(4)}dx=0\\
&V_{(2,1)}dx^2+(Sdx-Rdy)dz_2^{(2)}+Rdz_1^{(3)}dx=0\\
&V_{(1,2)}dx^2+(Sdx-Rdy)dz_3'\;+Rdz_2^{(2)}dx=0\\
&V_{(0,3)}dx^2+(Sdx-Rdy)dz_4\;+Rdz_3'\;dx=0
\end{aligned}\right\}\quad\ldots(5)$$

geschrieben werden können. Es ist übrigens leicht zu sehen, dass durch Elimination von S die noch einfachere Form:

$$\left.\begin{aligned}
&V_{(3,0)}dxdy+Rdydz^{(4)}+Tdxdz_1^{(3)}=0\\
&V_{(2,1)}dxdy+Rdydz_1^{(3)}+Tdxdz_2^{(2)}=0\\
&V_{(1,2)}dxdy+Rdydz_2^{(2)}+Tdxdz_3'\;=0\\
&V_{(0,3)}dxdy+Rdydz_3'\;+Tdxdz_4\;=0
\end{aligned}\right\}\quad\ldots(6)$$

erhalten wird.

Die Systeme von Gleichungen, welche den besonderen Fällen $R=0$, oder $T=0$, oder $R=0$ und $T=0$ entsprechen, ergeben sich analog wie dies in den Art. 4 und 11 gezeigt wurde, aus (4) und (5).

Die beiden ersten Integrale vierter Ordnung von (1) sind, auf Grund je einer Auflösung von (3), durch Integration eines der drei Systeme (4), (5), (6), abzuleiten, wobei im Allgemeinen wieder die gegebene Gleichung und deren partielle Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung, ferner die Differentialformeln (11) des Art. 11, und die folgenden:

$$\begin{aligned}
&dz^{(3)}-[z^{(4)}dx+z_1^{(3)}dy]=0\\
&dz_1^{(2)}-[z_1^{(3)}dx+z_2^{(2)}dy]=0\\
&dz_2'\;-[z_2^{(2)}dx+z_3'\;dy]=0\\
&dz_3\;-[z_3'\;dx+z_4\;dy]=0
\end{aligned}$$

zu Hilfe genommen werden müssen.

17.

Die in der Natur des vorhin betrachteten Falles liegende Complication tritt schon bei der so einfachen Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{6}{x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}$$

scharf hervor. Auch an dieser zuerst von Euler (III. Art. 343) ebenfalls mittelst Reihenentwicklung, integrirten Gleichung scheiterte bis jetzt jede allgemeine Methode der Integration.

Bringt man sie in die Form

$$xz^{(2)}_1 - xz_2 - 6z' = 0 \qquad \ldots(1)$$

so ist $R = x$, $S = 0$, $T = -x$, $U = -6z'$, daher:

$$V_{(3,\,0)} = -3[z^{(4)} + z_2^{(2)}], \qquad V_{(2,\,1)} = -[4z_1^{(3)} + 2z_3']$$
$$V_{(1,\,2)} = -[5z_2^{(2)} + z_4\ ], \qquad V_{(0,\,3)} = -6z_3',$$

wofür die Gleichungen (6) des vorigen Artikels in:

$$\left.\begin{aligned}
&-[3z^{(4)} + 3z_2^{(2)}]dxdy + xdydz^{(4)} - xdxdz_1^{(3)} = 0\\
&-[4z_1^{(3)} + 2z_3'\ ]dxdy + xdydz_1^{(3)} - xdxdz_2^{(2)} = 0\\
&-[5z_2^{(2)} + z_4\ ]dxdy + xdydz_2^{(2)} - xdxdz_3' = 0\\
&-6z_3'dxdy + xdydz_3' - xdxdz_4 = 0
\end{aligned}\right\} \ldots(2)$$

übergehen. Man nehme hierzu noch die aus (1) durch zweimalige Differentiation nach x und y sich ergebenden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}
4z^{(3)} + 2z_2' + xz_2^{(2)} - xz^{(4)} &= 0\\
6z_2' - xz_2^{(2)} + xz_4 &= 0
\end{aligned}\right\} \ldots(3)$$

und die Differentialformeln:

$$\left.\begin{aligned}
dz^{(3)} - [z^{(4)}dx + z_1^{(3)}dy] &= 0\\
dz_2' - [z_2^{(2)}dx + z_3'\ dy] &= 0.
\end{aligned}\right\} \ldots(4)$$

Sonstige Hilfsgleichungen sind wegzulassen, weil ihre Multiplicatoren Null werden.

