Zur Reduction hyperelliptischer Integrale.

Von **Ludwig Kotányi.**

(Vorgelegt in der Sitzung am 7. Juni 1883.)

Wenn ein zur Irrationalität $\sqrt{R(z)}$ gehöriges hyperelliptische Integral, wo $R(z)$ eine ganze Function vom Grade $(2p+1)$ ist, sich mittelst einer algebraischen Substitution auf ein hyperelliptisches Integral mit der Irrationalität $\sqrt{R_1(y)}$ reducieren lässt, worin $R_1(y)$ eine ganze Function vom Grade $(2\sigma+1)$ in y bedeutet, $\sigma \leqq p$, so findet bekanntlich,[1] wenn man unter $F(z)$ ganze Functionen $(p-1)$-sten Grades versteht, auch folgendes System von hyperelliptischen Differentialgleichungen statt.

$$
1)\quad
\begin{aligned}
\frac{dy_1}{\sqrt{R_1(y_1)}} + \frac{dy_2}{\sqrt{R_1(y_2)}} + \qquad\qquad + \frac{dy_\sigma}{\sqrt{R_1(y_\sigma)}} &= \frac{2F_0(z)dz}{\sqrt{R(z)}}\\
\frac{y_1 dy_1}{\sqrt{R_1(y_1)}} + \frac{y_2 dy_2}{\sqrt{R_1(y_2)}} + \qquad\qquad + \frac{y_\sigma dy_\sigma}{\sqrt{R_1(y_\sigma)}} &= \frac{2F_1(z)dz}{\sqrt{R(z)}}\\
\frac{y_1^k dy_1}{\sqrt{R_1(y_1)}} + \frac{y_2^k dy_2}{\sqrt{R_1(y_2)}} + \qquad\qquad + \frac{y_\sigma^k dy_\sigma}{\sqrt{R_1(y_\sigma)}} &= \frac{2F_k(z)dz}{\sqrt{R(z)}}\\
\frac{y_1^{\sigma-1} dy_1}{\sqrt{R_1(y_1)}} + \frac{y_2^{\sigma-1} dy_2}{\sqrt{R_1(y_2)}} + \qquad\qquad + \frac{y_\sigma^{\sigma-1} dy_\sigma}{\sqrt{R_1(y_\sigma)}} &= \frac{2F_{\sigma-1}(z)dz}{\sqrt{R(z)}}.
\end{aligned}
$$

In diesen Gleichungen bedeuten

$$y_1,\ y_2, \qquad\qquad y_\sigma$$

[1] Königsberger: „Vorl. über die Theorie der hyperell. Integrale." 7. Vorl.

die Lösungen einer algebraischen Gleichung

$$y^{\sigma}+\chi_1(z)y^{\sigma-1}+ \qquad\qquad +\chi_{\sigma}(z)=0, \tag{2}$$

deren Coëfficienten rational aus z zusammengesetzt sind. Ausserdem lassen sich dann

$$\sqrt{R_1(y_1)},\quad \sqrt{R_1(y_2)},\quad .\sqrt{R_1(y_\alpha)}.\quad .\sqrt{R_1(y_\sigma)}$$

als rationale Functionen von z und der zugehörigen y-Grösse, multiplicirt mit $\sqrt{R(z)}$ ausdrücken, so dass

$$\sqrt{R_1(y_\alpha)}=f(z_1,y_\alpha)\sqrt{R(z)}, \tag{3}$$

worin $f(z_1, y_\alpha)$ eine rationale Function von z und y_α bedeutet. Umgekehrt ist ersichtlich, dass die Existenz der Gleichungen 2) und 3) ein Gleichungssystem von der Form 1) nach sich zieht. Denn aus 2) folgt, unter φ eine rationale Function verstanden,

$$dy_\alpha=\varphi(z_1, y_\alpha)dz$$

oder

$$y_\alpha^k dy_\alpha=y_\alpha^k\varphi(z_1,y_\alpha)dz$$

und es sei $k\leqq(\sigma-1)$. Diese Gleichung durch 3) dividirt, gibt

$$\frac{y_\alpha^k dy_\alpha}{\sqrt{R_1(y_\alpha)}}=\frac{\psi(z_1,y_\alpha)dz}{\sqrt{R(z)}},$$

und wieder ist ψ eine rationale Function der Argumente.

