Ein Beitrag zur Gruppentheorie auf den Curven vom Geschlechte Eins.

Von **Emil Weyr.**

1. Wir setzen auf einer ebenen allgemeinen Curve dritter Ordnung C_3 in irgend einer Art eine doppelte Mannigfaltigkeit von Punktetripeln $x_1 x_2 x_3$ fest, und zwar so, dass jedes der Tripel als in sich abgeschlossen und durch zwei seiner Punkte vollkommen und unzweideutig bestimmt erscheint; die Gesammtheit aller solcher Tripel soll als eine cubische Punktinvolution zweiter Stufe auf C_3 oder als Tripelinvolution zweiter Stufe auf C_3 mit J_2^3 bezeichnet werden.

Die Gesammtheit aller Tripel, von denen jedes aus drei in gerader Linie gelegenen Punkten der C_3 besteht, bildet offenbar eine solche (besondere) Tripelinvolution zweiter Stufe, welche als die Involution gerader Tripel bezeichnet werden soll; sie ist durch die Curve selbst gegeben und muss daher als eine fundamentale betrachtet werden.

2. Betrachten wir nun irgend eine J_2^3 auf C_3. Wählt man auf C_3 irgend zwei Punkte $x_1 x_2$, so ist vermöge der J_2^3 durch x_1 und x_2 ein dritter Punkt x_3 bestimmt, wodurch das Tripel $x_1 x_2 x_3$ geschlossen erscheint, so zwar, dass jeder der drei Punkte durch die beiden anderen bestimmt erscheint. Jeder der drei Punkte eines Tripels begleitet in der J_2^3 das Paar der beiden anderen. Wird auf C_3 ein Punkt x_1 angenommen, so gibt es einfach unendlich viele Paare $x_2 x_3$, welche mit x_1 ein Tripel der J_3^2 bilden; jedes dieser Paare ist bestimmt, wenn man einen seiner Punkte (x_2 oder x_3) wählt.

Die sämmtlichen Paare $x_2 x_3$ bilden somit eine Paarinvolution (erster Stufe) und es müssen somit die Geraden

$\overline{x_2 x_3}$ durch einen festen Punkt o_1 von C_3 hindurchgehen.[1] Durch die J_2^3 ist in dieser Art auf C_3 eine eindeutige Beziehung von Punkten $E(xo)$ gegeben;[2] denn es wird jedem Punkte x_1 ein ganz bestimmter Punkt o_1 als entsprechender zugewiesen sein, aber auch jedem o_1 entspricht nur ein Punkt x_1, den man erhält, wenn man durch o_1 eine Gerade beliebig hindurchlegt und zu ihren Schnittpunkten x_2, x_3 mit C_3 den begleitenden Punkt x_1 aufsucht.

„Jede auf der C_3 auftretende Tripelinvolution zweiter Stufe J_3^2 gibt Veranlassung zu einer eindeutigen (nicht centralen) Punktbeziehung $E(xo)$, wobei einem Punkte x jener Punkt o zugeordnet erscheint, durch welchen die Verbindungsgeraden der Punktepaare, welche mit x Tripel der J_2^3 bilden, hindurchgehen.“ Hieraus folgt unmittelbar: „Eine Tripelinvolution zweiter Stufe J_2^3 auf C_3 ist durch eines ihrer Tripel vollkommen und unzweideutig bestimmt.“ Wählt man nämlich drei beliebige Punkte $x_1 x_2 x_3$ von C_3 und setzt fest, dass diese Punkte ein Tripel einer J_2^3 auf C_3 bilden sollen, so ist die J_2^3 dadurch vollkommen gegeben, d. h. man wird zu irgend zwei anderen beliebig gewählten Punkten $x'_1 x'_2$ den dieses Paar zu einem Tripel ergänzenden Punkt x'_3 in eindeutiger Weise bestimmen können. Die Seiten des Dreieckes $x_1 x_2 x_3$ schneiden C_3, respective in den Punkten o_1, o_2, o_2 zum dritten Male; dann entspricht dem x_1 der auf $x_2 x_3$ gelegene Punkt o_1 dem x_2 ebenso der auf $x_3 x_1$ gelegene Punkt o_2 und dem x_3 endlich der Punkt o_3. In der That gehören diese drei Punktepaare $x_1 o_1$, $x_2 o_2$, $x_3 o_3$ immer als Paare einer und derselben eindeutigen Beziehung $E(xo)$ auf C_3 an (l. c. Art. 6). Eine solche eindeutige Punktbeziehung auf C_3 ist bekanntlich durch ein Paar entsprechender Punkte vollkommen bestimmt. Um nun das Paar $x'_1 x'_2$ zu einem Tripel zu ergänzen, schneiden wir C_3 mit der Geraden $x'_1 x'_2$ im Punkte o'_3 und bemerken, dass o'_3 eindeutig nach der $E(xo)$ dem x'_3 entspricht; man hat also (l. c. Art. 6) nur o'_3 mit x_1 zu ver-

[1] Vgl. „Über eindeutige Beziehungen auf einer allgemeinen ebenen Curve dritter Ordnung. Sitzg. v. 19. April 1883, Art. 5.

[2] l. c. Art. 6.

binden und C_3 mit der Verbindungsgeraden in m etwa zum dritten Durchschnitte zu bringen, dann wird die Gerade mo_1 die Curve C_3 in x'_3 schneiden. Ebenso kann das Paar $x_2 o_2$, respective $x_3 o_3$ anstatt von $x_1 o_1$ in die Construction eintreten.

3. Jeder durch o_1 hindurchgehende Strahl schneidet C_3 in einem Punktepaare $x_2 x_3$, welches mit x_1 ein Tripel der J_2^3 constituirt; da man durch o_1 vier Tangenten an C_3 legen kann, so kommt jeder Punkt x_1 viermal mit je einem doppelt zu zählenden Punkte in Tripeln der J_2^3 vor. Dagegen kommt jeder Punkt der C_3 doppelt gezählt in einem Tripel der J_2^3 vor. Fällt nämlich x_3 mit x_1 zusammen, so ist x_2 der dritte Schnittpunkt von C_3 mit der Geraden $\overline{o_1 x_1}$. Nun geschicht es aber neunmal, dass der Punkt o_1 der Tangentialpunkt von x_1 wird (l. c. Art. 11); lässt man in einen solchen Punkt x_1 auch den Punkt x_2 fallen, so wird nach Obigem der Punkt x_3 ebenfalls mit x_1 und x_2 zusammenfallen und wir haben dann in x_1 drei unendlich nahe, ein Tripel constituirende Punkte oder einen dreifachen Punkt der J_2^3.

„Jede J_2^3 besitzt neun dreifache Elemente; dieselben bilden eine Inflexionsgruppe der C_3“ (l. c. Art. 11). Da eine J_2^3 durch ein Tripel von Punkten bestimmt ist, so wird die J_2^3 auch durch Angabe eines der dreifachen Punkte vollkommen bestimmt erscheinen; die übrigen acht dreifachen Punkte erhält man, wenn man den gegebenen mit einem der neun Inflexionspunkte verbindet, die erhaltene Gerade mit C_3 zum dritten Durchschnitte gebracht wird, und wenn dann aus diesem Schnittpunkte die übrigen acht Inflexionspunkte auf C_3 projicirt werden.

Die Inflexionspunkte von C_3 sind die dreifachen Punkte der fundamentalen J_2^3, welche die geraden Punktetripel der C_3 bilden.

4. Es sei $x_1 x_2 x_3$ irgend ein Tripel einer J_2^3. Durch dasselbe ist die J_2^3 vollkommen bestimmt. Wir wählen auf C_3 zwei beliebige Punkte x' x'' und legen durch die fünf Punkte x' x'' x_1 x_2 x_3 den Kegelschnitt K_x, welcher C_3 noch in einem Punkte x''' schneiden wird. Betrachtet man nun die durch die drei Punkte x', x'', x''' hindurchgehenden Kegelschnitte, so ist zunächst sofort klar, dass die noch auftretenden Tripel der übrigen Schnittpunkte derselben mit C_3, auf dieser eine J_2^3 bilden, da ein solches Tripel

durch Angabe zweier seiner Punkte vollkommen bestimmt ist. Weiter erkennt man aber, dass diese J_2^3 mit der auf C_3 vorliegenden identisch sein muss, da unter ihren Tripeln auch das Tripel $x_1 x_2 x_3$ dem K_x entsprechend vorkommt. Da man die drei Punkte $x' x'' x'''$ als die weiteren drei Schnittpunkte der C_3 mit irgend einem durch $x_1 x_2 x_3$ gelegten Kegelschnitt K_x betrachten kann, so bilden die sämmtlichen Tripel $x' x'' x'''$ eine zweite Tripelinvolution $J_2'^3$. Da jedes Tripel der gegebenen J_2^3 mit dem Tripel $x' x'' x'''$ auf einem Kegelschnitte gelegen ist, so kann das Tripel $x_1 x_2 x_3$ durch irgend ein anderes derselben J_2^3 ersetzt werden und die zweite $J_2'^3$ wird immer dieselbe bleiben. In dieser Art erscheinen die sämmtlichen, auf C_3 auftretenden Tripelinvolutionen zweiter Stufe in Paare geordnet; mit jeder Involution J_2^3 ist eine zweite $J_2'^3$ so gepaart, dass jedes Tripel der einen mit jedem Tripel der anderen in einem und demselben Kegelschnitte gelegen ist. Wir wollen zwei solche cubische Tripelinvolutionen zweiter Stufe als zwei residuale Tripelinvolutionen bezeichnen.

Die Involution der geraden Tripel ist offenbar residual zu sich selbst.

5. Wir haben gesehen, dass jede Tripelinvolution zweiter Stufe J_2^3 zu einer eindeutigen, nicht centralen Beziehung E Veranlassung gibt. „Diese Beziehung ist für zwei residuale Involutionen eine und dieselbe, nur dass je zwei entsprechende Punkte beim Übergange von einer zur anderen Tripelinvolution ihre Bedeutung vertauschen.“

Ist nämlich $x_1 x_2 x_3$ irgend ein Tripel der J_2^3, so entspricht dem Punkte x_1 nach jener eindeutigen Beziehung der dritte Schnittpunkt o_1 von C_3 mit der Geraden $x_2 x_3$; diese Gerade stellt mit irgend einer durch x_1 gehenden Geraden, welche C_3 in x'', x''' schneiden möge, einen durch die drei Punkte $x_1 x_2 x_3$ hindurchgehenden Kegelschnitt dar. Wenn wir also den Punkt o_1 mit x' bezeichnen, so ist $x' x'' x'''$ ein Tripel der zur J_2^3 residualen Involution $J_2'^3$; und es wird dem Punkte x' nach der mit dieser $J_2'^3$ verbundenen eindeutigen Beziehung der dritte Schnittpunkt o' von C_3 mit der Geraden $x'' x'''$ entsprechen. Nun ist offenbar o' identisch mit x_1 und x' identisch mit o_1. Da aber eine E-Beziehung durch ein Paar entsprechender Punkte bestimmt ist, so erscheint der ausgesprochene Satz bewiesen.

„Durch eine eindeutige nicht centrale Beziehung $E(xo)$ auf C_3 sind zwei residuale Tripelinvolutionen zweiter Stufe bestimmt.“

In der einen Tripelinvolution bildet jeder Punkt x mit den zwei Schnittpunkten von C_3 und irgend einer durch o gehenden Geraden ein Tripel und in der residualen Tripelinvolution bildet jeder Punkt o mit den zwei Schnittpunkten von C_3 und irgend einer durch x gehenden Geraden ein Tripel.

6. Ist die $E(x, o)$ eine vertauschungsfähige, so wird jedes Tripel der J_2^3 auch ein Tripel des residualen J'^3_2 sein, so dass beide Tripelinvolutionen identisch werden; wir haben es dann mit einer sich selbst residualen Tripelinvolution zu thun, welche wir als eine fundamentale bezeichnen können. Den vier fundamentalen vertauschungsfähigen eindeutigen Beziehungen auf der Curve C_3 (vergl. l. c. Art. 10) entsprechen somit vier fundamentale Tripelinvolutionen. Die eine fundamentale E-Beziehung ordnet jeden Punkt x sich selbst als entsprechend zu; also $o \equiv x$. Jede durch x gegebene Gerade schneidet C_3 in einem Punktepaare, welches mit x ein Tripel der fundamentalen J_2^3 bildet; dieselbe ist somit die Involution der geraden Punktetripel.

Die drei übrigen fundamentalen E Beziehungen sind dargestellt durch die drei Systeme correspondirender Punkte von C_3; sind also x und o zwei correspondirende Punkte eines der drei Systeme, so bildet jeder von ihnen mit den zwei Schnittpunkten der Curve C_3 und irgend einer durch den anderen hindurchgehenden Geraden ein Tripel der entsprechenden fundamentalen Tripelinvolution.

Aus dem über residuale Involutionen Gesagten folgt unmittelbar, dass je zwei Tripel einer fundamentalen Tripelinvolution auf einem und demselben Kegelschnitte gelegen sind und dass somit die Curve C_3 in den drei Punkten eines Tripels von einer Curve zweiter Ordnung berührt wird.

Jede der vier fundamentalen Tripelinvolutionen liefert somit ein System die Curve dreifach berührender Kegelschnitte. Die Involution der geraden Tripel führt zu den doppelt gezählten Geraden in der Ebene der Curve C_3, während die drei fundamentalen Tripelinvolutionen, welche sich aus den drei Systemen conjugirter Punkte der C_3 ergeben, die drei Systeme eigentlicher dreifach berührender Kegelschnitte liefern. So ist die Theorie dieser Kegelschnittsysteme identisch mit der Theorie der fundamentalen Tripelinvolutionen.

7. Da zwei residuale Tripelinvolutionen mit einer und derselben E-Beziehung in Verbindung stehen, so folgt aus den, im 11. Artikel der schon mehrmals angezogenen Arbeit: „Über eindeutige Beziehungen auf einer allgemeinen ebenen Curve dritter Ordnung" enthaltenen Auseinandersetzungen, dass die neun dreifachen Punkte einer Tripelinvolution und die neun dreifachen Punkte der residualen Tripelinvolution zwei connexe Inflexionsgruppen sind. Die neun dreifachen Punkte einer fundamentalen Tripelinvolution (und das sind nach früherem entweder die neun Inflexionspunkte oder die Berührungspunkte der C_3 mit den neun, einem System angehörigen sechspunktigen Kegelschnitte) bilden somit eine zu sich selbst connexe Inflexionsgruppe, so dass also die Curventangente in jedem dieser neun Punkte und die Verbindungsgerade je zweier derselben durch einen Inflexionspunkt der Curve hindurchgehen muss.

Je zwei residuale Tripelinvolutionen liefern 81 Kegelschnitte, welche die Curve in zwei Punkten osculiren, nämlich in einem dreifachen Punkte der einen und in einem dreifachen Punkte der anderen Involution.

8. „Werden die einzelnen Tripel $x_1\, x_2\, x_3$ einer J_2^3 aus einem Punkte p der Curve C_3 auf die Curve projicirt, so erhält man die Tripel $y_1\, y_2\, y_3$ einer zweiten Involution J'^3_2; lässt man den Punkt p auf C_3 fortrücken, so ergeben sich in dieser Art aus der Involution J'^3_2 alle übrigen Tripelinvolutionen zweiter Stufe auf C_3."