Betrachtet man nun die beiden Auflösungen der Gleichung

$$dy^2 = dx^2$$

so ergibt sich:

1. Für $dy = dx$, wenn man die Gleichungen (2), nach Weglassung des gemeinsamen Factors dx, der Ordnung nach mit

$$5x, \quad 3x, \quad 3x, \quad x,$$

ferner die Gleichungen (3) mit $18\,dx$, $6\,dx$ und endlich die Gleichungen (4) und zwar jede mit $-18\,x$ multiplicirt, sodann sämmtliche Gleichungen addirt:

$$x^2[5dz^{(4)} - 2dz_1^{(3)} - 2dz_3' - dz_4] - 3x[5z^{(4)} - 2z_1^{(3)} - 2z_3' - z_4]dx \\ -18x[dz^{(3)} + dz_2'] + 72[z^{(3)} + z_2']dx \qquad = 0$$

Diese Gleichung wird offenbar integrabel, wenn man sie mit x^5 dividirt; ihr Integral ist:

$$\frac{1}{x^3}[5z^{(4)} - 2z_1^{(3)} - 2z_3' - z_4] - \frac{18}{x^4}[z^{(3)} + z_2'] = a.$$

und jenes der Gleichung $dx - dy = 0$ ist $x - y = \alpha$, folglich:

$$x[5z^{(4)} - z_4] - 2x[z_1^{(3)} + z_3'] - 18[z^{(3)} + z_2'] = -8x^4\psi^{\mathrm{VII}}(x-y) \quad \ldots(5)$$

ein erstes Integral der Gleichung (1).

2. Für $dy = -dx$ ergibt sich, wenn man die Gleichungen (2) wieder von dem gemeinsamen Factor dx befreit, dann der Ordnung nach mit

$$-5x, \quad 3x, \quad -3x, \quad x,$$

ferner wie vorhin die Gleichungen (3) mit $18\,dx$, $6\,dx$, und die Gleichungen (4) mit $-18\,x$ multiplicirt, hierauf diese Gleichungen insgesammt addirt:

$$x^2[5dz^{(4)} + 2dz_1^{(3)} + 2dz_3' - dz_4] - 3x[5z^{(4)} + 2z_1^{(3)} + 2z_3' - z_4]dx \\ -18x[dz^{(3)} + dz_2'] + 72[z^{(3)} + z_2']dx \qquad = 0$$

Auch diese Gleichung wird integrabel, wenn man mit x^5 dividirt; ihr Integral ist:

$$\frac{1}{x^3}[5z^{(4)} + 2z_1^{(3)} + 2z_3' - z_4] - \frac{18}{x^4}[z^{(3)} + z_2'] = b$$

und da $dx + dy = 0$ also $x + y = \beta$, so folgt:

$$x[5z^{(4)} - z_4] + 2x[z_1^{(3)} + z_3'] - 18[z^{(3)} + z_2'] = -8x^4\varphi^{\mathrm{VII}}(x+y) \quad \ldots(6)$$

Die Gleichungen (5) und (6) stellen nun die beiden ersten Integrale der Gleichung (1) dar und sind von der **vierten** Ordnung. Der Factor 8 auf der rechten Seite wurde zur Vermeidung von Brüchen hinzugenommen.

Das allgemeine Integral lässt sich auf verschiedene Weise, z. B. wie folgt finden. Aus (5) und (6) findet man zunächst:

$$x[5z^{(4)}-z_4]-18[z^{(3)}+z_2']=-4x^4[\varphi^{\mathrm{VII}}(x+y)+\psi^{\mathrm{VII}}(x-y)] \quad \ldots(7)$$

$$z_1^{(3)}+z_3'=-2x^3[\varphi^{\mathrm{VII}}(x+y)-\psi^{\mathrm{VII}}(x-y)] \quad \ldots(8)$$

und aus (8)

$$z^{(3)}+z_2'=-2x^3[\varphi^{\mathrm{VI}}(x+y)+\psi^{\mathrm{VI}}(x-y)] \quad \ldots(9)$$

daher aus (7)

$$5z^{(4)}-z_4=-4x^3[\varphi^{\mathrm{VII}}(x+y)+\psi^{\mathrm{VII}}(x-y)]-36x^2[\varphi^{\mathrm{VI}}(x+y)+\psi^{\mathrm{VI}}(x-y)] \ldots($$