Durch Summation nach α von 1 bis σ erhält man

$$\sum_1^\sigma{}_\alpha \frac{y_\alpha^k dy_\alpha}{\sqrt{R_1(y_\alpha)}}=\frac{dz}{\sqrt{R(z)}}\sum_1^\sigma{}_\alpha \psi(z_1,y_\alpha). \tag{4}$$

Da aber

$$\sum_1^\sigma{}_\alpha \psi(z_1,y_\alpha)=\Phi(z)$$

als rationale symmetrische Function der Lösungen von 2) sich als rationale Function $\Phi(z)$ von z darstellen lässt, so ist 4) eine der Gleichungen aus 1), da man ja auf der linken, also auch auf der rechten Seite Integrale erster Gattung erhält.

Um also hyperelliptische Integrale von der Ordnung $(p-1)$ zu finden, welche sich auf niedere, also auf hyperelliptische Integrale von der Ordnung $(\sigma-1)$ reducieren lassen, muss man $R(z)$ so wählen, dass man die Coëfficienten von 2) so bestimmen kann, dass die Gleichung 3) stattfindet, oder dass der Quotient

$$\frac{\sqrt{R_1(y)}}{\sqrt{R(z)}} = f(z_1, y)$$

eine rationale Function von z und y wird, oder dass er mit y gleichverzweigt ist, wobei die Coëfficienten von $R_1(y)$ auch erst zu bestimmen sein werden.

Zuerst soll die Frage nach der Reduction auf elliptische Integrale erledigt werden.[1]

Es sei also

$$R(z) = (z-\alpha_1)(z-\alpha_2). \qquad .(z-\alpha_{2p+1})$$

$$R_1(y) = y(y-1)(y-\mu).$$

Dann ist zu untersuchen, wann sich die Coëfficienten in

$$5) \qquad y = \frac{U}{V},$$

worin U und V ganze Functionen vom Grade m seien und die Grösse μ so bestimmen lassen, dass

$$6) \qquad \frac{\sqrt{y(y-1)(y-\mu)}}{\sqrt{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2). \qquad (z-\alpha_{2p+1})}}$$

eine rationale Function von z wird.

Bezeichnet man nun die Werthe

$$0,\ 1,\ \mu,\ \infty$$

[1] Vgl. Königsberger: „Allgem. Untersuchungen a. d. Theorie der Differentialgleichungen," §. 12.

in irgend einer Reihenfolge mit

$$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4,$$

und wählt m als ungerade Zahl so, dass

$$2m < 2p+1 < 3m,$$

dann wird der Quotient 6) eine rationale Function von z, wenn man nach 5) entsprechen lässt

$$\begin{array}{lll} \text{den Werthen } z = \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m & \text{den Werth} & y = \beta_1, \\ \quad" \quad " \quad z = \alpha_{m+1}, \alpha_{m+2}, \ldots \alpha_{2m} & \quad " & y = \beta_2, \\ \qquad\qquad z = \alpha_{2m+1}, \alpha_{2m+2}, \ldots \alpha_{2p+1} & \quad " & y = \beta_3, \\ \text{dem Werthe } z = \infty & \quad " & y = \beta_4, \end{array}$$

wenn man ausserdem festsetzt, dass die anderen, dem Werthe $y = \beta_3$ entsprechenden z-Werthe, deren Anzahl

$$3m - (2p+1)$$

ist, zu je zwei einander gleich sind, wenn ebenso die dem $y = \beta_4$ ausser $z = \infty$ entsprechenden

$$m - 1$$

z-Werthe zu je zwei einander gleich werden.

Diese Zuordnung gibt für die $(2m+1)$ Constanten in 5) und die Grösse μ

$$2p+2+\frac{3m-(2p+1)}{2}+\frac{m-1}{2}$$

Bedingungsgleichungen, so dass sich für die Grössen α

$$p-1$$

Bedingungen ergeben.

Ähnlich trifft man die Zuordnung, wenn m einer anderen Ungleichung genügt, oder wenn m eine gerade Zahl ist. Man kommt immer zu derselben Zahl von Bedingungen für die Grössen α. Man hat nur stets m Verzweigungen des Nenners von 6) einem Verzweigungspunkte des Zählers zuzuordnen.