Der erste Theil des Satzes ist unmittelbar klar; bezüglich des zweiten Theiles verweisen wir auf den folgenden Satz:

„Je zwei Tripelinvolutionen zweiter Stufe können auf neunfache Art durch Projection in einander überführt werden; die neun Projectionscentren sind die dreifachen Punkte einer dritten Tripelinvolution und die drei Tripelinvolutionen stehen in vertauschungsfähiger Beziehung, so dass man die neun dreifachen

Punkte, jeder von ihnen als Projectionscentren zur Ineinanderüberführung der beiden anderen Involutionen verwenden kann."

Es seien J_2^3, J'^3_2 zwei Tripelinvolutionen auf C_3, d einer der neun dreifachen Punkte von J_2^3 und d' ein solcher Punkt von J'^3_2. Die Gerade dd' wird C_3 in einem Punkte d'' schneiden, aus welchem offenbar jede der beiden Involutionen durch Projection in die andere übergeführt wird; denn sowie durch Projection eines Tripels der J_2^3 ein Tripel der abgeleiteten Involution hervorgeht, so wird ein dreifacher Punkt von J_2^3 einen dreifachen Punkt der abgeleiteten Involution liefern; nun geht aber d durch Projection aus d'' in d' über und ein dreifacher Punkt genügt, sowie ein Tripel zur Bestimmung elner Tripelinvolution zweiter Stufe. Die aus der J_2^3 durch Projection aus d'' abgeleitete Involution hat somit d' zum dreifachen Punkt und ist daher mit J'^3_2 identisch. Die J_2^3 hat ausser d noch acht dreifache Punkte, welche mit d'' verbunden Strahlen liefern, die C_3 in den ausser d' auftretenden acht dreifachen Punkten der J'^3_2 schneiden müssen; so erhält man neun, durch d'' gehende Gerade, von denen jede einen dreifachen Punkt der J_2^3 und der J'^3_2 enthält. Die neun Punkten d, verbunden mit den neun Punkten d', liefern 81 Gerade, von denen je neun durch einen Punkt d'' hindurchgehen; wir erhalten somit neun Punkte d'' auf C_3, von denen jeder als Projectionscentrum zur Überführung der J_2^3 und J'^3_2 in einander benützt werden kann. Da man die neun Punkte d'' erhält, wenn man die neun Punkte d aus einem der neun Punkte d' auf C_3 projicirt, so sind die neun Punkte d'' die dreifachen Punkte einer dritten Tripelinvolution zweiter Stufe, welche man durch Projection der J_2^3 aus irgend einem der Punkte d' oder durch Projection der J'^3_2 aus irgend einem der Punkte d erhält.

Man erhält somit die Gruppen der dreifachen Punkte aller auf C_3 auftretenden Tripelinvolutionen, wenn man eine solche Gruppe (also zum Beispiel die Gruppe der neun Inflexionspunkte) aus den einzelnen Punkten von C_3 auf die Curve projicirt.

Die neun dreifachen Punkte einer J_2^3 bilden somit eine Inflexionsgruppe; sie ordnen sich zu je dreien in derselben Art, wie die neun Inflexionspunkte zu Tripeln und jeder der dreifachen Punkte kommt in vier solchen Tripeln vor.

Lässt man die J_2^3 mit der J_2^3 zusammenfallen, so werden die neun Punkte d'' die Tangentialpunkte der d sein; es bilden somit die Tangentialpunkte einer Inflexionsgruppe wieder eine Inflexionsgruppe. Durch jeden dieser Tangentialpunkte d'' gehen vier von den $\frac{9.8}{2} = 36$ Verbindungsgeraden der neun Punkte d.

9. Wir zeigen in diesem Artikel, wie sich aus der Theorie der Tripelinvolutionen zweiter Stufe die Haupttheoreme über die Schnittpunktsysteme der Curve C_3 mit Curven zweiter und dritter Ordnung ergeben. Sind $x_1\, x_2\, x_3\, x'\, x''\, x'''$ die sechs Schnittpunkte der C_3 mit einer Curve zweiter Ordnung, so sind $x_1\, x_2\, x_3$ und $x'\, x''\, x'''$ zwei Tripel zweier residualen Tripelinvolutionen. Diese geben zu einer und derselben Beziehung $E(xo)$ Veranlassung, und zwar entspricht dem Punkte x_1 der dritte Schnittpunkt o_1 von C_3 mit $\overline{x_2 x_3}$, und dem dritten Schnittpunkte o' von C_3 mit $\overline{x'' x'''}$ entspricht der Punkt x' (vergl. Art. 2). Es müssen sich somit die wechselweisen Verbindungslinien, also hier die Geraden $\overline{x' x_1}$, $\overline{o' o_1}$ in einem Punkte p von C_3 schneiden. Hält man nun $x_2\, x_3\, x''\, x'''$ fest und verändert den durch diese vier Punkte gehenden Kegelschnitt, so wird die Gerade $\overline{x' x_1}$, welche die beiden übrigen Schnittpunkte der beiden Curven verbindet, durch den festen Curvenpunkt p hindurchgehen (Satz vom Gegenpunkte).

Betrachten wir nun die sämmtlichen Curven dritter Ordnung, welche durch irgend sechs Punkte $p_1\, p_2 \ldots p_6$ unserer Curve C_3 hindurchgehen und von denen somit jede die Curve C_3 in noch weiteren drei Punkten $x_1\, x_2\, x_3$ schneiden wird; indem wir zeigen, dass die sämmtlichen Tripel $x_1\, x_2\, x_3$ eine J_2^3 bilden, beweisen wir den bekannten Satz, dass alle Curven dritter Ordnung, welche durch irgend acht Punkte hindurchgehen, auch noch einen neunten Punkt gemeinsam haben.

Es ist klar, dass alle Curven dritter Ordnung, welche durch die sechs Punkte $p_1 \ldots p_6$ und durch einen ausserhalb C_3 gelegenen siebenten Punkt q hindurchgehen, die C_3 in Tripeln eines J_2^3 schneiden; von dieser J_2^3 zeigt man leicht, dass sie von der Lage des Punktes q ganz unabhängig ist. Der durch $p_2 p_3 p_4 p_5 p_6$ bestimmte Kegelschnitt, welcher C_3 in p' zum sechsten Male schneiden möge, stellt mit der Geraden $\overline{p_1 q}$ auch eine durch jene sieben Punkte gehende cubische Curve dar. Sind nun

$p'' p'''$ die weiteren zwei Schnitte von C_3 mit $\overline{p_1 q}$, so ist $p' p'' p'''$ ein Tripel jener J_2^3 und daher sind p_1 und p' zwei einander entsprechende Punkte der mit der J_2^3 verbundenen E-Beziehung. Nun ist aber durch ein Punktepaar die E-Beziehung und durch diese die zugehörige J_2^3 vollkommen und unzweideutig gegeben, da wir ja auch wissen, dass der Punkt p' mit den auf Strahlen durch p_1 gelegenen Punktepaaren Tripel der J_2^3 bildet. Es ist folglich bewiesen: „Dass die durch irgend sechs Punkte der C_3 hindurchgehenden Curven dritter Ordnung auf C_3 Tripel einer J_2^3 bestimmen“ (Satz über die neun Schnittpunkte zweier Curven dritter Ordnung).

Vertauscht man in der letzten Betrachtung den Punkt p_1 der Reihe nach mit jedem der übrigen fünf p-Punkte, so ergibt sich der Satz:

„Sind $p_1 p_2 \ldots p_6$ irgend sechs Punkte einer ebenen Curve dritter Ordnung und legt man durch je fünf von ihnen einen Kegelschnitt, und sind $p' p'' p'''$ die sechsten Schnittpunkte der Curve mit den sich ergebenden sechs Kegelschnitten, so gehören die sechs Punktepaare $p_1 p'$; $p_2 p''$; $p_3 p'''$; $\ldots$ einer und derselben eindeutigen nicht centralen Beziehung an.“

Wenn die sechs Punkte $p_1 p_2 \ldots p_6$ auf einem Kegelschnitte gelegen sind, so fällt jeder mit dem ihm entsprechenden $p' p'' \ldots$ zusammen; die eindeutige Bezeichnung weist lauter sich selbst entsprechende Punkte auf, und die obige J_2^3 wird die fundamentale Involution der geraden Tripel.

10. Eine dreifache Unendlichkeit von Punktquadrupeln der Curve C_3, von denen jedes durch beliebige Wahl dreier von seinen Punkten vollkommen und eindeutig bestimmt ist, soll als eine „Quadrupelinvolution dritter Stufe mit J_3^4 bezeichnet werden.

Aus der Definition folgt sofort, dass die sämmtlichen Tripel $x_1 x_2 x_3$, welche mit einem Punkte x_4 Quadrupel constituiren eine J_2^3 bilden, und dass alle Paare $x_1 \; x_2$, welche mit einem Paar $x_3 x_4$ Quadrupel constituiren, eine J_1^2 bilden müssen. Hält man also in einem Quadrupel $x_1 x_2 x_3 x_4$ zwei Punkte $x_3 x_4$ fest, so gehen die Geraden $\overline{x_1 x_2}$ durch einen festen Punkt ξ_{12} von C_3; aus demselben Grunde wird die Gerade $\overline{x_3 x_4}$, wenn man eines der Paare $x_1 x_2$ festhält, durch einen festen Punkt ξ_{34} von C_3 hindurchgehen. Nun ist offenbar das Punktepaar $\xi_{12}\ \xi_{34}$ durch Annahme eines seiner Punkte bestimmt, so dass alle diese Paare eine J_1^2 bilden und die Geraden $\overline{\xi_{12}\xi_{34}}$ durch einen festen Curvenpunkt o hindurchgehen müssen.

Um nun irgend ein Quadrupel der J_3^4 zu erhalten, lege man durch o eine beliebige Gerade, welche C_3 in zwei Punkten ξ_{12}, ξ_{34} schneidet; durch jeden dieser Punkte ziehe man eine beliebige Gerade; die zwei Schnittpunktepaare $x_1\ x_2$, $x_3\ x_4$ von C_3 mit diesen Geraden bilden ein Quadrupel der J_3^4. Der Punkt o ist offenbar der Gegenpunkt des Quadrupels $x_1\ x_2\ x_3\ x_4$ und wir erkennen somit: „Eine Quadrupelinvolution dritter Stufe J_3^4 besteht aus den sämmtlichen Quadrupeln, welche einen gemeinschaftlichen Gegenpunkt besitzen.“

„Es ist somit eine J_3^4 vollkommen bestimmt entweder durch Angabe eines Quadrupels oder durch Angabe des Gegenpunktes.“

Ist o der Gegenpunkt der J_3^4 und soll das Tripel $x_1\ x_2\ x_3$ zu einem Quadrupel ergänzt werden, so hat man nur $\overline{x_1 x_2}$ zu ziehen bis zum Durchschnitte ξ_{12} mit C_3, ferner die Gerade $\overline{o\xi_{12}}$ zu ziehen bis zum Durchschnitte ξ_{34} mit C_3, so wird die Gerade $\overline{x_3\xi_{34}}$ die C_3 in dem gesuchten Punkte x_4 schneiden.

Die sämmtlichen Quadrupel der J_3^4 kann man offenbar auch erhalten, wenn man durch die sämmtlichen Paare der J_1^2, welche das Strahlenbüschel o auf C_3 bestimmt, alle möglichen Kegelschnitte legt und dieselben mit C_3 zum Durchschnitte bringt.

Ist auf C_3 eine J_3^4 gegeben und hält man einen Punkt x_4 auf C_3 fest, so bilden die Tripel $x_1\ x_2\ x_3$, welche x_4 zu einem Quadrupel der J_3^4 ergängen, offenbar eine J_2^3; umgekehrt werden alle Tripel einer neben der J_3^4 auf C_3 auftretenden J_2^3 durch denselben Punkt von C_3 zu Quadrupeln der J_3^4 ergänzt. Denn ergänzt man irgend ein Tripel $x_1\ x_2\ x_3$ der J_2^3 und hält man dann den ergänzenden Punkt x_4 fest, so muss jene J_2^3 zum Vorschein kommen, weil eine Tripelinvolution zweiter Stufe durch ein Tripel $x_1\ x_2\ x_3$ vollkommen bestimmt ist. „Alle geraden Tripel erscheinen durch den Gegenpunkt o zu Quadrupeln der J^4 ergänzt.“

Denn liegen $x_1\, x_2\, x_3$ in gerader Linie, so fällt ξ_{12} mit x_3 zusammen, ξ_{34} wird der dritte Schnittpunkt von C_3 mit $\overline{ox_3}$ und x_4 fällt somit in den Punkt o.

11. Jeden Punkt x_1 von C_3 kann man als dreifachen Punkt für die J_3^4 betrachten, indem man x_2 und x_3 mit x_1 zusammenfallen lässt, ξ_{12} wird der Tangentialpunkt von x_1, $\overline{o\xi_{12}}$, schneidet C_3 in ξ_{34} und $\overline{x_1\xi_{34}}$ schneidet C_3 in x_4, welcher Punkt mit dem dreifachen Punkte x_1 ein Quadrupel der J_3^4 constituirt. Hält man x_4 fest, so bilden die x_1, x_2, x_3 eine J_2^3, welche neun dreifache Punkte besitzt. Es kommt also jeder Punkt x_4 von C_3 in neun Quadrupeln vor, von denen jedes aus x_4 und einem dreifachen Punkte zusammengesetzt erscheint.

„Es gibt vier centrale Paarinvolutionen, deren Paare, als aus Doppelpunkten bestehend betrachtet, Quadrupel einer J_3^4 bilden.“

Legt man nämlich aus o an C_3 die vier Tangenten, deren Berührungspunkte $o_1\, o_2\, o_3\, o_4$ sein mögen, so schneidet jede durch einen dieser Punkte hindurchgehende Gerade C_3 in zwei Punkten, welche als Doppelpunkte ein Quadrupel der J_3^4 constituiren; je zwei solche Punktepaare, deren Verbindungsgeraden durch einen der vier Punkte $o_1\, o_2\, o_3\, o_4$ hindurchgehen, stellen ebenfalls ein Quadrupel der J_3^4 dar.

„Eine J_3^4 besitzt sechzehn vierfache Elemente, nämlich jene sechzehn Punkte, für welche der Gegenpunkt o zweiter Tangentialpunkt ist.“

Dies folgt unmittelbar aus dem Vorhergehenden. Ebenso leicht erkennt man:

„Projicirt man die einzelnen Quadrupel einer J_3^4 aus einem Punkte von C_3 auf die Curve, so erhält man Quadrupel einer zweiten J_3^4; wenn das Projectionscentrum auf C_3 fortschreitet, so erhält man aus einer J_3^4 alle übrigen. Je zwei Quadrupelinvolutionen $J_3^4\, J'^4_3$ können auf sechzehnfache Art durch Projection in einander überführt werden; ist v ein vierfacher Punkt von J_3^4 und v' ein solcher von J'^4_3, so ist der dritte Schnittpunkt v'' von C_3 mit der Geraden $\overline{vv'}$ ein Projectionscentrum. Solcher Geraden gibt es 16×16, d. i. 256, welche zu je sechzehn durch sechzehn

Punkte v'' hindurchgehen. Die sechzehn Punkte v'' sind vierfache Punkte einer dritten J''^4_3. Die Gegenpunkte $o\,o'\,o''$ von J^4_3, J'^4_3, J''^4_3 liegen in gerader Linie."