Verbindet man die aus (9) sich ergebende Gleichung

$$z^{(4)}+z_2^{(2)}=-2x^3[\varphi^{\mathrm{VII}}(x+y)+\psi^{\mathrm{VII}}(x-y)]-6x^2[\varphi^{\mathrm{VI}}(x+y)+\psi^{\mathrm{VI}}(x-y)]$$

mit (10) durch Elimination von $z^{(4)}$, so erhält man:

$$5z_2^{(2)}+z_4=-6x^3[\varphi^{\mathrm{VII}}(x+y)+\psi^{\mathrm{VII}}(x-y)]+6x^2[\varphi^{\mathrm{VI}}(x+y)+\psi^{\mathrm{VI}}(x-y)]$$

und hieraus:

$$5z^{(2)}+z_2=-6x^3[\varphi^{\mathrm{V}}(x+y)+\psi^{\mathrm{V}}(x-y)]+6x^2[\varphi^{\mathrm{IV}}(x+y)+\psi^{\mathrm{IV}}(x-y)] \quad \ldots($$

Da ferner aus (9):

$$\begin{aligned}z^{(2)}+z_2=&-2x^3[\varphi^{\mathrm{V}}(x+y)+\psi^{\mathrm{V}}(x-y)]+6x^2[\varphi^{\mathrm{IV}}(x+y)+\psi^{\mathrm{IV}}(x-y)]\\&-12x[\varphi'''(x+y)+\psi'''(x-y)]+12[\varphi''(x+y)+\psi''(x-y)] \quad \ldots(\end{aligned}$$

folgt, so kann man aus (11) und (12) sowohl für $z^{(2)}$ als z_2 eine Gleichung finden und daher z auf doppelte Art berechnen, um sich zu überzeugen, dass die Constanten der verschiedenen Integrationen nicht zu berücksichtigen sind.

Man findet:

$$\begin{aligned}z_2=&-x^3[\varphi^{\mathrm{V}}(x+y)+\psi^{\mathrm{V}}(x-y)]+6x^2[\varphi^{\mathrm{IV}}(x+y)+\psi^{\mathrm{IV}}(x-y)]\\&-15x[\varphi'''(x+y)+\psi'''(x-y)]+15[\varphi''(x+y)+\psi''(x-y)]\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}z=&-x^3[\varphi'''(x+y)+\psi'''(x-y)]+6x^2[\varphi''(x+y)+\psi''(x-y)]\\&-15x[\varphi'(x+y)+\psi'(x-y)]+15[\varphi(x+y)+\psi(x-y)]\end{aligned}$$

wofür man offenbar auch:

$$z = \varphi(x+y)+\psi(x-y) - [\varphi'(x+y)+\psi'(x-y)]$$
$$+\frac{2}{5}x^2[\varphi''(x+y)+\psi''(x-y)] - \frac{1}{15}x^3[\varphi'''(x+y)+\psi'''(x-y)]$$

setzen kann. Dies ist das allgemeine Integral der gegebenen Gleichung, welches, in etwas anderer Form geschrieben, mit dem von Euler gefundenen übereinstimmt.

18.

Wenn die gegebene Differentialgleichung

$$Rz^{(2)} + Sz'_1 + Tz_2 + U = 0 \qquad \ldots(1)$$

der bisherigen Voraussetzung entsprechend, zwei erste Integrale von der ersten oder zweiten, dritten, vierten Ordnung zulässt, so können diese Integrale, wie gezeigt wurde, mittelst der in den Art. 1, resp. 4, 11, 16 entwickelten Systeme von Gleichungen gefunden werden. Hierdurch aber sind gewissermassen nur die ersten Glieder des allgemeinen Falles gegeben, wenn die ersten Integrale von der n-Ordnung sind, unter n eine positive ganze Zahl verstanden. Die Bedingungen, unter welchen solche Integrale überhaupt bestehen, sind nun allerdings nicht bekannt; finden sie aber statt, oder geht man von der Hypothese aus, dass sie stattfinden, so ist die Möglichkeit, ihre Ordnungszahl zu bestimmen, durch die jenem allgemeinen Fall entsprechenden Gleichungen gegeben, deren Aufstellung der hauptsächliche Gegenstand dieser Arbeit ist.

Um diese Gleichungen zu erhalten, bedarf es indessen keiner weiteren Rechnung, da der durchaus gleichmässige Fortgang derselben für $n = 1, 2, 3, 4$ jene des allgemeinen Falles unmittelbar erkennen lässt.