Da aber die Anzahl der letzteren nur vier ist, so darf nicht $2p+2 > 4m$; es muss vielmehr

$$4m \geqq 2p+2 \qquad\qquad m \geqq \frac{p+1}{2}.$$

Der niedrigste Transformationsgrad ist also für ein

$$\text{gerades } p\colon \frac{p}{2}+1 \qquad\qquad \text{ungerades } p\colon \frac{p+1}{2}.$$

Nimmt man nun in der oben stehenden Zuordnung

$$\beta_1 = 0,\ \beta_2 = \infty,\ \beta_3 = 1,\ \beta_4 = \mu,$$

so ergiebt sich

$$U = \mu\,(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\ldots(z-\alpha_m),$$

$$V = (z-\alpha_{m+1})(z-\alpha_{m+2})\ldots(z-\alpha_{2m}),$$

$$\mu = \frac{(\alpha_{2m+1}-\alpha_{m+1})(\alpha_{2m+1}-\alpha_{m+2})\ldots(\alpha_{2m+1}-\alpha_{2m})}{(\alpha_{2m+1}-\alpha_1)(\alpha_{2m+1}-\alpha_2)\ldots(\alpha_{2m+1}-\alpha_m)} =$$

$$= \frac{(\alpha_{2m+2}-\alpha_{m+1})(\alpha_{2m+2}-\alpha_{m+2})\ldots(\alpha_{2m+2}-\alpha_{2m})}{(\alpha_{2m+2}-\alpha_1)(\alpha_{2m+2}-\alpha_2)\ldots(\alpha_{2m+2}-\alpha_m)} =$$

$$= \ldots = \frac{(\alpha_{2p+1}-\alpha_{m+1})(\alpha_{2m+2}-\alpha_{m+2})\ldots(\alpha_{2p+1}-\alpha_{2m})}{(\alpha_{2p+1}-\alpha_1)(\alpha_{2p+1}-\alpha_2)\ldots(\alpha_{2p+1}-\alpha_m)}$$

Diese $(2p-2m)$ Bedingungen für die Grössen α hängen nur von Differenzen der α ab. Dies ist eine Eigenschaft der Bedingungsgleichungen für jede Transformation und Reduction hyperelliptischer Integrale. Denn substituirt man für z den Ausdruck $(z-h)$, wo h eine beliebige Grösse ist, so müssen die neuen α-Grössen — diese sind jetzt $(\alpha+h)$ — wieder denselben Bedingungsgleichungen genügen, da der Charakter des Integrals nicht verändert wurde; also hängen die Bedingungsgleichungen nur von den Differenzen der α-Grössen ab.

Genügen nun die Grössen den Bedingungen, und sind die Coëfficienten in 5) der Zuordnung gemäss bestimmt, dann sieht man auch umgekehrt, dass zu der gegebenen Irrationalität gehörige hyperelliptische Integrale erster Gattung vorhanden sind, welche sich auf elliptische Integrale reducieren. Denn es ist dann

$$\frac{dy}{\sqrt{y(y-1)(y-\mu)}} = \frac{V\frac{dU}{dz} - U\frac{dV}{dz}}{\sqrt{UV(V-U)(\mu V-U)}}\,dz =$$

$$= \frac{V\frac{dU}{dz} - U\frac{dV}{dz}}{\sqrt{\mu(z-\alpha_1)\ldots(z-\alpha_{2m})(z-c_1)^2\ldots(z-c_{\frac{m-1}{2}})^2(z-\alpha_{2m+1})\ldots(z-\alpha_{2p+1})(z-d_1)\ldots(z-d_{\frac{3m-(2p+1)}{2}})^2}}$$

worin

$$(z-c_\rho)^2 \qquad \rho = 1, 2, \ldots \frac{(m-1)}{2}$$

die in

$$\mu V-U,$$

$$(z-d_\sigma)^2 \qquad \sigma = 1, 2 \ldots \ldots \frac{3m-(2p+1)}{2}$$

die in

$$V-U$$

in Folge der Zuordnung enthaltenen Doppelfactoren sind. Ihre ersten Potenzen treten vor die Wurzel und sind bekanntlich im Zähler enthalten, der also den Grad

$$2m-2-\frac{m-1}{2}-\frac{3m-(2p+1}{2}=p-1$$

erhält und deren Coëfficienten sich auch als Functionen der Grösse α ergeben. Soll aber der Zähler nur eine ganze Function vom Grade k sein, so müssen die Coëfficienten der

$$p-1-k$$

höchsten Potenzen verschwinden, was eben so viele Bedingungen für die α ergibt. Für diese hat man also im Ganzen

$$p-1+p-1-k=2(p-1)-k$$

Bedingungen. Unter der Wurzel befinden sich wesentlich nur $(2p-1)$ von einander unabhängige Grössen, da durch eine lineare Substitution

$$\alpha_1=0 \qquad \alpha_2=1$$

gemacht werden kann, was im Folgenden immer als geschehen vorausgesetzt werden soll. Diese willkürlichen Grössen kann man so wählen, dass sie den Bedingungen genügen, und es bleiben noch

$$2p-1-2(p-1)+k=k+1$$

Grössen willkürlich. Für

$$k=p-1$$

erhält man den Satz:

In einem hyperelliptischen Integrale von der Ordnung $(p-1)$ und dem Grade $(p-1)$ kann man p Grössen willkürlich wählen und die anderen so bestimmen, dass das hyperelliptische Integral sich auf ein elliptisches Integral reduciert.

Es sei nun p eine gerade Zahl, und nehme man die Transformation niedrigsten Grades

$$y=\frac{a_0+a_1z+\ldots\ldots+a_{\frac{p}{2}+1}z^{\frac{p}{2}+1}}{1+b_1z+\ldots\ldots+b_{\frac{p}{2}+1}z^{\frac{p}{2}+1}}$$

und bestimme die Zuordnung so, dass

den Werthen $z = 0, 1, \alpha_3, . \quad . \alpha_{\frac{p}{2}+1}$ entspricht $y = 0$,

$z = \alpha_{\frac{p}{2}+2}, \alpha_{\frac{p}{2}+3}, \quad . \alpha_{p+2} \qquad y = 1$,

$z = \infty, \alpha_{p+3}, \quad . \alpha_{\frac{3p}{2}+2} \qquad y = \infty$,

$z = \alpha_{\frac{3p}{2}+3} \quad ., \alpha_{2p+1} \qquad y = \mu$,

dass ferner die zwei anderen dem $y = \mu$ entsprechenden Werthe von z einander gleich seien, so hat y in Folge der zwei ersten Bedingungen und der Bedingung $y = \infty$ für $z = \infty$ die Form

$$7) \qquad y = \frac{z(z-1)(c_0 + c_1 + . \quad . + c_{\frac{p}{2}-1} z^{\frac{p}{2}-1})}{1 + d_1 z + d_2 z^2 + \quad . + d_{\frac{p}{2}} z^{\frac{p}{2}}}$$

und man kann die p Transformations-Coëfficienten als die willkürlichen ansehen. Dann bestimmen sich die Grössen α bis zu $\alpha_{\frac{3p}{2}+2}$ eindeutig durch diese Constanten. Da für $y = \mu$ die Gleichung zwei gleiche Lösungen haben soll, μ aber in der Discriminante in der p-ten Potenz vorkommt, so erhält man für μ, also auch für

$$\alpha_{\frac{3p}{2}+3}, \alpha_{\frac{3p}{2}+4}, . \quad . \alpha_{2p+1}$$

p verschiedene Werthe, so dass mit Hilfe derselben Transformationsgleichung 7), wo alle Constanten willkürlich sind, folgende Reductionen statthaben:

$$\int \frac{(A_1+B_1 z+\ldots\ldots+N_1 z^{p-1})\,dz}{\sqrt{z(z-1)(z-\alpha_3)(z-\alpha_4)\ldots(z-\alpha_{\frac{3p}{2}+2})(z-\alpha^{(1)}_{\frac{3p}{2}+3})\ldots(z-\alpha^{(1)}_{2p+1})}} = \int \frac{dy}{\sqrt{y(y-1)(y-\mu_1)}}$$

$$\int \frac{(A_2+B_2 z+\ldots\ldots+N_2 z^{p-1})\,dz}{\sqrt{z(z-1)(z-\alpha_3)(z-\alpha_4)\ldots(z-\alpha_{\frac{3p}{2}+2})(z-\alpha^{(2)}_{\frac{3p}{2}+3})\ldots(z-\alpha^{(2)}_{2p+1})}} = \int \frac{dy}{\sqrt{y(y-1)(y-\mu_2)}}$$

$$\int \frac{(A_p+B_p z+\ldots\ldots+N_p z^{p-1})\,dz}{\sqrt{z(z-1)(z-\alpha_3)(z-\alpha_4)\ldots(z-\alpha_{\frac{3p}{2}+2})(z-\alpha^{(p)}_{\frac{3p}{2}+3})\ldots(z-\alpha^{(p)}_{2p+1})}} = \int \frac{dy}{\sqrt{y(y-1)(y-\mu_p)}}.$$