12. Durch jede auf C_3 auftretende J^4_3 erscheinen die Punkte von C_3 zu einer centralen Involution gepaart. Betrachtet man nämlich irgend eine J^3_2, so werden alle ihre Tripel durch einen und denselben Punkt x_4 von C_3 zu Quadrupeln der J^4_3 ergänzt und die Tripel der zu J^3_2 residualen J'^3_2 werden durch einen und denselben Punkt x'''' zu Quadrupeln ergänzt. Man sieht sofort, dass zwischen den Punkten $x_4\,x''''$ eine eindeutige vertauschungsfähige Beziehung stattfindet, und in der That kann man direct zeigen, dass die Gerade $\overline{x_4 x''''}$ durch den Tangentialpunkt t von o hindurchgeht, wenn o der Gegenpunkt der J^4_3 ist.

Wir denken uns die J^3_2 durch einen dreifachen Punkt $x_1 \equiv x_2 \equiv x_3$ bestimmt; ist nun x'' der Tangentialpunkt von x_1 und x' der dritte Schnittpunkt von C_3 mit $\overline{ox''}$, so wird $\overline{x_1 x'}$ die C_3 in dem Punkte x_4 schneiden, welcher mit dem dreifachen Punkte x_1 ein Quadrupel der J^4_3 bildet, denn die vier Punkte $x_1 \equiv x_2 \equiv x_3$, x_4 bilden offenbar ein Quadrupel, welches o zum Gegenpunkte hat. Da man die Tangente von C_3 und die Gerade $\overline{x' x_4}$ als einen durch die Punkte $x_1\,x_2\,x_3$ hindurchgehenden Kegelschnitt betrachten kann, so bilden die Punkte $x'\,x''\,x_4$ ein Tripel der zur J^3_2 residualen Tripelinvolution J'^3_2. Es möge daher x_4 zugleich mit x''' bezeichnet, und der Punkt x'''' gesucht werden, welcher mit $x'\,x''\,x'''$ ein Quadrupel der J^4_3 bildet. Man erhält ihn offenbar, wenn man den Tangentialpunkt t von o mit $x''' \equiv x_4$ verbindet und den dritten Schnittpunkt x'''' von C_3 mit $tx''' \equiv tx_4$ aufsucht. In der That bilden $x'\,x''\,x'''\,x''''$ ein Quadrupel, welches o zum Gegenpunkte hat. Hiermit ist das oben Gesagte erwiesen.

Es werden also je zwei mit t in gerader Linie liegende Punkte durch die Tripel residualer Involutionen zu Quadrupeln der J^4_3 ergänzt; die Berührungspunkte o, o_1, o_2, o_3 der vier durch t gehenden Tangenten werden somit durch sich selbst residuale Involutionen ergänzt. Die Tripel, welche o ergänzen, haben wir als die Tripel der in gerader Linie liegenden Curvenpunkte erkannt. Die Tripel, welche o_1, o_2, o_3, respective zu Quadrupeln ergänzen, sind somit die Tripel der Berührungspunkte der drei Systeme dreifach berührender Kegelschnitte.

13. „Alle Curven vierter Ordnung, welche durch acht Punkte der Curve C_3 hindurchgehen, bestimmen auf C_3 eine Quadrupelinvolution dritter Stufe. Der Gegenpunkt dieser Involution ist der neunte Schnittpunkt der durch jene acht Punkte hindurchgehenden Curven dritter Ordnung."

Mit anderen Worten: „Alle Curven vierter Ordnung, welche durch eilf Punkte der C_3 hindurchgehen, schneiden diese Curve noch in einem und demselben zwölften Punkte (Restsatz). Je vier von den zwölf Punkten bilden ein Quadrupel, dessen Gegenpunkt mit den acht anderen Punkten ein System von neun Schnittpunkten von Curven dritter Ordnung bildet."

Wir betrachten alle Curven vierter Ordnung C_4, welche durch acht feste Punkte $p_1\, p_2 \ldots p_8$ von C_3 und durch drei beliebige Punkte $q_1\, q_2\, q_3$ hindurchgehen. Sie bestimmen offenbar auf C_3 eine J^4_3. Die durch die acht Punkte p und durch q_1 gehende Curve dritter Ordnung, welche C_3 in einem von q_1 unabhängigen neunten Punkte p_9 schneidet, stellt mit der Geraden $\overline{q_2 q_3}$ auch eine von den Curven C_4 dar und es bildet daher der Punkt p_9 mit den drei Schnittpunkten von C_3 und $\overline{q_2 q_3}$ ein Quadrupel der J^4_3 und somit ist der Punkt p_9 der Gegenpunkt von J^4_3 (Art. 10). Da nun dieser Gegenpunkt, welcher die J^4_3 vollkommen bestimmt, von den Punkten $q_1\, q_2\, q_3$ unabhängig ist, so erscheint der obige Satz bewiesen.

14. Wir definiren, in analoger Weise fortschreitend, eine vierfache Unendlichkeit von Punktquintupeln auf C_3, von denen jedes durch vier seiner Punkte vollkommen bestimmt erscheint, als eine Quintupelinvolution vierter Stufe J^5_4. Es gilt nun der Satz:

„Die durch die einzelnen Quintupel einer J^5_4 hindurchgehenden Kegelschnitte schneiden C_3 in einem und demselben festen Punkte, dem Centrum der Involution."

Aus der Definition der J^5_4 folgt sofort, dass ein Punkt von C_3 durch die Quadrupel einer J^4_3, jedes Punktetripel einer J^3_2 durch die Punktepaare einer J^2_1 und umgekehrt zu Quintupeln der J^5_4 ergänzt erscheinen. Es ist so durch die J^5_4 eine eindeutige Punktbeziehung, die wir überdies als eine centrale erkennen, auf C_3 gegeben.

Hält man einen Punkt x_5 auf C_3 fest, so werden die mit ihm Quintupel der J_4^5 bildenden Quadrupel $x_1\, x_2\, x_3\, x_4$ eine J_3^4 darstellen, welcher ein Gegenpunkt von o_5 zukommt. Jedem Punkte x_5 entspricht somit ein Punkt o_5 und umgekehrt; denn, wird o_5 angenommen, so ist die J_3^4, welcher er als Gegenpunkt zukommt, durch ihn vollständig bestimmt und alle Quadrupel dieser J_3^4 werden von einem und demselben x_5 zu Quintupeln der J_4^5 ergänzt. Die Beziehung zwischen x_5 und o_5 ist jedoch auch vertauschungsfähig; denn, wenn wir ein Quadrupel $x_1\, x_2\, x_3\, x_4$, in welchem die drei Punkte $x_1\, x_2\, x_3$ in gerader Linie liegen, durch x_5 zu einem Quintupel der J_4^5 ergänzen, so fällt o_5 mit x_4 zusammen und o_4 mit x_5,[1] sodass die Gerade $\overline{o_5 x_5}$ durch einen festen Punkt o von C_3 hindurchgehen wird. Da nun in jedem Quintupel der Punkt o_5 der Gegenpunkt der vier Punkte $x_1 x_2 x_3 x_4$ ist, so liegen die sechs Punkte $o\, x_1\, x_2\, x_3\, x_4\, x_5$ in einem und demselben Kegelschnitte.

„Eine Quintupelinvolution vierter Stufe ist durch ein Quintupel oder das Centrum o vollkommen bestimmt.

Der durch das Quintupel gelegte Kegelschnitt schneidet C_3 im Punkte o, und irgend ein Quadrupel $x_1\, x_2\, x_3\, x_4$ wird durch den sechsten Schnittpunkt x_5 von C_3 mit dem durch $x_1\, x_2\, x_3\, x_4\, o$ hindurchgehenden Kegelschnitt ergänzt. Alle geraden Tripel werden durch alle Paare der J_1^2 ergänzt, deren Centrum o ist. Die Tripel irgend einer J_2^3 werden ergänzt durch die Paare, welche mit dem Centrum o Tripel der residualen Involution bilden u. s. w.

15. „Alle Curven fünfter Ordnung, welche durch zehn feste Punkte von C_3 hindurchgehen, bestimmen auf C_3 eine J_4^5, d. h. alle Curven fünfter Ordnung, welche durch vierzehn Punkte von C_3 hindurchgehen, schneiden C_3 in einem und demselben fünfzehnten

---

[1] Hält man nämlich hier x_5 fest, so wird das gerade Tripel $x_1\, x_2\, x_3$ durch den Punkt x_4 zu einem Quadrupel der J_3^4 ergänzt, und es ist somit x_4 der Gegenpunkt o_5 dieser J_3^4.

Punkte (Restsatz). Das Centrum jener J_4^5 ist das Centrum der J_1^2, welche auf C_3 durch die Curven vierter Ordnung bestimmt wird, welche durch jene zehn Punkte hindurchgehen."

Nachdem alle durch acht Punkte von C_3 hindurchgehenden Curven vierter Ordnung auf C_3 eine J_3^4 bestimmen, werden die durch zehn Punkte von C_3 gehenden Curven vierter Ordnung auf C_3 eine J_1^2 bestimmen. Wir betrachten nun die durch die zehn Punkte $p_1\, p_2 \ldots p_{10}$ von C_3 und durch die beliebigen sechs Punkte $q_1\, q_2 \ldots q_6$ hindurchgehenden Curven fünfter Ordnung C_5; sie bestimmen auf C_3 offenbar eine J_4^5, welche jedoch, wie gleich gezeigt werden wird, von den Punkten q ganz unabhängig ist. Die C_4, welche durch die zehn Punkte p und durch vier Punkte $q_1\, q_2\, q_3\, q_4$ bestimmt ist, schneidet C_3 in einem Punktepaare $s'\, s''$ jener J_1^2, welche auf C_3 durch die, durch $p_1\, p_2 \ldots p_{10}$ hindurchgehenden C_4 bestimmt wird; ihr Centrum, d. h. der dritte Schnittpunkt von C_3 mit $\overline{s's''}$ sei o. Jene Curve C_4 mit der Geraden $\overline{q_5 q_6}$, welche C_3 in $r'\, r''\, r'''$ schneiden möge, stellt eine C_5 unseres Systemes dar und somit ist $s'\, s''\, r'\, r''\, r'''$ ein Quintupel, und folglich o das Centrum der J_4^5 (Art. 14). Es ist somit das Centrum o und also auch die J_4^5 nur von den Punkten $p_1 \ldots p_{10}$ abhängig, und obiger Satz bewiesen.

16. Wir verstehen allgemein unter einer Involution n-ten Grades $(n-1)$-ter Stufe J_{n-1}^n auf C_3 eine $(n-1)$-fache Unendlichkeit von n-punktigen Gruppen, von denen jede durch $(n-1)$ ihrer Punkte vollkommen und unzweideutig bestimmt ist.

Tritt auf C_3 eine Sextupelinvolution fünfter Stufe J_5^6 auf, und hält man einen Punkt x_6 eines Sextupels $x_1\, x_2 \ldots x_5\, x_6$ fest, so bilden die ihn ergänzenden Quintupel $x_1\, x_2 \ldots x_5$, der Definition gemäss, eine J_4^5 und die, durch die Quintupel $x_1\, x_2\, x_3\, x_4\, x_5$ bestimmten Kegelschnitte werden C_3 in einem festen Punkte ${}_6o$ schneiden. In dieser Art ist durch eine J_5^6 jedem Punkte x_6 ein Punkt o_6 zugeordnet; aber auch umgekehrt wird durch o_6 der Punkt x_6 vollkommen bestimmt. Denn die durch o_6 gehenden Kegelschnitte bestimmen auf C_3 eine J_4^5, und wenn der Punkt x_6 ein Quintupel dieser J_4^5 auf ein Sextupel der J_5^6 ergänzt, so muss er Früherem gemäss alle Quintupel dieser J_4^5 ergänzen. Die Beziehung zwischen x_6 und o_6 ist somit eine eindeutige E-Beziehung.

„Eine Sextupelinvolution fünfter Stufe ist durch ein Sextupel vollkommen bestimmt.“

Wählt man nämlich irgend sechs Punkte $x_1 \ldots x_6$ auf C_3 als ein Sextupel bildend, so ist die E-Beziehung vollkommen gegeben, da einem der sechs Punkte, zum Beispiel x_6 der sechste Schnittpunkt o_6 von C_3 mit dem durch die übrigen fünf Punkte $x_1 \ldots x_5$ gehenden Kegelschnitte entspricht, und durch ein Paar entsprechender Punkte die E-Beziehung gegeben ist. Hieraus zugleich der Satz: „Sind $x_i\,(i=1\ldots 6)$ irgend sechs Punkte einer ebenen Curve dritter Ordnung und ist o_i der sechste Schnittpunkt von C_3 mit dem Kegelschnitte, welcher jene Punkte mit Ausnahme von x_i enthält, so gehören die sechs Punktepaare x_i, o_i $(i=1\ldots 6)$ einer und derselben eindeutigen Beziehung an (d. h. die Geraden $\overline{x_i o_k}, \overline{x_k o_i}$ werden sich in Punkten von C_3 schneiden.)“

Soll irgend ein Quintupel $x'_1 x'_2 \ldots x'_5$ zu einem Sextupel der J^6_5 ergänzt werden, so hat man durch dasselbe einen Kegelschnitt zu legen, welcher C_3 noch in o'_6 schneiden mag, hat ferner $\overline{o'_6 x_i}$ mit C_3 in p etwa zum dritten Durchschnitte zu bringen, so wird die Gerade $\overline{p o_i}$ die Curve C_3 in x'_6 zum dritten Male schneiden.

Wenn wir sechs Punkte von C_3, welche auf einem und demselben Kegelschnitte gelegen sind, als ein conisches Sextupel bezeichnen, so gilt der Satz:

„Wenn ein Sextupel einer J^6_5 conisch ist, so sind es alle.“

Denn liegen $x_1 \ldots x_6$ auf einem Kegelschnitte, so fällt o_6 mit x_6 zusammen, die E-Beziehung weist dann lauter sich selbst entsprechende Punkte auf, sodass immer x_i mit o_i zusammenfällt.

Wir haben in diesem Falle eine fundamentale J^6_5 vor uns, welche mit der C_3 gegeben erscheint und deren Gruppen durch die sämmtlichen Kegelschnitte der Ebene auf C_3 bestimmt werden.

17. Jede auf C_3 auftretende E-Beziehung gibt Veranlassung zu zwei J^6_5, welche in einer einfachen gegenseitigen Beziehung stehen. Durch die auf C_3 vorausgesetzte E-Beziehung wird jedem Punkte x_6 ein Punkt o_6 zugeordnet und es wird dann x_6 mit den Schnittpunkten $x_1 \ldots x_5$ von C_3 mit irgend einem durch o_6 gehen-

den Kegelschnitte ein Sextupel einer J_5^6 bilden (vgl. vorigen Artikel). Ebenso wird, wenn man o_6 als x_6' und x_6 als o_6' betrachtet, der Punkt x_6' mit den fünf Schnitten $x_1' \ldots x_5'$ von C_3 mit einem durch o_6' gehenden Kegelschnitte Sextupel einer zweiten J_5^6 bilden.