Es sei zur Abkürzung:

$$f = Rz^{(2)} + Sz'_1 + Tz_2 + U \qquad \ldots(2)$$

und

$$V_{(r,\,s)} = \frac{d^{r+s}f}{dx^r dy^s} - [Rz_s^{(r+2)} + Sz_{s+1}^{(r+1)} + Tz_{s+2}^{(r)}] \qquad \ldots(3)$$

wobei die in dem ersten Glied rechter Hand angedeuteten Differentiationen sich auf alle in f vorkommenden von x und y abhängigen Grössen erstrecken.

Die beiden ersten Integrale n-Ordnung sind dann mit Hilfe der für alle Ordnungen unverändert fortbestehenden Gleichung:

$$Rdy^2 - Sdydx + Tdx^2 = 0 \qquad \text{...(4)}$$

resp. einer ihrer Auflösungen

$$dy = kdx, \quad dy = ldx \qquad \text{...(5)}$$

und, im Allgemeinen, unter Beiziehung der Gleichungen:

$$f_s^{(r)} = 0, \qquad r+s \gtreqless n-2 \qquad \text{...(6)}$$

$$dz_s^{(r)} = z_s^{(r+1)}dx + z_{s+1}^{(r)}dy, \quad r+s \gtreqless n-1 \qquad \text{...(7)}$$

entweder aus dem System:

$$\left.\begin{array}{l} V_{(n-1,\,0)}dy^2 + (Sdy - Tdx)dz^{(n)} + Tdydz_1^{(n-1)} = 0 \\ V_{(n-2,\,1)}dy^2 + (Sdy - Tdx)dz_1^{(n-1)} + Tdydz_2^{(n-2)} = 0 \\ \\ V_{(0,\,n-1)}dy^2 + (Sdy - Tdx)dz'_{n-1} + Tdydz_n = 0 \end{array}\right\} \text{...(8)}$$

oder aus:

$$\left.\begin{array}{l} V_{(n-1,\,0)}dx^2 + (Sdx - Rdy)dz_1^{(n-1)} + Rdxdz^{(n)} = 0 \\ V_{(n-2,\,1)}dx^2 + (Sdx - Rdy)dz_2^{(n-2)} + Rdxdz_1^{(n-1)} = 0 \\ \\ V_{(0,\,n-1)}dx^2 + (Sdx - Rdy)dz_n + Rdxdz'_{n-1} = 0 \end{array}\right\} \text{...(9)}$$

oder endlich aus:

$$\left.\begin{array}{l} V_{(n-1,\,0)}dxdy + Rdydz^{(n)} + Tdxdz_1^{(n-1)} = 0 \\ V_{(n-2,\,1)}dxdy + Rdydz_1^{(n-1)} + Tdxdz_2^{(n-2)} = 0 \\ \\ V_{(0,\,n-1)}dxdy + Rdydz'_{n-1} + Tdxdz_n = 0 \end{array}\right\} \text{...(10)}$$

in der Weise abzuleiten, dass man, je eine der Gleichungen (5) zu Grunde legend, aus (6) und (7) und einem der drei angegebenen Systeme eine integrable Gleichung bildet.

Ist $\qquad P = a \quad$ für $\quad dy = kdx$

und $\qquad Q = b \quad$ für $\quad dy = ldx$

das Integral dieser Gleichung und sind $p = \alpha$, $q = \beta$ die Integrale der Gleichungen $dy - kdx = 0$, resp. $dy - ldx = 0$

so sind:

$$P = \varphi(p), \quad Q = \psi(q)$$

die gesuchten ersten Integrale der gegebenen Gleichung (1).

In den besonderen Fällen: $R = 0$, oder $T = 0$, oder $R = 0$ und $T = 0$ sind statt (10) die aus (8) oder (9) hierfür sich ergebenden Systeme von Gleichungen, und statt (5) die Auflösungen:

$$\begin{aligned} dx &= 0, \quad Sdy - Tdx = 0 \quad \text{wenn } R = 0; \\ dy &= 0, \quad Sdx - Rdy = 0 \quad \text{wenn } T = 0; \\ dx &= 0, \quad dy = 0 \quad \text{wenn } R = 0,\ T = 0 \end{aligned}$$

anzuwenden.

Das allgemeine Integral der gegebenen Gleichung ist aus den beiden ersten Integralen, auch wenn diese von verschiedener Ordnung sind, unter Zuziehung der Gleichungen (6) und (7) abzuleiten.

Hierin besteht die Methode, deren Auseinandersetzung ich mir zur Aufgabe gemacht habe.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1883

Band/Volume: 88_2

Autor(en)/Author(s): Winckler Anton

Artikel/Article: Über eine neue Methode zur Integration der linearen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit zwei unabhängigen Veränderlichen. 7-73