Will man unter den Wurzeln der hyperelliptischen Integrale dieselben Ausdrücke haben, so muss man die Coëfficienten in 7) so bestimmen, dass

$$\alpha^{(1)}_{\frac{3p}{2}+\nu} = \alpha^{(s)}_{\frac{3p}{2}+\nu} \qquad s = 2, 3, \ldots, p \qquad \nu = 3, 4, \ldots \left(\frac{p}{2}-1\right).$$

Diese Bestimmung ist im Allgemeinen nur möglich, wenn

$$\left(\frac{p}{2}-1\right)(p-1) \leqq p$$

was nur für $p = 2$ und $p = 4$ erfüllt ist, in welchem Falle noch zwei, beziehungsweise nur eine Constante willkürlich bleiben. Also: Für hyperelliptische Integrale, deren Geschlecht eine gerade Zahl ist, existieren im Allgemeinen nur für hyperelliptische Integrale erster und dritter Ordnung so viel Integrale, als das Geschlecht anzeigt, welche sich mit Hilfe derselben Transformation vom niedrigsten Grade auf elliptische Integrale reducieren.

Ist aber p eine ungerade Zahl, so sieht man unmittelbar, dass für den niedrigsten Transformationsgrad ein ähnlicher Satz nicht existiert. Wählt man aber den nächst höheren Grad, also

$$y = \frac{a_0 + a_1 z + \ldots\ a_{\frac{p+3}{2}} z^{\frac{p+3}{2}}}{1 + b_1 z + \ldots\ b_{\frac{p+3}{2}} z^{\frac{p+3}{2}}}$$

und trifft die Zuordnung, dass

$$\begin{array}{llll} \text{den Werthen} & z = 0, 1, \alpha_3 \ldots\ \alpha_{\frac{p+3}{2}} & \text{entspricht} & y = 0, \\ \text{"} & z = \alpha_{\frac{p+5}{2}} \ldots\ \alpha_{p+1} & & y = 1, \\ & z = \infty, \alpha_{p+2} \ldots\ \alpha_{\frac{3p+3}{2}} & & y = \infty, \\ & z = \alpha_{\frac{3p+5}{2}} \ldots\ \alpha_{2p+1} & & y = \mu, \end{array}$$

dass ferner die zwei anderen, dem $y = 1$ entsprechenden z-Werthe einander gleich seien, und dasselbe für $y = \mu$, so hat dann die Transformationsgleichung in Folge der zwei ersten Bedingungen die Form

$$y = \frac{z(z-1)(c_0 + c_1 z + \ldots\ c_{\frac{p-1}{2}} z^{\frac{p-1}{2}})}{1 + d_1 z + \ldots\ d_{\frac{p+1}{2}} z^{\frac{p+1}{2}}},$$

worin sich durch die für $y = 1$ angenommene Verzweigung noch eine Constante bestimmt, so dass man die übrig bleibenden

p Constanten als die willkürlichen ansehen kann. Für μ erhält man $(p+1)$ Werthe, unter denen aber $\mu = 1$ enthalten ist, so dass wieder nur folgende p Reductionen stattfinden:

$$\int \frac{(A_1+B_1z+\ldots+N_1z^{p-1})\,dz}{\sqrt{z(z-1)(z-\alpha_3)\ldots(z-\alpha_{\frac{3p+3}{2}})(z-\alpha^{(1)}_{\frac{3p+5}{2}})\ldots(z-\alpha^{(1)}_{2p+1})}} =$$

$$= \int \frac{dy}{\sqrt{y(y-1)(y-\mu_1)}},$$

$$\int \frac{(A_2+B_2z+\ldots+N_2z^{p-1})\,dz}{\sqrt{z(z-1)(z-\alpha_3)\ldots(z-\alpha_{\frac{3p+2}{2}})(z-\alpha^{(2)}_{\frac{3p+5}{2}})\ldots(z-\alpha^{(2)}_{2p+1})}} =$$

$$= \int \frac{dy}{\sqrt{y(y-1)(y-\mu_2)}},$$

$$\int \frac{(A_p+B_pz+\ldots+N_pz^{p-1})\,dz}{\sqrt{z(z-1)(z-\alpha_3)\ldots(z-\alpha_{\frac{3p+3}{2}})(z-\alpha^{(p)}_{\frac{3p+1}{2}})\ldots(z-\alpha^{(p)}_{2p-1})}} =$$

$$= \int \frac{dy}{\sqrt{y(y-1)(y-\mu_p)}}.$$

Gleiche Ausdrücke unter den Wurzeln der hyperelliptischen Integrale kann man im Allgemeinen wieder nur dann herstellen, wenn

$$\frac{p-1}{2}(p-1) \leqq p,$$

was für $p = 1$ und $p = 3$ erfüllt ist, in welchen Fällen noch eine Constante willkürlich bleibt. Wir haben also den Satz:

Für hyperelliptische Integrale, deren Geschlecht eine ungerade Zahl ist, existieren nur für elliptische Integrale und hyperelliptische Integrale zweiter

Ordnung so viel Integrale erster Gattung, als das Geschlecht anzeigt, welche mit Hilfe derselben Transformation, deren Grad den niedrigsten um 1 übersteigt, auf je ein elliptisches Integral reducierbar sind.

Als Beispiel diene der Fall $p = 2$. Dann ist

$$y = \frac{a_o + a_1 z + a_2 z^2}{b_o + b_1 z + z^2}$$

und die Zuordnung so, dass

$$\begin{array}{llll} \text{den Werthen} & z = 0, \infty & \text{entspricht} & y = 0, \\ \quad " & z = \alpha_1, \alpha_2 & & y = \infty, \\ & z = 1, \alpha_3 & & y = 1 \end{array}$$

und dass für $y = \mu$ die beiden z-Werthe gleich seien.

Es ergibt sich

$$y = \frac{(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)z}{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)}$$

$$\alpha_3 = \alpha_1 \alpha_2$$

und μ aus der Discriminante der quadratischen Gleichung

$$\mu z^2 - [\mu(\alpha_1 + \alpha_2) + (1-\alpha_1)(1-\alpha_2)]z + \mu \alpha_1 \alpha_2 = 0$$

$$\mu_1 = -\frac{(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)}{(\sqrt{\alpha_1} - \sqrt{\alpha_2})^2} \qquad \mu_2 = -\frac{(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)}{(\sqrt{\alpha_1} - \sqrt{\alpha_2})^2},$$

so dass man mit Hilfe derselben Gleichung die zwei Reductionen hat:

$$\int_o^z \frac{(z+\sqrt{\alpha_1 \alpha_2})dz}{\sqrt{z(z-1)(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)(z-\alpha_1\alpha_2)}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)}} \int_o^y \frac{dy}{\sqrt{y(1-y)\left[1+\frac{(\sqrt{\alpha_1}-\sqrt{\alpha_2})^2}{(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)}y\right]}};$$

$$\int_0^z \frac{(z-\sqrt{\alpha_1\alpha_2})\,dz}{\sqrt{z(z-1)(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)(z-\alpha_1\alpha_2)}} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)}}\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{y(1-y)\left[1+\frac{(\sqrt{\alpha_1}+\sqrt{\alpha_2})^2}{(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)}\,y\right]}}.$$

Durch die Substitution

$$k = -\frac{1}{\alpha_1} \qquad \lambda = -\frac{1}{\alpha_2}$$

erhält man die bekannten Jacobi'schen Integrale.

Ein Beispiel für den ersten Satz bilde die Reduction eines hyperelliptischen Integrals zweiter Ordnung auf elliptische Integrale mittelst der Transformation zweiten Grades. Es sei also

$$y = \frac{a_0 + a_1 z + a_2 z^2}{b_0 + b_1 z + z^2}$$

und es entspreche

$$\begin{array}{llll} \text{den Werthen} & z = 0, \infty & \text{der Werth} & y = 0, \\ & z = 1, \alpha_1 & & y = 1, \\ & z = \alpha_2, \alpha_3 & & y = \mu, \\ & z = \alpha_4, \alpha_5 & & y = \infty, \end{array}$$

so ist

$$y = \frac{(1-\alpha_4)(1-\alpha_5)z}{(z-\alpha_4)(z-\alpha_5)}$$

$$\mu = \frac{(1-\alpha_4)(1-\alpha_5)\alpha_2}{(\alpha_2-\alpha_4)(\alpha_2-\alpha_5)}$$

und es muss

$$\alpha_1 = \alpha_2\alpha_3 = \alpha_4\alpha_5;$$

dann ist

$$\int \frac{(\alpha_1 - z^2)\,dz}{\sqrt{z(z-1)(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)(z-\alpha_3)(z-\alpha_4)(z-\alpha_5)}} =$$

$$= \frac{\sqrt{(\alpha_2-\alpha_4)(\alpha_2-\alpha_5)}}{(1-\alpha_4)(1-\alpha_5)\sqrt{\alpha_2}}\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{y(1-y)\left[\frac{(\alpha_2-\alpha_4)(\alpha_2-\alpha_5)}{\alpha_2(1-\alpha_4)(1-\alpha_5)}\,y\right]}}.$$