„Diese beiden Involutionen J_5^6, $J_5'^6$ sind residual, d. h. jedes Sextupel der einen stellt mit jedem Sextupel der anderen die zwölf Schnittpunkte von C_3 mit Curven vierter Ordnung dar." Da alle C_4, welche durch eilf Punkte von C_3 hindurchgehen, diese Curve noch in einem und demselben zwölften Punkte schneiden, so bestimmen alle C_4, welche durch sechs Punkte hindurchgehen, auf C_3 eine J_5^6, und kann man hiebei jedes Sextupel jener Punkte durch die sechs Schnitte von C_3 mit einer C_4 ersetzen, welche durch irgend ein Sextupel der J_5^6 hindurchgehen. Jene Sextupel bilden somit eine zweite, die residuale $J_5'^6$, und beide Involutionen sind offenbar in dem Zusammenhange, dass jedes Sextupel der einen mit jedem Sextupel der anderen die zwölf Schnittpunkte von C_3 mit einer C_4 darstellen. Dass den beiden Involutionen dieselbe E-Beziehung zugehört, und zwar so, dass je zwei Punkte derselben beim Übergange von einer der beiden Involutionen zur anderen ihre Rolle wechseln, sieht man so ein:

Wir legen durch fünf Punkte $x_1\, x_2 \ldots x_5$ eines Sextupels einer J_5^6 einen Kegelschnitt C_2 und durch den sechsten Punkt x_6 einen Kegelschnitt C_2'; C_2 schneidet C_3 noch in o_6 und $x_6\, o_6$ ist ein Paar entsprechender Punkte der E-Beziehung. Der Punkt o_6 als x_6' aufgefasst, bildet mit den weiteren fünf Schnitten $x_1' \ldots x_5'$ von C_3 und C_2' ein Sextupel einer $J_5'^6$, welche mit J_5^6 residual ist, da die beiden Sextupel auf der durch die Kegelschnitte $C_2\, C_2'$ dargestellten C_4 liegen. Nun vertritt aber x_6 die Stelle des Punktes o_6'; es ist also $x_6 \equiv o_6'$ und $o_6 \equiv x_6'$, w. z. b. w.

Eine J_5^6 wird sich selbst residual sein, wenn die E-Beziehung, welche ihr entspricht, eine vertauschungsfähige ist, d. h. wenn es eine der vier fundamentalen vertauschungsfähigen E-Beziehungen ist. Es werden dann je zwei Sextupel der J_5^6 ein System von zwölf Schnittpunkten der C_3 mit Curven vierter Ordnung darstellen und insbesondere wird es für jedes Sextupel Curven C_4 geben, welche die C_3 in den Punkten des Sextupels berühren.

Die erste fundamentale vertauschungsfähige E-Beziehung, nach welcher jeder Punkt von C_3 sich selbst entspricht, liefert die aus den conischen Sextupeln der C_3 bestehende fundamentale (sich selbst residuale) J_5^6.

Die drei übrigen fundamentalen E-Beziehungen, von denen jede aus den Paaren correspondirender Punkte der C_3, welche einem der drei Systeme angehören, besteht, liefern drei weitere fundamentale (sich selbst residuale) Sextupelinvolutionen fünfter Stufe. Es wird irgend ein Quintupel auf C_3 zu einem Sextupel einer solchen fundamentalen J_5^3 ergänzt, wenn man durch das Quintupel einen C_2 legt und zu dem sechsten Schnittpunkte desselben mit C_3 den correspondirenden Punkt des betreffenden Systems aufsucht, dieser ergänzt das Quintupel.

18. Zu jeder J_5^6 gehört auch eine residuale J_2^3. Legt man durch ein Sextupel $x_1 \ldots x_6$ der J_5^6 eine C_3, so wird diese unsere Fundamentalcurve in noch drei Punkten $x' x'' x'''$ schneiden. Alle diese Tripel bilden, dem Restsatze gemäss, eine J_2^3 und die C_3, welche man durch irgend ein Tripel dieser J_2^3 legt, müssen nach demselben Satze durch ein Sextupel unserer J_5^6 hindurchgehen (da diese durch das ursprüngliche Sextupel schon bestimmt ist). Die beiden Involutionen J_5^6, J_2^3 sind nun in der residualen Beziehung da jedes Sextupel der ersten mit jedem Sextupel der zweiten, die neun Schnittpunkte der Fundamentalcurve mit anderen C_3 darstellt.

„Wenn eine J_5^6 und eine J_2^3 residual sind, so gehört zu beiden dieselbe E-Beziehung, nur dass je zwei entsprechende Punkte beim Übergange von der einen zu der anderen Involution ihre Rollen wechseln."

Betrachtet man nämlich ein Sextupel $x_1\, x_2 \ldots x_6$ der J_5^6, welches ein gerades Tripel $x_1\, x_2\, x_3$ enthält, so wird o_6 der dritte Schnittpunkt von C_3 mit $\overline{x_4 x_5}$ sein. Dieser Punkt, als x' aufgefasst, stellt mit den zwei Schnittpunkten $x''\, x'''$ von C_3 mit irgend einer durch x_6 gehenden Geraden ein Tripel $x'\, x''\, x'''$ der residualen J_2^3 dar, weil die drei Geraden $\overline{x_1 x_2 x_3}$, $\overline{x_4 x_5 x'}$, $\overline{x_6 x'' x'''}$ eine Curve dritter Ordnung darstellen.

Diese residuale J_2^3 ist mit einer E-Beziehung verbunden, nach welcher dem Punkte x' der Punkt x_6 als o' entspricht; nun ist $x' \equiv o_6$, $o' \equiv x_6$ und somit obige Behauptung bewiesen.

Wir bemerken, dass durch eine auf C_3 auftretende J_5^6 die sämmtlichen, auf C_3 befindlichen J_2^3 in Paare und die J_1^2 in Tripel geordnet erscheinen. Man sieht nämlich sofort, dass alle Tripel einer J_2^3 durch alle Tripel einer zweiten J_2^3 zu Sextupeln der J_5^6 ergänzt werden, insbesondere werden die geraden Tripel ergänzt durch eine J_2^3, deren E-Beziehung identisch ist mit der E-Beziehung der J_5^6; und ebenso erkennt man, dass je drei J_1^2, deren Centren ein Tripel der zur J_5^6 residualen J_2^3 bilden, aus Paaren bestehen, welche zu je dreien genommen, Sextupel der J_5^6 darstellen.

19. Hat man auf C_3 eine J_6^7, so erscheinen die Punkte von C_3 in centralinvolutorischer Beziehung, und zwar folgendermassen: Hält man irgend fünf Punkte $x_1\, x_2 \ldots x_5$ auf C_3 fest, so werden die Paare $x_6\, x_7$, welche jenes Quintupel zu einer Gruppe der J_6^7 ergänzen, der Definition der J_6^7 gemäss, eine J_1^2 bilden; es sei x das Centrum derselben, d. h. der dritte Schnittpunkt von C_3 mit den Geraden $\overline{x_6 x_7}$. Jedes der Paare $x_6\, x_7$ wird aber auch mit jedem Quintupel der J_4^5, welche durch die Gruppe $x_1\, x_2 \ldots x_5$ bestimmt ist, eine Gruppe der J_6^7 bilden. Nun gehen aber die diesen Quintupeln umgeschriebenen C_2 durch einen festen Punkt x' von C_3 hindurch, x' ist der sechste Schnittpunkt von C_3 mit dem durch $x_1\, x_2 \ldots x_5$ gehenden C_2. Die Beziehung der Punkte x, x' ist eine eindeutige; denn sobald x gegeben ist, ist jene J_1^2 und folglich auch die J_4^5 und somit auch x' gegeben, und umgekehrt bestimmt x' zunächst die J_4^5 diese die ergänzende J_1^2, deren Centrum x ist.

Die Beziehung zwischen x, x' ist aber auch vertauschungsfähig, sodass die Geraden $\overline{xx'}$ durch einen festen Punkt o von C_3 hindurchgehen. Wählt man nämlich die sechs Punkte $x_1\, x_2 \ldots x_6$, als Schnittpunkte der C_3 mit einem Kegelschnitte und ist x_7 oder o der ein solches Sextupel und daher alle conischen Sextupel ergänzende Punkt, so wird x' mit x_6 und x mit dem dritten Schnittpunkte von C_3 und $\overline{ox_6}$ zusammenfallen, so dass also die Gerade $\overline{xx'}$ durch den festen Punkt o hindurchgeht, welcher alle conischen Sextupel zu Gruppen unserer J_6^7 ergänzt, was zu beweisen war, Hieraus folgt sofort:

„Eine J_6^7 ist durch eine Gruppe oder durch den Punkt o vollkommen bestimmt."

Um irgend ein Sextupel zu ergänzen, hat man den Schnittpunkt x' von C_3 mit dem durch fünf Punkte des Sextupels hindurchgehenden Kegelschnitte zu bestimmen, C_3 mit $\overline{ox'}$ in x zum dritten Durchschnitte zu bringen, so trifft die Gerade, welche den Punkt x mit dem sechsten Punkte des Sextupels verbindet, die Curve C_3 in dem siebenten Punkte, welcher das Sextupel zu einer Gruppe der J_6^7 ergänzt.

20. Eine auf C_3 auftretende J_7^8 liefert ebenfalls eine central-involutorische Punktebeziehung und somit einen festen Punkt o, das Centrum der Involution.

Hält man nämlich irgend vier Punkte $x_1\, x_2\, x_3\, x_4$ fest, so bilden, der Definition gemäss, die Quadrupel $x_5\, x_6\, x_7\, x_8$, welche mit jenen vier Punkten Gruppen der J_7^8 darstellen, eine J_3^4, welcher ein Gegenpunkt x', der Gegenpunkt aller der Vierecke $x_5\, x_6\, x_7\, x_8$ zukommt. Hält man nun eines dieser Quadrupel $x_5 \,.\,.\, x_8$ fest, so wird durch die ergänzenden Quadrupel $x_1\, x_2\, x_3\, x_4$ eine zweite J'^4_3 mit einem Gegenpunkte x entstehen. Durch x ist die J'^4_3, durch diese die J_3^4 und dadurch x' bestimmt; ebenso bestimmt x' eindeutig den Punkt x. Dass die Beziehung zwischen x, x' eine vertauschungsfähige ist, erkennt man sofort. Es wird somit die Gerade $\overline{xx'}$ durch einen festen Punkt o der Curve C_3 hindurchgehen. Je zwei Quadrupel, deren Gegenpunkte mit o (dem Centrum der J_7^8) in gerader Linie liegen, constituiren eine achtpunktige Gruppe der J_7^8.

„Eine J_7^8 ist durch eine Gruppe oder durch den Punkt o vollkommen bestimmt.“

Um zu sieben Punkten der C_3 jenen achten zu finden, welcher mit ihnen eine Gruppe der J_7^8 bildet, hat man also zu irgend vier von den sieben Punkten den Gegenpunkt x zu suchen, den dritten Schnittpunkt x' von C_3 mit $\overline{ox}$ zu bestimmen und die drei übrigen von jenen sieben Punkten zu einem Quadrupel zu ergänzen, welches x' zum Gegenpunkte hat; der ergänzende Punkt ist der gesuchte.

Nachdem alle Curven dritter Ordnung, welche durch acht Punkte der C_3 hindurchgehen, dieselbe noch in einem festen neunten Punkte schneiden, so bestimmen, der Definition gemäss, alle Curven dritter Ordnung, die durch sieben Punkte von C_3 hindurchgehen, eine J_1^2 auf C_3, welche residual ist, zu der J_6^7, welche durch jene sieben Punkte bestimmt erscheint. Umgekehrt werden alle C_3, welche durch die Paare einer J_1^2 hindurchgehen, auf der Fundamentalcurve die residuale J_6^7 bestimmen.

Ebenso erkennt man, dass alle Curven dritter Ordnung, welche durch einen festen Punkt von C_3 hindurchgehen, auf C_3 eine J_7^8 bestimmen, und hieraus folgt sofort:

„Alle Curven dritter Ordnung, welche man durch die einzelnen Gruppen einer J_7^8 legt, schneiden C_3 in einem und demselben Punkte" (Restsatz).

„Dieser Punkt ist das Centrum jener J_7^8."

Denn betrachtet man eine Gruppe der J_7^8, welche zwei gerade Tripel $x_1 x_2 x_3$, $x_4 x_5 x_6$ enthält, so ist x_7 der Gegenpunkt des Quadrupels $x_1 x_2 x_3 x_7$ und x_8 derjenige des Quadrupels $x_4 x_5 x_6 x_8$ und die Gerade $\overline{x_7 x_8}$ wird somit durch o gehen, welcher Punkt als der neunte Schnittpunkt von C_3 mit der Curve dritter Ordnung, welche durch die drei Geraden $\overline{x_1 x_2 x_3}$, $\overline{x_4 x_5 x_6}$, $\overline{x_7 x_8}$ dargestellt ist, auftritt, was zu beweisen war.

Die bekannte Construction des neunten Schnittpunktes o von C_3 mit Curven dritter Ordnung, welche durch acht Punkte $x_1 \ldots x_8$ von C_3 hindurchgehen, ist eine unmittelbare Folge obiger Betrachtungen. Man zerlegt die acht Punkte in zwei Quadrupel, construirt deren Gegenpunkte, verbindet diese durch eine Gerade, so geht dieselbe durch o hindurch.

21. Man erkennt unmittelbar, in welcher Art weiter gegangen werden kann. Wir begnügen uns mit der Anführung des folgenden Satzes:

„Eine Involution n-ten Grades $(n-1)$-ter Stufe J_{n-1}^n auf C_3 ist durch eine von ihren Gruppen vollkommen bestimmt."

„Je nachdem die Zahl n durch 3 theilbar ist oder nicht, erscheint mit der J_{n-1}^n eine nicht centrale E-Beziehung oder eine centrale J-Beziehung, das heisst, ein fester Punkt o von C_3 in Verbindung."

„Durch jede E-Beziehung sind zwei residuale Involutionen n-ten Grades $(n-1)$-ter Stufe gegeben; jede Gruppe der einen bildet mit jeder Gruppe der anderen den vollständigen Schnitt von C_3 mit einer Curve $\frac{2n}{3}$-ter Ordnung."

„Ist die Zahl n von der Form $3p+2$, so schneiden alle Curven $(p+1)$-ter Ordnung, welche durch die einzelnen Gruppen hindurchgehen, die Curve in einem festen Punkte o der Curve."

„Ist die Zahl n von der Form $3p+1$, so schneiden alle Curven $(p+1)$-ter Ordnung, welche durch die einzelnen Gruppen hindurchgehen, die Curve in Punktepaaren, deren Verbindungsgeraden durch einen festen Punkt o der Curve hindurchgehen."

„Der vollständige Schnitt von C_3 mit anderen algebraischen Curven setzt sich aus Gruppen residualer Involutionen zusammen" (Restsätze).

22. Es sei R_4 eine Raumcurve vierter Ordnung erster Art, d. h. Schnitt zweier (und daher unendlich vieler) Flächen zweiter Ordnung; S, S' seien zwei feste Bisecanten und x ein veränderlicher Punkt von R_4. Die Ebenen ξ, ξ', welche x mit S, S', respective verbinden, werden, wenn x die R_4 durchläuft, zwei Ebenenbüschel beschreiben, welche offenbar in zwei-zweideutiger Beziehung sind. Die durch die Axen derselben gehenden Tangentialebenen der Curven sind die Verzweigungsebenen und daher der bekannte fundamentale Satz: „Durch jede Bisecante von R_4 gehen vier Tangentialebenen der Curve (ausser den zwei, welche sie in den auf der Bisecante gelegenen Punkten berühren), deren Doppelverhältniss constant, nur von der Curve abhängig ist."

23. Es sei auf R_4 irgend eine eindeutige Punktebeziehung gegeben so dass einem Punkte x ein durch ihn vollkommen bestimmter Punkt x' entspricht; betrachtet man x als y', so wird ihm im Allgemeinen ein von x' verschiedener Punkt y zugeordnet sein; wenn y mit x' identisch ist, so entsprechen sich die beiden Punkte vertauschungsfähig, involutorisch. Wir wählen eine beliebige Bisecante S von R_4 und verbinden S mit je zwei entsprechenden Punkten x, x' durch die Ebenen ξ, ξ', welche als einander entsprechend betrachtet werden sollen; dadurch ergeben sich zwei coaxiale Ebenenbüschel in zwei-zweideutiger Beziehung. Denn jede Ebene ξ enthält zwei Punkte x und jede Ebene ξ' enthält zwei Punkte x'. Diese beiden Punkte fallen zusammen, wenn die Ebene eine Tangentialebene wird (welche R_4 in einem ausserhalb S gelegenen Punkte berührt); es ist somit jede von den vier

durch S gehenden Tangentialebenen eine Verzweigungsebene, und zwar sowohl als ξ wie auch als ξ' betrachtet. Die beiden coaxialen zweideutigen Büschel besitzen folglich vier gemeinschaftliche Verzweigungselemente und bilden daher ein symmetrisches Elementensystem zweiten Grades.[1]

„Entsprechende Punkte einer jeden auf einer Raumcurve vierter Ordnung erster Art auftretenden eindeutigen Beziehung werden aus jeder Bisecante der Curve durch ein symmetrisches Ebenenbüschel zweiten Grades projicirt; die vier Verzweigungselemente desselben sind die vier durch die Bisecante hindurchgehenden Tangentialebenen der Curve."

24. Nehmen wir an, dass in einer eindeutigen Beziehung auf R_4 zwei involutorisch entsprechende Punkte x, x' auftreten, so dass man x' als y und x als y' betrachten kann. Wir legen durch die Gerade $\overline{xx'}$ eine beliebige Ebene ω, welche R_4 noch in den zwei Punkten $(x)(x')$ schneiden möge, und verbinden diese Punkte durch die Bisecante (S), aus welcher wir nun die eindeutige Beziehung projiciren. Für das entstehende symmetrische Ebenenbüschel zweiten Grades sind nun zunächst die vier durch (S) gehenden Tangentialebenen Verzweigungselemente, zu denen offenbar die Ebene ω als fünftes, und zwar sich selbst entsprechendes Verzweigungselement hinzutritt, sodass jede durch (S) gehende Ebene als sich selbst entsprechende Verzweigungsebene auftreten wird (vgl. „Über eindeutige Beziehungen u. s. w." l. c. Art. 5), da im Allgemeinen die Ebene ω kein Doppelelement einer der drei quadratischen Involutionen sein wird, die man erhält, wenn man die vier durch (S) gehenden Tangentialebenen in zwei Paare ordnet und als eine quadratische Involution bestimmend betrachtet.

Ist also $x_1\ x'_1$ irgend ein anderes Paar entsprechender Punkte der eindeutigen Beziehung, so muss die Ebene $[(S)x_1]$ identisch sein mit der Ebene $[(S)x'_1]$ oder also die Bisecante $\overline{x_1x'_1}$ muss die Bisecante (S) schneiden. Man erhält somit die Paare einander entsprechender Punkte als die Schnittpunktpaare der Curve R_4

---

[1] Vgl. „Über einen Correspondenzsatz." Sitzung vom 8. März 1883. „Über eindeutige Beziehungen auf einer allgemeinen ebenen Curve dritter Ordnung." Sitzung vom 19. April 1883.

mit den durch (S) hindurchgehenden Ebenen, woraus folgt, dass sich je zwei Punkte $x_1\, x'_1$ vertauschungsfähig entsprechen.

„Wenn in einer eindeutigen Punktbeziehung auf R_4 ein Paar vertauschungsfähig sich entsprechender Punkte vorkommt, so herrscht in allen Paaren Vertauschungsfähigkeit und jede Bisecante (S), welche der Verbindungsgeraden S zweier entsprechenden Punkte xx' begegnet, begegnet allen solchen Verbindungsgeraden."

Wir bezeichnen eine solche Beziehung als eine axiale Paarinvolution J_1^2 auf R_4; sie wird auf R_4 durch die Ebenen eines Büschels bestimmt, dessen Axe (S) eine Bisecante der Curve ist.

Da man die Ebene ω durch eine der Geraden $\overline{xx'}$ beliebig hindurchlegen kann, so bilden die Punktepaare $x_1 x'_1$ als deren Verbindungsgerade (S) auftritt, eine zweite axiale Paarinvolution J_1^2 auf R_4.

„Eine axiale Paarinvolution auf R_4 ist durch ein Paar entsprechender Punkte vollkommen bestimmt."

Eine durch das Punktepaar hindurchgelegte Ebene enthält noch zwei Punkte der Curve R_4 deren Verbindungsgerade (S) die Axe für das, die J_1^2 aus R_4 schneidende Ebenenbüschel ist.

„Eine axiale Paarinvolution auf R_4 besitzt vier sich selbst entsprechenden Punkte (Doppelpunkte)."

Es sind dies die Berührungspunkte von R_4 mit den vier durch (S) hindurchgehenden Tangentialebenen.

25. „Die auf R_4 auftretenden axialen Paarinvolutionen ordnen sich in Paare." Ist nämlich eine J_1^2 auf R_4 etwa durch ein Punktepaar xx' gegeben und sind $(x)(x')$ die zwei Schnitte von R_4 mit irgend einer durch $\overline{xx'}$ hindurchgehenden Ebene ω, so ist die Gerade $\overline{(x)(x')}$ oder (S) Axe für ein Ebenenbüschel, welches die J_1^2 aus R_4 herausschneidet. Dreht sich ω um $\overline{xx'}$ so beschreibt das Paar (x), (x') eine zweite (J_1^2), welche durch die J_1^2 bestimmt erscheint, und umgekehrt ist offenbar in derselben Art die J_1^2 durch die (J_1^2) bestimmt. „Jedes Paar xx' von J_1^2 liegt mit jedem Paar (x) (x') von (J_2^1) in einer Ebene". Zwei solche Paarinvolutionen sollen demnach als residuale Paarinvolutionen bezeichnet werden.

„Die Bisecanten S, welche als Verbindungsgeraden der einzelnen Paare $x\,x'$ einer J_1^2 auftreten, erfüllen eine Fläche zweiter Ordnung, deren zweites Erzeugendensystem aus den Verbindungsgeraden (S) der einzelnen Paare $(x)(x')$ der residualen (J_1^2) besteht."

Denn, enthält jede der beiden Bisecanten $(S)(S_1)$ ein Punktepaar der zur J_1^2 residualen (J_1^2), so liegt jedes Punktepaar $x\,x'$ der J_1^2 mit (S) in einer Ebene ω und mit (S_1) in einer Ebene ω_1, so dass die Ebenen ω, ω_1 der beiden Büschel $(S)(S_1)$ durch die Punktepaare $x\,x'$ der J_1^2 in eindeutige, d. h. projectivische Beziehung gesetzt werden. Die Gerade $\overline{xx'}$ oder S, welche als Schnittlinie der entsprechenden Ebenen ω, ω_1 auftritt, wird somit einer Regelschaar zweiten Grades angehören. Die Geraden $(S)(S_1)$. schneiden alle die Geraden S und stellen somit die zweite Erzeugendenschaar derselben Fläche zweiten Grades dar.

In dieser Art entsprechen jeder durch R_4 hindurchgehenden Fläche zweiter Ordnung zwei residuale J_1^2 welche auf R_4 durch die beiden Erzeugendensysteme der Fläche bestimmt erscheinen und umgekehrt.

26. „Es gibt vier sich selbst residuale, also fundamentale axiale Paarinvolutionen auf R_4; die ihnen entsprechenden Flächen zweiten Grades sind die vier Kegel zweiter Ordnung, welche man durch R_4 legen kann."

Zunächst erkennt man leicht, dass eine sich selbst residuale J_1^2 einen durch R_4 hindurchgehenden Kegel zweiter Ordnung liefern muss; denn weil für eine solche J_1^2 jedes Punktepaar mit edem anderen in einer Ebene liegen muss, so wird die Gerade $\overline{xx'}$ durch den Schnittpunkt von $\overline{aa'}$ und $\overline{bb'}$ hindurchgehen, wenn aa', bb' irgend zwei Paare der J_1^2 sind. Es erfüllt somit $\overline{xx'}$ einen Kegel, welcher als die, den beiden in eine zusammenfallenden residualen Paarinvolutionen entsprechende Fläche zweiter Ordnung (mit zwei zusammenfallenden Erzeugendensystemen) auftritt. Um nun die sich selbst residualen J_1^2 und damit zugleich die durch R_4 gehenden quadratischen Kegel zu erhalten, betrachten wir irgend einen Punkt p von R_4, dessen Tangente P sein möge. Ferner betrachten wir die sämmtlichen Paare residualer Involutionen $J_1^2, (J_1^2)$ auf R_4, und soll dem Punkte p, je nachdem wir ihn als x zur J_1^2 oder als (x) zur (J_1^2) rechnen, der Punkt x' respective (x') entsprechen. Da nun $x, x', (x), (x')$ vier Punkte einer Ebene sein müssen, so werden x', (x') die zwei Schnittpunkte von R_4 mit einer durch P hindurchgehenden Ebene sein, und bilden somit Paare einer axialen Paarinvolution; diese hat vier Doppelpunkte, die Berührungspunkte der vier durch P gehenden Tangentialebenen, und es wird folglich viermal geschehen, dass x' mit (x') zusammenfällt. Es geschehe dies in den Punkten p_1, p_2, p_3, p_4 dann ist offenbar durch jedes der Punktepaare pp_1, pp_2, pp_3, pp_4, je eine sich selbst residuale also fundamentale Paarinvolution bestimmt. Diese Involutionen mögen mit $F_iJ_1^2$ $(i=1, 2, 3, 4)$ bezeichnet werden. Die Verbindungsgeraden der Punktepaare von $F_iJ_1^2$ gehen durch einen festen Punkt o_i des Raumes, und o_1, o_2, o_3, o_4 sind somit die Scheitel der vier durch R_4 hindurchgehenden quadratischen Kegel $K_i (i=1, 2, 3, 4)$.

27. Da je zwei in einer Ebene gelegene Punktepaare von R_4 zwei residualen Involutionen angehören, so stellen die beiden Punkte pp_i, welche in einer Doppeltangentialebene (die offenbar als Tangentialebene von K_i längst $\overline{pp_i}$ durch o_i geht) gelegen sind, Doppelpunkte residualer Involutionen dar. Die vier Doppelpunkte einer $F_iJ_1^2$, welche man als die Berührungspunkte der vier durch eine $\overline{pp_i}$-Gerade gehenden Tangentialebenen erhält, sind somit Berührungspunkte von vier durch o_i gehenden Tangenten und zugleich von vier durch o_i gehenden Wendeschmiegungsebenen der R_4.

„Die Berührungspunkte der sechzehn Wendeschmiegungsebenen sind die Doppelpunkte der vier fundamentalen sich selbst residualen Paarinvolutionen.“

28. Projicirt man die Punktepaare einer J_1^2 aus irgend einer Bisecante auf R_4, so erhält man Punktepaare, deren Punkte offenbar in eindeutiger Beziehung sind, für welche überdies aus der in J_1^2 herrschenden Vertauschungsfähigkeit sofort der involutorische Charakter folgt.

„Projicirt man die Paare einer J_1^2 aus irgend einer Bisecante von R_4 auf die Curve, so erhält man Punktepaare einer zweiten axialen Paarinvolution.“

Insbesondere werden die Doppelpunkte der einen Involution durch die axiale Projection in die Doppelpunkte der anderen Involution übergeführt und da eine J_1^2 durch ein Paar entsprechender Punkte, und somit auch durch einen Doppelpunkt vollkommen und unzweideutig bestimmt ist, so kann man je zwei Paarinvolutionen durch axiale Projection in einander überführen. Ist nämlich d einer der vier Doppelpunkte einer J_1^2 und d' ein Doppelpunkt irgend einer zweiten $J_1'^2$ und A irgend eine mit $\overline{dd'}$ in einer Ebene liegende Bisecante, d. h. Erzeugende des durch R_4 und $\overline{dd'}$ hindurchgehenden Hyperboloides, so wird durch axiale Projection aus A jede der beiden Involutionen in die andere übergeführt, weil die beiden Doppelpunkte d,d' durch diese Projection in einander übergehen. Die übrigbleibenden drei Doppelpunktepaare von J_1^2 und $J_1'^2$ werden also paarweise in Ebenen durch A, d. h. auf Erzeugenden jenes Hyperboloides liegen. Hieraus folgt:

„Verbindet man die vier Doppelpunkte einer Paarinvolution mit den vier Doppelpunkten einer zweiten Paarinvolution, so ergeben sich sechzehn Gerade, welche zu je vieren auf vier durch die Raumcurve gehenden Flächen zweiter Ordnung liegen. Durch axiale Projection aus den Erzeugenden dieser vier Flächen, welche dem anderen Systeme angehören, werden die beiden Involutionen in einander übergeführt".

Man kann also zwei Paarinvolutionen in vierfacher Art aus unendlich vielen Axen in einander überführen. Ist A eine Bisecante, welche mit der Verbindungsgeraden zweier Doppelpunkte einer J_1^2 in einer Ebene liegt, so wird durch axiale Projection aus A die J_1^2 in sich selbst übergeführt, weil jeder der Doppelpunkte in den anderen übergeht; die beiden übrigen Doppelpunkte der J_1^2 müssen somit ebenfalls in einander übergeführt werden, d. h.:

„Je zwei Gegenseiten eines der R_4 eingeschriebenen Viereckes, dessen Ecken die Doppelpunkte einer J_1^2 sind, liegen auf einer und derselben durch R_4 hindurchgehenden Fläche zweiter Ordnung. Den drei Gegenseitenpaaren des Viereckes entsprechen drei solche Flächen; aus den Erzeugenden dieser Flächen, welche den anderen Systemen angehören, wird die J_1^2 durch axiale Projection in sich selbst übergeführt.“

Die Verbindungsgeraden der Punktepaare der J_1^2 füllen eine Fläche zweiter Ordnung aus, deren Erzeugenden des anderen Systemes die J_1^2 durch axiale Projection ebenfalls in sich selbst übergeht, so zwar dass jedes Punktepaar in sich selbst übergeführt wird.

29. Nachdem je zwei, residualen Paarinvolutionen angehörige Punktepaare in einer Ebene gelegen sind, müssen die vier Tangenten von R_4 in den vier Doppelpunkten einer J_1^2 die vier Tangenten der Doppelpunkte der residualen J'^2_1 schneiden. In der That sind diese Tangenten Erzeugende jener Fläche zweiter Ordnung, deren zwei Erzeugendensysteme die beiden residualen Paarinvolutionen auf R_4 bestimmen. Selbstverständlich sind auch je zwei Punkte der R_4, deren Tangenten sich schneiden, oder also die Berührungspunkte einer Doppeltangentialebene der R_4, Doppelpunkte residualer Paarinvolutionen.

Projicirt man die Punktepaare einer J_1^2 aus einem der vier Kegelscheitel o_i auf die Curve, was mit der Projection aus einer Kante dieses Kegels identisch ist, so erhält man offenbar die residuale J'^2_1; denn ein Doppelpunkt d des J_1^2 geht in einen solchen d' der J'^2_1 über und ihre Tangenten schneiden sich, weil sie in der den Kegel längs der Kante $\overline{o_i d d'}$ berührenden Tangentialebene gelegen sind.