Wählt man aber die Transformation dritten Grades, also

$$y = \frac{b_o + b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3}{1 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3}$$

und ordnet zu

$$\begin{array}{ll} \text{den Werthen } z = 0 & \text{den Werth } y = 0, \\ z = 1, \alpha_1, \alpha_2 & y = 1, \\ z = \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5 & y = \mu, \\ z = \infty & y = \infty, \end{array}$$

so dass die dem $y = 0$ entsprechenden zwei anderen z-Werthe einander gleich seien, und dasselbe für $y = \infty$, so erhält man

$$a_3 = 0 \qquad a_2 = \frac{\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 - 1 - \alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_3 \alpha_4 \alpha_5 - \alpha_1 \alpha_2}$$

$$a_1 = \frac{\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3 \alpha_4 - \alpha_3 \alpha_5 - \alpha_4 \alpha_5}{\alpha_3 \alpha_4 \alpha_5 - \alpha_1 \alpha_2}$$

$$b_3 = \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2} \qquad b_2 = \frac{\alpha_3 \alpha_4 \alpha_5 a_2 - \alpha_3 - \alpha_4 - \alpha_5}{\alpha_1 \alpha_2}$$

$$b_1 = \frac{\alpha_3 \alpha_4 \alpha_5 a_1 + \alpha_3 \alpha_4 + \alpha_3 \alpha_5 + \alpha_4 \alpha_5}{\alpha_1 \alpha_2}$$

und die Bedingungsgleichungen zwischen den Lösungen sind

$$b_2^2 - 4 b_1 b_3 = 0 \qquad a_1^2 - 4 a_2 = 0.$$

Um nun das allgemeine Reductionsproblem zu behandeln,[1] sei zuerst das Geschlecht σ des hyperelliptischen Integrals, auf welches reduciert werden soll, eine gerade Zahl

$$\sigma = 2\pi.$$

Dann sind in

$$\chi_o(z) y^{2\pi} + \chi_1(z) y^{2\pi - 1} + \cdots + \chi_{2\pi}(z) = 0 \tag{8}$$

die Coëfficienten der rationalen ganzen Functionen

$$\chi_o(z), \quad \chi_1(z), \ldots \chi_{2\pi}(z),$$

[1] Vgl. Königsberger: „Über die Erweiterung des Jacobi'schen Transformationsprincips." Crelle's Journal, Bd. 87.

und in dem Ausdrucke

9) $$\frac{\sqrt{(y-\beta_1)(y-\beta_2)\dots(y-\beta_{4\pi+1})}}{\sqrt{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\dots(z-\alpha_{2p+1})}}$$

die Grössen

$$\beta_1,\quad \beta_2,\dots\beta_{4\pi+1}$$

so zu bestimmen, dass 9) eine rationale Function von z und y wird.

Nun lautet die Entwicklung des Nenners von 9) um einen Punkt α

$$(z-\alpha_\rho)^{1/2}[1+a_1(z-\alpha_\rho)+a_2(z-\alpha_\rho)^2+\dots];$$

also muss

10) $$y-\beta_\rho = b_1(z-\alpha_\rho)+b_2(z-\alpha_\rho)^2+\dots$$

oder

11) $$y-c_o = c_1(z-\alpha_\rho)^{1/2}+c_2(z-\alpha_\rho)^{2/2}+\dots$$

worin c_o mit keinem der β zusammenfällt. In beiden Fällen sieht man unmittelbar, dass dann der Quotient 9) in dem Bereiche von α_ρ thatsächlich wie y selbst verzweigt ist.

Da aber einem α-Werthe 2π Werthe von y entsprechen, welche, wenn nicht $y = \beta_\rho$ ist, nach Gleichung 11) paarweise einander gleich sein müssen, so kann die Zuordnung 10) nicht bestehen; es sei denn, dass einem α-Werthe zwei Werthe β entsprechen, in welchem Falle man noch einem α dieselben zwei β entsprechen lässt.