„Je zwei residuale Paarinvolutionen werden durch centrale Projection aus jedem der vier Kegelscheitel o_i oder, was dasselbe ist, aus den Kanten der vier Kegelflächen K_i in einander übergeführt.“

Die vier Flächen des vorigen Artikels gehen somit im Falle residualer Involutionen in die vier Kegel über. Bezeichnet man die vier Doppelpunkte einer J_1^2 als ein Punktquadrupel auf R_4, so erkennt man sofort, dass dasselbe durch einen seiner Punkte vollkommen bestimmt ist; die Tangenten eines Punktquadrupels gehören als Erzeugende einer und derselben Fläche zweiter Ordnung an. Ein Quadrupel besteht aus den Berührungspunkten der durch eine Bisecante gelegten Tangentialebenen; alle Bisecanten, welche einer Fläche zweiter Ordnung angehören, liefern dasselbe Quadrupel.

Zwei Quadrupel, welche residualen Involutionen angehören, sollen residuale Quadrupel genannt werden. Ihre Tangenten gehören derselben Fläche zweiter Ordnung an u. s. w.

Aus obigem Satze folgt sofort: „Die sechzehn Verbindungsgeraden der vier Punkte eines Quadrupels mit den vier Punkten des residualen Quadrupels gehen viermal zu je vieren durch die vier Kegelscheitel o_i“.

Jede der vier fundamentalen, sich selbst residualen Paarinvolutionen wird durch Projection aus dem Scheitel des Kegels, dessen Kanten ihre Punktepaare enthalten, so in sich übergeführt, dass jedes Paar in sich selbst übergeht (jeder seiner Punkte in den anderen); ausserdem wird sie durch Projection aus den übrigen drei Kegelscheiteln in sich überführt.

Sind dd' zwei Doppelpunkte einer solchen sich selbst residualen J^2_1, so gehen ihre Tangenten durch einen der Kegelscheitel o_i. Wird die J^2_1 aus der Bisecante $\overline{dd'}$ auf R_4 projicirt, so geht d in d und d' in d' über, d. h. J^2_1 wird in sich selbst übergeführt, es muss also endlich der dritte Doppelpunkt in den vierten übergehen, d. h. alle vier liegen in einer Ebene und die Gerade $\overline{dd'}$ muss eine Kante eines der drei übrigen Kegel sein, welchem auch die Verbindungsgeraden der beiden übrigen Doppelpunkte angehören muss:

„Die vier Doppelpunkte jeder der vier sich selbst residualen Involutionen, bilden ein ebenes Viereck; die Ecken des Diagonaldreieckes desselben sind Scheitel für drei durch R_4 gehende Kegel zweiter Ordnung“.

Durch den Scheitel des vierten Kegels gehen die Tangenten von R_4 in den vier Doppelpunkten der J^2_1.

30. „Wenn zwei Paarinvolutionen durch axiale Projection aus den Erzeugenden einer Fläche zweiter Ordnung in einander überführt werden, so werden die residualen Paarinvolutionen durch axiale Projection aus den Erzeugenden derselben Fläche aber des anderen Systemes in einander übergeführt.“

Es sei d ein Doppelpunkt einer J^2_1 und (d) ein Doppelpunkt der residualen (J^2_1); ist nun d' ein Doppelpunkt einer zweiten Paarinvolution J'^2_1 und zieht man $\overline{d(d)}$, welche Gerade nach Früherem durch einen der Kegelscheitel o_i hindurchgehen muss, so wird $\overline{o_i d'}$ die R_4 in einem Doppelpunkte (d') der zu J'^2_1 residualen (J'^2_1) schneiden. Nun werden J^2_1, J'^2_1 durch axiale Projection aus $\overline{(d)(d')}$ und (J^2_1), (J'^2_1) durch axiale Projection aus $\overline{dd'}$ in einander übergeführt. Die beiden Geraden $\overline{dd'}$, $\overline{(d)(d')}$ liegen in einer Ebene, sind also Erzeugende verschiedener Systeme einer durch R_4 gehenden Fläche zweiter Ordnung.

31. Wir betrachten nun eine allgemeine, eindeutige Punktbeziehung auf R_4, welcher das Merkmal der Vertauschungsfähigkeit nicht anhaften soll. Jedem Punkte x von R_4 entspricht ein Punkt x' und umgekehrt; wenn man denselben Punkt x als accentuirten Punkt u' betrachtet, so wird ihm ein von x' verschiedener Punkt u entsprechen. Denn wäre für $u' \equiv x$ auch $u \equiv x'$, so hätten wir ein Paar vertauschungsfähiger Punkte und daher, im Allgemeinen, den früheren Fall einer axialen Paarinvolution.

Wir projiciren entsprechende Punkte der eindeutigen Beziehung aus einer beliebigen Bisecante S und erhalten so (Art. 23) ein symmetrisches Ebenenbüschel zweiten Grades. Ist ξ, ξ' ein Ebenenpaar, welches S mit einem Paar entsprechender Punkte x, x' verbindet, so kann der symmetrischen Eigenschaft des Büschels wegen ξ als η' und ξ' als η betrachtet werden, und es ist dann η, η', d. i. ξ', ξ ein Ebenenpaar, welches durch zwei einander entsprechende Punkte y, y' unserer Beziehung hindurchgeht.

Es entspricht somit dem Schnittpunkte y von R_4 mit ξ' der Schnittpunkt y' von R_4 mit ξ; d. h.:

„Werden zwei einander entsprechende Punkte x, x' einer eindeutigen auf R_4 auftretenden Beziehung aus einer beliebigen Bisecante der Curve auf die Curve projicirt, so erhält man wieder zwei einander (invers) entsprechende Punkte y', y derselben Beziehung.“

Hieraus folgt sofort:

„Eine eindeutige, nicht vertauschungsfähige Punktbeziehung auf einer Raumcurve vierter Ordnung erster Art ist durch ein Paar entsprechender Punkte vollkommen bestimmt.“

Ist x, x' ein Punktepaar der Beziehung und soll zum Punkte y der entsprechende construirt werden, so legen wir durch die Gerade $\overline{x'y}$ eine beliebige Ebene, welche R_4 in zwei weiteren Punkten schneidet, deren Verbindungsgerade S sein möge. Die durch S und x gelegte Ebene wird R_4 zum viertenmale in dem gesuchten Punkte y' schneiden.

Die Beziehung zwischen irgend zwei Paaren entsprechender Punkte kann man offenbar auch folgendermassen ausdrücken:

„Wenn zwei Punktepaare xx', yy' auf R_4 einer eindeutigen Beziehung angehören, so liegen ihre wechselweisen Verbindungsgeraden $\overline{xy'}$, $\overline{x'y}$ auf einer und derselben durch R_4 hindurchgehenden Fläche zweiter Ordnung, und umgekehrt."

Es sei p irgend ein Punkt von R_4, P seine Tangente. Wir betrachten p einmal als x und das zweitemal als y', und seien x', y die nach einer nicht axialen Beziehung ihm entsprechenden Punkte. Es müssen $\overline{xy'}$, d. h. P und $\overline{x'y}$ einer durch R_4 gehenden Fläche zweiter Ordnung angehören, welche vollkommen bestimmt ist, da die in Ebenen durch P gelegenen Bisecanten eine Erzeugendenschaar derselben bilden. Sei Q die durch p gehende Erzeugende dieser Fläche, welche R_4 in p' zum zweitenmale schneiden möge, so werden die vier Punkte $x'y$, pp' einer Ebene angehören. Gehen wir von einer nichtaxialen Beziehung zu allen anderen über, so wird $\overline{pp'}$ fest bleiben und die Punktepaare $x'y$ gehören somit einer axialen Paarinvolution an, d. h.:

„Die zwei irgend einem Punkte $x \equiv y'$ in den einzelnen nichtaxialen Beziehungen entsprechenden Punkte $x'y$ bilden die Punktepaare einer axialen Paarinvolution."

Legt man obige Ebene durch $\overline{pp'}$ und P, so werden x' und y mit p zusammenfallen und die Ebene ist die Schmiegungsebene von R_4 in p. Wir können also auch sagen:

„Die Ebenen, welche einen Punkt p von R_4 mit den ihm in den einzelnen nichtaxialen Beziehungen entsprechenden Punkten verbinden, gehen alle auch durch jenen Punkt p' in welchem die Schmiegungsebene des Punktes p die Curve R_4 schneidet."

(Die bekannte Construction der Schmiegungsebene einer Raumcurve vierter Ordnung erster Species).

Wird p der Berührungspunkt einer der sechzehn stationären Schmiegungsebenen, so fällt p' mit p zusammen und $\overline{pp'}$ ist Tangente von R_4 und Kante eines der vier Kegel K_i. Die beiden Punkte x', y, welche mit $\overline{pp'}$ in einer Ebene liegen, werden also ebenfalls auf einer Kante desselben Kegels gelegen sein, d. h.:

„Die Punkte, welche in den einzelnen nichtaxialen Beziehungen dem Berührungspunkte einer stationären Schmiegungsbene entsprechen, bilden Punktepaare einer der axialen fundamentalen Beziehungen.“

32. Nachdem man die Paare einander entsprechender Punkte einer eindeutigen Beziehung aus einem Paar durch dessen Projection aus den einzelnen Bisecanten auf R_4 erhält, so hat man unmittelbar den Satz:

„Eine eindeutige (nicht axiale) Punktbeziehung besitzt keinen sich selbst entsprechenden (Doppel-) Punkt; wenn ein Punkt der R_4 sich selbst entspricht, so entspricht jeder Punkt von R sich selbst“.

Denn ein sich selbst entsprechender Punkt, aus den Bisecanten auf R_4 projicirt, liefert wieder sich selbst entsprechende Punkte, w. z. b. w.

33. „Sind a, b, c, d irgend vier Punkte der Raumcurve R_4 und $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die ihnen gegenüberliegenden Ebenen des durch sie als Ecken dargestellten Tetraëders, sind endlich a', b', c', d' die vierten Schnittpunkte von R_4 mit den Ebenen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, so sind aa', bb', cc', dd' vier Paare entsprechender Punkte einer und derselben eindeutigen Beziehung.“

In der That ergeben sich die Punktepaare bb', cc', dd', wenn man das Punktepaar $a'a$ der Reihe nach aus den Bisecanten $\overline{dc}$, $\overline{bd}$, $\overline{cb}$ auf R_4 projicirt.

34. „Sowie auf der ebenen Curve dritter Ordnung, gibt es auch auf der Raumcurve vierter Ordnung erster Species R_4 drei fundamentale nicht axiale aber vertauschungsfähige eindeutige Beziehungen, welche man erhält, wenn man einem Punkte der Curve einen der drei Punkte, welche mit ihm ein Quadrupel bilden, als entsprechend zuordnet“.

Sind nämlich xx' zwei einem Quadrupel angehörige Punkte, so wird durch sie als einander entsprechende Punkte eine eindeutige Beziehung bestimmt, und man erkennt zunächst die Vertauschungsfähigkeit dieser Punkte; denn man kann x als y' und x' als y betrachten, da die Geraden $\overline{xy'}$, $\overline{x'y}$ als Tangenten zweier Quadrupelpunkte auf einer und derselben durch R_4 gehenden Fläche zweiten Grades gelegen sind. Wird nun das Paar $x \equiv y'$, $x' \equiv y$ aus den einzelnen Bisecanten von R_4 auf die Curve projicirt, so erhält man die übrigen Punktepaare $z \equiv w'$, $z' \equiv w$ der durch das Paar xx' bestimmten eindeutigen Beziehung. Aus der Vertauschungsfähigkeit zwischen xx' folgt nun die Vertauschungsfähigkeit in allen Paaren der Beziehung. Sind x'', x''' die Punkte, welche mit x und x' demselben Quadrupel angehören, so werden durch die Paare xx'', xx''' zwei weitere solche vertauschungsfähige Beziehungen bestimmt. Werden auch hier zwei einem Quadrupel angehörige Punkte als zwei correspondirende Punkte bezeichnet, so hat man den Satz:

„Werden zwei correspondirende Punkte aus einer Bisecante auf R_4 projicirt, so erhält man wiederum zwei correspondirende Punkte. Alle diese Punktepaare bilden ein System; solcher Systeme gibt es drei, je nachdem man einem Punkte einen oder den anderen oder den dritten der drei Punkte zuordnet, welche mit ihm ein Quadrupel bilden. Die drei Systeme stellen die drei fundamentalen vertauschungsfähigen nicht axialen eindeutigen Punktbeziehungen auf R_4 dar“.

Hiermit erscheint auch der in Artikel (24) angedeutete Ausnahmefall erledigt. Werden nämlich zwei correspondirende Punkte x, x' aus einer ihre Verbindungsgerade schneidenden Secante projicirt, so ist die das Paar und die Secante enthaltende Ebene wohl eine sich selbst entsprechende Verzweigungsebene des symmetrischen Ebenenbüschels zweiten Grades, in welchem sich die durch das Punktepaar xx' bestimmte eindeutige, nicht axiale Beziehung aus der Bisecante projicirt, ohne dass das Büschel aus lauter sich selbst entsprechenden Verzweigungsebenen bestehen würde. Vielmehr ist jene Ebene eine Doppelebene einer der drei quadratischen Involutionen, die man erhält, wenn man die vier durch jene Bisecante hindurchgehenden Tangentialebenen in zwei Paare theilt und diese Paare als eine Involution zweiten Grades bestimmend betrachtet. (Vergleiche:

„Über eindeutige Beziehungen u. s. w. Sitzung vom 19. April 1883, Artikel 4 und 7.)

„Jede der drei fundamentalen nicht axialen Beziehungen, d. h. jedes der Systeme correspondirender Punkte wird aus jeder Bisecante in einer quadratischen Ebeneninvolution projicirt.“

Dies folgt unmittelbar aus der Vertauschungsfähigkeit der Beziehung; denn sind x, y die Schnittpunkte von R_4 mit einer durch die Bisecante hindurchgehenden Ebene ξ und x', y' die ihnen in einem Systeme correspondirenden Punkte, so müssen nach Früherem diese beiden Punkte in einer und derselben durch die Bisecante gehenden Ebene ξ' liegen. Die eindeutige und involutorische Beziehung zwischen den Ebenen ξ, ξ' des Büschels, dessen Axe die Bisecante ist, ist unmittelbar klar. So entstehen an jeder Bisecante drei quadratische Ebeneninvolutionen, welche bestimmt erscheinen, durch die vier durch die Bisecante hindurchgehenden Tangentialebenen, wenn man sie in zwei die Involution fixirende Paare zerlegt, was eben in drei Arten geschehen kann

35. Fassen wir die Resultate der letzten Betrachtungen zusammen, so haben wir folgende Ergebnisse:

„Es gibt auf einer Raumcurve vierter Ordnung erster Species R_4 im Allgemeinen nur zwei Arten von eindeutigen Punktbeziehungen: die axialen und die nicht axialen. Durch ein Paar entsprechender Punkte x, x' ist eine axiale und eine nichtaxiale eindeutige Punktbeziehung vollkommen bestimmt. Die Punktepaare der ersten liegen auf Strahlen, welche einer durch R_4 hindurchgehenden und auch den Strahl $\overline{xx'}$ enthaltenden Fläche zweiter Ordnung angehören, und daher sind die Erzeugenden dieser Fläche, welche dem zweiten Systeme angehören, Axen von Ebenenbüscheln, von denen jedes auf R_4 die Paare der Beziehung bestimmt; die Paare yy', zz' der nicht axialen Punktbeziehung erhält man durch Projection der Punkte x', x aus den einzelnen Bisecanten von R_4 auf die Curve. Den axialen Beziehungen haftet das Merkmal der Vertauschungsfähigkeit an. Unter den nichtaxialen eindeutigen Beziehungen gibt es nur drei, bei denen Vertauschungsfähigkeit auftritt, es sind dies die drei Systeme correspondirender Punkte auf R_4. Jede axiale Beziehung besitzt vier Doppelelemente, die Berührungspunkte der vier durch irgend eine jener Axen an R_4 gehenden Tangentialebenen. Eine nichtaxiale Beziehung besitzt keinen Doppelpunkt, oder es ist jeder Punkt von R_4 ein solcher. Diese eindeutige Beziehung, welche man erhält, wenn man jeden Punkt von R_4 sich selbst entsprechen lässt, muss auch als eine nichtaxiale vertauschungsfähige Beziehung betrachtet werden, so dass wir im Ganzen vier solche fundamentale, durch die Curve R_4 im vorhinein gegebene nicht axiale vertauschungsfähige Beziehungen zu bemerken haben.

Die axialen Beziehungen ordnen sich in Paare residualer Beziehungen. Jedes Paar der einen Beziehung liegt mit jedem Paare der anderen in einer Ebene. Zwei solche residuale Beziehungen werden auf R_4 bestimmt durch die beiden Erzeugendensysteme irgend einer durch R_4 hindurchgehenden Fläche zweiter Ordnung. Es gibt vier sich selbst residuale durch die Curve im vorhinein gegebene oder fundamentale axiale Beziehungen; sie werden auf R_4 bestimmt durch die Kanten der vier quadratischen Kegel, welche man durch die Curve legen kann. Die Doppelpunkte derselben sind die Berührungspunkte der sechzehn stationären Schmiegungsebenen".

36. Wir bezeichnen die durch irgend ein Punktepaar x, x' von R_4 bestimmte nicht axiale eindeutige Beziehung mit $E(x, x')$ oder kurz mit E und fragen nach der Regelfläche, welche die Verbindungsgeraden $\overline{xx'}$ je zweier entsprechender Punkte enthält, und so als Erzeugniss der E-Beziehung auftritt.

Das Erzeugniss einer J_1^2 ist eine durch R_4 gehende Fläche zweiter Ordnung, welche zugleich als Erzeugniss der zur J_1^2 residualen Paarinvolution auftritt.

Für das Erzeugniss der E-Beziehung ist offenbar R_4 eine Doppelcurve, da durch jeden Punkt $x \equiv y'$ von R_4 zwei Erzeugende, nämlich $\overline{xx'}$ und $\overline{y'y}$ hindurchgehen.

Um die Ordnung (und zugleich Classe) des Erzeugnisses zu bestimmen, fragen wir nach den Erzeugenden desselben, welche eine beliebige Bisecante A von R_4 schneiden ohne durch die A und R_4 gemeinsamen Punkte hindurchzugehen, von welcher Art es offenbar vier Erzeugende gibt. Die E-Beziehung projicirt sich aus A durch ein symmetrisches Ebenenbüschel zweiten Grades; dasselbe besitzt vier Doppelebenen erster Art (sich selbst entsprechende Ebenen; vergl. „Über einen Correspondenzsatz." Sitzung vom 8. März 1883), von denen also jede ein Punktepaar der E-Beziehung und somit eine Erzeugende der fraglichen Regelfläche enthält.

Es seien $\xi\eta\zeta\omega$ jene Doppelebenen und $XYZW$ die in ihnen gelegenen Erzeugenden der Fläche. Die Schnittpunkte von A mit $XYZW$ sind zugleich vier Schnittpunkte von A mit der Fläche, hierzu kommen noch die beiden auf A gelegenen doppelt zu zählenden Punkte von R_4, so dass A mit der Fläche im Ganzen acht Punkte gemeinschaftlich hat:

„Das Erzeugniss einer auf R_4 auftretenden nicht-axialen eindeutigen Punktbeziehung, d. h. der Ort der Verbindungsgeraden entsprechender Punkte ist eine Regelfläche achter Ordnung (und Classe) F_8, welche die Curve R_4 zur Doppelcurve besitzt."[1]

Die durch die Bisecante A an die, den einzelnen E-Beziehungen entsprechenden F_8-Flächen gehenden Tangentialebenenquadrupel ξ, η, ζ, ω bilden eine degenerirte biquadratische Involution, welche drei nur Doppelelemente enthaltende Quadrupel aufweist. Die letzteren sind dargestellt durch die Doppelelementenpaare der drei quadratischen Involutionen, in denen sich aus A die drei Systeme correspondirender Punkte von R_4 projiciren.

Die an den einzelnen Bisecanten von R_4 in dieser Art auftretenden biquadratischen Ebeneninvolutionen sind offenbar projectivisch, woraus die Unveränderlichkeit des Doppelverhältnisses $(\xi\eta\zeta\omega)$ für eine E-Beziehung, d. h. für eine F_8-Fläche und

---

[1] Siehe: Axel Harnack, Über die Darstellung der Raumcurven vierter Ordnung erster Species und ihres Secantensystems durch doppelt periodische Functionen". Mathem. Annalen von Clebsch u. Neumann, 12. Band.

für alle Bisecanten von R_4 folgt. (Vergl.: „Über eindeutige Beziehungen auf einer allg. eb. Curve 3. Ord.“ l. c. Art. 10. Axel Harnack, l. c. p. 78).

Da die vier in ξ, η, ζ, ω gelegenen Erzeugenden $XYZW$ der Fläche F_8 vier Bisecanten sind, welche A schneiden, so sind es vier Erzeugende der durch R_4 und A hindurchgehenden Fläche zweiter Ordnung, und daher ist das Doppelverhältniss $(\xi\eta\zeta\omega)$ gleich dem Doppelverhältnisse der vier Punkte, in denen A die Erzeugenden $XYZW$, d. h. die Fläche F_8 schneidet. Es ist somit das Doppelverhältniss der vierpunktigen Gruppen, in denen die Bisecanten von R_4 eine Fläche F_8 schneiden, für alle Bisecanten constant.“ (Axel Harnack l. c.)

37. „Projicirt man ein Paar entsprechender Punkte xx' einer E-Beziehung aus einem der vier Kegelscheitel o_i auf die Curve, so erhält man ein anderes Paar y', y entsprechender Punkte derselben Beziehung in verkehrter Ordnung.“

Denn die beiden wechselweisen Verbindungsgeraden $\overline{xy'}, \overline{xy'}$ sind Erzeugende einer durch R_4 gehenden Fläche zweiter Ordnung, nämlich des entsprechenden Kegels K_i.

Diese beiden Erzeugenden $\overline{xx'}, \overline{yy'}$ der Fläche F_8 schneiden sich in einem Punkte, welcher einer Doppelcurve der Fläche F_8 angehört und, wie aus dem vollständigen Vierecke $xx'yy'$ sofort folgt, in der Polarebene des Kegelscheitels o_i, d. h. in der durch die drei übrigen Kegelscheitel bestimmten Ebene liegen muss. Die Fläche hat somit in dieser Ebene eine Doppelcurve, welche also vom vierten Grade sein muss. Es besitzt somit F_8 in jeder Ebene des Tetraëders $o_1o_2o_3o_4$ eine Doppelcurve vierter Ordnung.“

Die vier Erzeugenden von F_8, welche irgend eine Erzeugende xx' der Fläche schneiden, erhält man nach obigem, indem man das Punktepaar x, x' aus o_1, o_2, o_3, o_4 der Reihe nach auf R_4 projicirt und die entstehenden Punktepaare $y_i'y_i'$ $(i = 1\,.\,.4)$ verbindet. Man kann ebenso wie im vorigen Artikel die E-Beziehung aus den Geraden $\overline{xx'} \equiv A$ projiciren, erhält ein symmetrisches Ebenenbüschel zweiten Grades, dessen vier Doppelebenen erster

Art $\xi\eta\zeta\omega$ jene vier Erzeugenden $XYZW$ enthalten, welche der Erzeugenden A in Punkten der Ebenen des Tetraëders $o_1 o_2 o_3 o_4$ begegnen.

Da auch hier das im letzten Artikel Gesagte gilt, so wird das Doppelverhältniss $(\xi\eta\zeta\omega)$ für alle Erzeugenden constant bleiben, oder aber auf die Punkte, in denen $XYZW$ die Gerade A schneiden, übergehend:

„Die Erzeugenden der Fläche F_8 werden von den Ebenen des Tetraëders $o_1 o_2 o_3 o_4$ in vierpunktigen Gruppen mit constantem Doppelverhältnisse geschnitten.“ (A. Harnack l. c.)

Die im vorigen Artikel betrachteten vier Erzeugenden $XYZW$ sind gemeinschaftlich der Fläche F_8 und dem durch die Curve R_4 und die Bisecante A bestimmten Hyperboloide, und wir haben den Satz:

„Eine auf R_4 befindliche E-Beziehung und eine axiale Paarinvolution haben vier Paare entsprechender Elemente gemeinsam.“

Oder, da dasselbe von der residualen Paarinvolution gilt:

„Eine Fläche F_8 schneidet jede durch R_4 gelegte Fläche zweiter Ordnung in vier Erzeugenden des einen und in vier Erzeugenden des anderen Systemes. Das Doppelverhältniss dieser Erzeugendenquadrupel ist für eine Fläche F_8 constant.“

Auf die sich selbst residualen Paarinvolutionen übergehend hat man sofort:

„Jede Fläche F_8 berührt jeden der vier Kegel zweiter Ordnung K_i, welche man durch die R_4 legen kann, längs vier Erzeugenden; die vier Punkte o_i sind folglich Doppelpunkte der ebenen Doppelcurven der Flächen F_8. Diese Doppelcurven vierter Ordnung sind, weil mit drei Doppelpunkten versehen, rationale Curven.“ (Axel Harnack, l. c.)

38. Ersetzt man die allgemeine E-Beziehung durch eine der vier fundamentalen vertauschungsfähigen Beziehungen, so erhält man specielle Fälle von F_8. Der fundamentalen E-Beziehung, nach welcher jeder Punkt von R_4 sich selbst zugeordnet ist, entspricht die abwickelbare Tangentenfläche von R_4 als Fläche F_8.

Jeder der drei fundamentalen E-Beziehungen, welche die Paare correspondirender Punkte jedes der drei Systeme darstellen, entspricht eine durch R_4 einfach hindurchgehende Fläche vierter Ordnung, welche, doppelt gezählt, die entsprechende F_8 darstellt.

Dass die R_4 für eine solche Fläche einfache Curve ist, erkennt man aus dem Umstande, dass durch jeden Punkt von x nur eine Erzeugende $\overline{xx'}$ hindurchgeht, da sich die correspondirenden Punkte x, x' vertauschungsfähig entsprechen. Wird die aus diesen Paaren correspondirender Punkte bestehende fundamentale E-Beziehung aus einer beliebigen Bisecante A projicirt, so ergibt sich, wie gezeigt wurde, eine quadratische Ebeneninvolution, welche zwei Doppelebenen besitzt, so dass jede Bisecante nur von zwei Erzeugenden der Fläche (in der R_4 nicht angehörigen Punkten) getroffen wird. Die Fläche ist somit in der That von der vierten Ordnung.

Wird die fundamentale E-Beziehung, deren Erzeugniss diese Fläche vierter Ordnung ist, aus einer Erzeugenden A der Fläche projicirt, so ergibt sich eine quadratische Ebeneninvolution, deren zwei Doppelebenen jene beiden Erzeugenden XY enthalten, welche A schneiden,

Jede von diesen Erzeugenden vertritt somit zwei von den vier Erzeugenden $XYZW$ des allgemeinen Falles, so dass die Schnittpunkte von A mit X und Y jeder doppelt gezählt in den vier Ebenen des Tetraëders $o_1 o_2 o_3 o_4$ liegen müssen, was nur dadurch möglich ist, dass der Punkt (AX) in einer Kante und der Punkt (AY) in der Gegenkante des Tetraëders gelegen ist.

Es schneidet somit jede Erzeugende der Fläche zwei Gegenkanten des Tetraëders und dieselben treten somit als Doppelgerade und als Leitlinien der Fläche auf. (Axel Harnack, l. c.)

„Verbindet man je zwei correspondirende Punkte von R_4, welche einem System angehören, so erfüllen die Verbindungsgeraden eine Regelfläche vierter Ordnung, welche zwei Gegenkanten des Tetraëders $o_1 o_2 o_3 o_4$ zu doppelten Leitgeraden besitzt; den drei Systemen correspondirenden Punkten, und den drei Gegenkantenpaaren des obigen Tetraëders entsprechen drei solche Regelflächen vierter Ordnung.“

39. „Jede nichtaxial eeindeutige Punktbeziehung auf R_4 kann auf unendlich viele Arten durch zwei axiale Paarbeziehungen ersetzt werden.“

Es sei y, y' irgend ein Punktepaar einer E-Beziehung, durch welches dieselbe dann auch bestimmt ist, u irgend ein Curvenpunkt, welcher mit y, y' verbunden, die Bisecanten S, S' liefern mag, welche wir als Axen von Ebenenbüscheln betrachten, die auf R_4 zwei axiale Involutionen JJ' bestimmen. Den zu x nach der J' entsprechenden Punkt (x) erhalten wir als vierten Schnittpunkt von R_4 mit der Ebene $S'x$ und der zu (x) nach der J entsprechende Punkt, d. h. der vierte Schnittpunkt von R_4 mit der Ebene $S(x)$ sei x'. Wir behaupten, dass xx' auch ein Punktepaar der E-Beziehung ist. In der That liegen $xy'u(x)$ in der ersten, und $x'yu(x)$ in der zweiten Ebene, und somit sind $\overline{xy'}, \overline{x'y}$ zwei Erzeugende der durch R_4 und $u(x)$ hindurchgehenden Fläche zweiten Grades und folglich sind xx', yy' zwei Punktepaare einer und derselben E-Beziehung, w. z. b. w.

Man gelangt also von x zu x', wenn man zu x in der J' den Punkt (x) und zu diesem in der J den Punkt x' bestimmt. Symbolisch:

$$JJ \equiv E$$

(Vergl. „Über eindeutige Beziehungen auf einer Curve u. s. w.“ Sitzung v. 19. April 1883. Art. 15).

„Man kann also je zwei aufeinander folgende J durch eine E und jede E durch zwei aufeinanderfolgende J ersetzen.“

Geht man vom Punkte x mittelst der E-Beziehung zum Punkte x' und von diesem mittelst der J-Beziehung zum Punkte (x) über, oder umgekehrt, so hat man zwei Punkte x, (x), welche einer Paarinvolution J' angehören. Symbolisch:

$$EJ \equiv J, \quad JE \equiv J, \qquad \text{d. h.}$$

„Zwei aufeinanderfolgende ungleichartige Operationen (EJ oder JE) kann man immer durch eine axiale Paarinvolution ersetzen.“

Man kann nun in derselben Art, wie es in der zuletzt angeführten Arbeit „Über eindeutige Punktbeziehungen auf einer allgemeinen ebenen Curve dritter Ordnung" geschehen ist, den allgemeinen Satz entwickeln, und als bewiesen betrachten:

„Beliebig viele, beliebig aufeinander folgende, eindeutige Beziehungen kann man durch eine axiale oder eine nichtaxiale Beziehung (durch eine J_1^2 oder eine E) ersetzen, je nachdem die Zahl der auftretenden sämmtlichen axialen Beziehungen eine ungerade oder eine gerade Zahl ist."