Die Zuordnung 11) für jedes α_ρ durchgeführt, liefert

$$\pi(2p+1)$$

Bedingungen. Dieselbe Zuordnung gilt für $z = \infty$, was weitere

$$\pi$$

Bedingungen gibt.

Nun ist der Zähler von 9) in β_ρ verzweigt. Da ihm kein α_ρ entsprechen kann, so muss

12) $$y-\beta_\rho = d_2(z-\gamma_\rho)^2+d_3(z-\gamma_\rho)^3+\dots$$

worin γ_ρ verschieden ist von allen α-Werthen. Diese Zuordnung verlangt, dass die nach 8) den β-Werthen entsprechenden Werthe

z paarweise einander gleich seien; es muss also r, der Grad von 8) bezüglich z, eine gerade Zahl sein. Wählt man die β-Werthe aus den Lösungen der Discriminante von 8), so hat man nur noch die Bedingung aufzustellen, dass für eben diese Werthe die übrig bleibenden Gleichungen vom Grade $(r-2)$ nur Paare gleicher Lösungen enthalten. Die Anzahl dieser Bedingungen ist

$$\frac{r-2}{2}(4\pi+1).$$

Ebenso müssen die dem Werthe $y=\infty$ entsprechenden z-Werthe paarweise gleich sein, was weitere

$$\frac{r}{2}$$

Bedingungen gibt.

Im Übrigen wird der Quotient 9) so verzweigt sein, wie y. Da man

$$(r+1)(2\pi+1)-1$$

Constante hat, welche

$$\pi(2p+1)+\frac{r-2}{2}(4\pi+1)+\frac{r}{2}+\pi$$

Bedingungen genügen sollen, so ergeben sich

$$2\pi(p-2)-1$$

Bedingungsgleichungen für die Grösse α.

Aus dieser Anzahl folgt, dass für ein gerades Geschlecht nur für hyperelliptische Integrale erster Ordnung eine allgemeine Transformation existiert.

Ist aber σ eine ungerade Zahl

$$\sigma=2\pi-1$$

so hat man in der Gleichung

$$\text{13)} \qquad \varphi_0(z)y^{2\pi-1}+\varphi_1(z)y^{2\pi-2}+\ldots\ldots+\varphi_{2\pi-1}(z)=0$$

die Coëfficienten der ganzen Functionen $\varphi(z)$ so zu bestimmen, dass der Ausdruck

$$\frac{\sqrt{(y-\beta_1)(y-\beta_2)\ldots\ldots(y-\beta_{4\pi-1})}}{\sqrt{z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\ldots\ldots(z-\alpha_{2\pi+1})}}$$

eine rationale Function von z und y wird.

Hier kann man den $z = \alpha_\rho$ den Werth $y = \beta_\rho$ entsprechen lassen, so dass die anderen $(2\pi - 2)$Werthe von y paarweise gleich sind. So ordnet man zu für

$$z = \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{2\pi-1}.$$

Ferner soll je zweien von den Werthen

$$z = \alpha_{4\pi}, \alpha_{4\pi+1}, \ldots \alpha_{2p+1}.$$

ein $y = \beta_\rho$ entsprechen. Die dem $y = \beta_\sigma$ entsprechenden, noch nicht fixierten z-Werthe sollen paarweise gleich sein, woraus folgt, dass r, der Grad von 13) bezüglich z, eine ungerade Zahl sein muss. Für $z = \infty$ soll $y = \infty$ und die übrigen Werthe paarweise gleich sein, und ebenso die z-Werthe für $y = \infty$.

Für die α-Grössen erhält man

$$2\pi(p-2)-p+1$$

Bedingungen. Daraus ergibt sich, dass bei ungeradem Geschlecht nur elliptische Integrale eine allgemeine Transformation besitzen.

Mit Hilfe der so bestimmten Anzahlen für die Bedingungsgleichungen der Grössen α kann man die im Allgemeinen löslichen Reductionsprobleme angeben und wirklich ausführen, womit die aufgeworfene Frage erledigt ist.

Man kann noch schliesslich leicht bemerken, dass auf der linken Seite der Gleichungen im Systeme 1) auch weniger als σ Integrale vorkommen können. Dies wird immer eintreten, wenn Gleichung 2) reductibel ist, in welchem Falle jeder irreductible Factor ein System von der Form 1) gibt.