Man gelangt in derselben Art wie in obgenannter Arbeit zu den folgenden Sätzen:

„Wird der Curve R_4 ein einfaches $2n$-Eck eingeschrieben, und bewegen sich alle seine Seiten bis auf eine auf beliebigen durch R_4 hindurchgehenden Flächen zweiter Ordnung, so bewegt sich auch die letzte Seite auf einer solchen Fläche zweiter Ordnung."

„Es gibt vier einfache $(2n—1)$-Ecke, welche der Curve R_4 eingeschrieben sind und deren Seiten auf $(2n—1)$ gegebenen durch R_4 hindurchgehenden Flächen zweiter Ordnung liegen."

„Wenn durch R_4 beliebige $2n$ Flächen zweiter Ordnung hindurchgelegt werden, so gibt es im Allgemeinen kein einfaches $2n$-Eck, welches R_4 eingeschrieben wäre und dessen Seiten der Reihe nach auf jenen Flächen gelegen wären; gibt es aber ein solches $2n$-Eck, so gibt es deren unendlich viele."

„Wenn $p—1$ Seiten eines der R_4 eingeschriebenen p-Eckes auf $(p—1)$ Flächen achter Ordnung von der betrachteten Art fortrücken, so beschreibt auch die letzte Seite eine solche Fläche achter Ordnung."

„Wenn $(p—1)$ Seiten eines variablen der R_4 eingeschriebenen einfachen p-Ecks theils auf Flächen zweiter, theils auf Flächen achter Ordnung betrachteter Art fortrücken, so bewegt sich auch die letzte Seite auf einer Fläche zweiter oder achter Ordnung, je nachdem die Zahl der auf Flächen zweiter Ordnung fortrückenden Seiten eine ungerade oder eine gerade Zahl ist."

40. In derselben Art wie bei Curven dritter Ordnung kann man auch an den Raumcurven vierter Ordnung erster Species „cyclische Beziehungen mit n-punktigen Gruppen“ betrachten.

Hat man nämlich auf R_4 eine E-Beziehung und construirt, von einem Punkte x_1 ausgehend, die Punktreihe $x_1 x_2 \ldots x_n x_{n+1}$, so dass jeder Punkt dem vorhergehenden entspricht, so wird offenbar auch x_1 mit x_{n+1} in eindeutiger nichtaxialer Beziehung stehen, und wenn es einmal geschieht, dass x_{n+1} mit x_1 zusammenfällt, so muss es nach Früherem immer geschehen, von welchem Punkte x_1 auf R_4 man auch ausgehen möge.

„Jeder Punkt von R_4 kommt in einer einzigen durch ihn vollkommen bestimmten Gruppe vor.“

„Die sämmtlichen Gruppen einer cyclischen Beziehung erhält man aus einer von ihnen durch Projection aus den einzelnen Bisecanten auf die Curve.“

„Werden zwei Gruppen festgehalten, so erfüllen die Bisecanten, aus denen durch Projection die Gruppen ineinander übergeführt werden können, n Flächen zweiter Ordnung. Die beiden Gruppen können auch identisch werden.“

„Wenn die Gruppen einer cyclischen Beziehung auf R_4 eine gerade Anzahl von Punkten enthalten, so bilden sie einfache Polygone, deren Gegeneckenpaare Paare correspondirender Punkte desselben Systemes sind.“

41. Projicirt man die Curve R_4 mit allen auf ihr befindlichen eindeutigen Punktbeziehungen aus einem ihrer Punkte auf eine Ebene, so erhält man eine ebene allgemeine Curve dritter Ordnung mit allen auf ihr auftretenden eindeutigen Punktbeziehungen. Mit Rücksicht auf das über die letzteren Entwickelte kann man sofort die cyclischen Beziehungen mit dreielementigen Gruppen angeben. Durch jeden Punkt p von R_4 gehen neun Schmiegungsebenen, deren Berührungspunkte zu je dreien in einer durch p gehenden Ebene gelegen sind. Solcher Ebenen hat man zwölf, welche sich in vier Dreiflache ordnen, von denen jedes alle neun Berührungspunkte enthält. Lässt man den Punkt p auf der Curve

gleiten, so beschreiben die drei in den Ebenen eines solchen Dreiflaches gelegenen Punktetripel eine cyclische Punktbeziehung mit dreipunktigen Gruppen.

„Es gibt somit vier cyclische Beziehungen mit dreipunktigen Gruppen auf R_4."

42. Sowie auf Curven dritter Ordnung können wir auch auf der Raumcurve vierter Ordnung erster Species R_4 Punktinvolutionen n-ten Grades und $(n-1)$-ter Stufe J^n_{n-1} betrachten, indem wir unter einer J^n_{n-1} eine $(n-1)$-fach unendliche Menge von n-punktigen Gruppen verstehen, von denen jede durch $(n-1)$ ihrer Punkte vollkommen und eindeutig bestimmt ist.

Wir haben zunächst für eine Tripelinvolution zweiter Stufe J^3_2 den Satz:

„Die durch die einzelnen Tripel einer J^3_2 bestimmten Ebenen schneiden R_4 in einem festen Punkte, dem Centrum o der Involution J^3_2."

Dass die durch einen Punkt o von R_4 gehenden Ebenen R_4 in Tripeln einer J^3_2 schneiden, ist nach obiger Definition unmittelbar klar.

Hat man umgekehrt eine J^3_2 auf R_4 und ist $x_1 x_2 x_3$ irgend ein Tripel derselben, und o der vierte Schnittpunkt von R_4 mit der Ebene $(x_1 x_2 x_3)$, so projicire man die R_4 sammt der J^3_2 aus o auf irgend eine nicht durch o gehende Ebene. Man erhält eine C_3 und auf derselben eine J^3_2 mit einem geraden Tripel, welches aus den Projectionen von x_1, x_2, x_3 besteht. Die J^3_2 auf C_3 enthält also lauter gerade Tripel (Art. 2) und somit besteht die J^3_2 auf R_4 aus lauter Tripeln, deren Ebenen durch o gehen, w. z. b. w. Hieraus:

„Eine Tripelinvolution zweiter Stufe auf R_4 ist durch eines ihrer Tripel vollkommen bestimmt."

„Jede J^3_2 auf R_4 besitzt neun dreifache Punkte, die Berührungspunkte der durch das Centrum o gehenden Schmiegungsebenen."

43. Es sei auf R_4 eine Quadrupelinvolution dritter Stufe J^4_3 gegeben und $x_1 x_2 x_3 x_4$ sei irgend ein Quadrupel derselben. Hält man den Punkt x_1 fest, so bilden der Definition gemäss die Tripel $x_2 x_3 x_4$ eine J^3_2 und ihre Ebenen ξ_1 werden durch einen festen Punkt o_1 der R_4 hindurchgehen. So ist jedem Punkte x_1 ein Punkt

o_1 zugeordnet; aber auch umgekehrt, entspricht einem o_1 nur ein Punkt x_1. Dann legt man durch o_1 eine beliebige Ebene ξ_1, welche R_4 in $x_2 x_3 x_4$ schneidet, so wird dieses Tripel durch einen ganz bestimmten Punkt x_1 zu einem Quadrupel ergänzt, welcher Punkt von der besonderen Lage der durch o_1 gehenden Ebene unabhängig ist, da einerseits die mit x_1 Quadrupel der J_3^4 bildenden Tripel eine J_2^3 bilden, welche anderseits durch obiges Tripel $x_2 x_3 x_4$ vollkommen bestimmt wird.

„Durch jede J_3^4 auf R_4 ist somit auf R_4 eine eindeutige Punktbeziehung gegeben, indem jedem Punkte x von R_4 das Centrum o der J_2^3 entspricht, deren Tripel den Punkt o zu Quadrupeln der J_3^4 ergänzen.“

„Eine J_3^4 auf R_4 ist durch ein Quadrupel von Punkten vollkommen bestimmt.“

Ist $x_1 x_2 x_3 x_4$ das Quadrupel und $o_1 o_2 o_3 o_4$ die vierten Schnittpunkte von R_4 mit den Ebenen des Tetraëders $x_1 x_2 x_3 x_4$, wie sie den Ecken der Reihe nach gegenüberliegen, so sind (Art. 33) $x_1 o_1$, $x_2 o_2$, $x_3 o_3$, $x_4 o_4$ vier Punktepaare einer E-Beziehung, durch welche die J_3^4 nun gegeben ist.

Um ein Tripel $x'_1 x'_2 x'_3$ zu ergänzen, lege man durch dasselbe eine Ebene, welche R_4 in o'_4 schneiden wird, und construire den zu o'_4 nach der E entsprechenden Punkt x'_4 (also so dass z. B. $x_1 o'_4$ und $x'_4 o_1$ Erzeugende einer durch R_4 gehenden Fläche zweiter Ordnung sind.) Dann ist x'_4 der vierte Punkt des Quadrupels.

Vier in einer Ebene gelegene Punkte von R_4 bilden ein „ebenes Quadrupel“. Ein unmittelbar klarer Satz:

„Alle ebenen Quadrupel stellen eine J_3^4 dar.“

Die zugehörige E-Beziehung ordnet jeden Punkt der Curve sich selbst zu; denn hier ist $o_1 \equiv x_1$, $o_2 \equiv x_2$..

44. Hält man ein Punktepaar $x_1 x_2$ fest, so bilden, wie aus der Definition sofort folgt, die Paare $x_3 x_4$, welche ersteres zu Quadrupeln einer gegebenen J_3^4 erzeugen, eine J_1^2; und hält man eines der Paare $x_3 x_4$ fest, so werden die Paare $x_1 x_2$ eine zweite $J_1'^2$ bilden. Jedes Paar von J_1^2 bildet mit jedem Paare von $J_1'^2$ ein Quadrupel der J_3^4.

„Es werden somit durch eine J_3^4 die auf R_4 auftretenden axialen Paarinvolutionen in Paare geordnet. Demgemäss werden auch die durch R_4 gelegten Regelschaaren zweiter Ordnung in Paare geordnet. Je zwei durch die Involution der ebenen Quadrupel einander zugeordnete Regelschaaren gehören derselben Fläche zweiter Ordnung an."

45. „Alle Flächen zweiter Ordnung, welche durch sechs Punkte von R_4 hindurchgehen, schneiden R_4 in Punktepaaren einer axialen Paarinvolution."

Mit anderen Worten: „Alle Flächen zweiter Ordnung, welche durch sieben Punkte von R_4 hindurchgehen, schneiden R_4 noch in einem und demselben achten Punkte." (Restsatz.)

Es seien p_i ($i = 1 \ldots 6$) irgend sechs feste Punkte von R_4; die durch sie hindurchgehenden F_2 schneiden die Ebene $(p_1p_2p_3)$ in Kegelschnitten, welche durch p_1, p_2, p_3 hindurchgehen, und die Ebene $(p_4p_5p_6)$ in Kegelschnitten, welche durch p_4, p_5, p_6 hindurchgehen. Wir werden also alle unsere Flächen erhalten, wenn wir zwei solche Kegelschnitte, aber so wählen, dass sie die Schnittgerade der beiden Ebenen in denselben zwei Punkten schneiden. Wählen wir also in der ersten Ebene einen Punkt q_1, in der zweiten einen q_2, so werden zwei solche Kegelschnitte und zugleich ein durch sie gehendes Flächenbüschel zweiter Ordnung, welches auf R_4 offenber eine J_1^2 bestimmen wird, gegeben sein. Diese J_1^2 ist aber von q_1 und q_2 unabhängig, denn die zwei Punkte, in denen die beiden Ebenen R_4 schneiden, bilden offenbar ein Punktepaar der J_1^2, welche durch dasselbe auch bestimmt ist.

Damit ist obiger Satz und zugleich der folgende bewiesen:

„Die zehn Gegenebenenpaare eines der R_4 eingeschriebenen vollständigen Sechseckes schneiden R_4 in zehn Punktepaaren eines J_1^2. Die zehn Verbindungsgeraden dieser Paare sind folglich Erzeugende einer durch R_4 hindurchgehenden F_2."

Lässt man R_4 in eine Raumcurve dritter Ordnung und eine Bisecante derselben übergeheu, so erhält man den Satz, „dass die zehn Gegenebenenpaare eines der Curve dritter Ordnung eingeschriebenen vollständigen Sechseckes jede Bisecante in zehn Punktepaaren einer quadratischen Involution schneiden". (Vergl.: „Über die Bedeutung des räumlichen Nullsystems für cubische Involutionen beider Stufen. Art. 16. Sitzung vom 15. December 1881).

46. Aus den letzten Betrachtungen folgt der Definition gemäss, sofort:

„Alle Flächen zweiter Ordnung, welche durch fünf Punkte von R_4 hindurchgehen, schneiden die Curve in Tripeln einer J_2^3, d. h. in Tripeln, deren Ebenen durch einen festen Punkt von R_4 hindurchgehen."

„Alle Flächen zweiter Ordnung, welche durch vier, drei, respective zwei Punkte von R_4 hindurchgehen, schneiden R_4 in Quadrupeln, Quintupeln, respective Sextupeln einer J_3^4, J_4^5, respective J_5^6."

47. Wir haben gesehen, dass jede J_4^5 zu einer E-Beziehung Veranlassung gibt. Umgekehrt erkennt man:

„Durch jede E-Beziehung sind zwei Quadrupelinvolutionen auf R_4 bestimmt, je nachdem man nämlich von zwei nach der E-Beziehung zusammengehörigen Punkten den einen oder den anderen als den Punkt o betrachtet."

Sind nämlich x, o irgend zwei einander entsprechende Punkte der E-Beziehung, so bildet x mit jedem Tripel, dessen Ebene durch o geht, ein Quadrupel eines J_3^4, aber ebenso bildet o mit jedem Tripel, dessen Ebene durch x geht, ein Quadrupel einer zweiten (J_3^4).

„Diese beiden Quadrupelinvolutionen dritter Stufe sind residual, d. h. jedes Quadrupel der einen stellt mit jedem Quadrupel des anderen die acht Schnittpunkte von R_4 mit Flächen zweiter Ordnung dar."

Betrachtet man nämlich eine J_3^4 und legt durch ein Quadrupel x_i $(i = 1 . . 4)$ eine F_2, welche R_4 in o_i $(i = 1 . . . 4)$ schneidet, so wird die J_3^4 durch jene F_2 auf R_4 bestimmt, welche durch irgend eines der Quadrupel o_i gehen.

Diese Quadrupel o_i bilden nun offenbar eine zweite (J_3^4) und beide Quadrupelinvolutionen sind in der Beziehung, dass jedes Quadrupel der einen mit jedem der anderen in einer F_2 liegt. Dass beiden dieselbe E-Beziehung, mit vertauschter Bedeutung entsprechender Punkte zukommt, sieht man sofort, wenn man die durch x_1 gehende Fläche F_2 ersetzt durch die Ebene $(x_2 x_3 x_4)$ und irgend eine durch x_1 gehende Ebene.

„Den drei vertauschungsfähigen E-Beziehungen correspondirender Punkte entsprechen drei sich selbst residuale J^4_3, in deren Quadrupeln die R_4 von Flächen zweiter Ordnung (also vierfach) berührt wird."

48. Je zwei J^n_{n-1} können durch axiale Projection ineinander übergeführt werden, wobei auch die singulären Elemente ineinander übergehen.

Hieraus ergibt sich speciell, dass jede J^4_3 sechzehn vierfache Punkte besitzt, welche durch axiale Projection aus den Berührungspunkten der sechzehn stationären Schmiegungsebenen abgeleitet werden können.